2. Проневич А. Ф. *Автономный экзогенный научно-технический прогресс и нейтральность по Хиксу, Харроду и Солоу* // Вестник института экономики НАН Беларуси. 2021. В. 2. С. 105–120.

3. Проневич А. Ф. *Трудодобавляющий научно-технический прогресс и нейтральность по Харроду* // Экономика, моделирование, прогнозирование. 2021. В. 15. С. 236–246.

МЕТОД ГАУССОВА ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЛОТНОСТИ ВЕРОЯТНОСТИ ВЕКТОРА СОСТОЯНИЯ СЕТИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Т.В. Русилко, Д.А. Сальников

Сеть массового обслуживания (СеМО) – совокупность конечного числа взаимосвязанных систем или узлов массового обслуживания (СМО), в которой циркулируют заявки, переходящие в соответствии с маршрутной матрицей с выхода одной СМО на вход другой. Каждая отдельная СМО является функционально самостоятельной частью сети. Состояние сети в некоторый момент описывается совокупностью n случайных функций $\xi_k(t)$, $k=\overline{1,n}$, т. е. случайным вектором

$$\xi(t)=\big(\xi_1(t),\xi_2(t),...,\xi_n(t)\big)=\left(\frac{K_1(t)}{K},\frac{K_2(t)}{K},...,\frac{K_n(t)}{K}\right)$$

в n-мерном пространстве. Здесь $K_k(t)$ – это число заявок в k-й СМО в момент t, $t\in T$, K – общее число заявок в замкнутой сети.

Случайные процессы, описывающие состояние СеМО, являются многомерными, и их исследование является сложным. Хорошо разработана методика их исследования в стационарном режиме. Данная работа посвящена асимптотическому анализу при $K\to\infty$ экспоненциальных СеМО в переходном режиме [1]. Сеть называется *экспоненциальной*, если входные потоки пуассоновские, время обслуживания заявок в узлах распределено по экспоненциальному закону, заявки в узлах обслуживаются в порядке поступления, переходы заявок между СМО являются независимыми случайными событиями. Состояние экспоненциальной сети в асимптотическом случае большого числа заявок в ней описывается непрерывным марковским случайным процессом $\xi(t)=\big(\xi_1(t),\xi_2(t),...,\xi_n(t)\big)$ и в ряде случаев удается доказать, что плотность распределения этого вектора при $K\to\infty$ удовлетворяет прямому уравнению Фоккера–Планка–Колмогорова, принадлежащему к дифференциальным уравнениям параболического типа [2, 3]:

$$\frac{\partial p(x,t)}{\partial t}=-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_k}\big(A_k(x,t)p(x,t)\big)+\frac{\varepsilon}{2}\sum_{k,j=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_k\partial x_j}\big(B_{kj}(x,t)p(x,t)\big),\qquad(1)$$

где $x=(x_1,x_2,...,x_n)$, в общем случае $x\in\mathbb{R}^n$, $\varepsilon=K^{-1}$;

$$A(x,t)=\big(A_1(x,t),A_2(x,t),...,A_n(x,t)\big)$$

– векторная функция векторного аргумента, характеризующая скорость изменения значений исходного случайного процесса:

$$A_k(x,t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}M\big(\xi_k(t+\Delta t)-\xi_k(t)\big);$$

$B(x,t) = \big(B_{kj}(x,t)\big)_{n\times n}$ – матричная функция векторного аргумента, характеризующая скорость изменения дисперсии рассматриваемого случайного процесса:

$$B_{kj}(x,t) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}M\Big(\big(\xi_k(t+\Delta t)-\xi_k(t)\big)\big(\xi_j(t+\Delta t)-\xi_j(t)\big)\Big).$$

В каждом конкретном случае устанавливается вид коэффициентов сноса $A_k(x,t)$ и диффузии $B_{kj}(x,t)$, $k,j=\overline{1,n}$. Как правило, они линейны по x [3, 4].

Решение (1) в многомерном случае является задачей большой сложности. Цель данной работы состоит в применении приближенного приема для решения (1). На основании физических соображений можно заранее ожидать определенный вид плотности вероятности $p(x,t)$. В частности, при определенных условиях плотность вероятности $p(x,t)$, являющаяся решением (1), будет нормальной или близкой к ней. Плотность нормального распределения системы $\xi(t) = \big(\xi_1(t),\xi_2(t),...,\xi_n(t)\big)$ определяется начальными моментами первого порядка или математическими ожиданиями $\nu_k^{(1)}(t) = M\xi_k(t)$, характеризующими средние значения составляющих $\xi_k(t)$, $k=\overline{1,n}$, и взаимными корреляционными функциями $\nu_{kj}^{(1,1)}(t) = M\big(\xi_k(t)\xi_j(t)\big)$, характеризующими связь процессов $\xi_k(t)$ и $\xi_j(t)$, $k,j=\overline{1,n}$.

Доказано, что названные выше характеристики в случае, когда $A_k(x,t)$, $B_{kj}(x,t)$ линейны по x, могут быть определены из системы обыкновенных дифференциальных уравнений [4]:

$$\frac{d\nu_k^{(1)}(t)}{dt} = M\big(A_k(\xi(t),t)\big), \quad k=\overline{1,n}, \tag{2}$$

$$\begin{gathered}\frac{d\nu_{kj}^{(1,1)}(t)}{dt} = M\big(\xi_k(t)A_j(\xi(t),t)\big)+\\ +M\big(\xi_j(t)A_k(\xi(t),t)\big)+\varepsilon M\big(B_{kj}(\xi(t),t)\big), \quad k=\overline{1,n},\ j=\overline{1,n}.\end{gathered} \tag{3}$$

Очевидно, что моменты второго порядка симметричны $\nu_{kj}^{(1,1)}(t) = \nu_{jk}^{(1,1)}(t)$, k,$j=\overline{1,n}$. Кроме того, если СеМО замкнута, то в ней циркулирует постоянное число заявок и, следовательно, $\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k(t) = 1$ в каждый фиксированный момент времени. Поэтому для определения единственного решения (2), (3) при определенном начальном условии следует решать систему для $k=\overline{1,n-1}$, $j=\overline{k,n-1}$, дополнив ее нормировочным условием $\sum_{k=1}^{n}\nu_k^{(1)}(t) = 1$.

Определив начальные моменты из системы (2), (3) и подставив их в известную функцию плотности нормального распределения, получим решение уравнения (1) в гауссовом приближении. На основе плотности $p(x,t)$ могут быть найдены вероятностно-временные характеристики функционирования сети массового обслуживания.

Литература

1. Маталыцкий М. А., Романюк Т. В. *Приближенные методы анализа сетей с центральной системой обслуживания и их применения.* Гродно: ГрГУ, 2003.

2. Медведев Г. А. *Замкнутые системы массового обслуживания и их оптимизация* // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1978. № 6. С. 199-203.

3. Русилко Т. В. *Асимптотический анализ открытой сети массового обслуживания с ограниченным числом однотипных заявок двух классов* // Веснік ГрДУ імя Янкі Купалы. Сер. 2, Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. 2016. № 2. С. 152-161.

4. Русилко Т. В. *Метод определения моментов первых двух порядков для вектора состояния сети массового обслуживания в асимптотическом случае* // Веснік ГрДУ імя Янкі Купалы. Сер. 2, Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. 2021. Т. 11. № 2. С. 152-161.