номером i, равной 1; I_{ic} – вектор нулевых компонент, размерности $n \times r$, за исключением компоненты $r(i-1)+c$, равной 1; $\phi_{ic}(k,t)$ – условная вероятность того, что заявка типа c, которая поступает в i-ую СМО в момент времени t, при условии, что сеть находится в состоянии (d,k,t), не будет обслужена ни одной из СМО; $\psi_{icjs}(k,t)$ – условная вероятность того, что заявка типа c, которая поступает из внешней среды в i-ую СМО в момент времени t, когда сеть находится в состоянии (d,k,t), впервые получит обслуживание в j-ой СМО, получив при этом тип s; $\alpha_{ic}(k,t)$ – условная вероятность того, что заявка типа c, обслуженная в i-ой СМО в момент времени t, когда сеть находится в состоянии (d,k,t), не будет больше обслужена ни в одной из СМО; $\eta_{icjs}(k,t)$ – условная вероятность того, что заявка типа c, обслуженная в i-ой СМО в момент времени t, когда сеть находится в состоянии (d,k,t), впервые после этого получит обслуживание в j-ой СМО, как заявка типа s; $\nu_{ic}(k,t)$ – условная вероятность того, что заявка типа c, находящаяся в очереди i-ой СМО в момент времени t, когда сеть находится в состоянии (d,k,t), не покинет очередь этой СМО, $i,j=\overline{1,n}$, $c=\overline{1,r}$.

Для решения данной системы предлагается использовать метод многомерных производящих функций.

Литература

1. Маталыцкий М. А., Науменко В. В. *Стохастические сети с нестандартными перемещениями заявок: моногр.* Гродно: ГрГУ, 2016.
2. Статкевич С. Э. *Исследование в переходном режиме сети с ненадежными системами обслуживания и ограниченным временем ожидания разнотипных заявок* // Веснік Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Янкі Купалы. Серыя 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. 2021. Т. 11. № 3. С. 124–137.

О СТОХАСТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ ГЕЛЬМГОЛЬЦА ДЛЯ СИСТЕМ С НЕГОЛОНОМНЫМИ СВЯЗЯМИ

М.И. Тлеубергенов, Г.К. Василина, Д.С. Кулахметова

В работе по заданной стохастической системе строится эквивалентное почти наверное уравнение лагранжевой структуры в предположении, что на исходную систему наложены неголономные связи.

Известно, что в классической механике разработаны различные математические методы исследования консервативных систем. Гельмгольцем поставлена задача расширения области применения аналитических методов механики на случай непотенциальных сил. Им в классе обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) получены [1] необходимые и достаточные условия построения обобщенного кинетического потенциала.

Вместе с тем в механике важным в приложении классом являются неголономные системы. Необходимые и достаточные условия справедливости принципа Гамильтона при наличии неголономных связей в потенциальном поле сил получены В.В. Румянцевым [2]. Исследованию задачи Гельмгольца с учетом неголономных связей в классе ОДУ посвящены также работы В.Р. Новоселова [3], А.С. Сумбатова [4] и др. авторов. Отметим работы [5-7], в которых помимо собственных исследований авторов, в основном, в классе ОДУ и ДУЧП, приводится исторический обзор научных работ по развитию и обобщению задачи Гельмгольца.

В данной работе задача Гельмгольца рассматривается при дополнительном предположении, что на неголономную механическую систему помимо непотенциальных сил действуют также случайные возмущающие силы типа белого шума.

Пусть положение натуральной неголономной стохастической системы определяется вектором обобщенных координат $q = [q_1, \ldots, q_n]^T$ и на скорости системы наложено k условий вида

$$\dot{q}_{m+\nu} - \alpha_{\nu i}\dot{q}_i = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, m;\ \nu = 1, 2, \ldots, k), \tag{1}$$

где $\alpha_{\nu i} = \alpha_{\nu i}(q)$.

Предположим, что обобщенные возмущающие силы допускают представление

$$Q_s = Q_s^1 + Q_{sj}^2\,\dot{\xi}_{1/2}^j, \quad (s = 1, 2, \ldots, n), \tag{2}$$

где $\dot{\xi} = [\dot{\xi}_{1/2}^1, \dot{\xi}_{1/2}^2, \ldots, \dot{\xi}_{1/2}^r]^T$ – вектор белых шумов в смысле Стратоновича [8].

Здесь и далее по повторяющимся индексам предполагается суммирование. Индексы $i,\, l,\, \alpha,\, \beta$ изменяются от 1 до m, индекс j – от 1 до r, а индексы $\mu,\, \nu$ – от 1 до k.

Тогда, следуя [9, 10] с учетом вида обобщенных сил (2) и того, что белый шум задан в форме Стратоновича, получим стохастическое уравнение в форме Воронца вида

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L^*}{\partial q_i} = \Psi_{1i} + \Psi_{2i} + \sigma_{ij}'(q, \dot{q}, t)\,\dot{\xi}_{1/2}^j, \tag{3}$$

где

$$\Psi_{1i} = \left(\frac{\partial L}{\partial q_{m+\nu}}\right)^{*}\alpha_{\nu i} + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{m+\nu}}\right)^{*}\beta_{il}^{\nu}\dot{q}_l, \quad \Psi_{2i} = Q_i^1 + Q_{m+\nu}^1\alpha_{\nu i}, \quad \sigma_{ij}' = Q_{ij}^2 + \alpha_{\nu i}Q_{m+\nu,j}^2,$$

$$\beta_{il}^{\nu} = \frac{\partial \alpha_{\nu i}}{\partial q_l} + \frac{\partial \alpha_{\nu i}}{\partial q_{m+\mu}}\alpha_{\mu l} - \frac{\partial \alpha_{\nu l}}{\partial q_i} - \frac{\partial \alpha_{\nu l}}{\partial q_{m+\mu}}\alpha_{\mu i}$$

и звездочкой обозначен результат подстановки в соответствующие функции выражений (1) вместо $\dot{q}_{m+1},\, \ldots,\, \dot{q}_n$.

По заданному уравнению (3) требуется построить стохастическое уравнение лагранжевой структуры вида

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q_i} = \sigma_{ij}'(q, \dot{q}, t)\dot{\xi}_{1/2}^j. \tag{4}$$

Для решения задачи предположим, что функции $G_i = \Psi_{1i} + \Psi_{2i}$ удовлетворяют условию Гельмгольца [5]:

1) функции G_i линейны по скоростям, т.е. представимы в виде

$$G_i = \rho_{il}(q, t)\dot{q}_l + \mu_i(q, t), \tag{5}$$

при этом $\rho_{il}, \mu_i \in C^1(\mathbb{R}^{n+1}), (q, t) \in \mathbb{R}^{n+1}$ и

2) выполнены соотношения

$$\rho_{il} + \rho_{li} = 0, \tag{6a}$$

$$\frac{\partial \rho_{il}}{\partial q_\alpha} + \frac{\partial \rho_{l\alpha}}{\partial q_i} + \frac{\partial \rho_{\alpha i}}{\partial q_l} = 0, \tag{6b}$$

$$\frac{\partial \rho_{il}}{\partial t} = \frac{\partial \mu_i}{\partial q_l} - \frac{\partial \mu_l}{\partial q_i} \quad (i, l = 1,\, 2,\, \ldots,\, m), \tag{6c}$$

что обеспечивает существование функции $\Pi = \Pi(q, \dot{q}, t)$ такой, что стохастическое уравнение (3) с помощью обобщенного кинетического потенциала $\hat{L} = L^* + \Pi$ будет эквивалентно уравнению (4).

Следовательно, имеет место следующая

Теорема. *Для приведения стохастического уравнения Воронца (3) к стохастическому уравнению лагранжевой структуры вида (4) необходимо и достаточно, чтобы функции $G_i (i = 1, 2, \dots, m)$ удовлетворяли условиям (5), (6a), (6b), (6c).*

Работа выполнена при финансовой поддержке КН МОН РК (Грант № AP09258966).

Литература

1. Гельмгольц Г. *О физическом значении принципа наименьшего действия* // Вариационные принципы механики. М., 1959. С. 430–459.

2. Румянцев В. В. *Об интегральных принципах для неголономных систем* // ПММ. 1982. Т. 42. № 1. С. 3–12.

3. Новоселов В. С. *Вариационные методы в механике.* Л., 1966.

4. Сумбатов А. С. *Неэкстремальность семейств кривых, определяемых динамическими уравнениями неголономных систем Чаплыгина* // Дифференциальные уравнения. 1984. Т. 11. № 5. С. 897–899.

5. Santilli R. M. *Foundations of Theoretical Mechanics. 1. The Inverse Problem in Newtonian Mechanics.* Springer-Verlag, New-York. 1978.

6. Santilli R. M. *Foundation of Theoretical Mechanics. 2. Birkhoffian Generalization of Hamiltonian Mechanics.* Springer-Verlag, New-York. 1983.

7. Филиппов В. М., Савчин В. М., Шорохов С. Г. *Вариационные принципы для непотенциальных операторов* // Итоги науки и техники. Серия Современные проблемы математики. Новейшие достижения /ВИНИТИ. 1992. Т. 40. С. 3–178.

8. Стратонович Р. Л. *Новая форма записи стохастических интегралов и уравнений* // Вестник МГУ. Серия математика, механика. 1964. № 1. С. 3–11.

9. Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А. *Динамика неголономных систем.* М., 1967.

10. Мощук Н. К., Синицын И. Н. *О стохастических неголономных системах* // ПММ. 1990. Т. 54. № 2. С. 213–223.

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ПОЛИНОМЫ КОМПЛЕКСНОГО АРГУМЕНТА ВЫСОКИХ СТЕПЕНЕЙ

Ю.В. Трубников, М.М. Чернявский

Чебышевские итерационные процессы связаны с расположением спектра линейного оператора в сложных областях комплексной плоскости, например, в прямоугольнике. Такие итерационные процессы применяются при численном решении ряда прикладных задач. Важную роль при их построении играют экстремальные полиномы комплексного аргумента, наименее уклоняющиеся от нуля на квадрате комплексной плоскости, т. е. являющиеся аналогами полиномов Чебышева первого рода. В отличие от действительного случая, где давно известна общая формула

$$T_n(x) = 2^{1-n} \cos(n \arccos x),$$

получение экстремальных полиномов комплексного аргумента представляет собой трудную и до конца не решенную задачу.

Пусть D – квадрат с вершинами в точках $1 + i$, $-1 + i$, $-1 - i$, $1 - i$. Так, в начале XXI века Ю.В. Трубниковым были получены в аналитическом виде выражения