исследований задач для уравнений, не разрешенных относительно старшей производной. Уравнения вида (1) возникают при моделировании различных процессов [1]. В конце прошлого века с ростом количества статей по этим уравнениям "стала очевидной" некоторая классификации уравнений вида (1). Проанализировав большое число работ, авторы [1] выделили три класса уравнений: уравнения соболевского типа, псевдопараболические уравнения и псевдогиперболические уравнения.

При изучении задачи Коши для псевдогиперболических уравнений (1) с постоянными коэффициентами в работах [1, 3] впервые были получены энергетические оценки и доказаны теоремы о разрешимости в весовых соболевских пространствах. Отметим, что уравнения вида (1), рассмотренные в [1, 3], не содержали младших членов (в обобщенном смысле). Аналогичные результаты для класса уравнений, содержащих младшие члены, получены в работе [4]. Некоторый класс псевдогиперболических уравнений, удовлетворяющих условию изотропности, был рассмотрен в [5].

В настоящей работе мы вводим класс псевдогиперболических систем

$$L(D_x)D_tU + M(D_x)U = F(t,x),$$

где $L(D_x)$ — квазиэллиптический оператор, и рассматриваем задачу Коши для таких систем. В случае, когда символы операторов $L(D_x)$, $M(D_x)$ квазиоднородны, получены энергетические оценки, установлены условия однозначной разрешимости в весовых соболевских пространствах. Аналогичные результаты получены в случае, когда символы $L(i\xi)$, $M(i\xi)$ не являются квазиоднородными при условии, что $\det L(i\xi) \neq 0$, $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Работа выполнена в рамках государственного задания Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН (проект № FWNF-2022-0008).

Литература

1. Демиденко Г. В., Успенский С. В. *Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной.* Новосибирск: Научная книга, 1998.

2. Соболев С. Л. *Избранные труды.* Т. 1, 2. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, Филиал "Гео" Изд-ва СО РАН, 2003, 2006.

3. Demidenko G. V. *On solvability of the Cauchy problem for pseudohyperbolic equations* // Siberian Advances in Mathematics. 2001. V. 11. № 4. P. 25–-40.

4. Демиденко Г. В. *Условия разрешимости задачи Коши для псевдогиперболических уравнений* // Сибирский математический журнал. 2015. Т. 56. № 6. С. 1289–1303.

5. Fedotov I., Volevich L. R. *The Cauchy problem for hyperbolic equations not resolved with respect to the highest time derivative* // Russian Journal of Mathematical Physics. 2006. V. 13. № 3. P. 278–292.

О НЕЛИНЕЙНОМ МЕТОДЕ УГЛОВЫХ ПОГРАНИЧНЫХ ФУНКЦИЙ

И.В. Денисов, А.И. Денисов

Сингулярно возмущенные системы параболических уравнений вида

$$\varepsilon\left(\frac{\partial u}{\partial t} - a\Delta u\right) = f(u,v,x,t,\varepsilon), \qquad \frac{\partial v}{\partial t} - b\Delta v = g(u,v,x,t,\varepsilon),$$

где Δ – оператор Лапласа, $x = (x_1, x_2, x_3)$, возникают при математическом описании химических реакций с учетом диффузии. Компоненты вектор-функций u и v являются концентрациями реагирующих веществ, а малый параметр ε – величиной, обратной константам скоростей быстрых реакций. Такого же типа системы появляются и в других прикладных задачах. Чтобы упростить изложение алгоритма, обычно ограничиваются случаем, когда медленные переменные отсутствуют (нет второго уравнения), а x – одномерная переменная. Кроме того, для удобства записи малый параметр при производных обозначают через ε^2.

На протяжении последних сорока лет наиболее интенсивно системы подобного вида изучались в областях с угловыми точками границы. Достаточно эффективным оказался метод угловых пограничных функций, впервые примененный В. Ф. Бутузовым для разностного уравнения в 1972 году. В 1978 году этот метод был распространен на параболическое уравнение (см. [1]). В прямоугольнике

$$\Omega := \{(x,t)\,|\,0 < x < 1,\ 0 < t < T\}$$

была рассмотрена задача

$$\varepsilon^2\left(a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t}\right) = F(u,x,t,\varepsilon), \quad (x,t)\in\Omega,$$

с начальным условием

$$u(x,0,\varepsilon) = \phi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

и краевыми условиями первого рода

$$u(0,t,\varepsilon) = \psi_1(t), \quad u(1,t,\varepsilon) = \psi_2(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

где функция F предполагалась линейной по переменной u. Обыкновенных погранфункций, которые определялись из обыкновенных дифференциальных уравнений, оказалось недостаточно для построения асимптотики решения. Потребовались еще и угловые погранфункции, которые определялись из линейных параболических уравнений с постоянными коэффициентами. Впоследствии В. Ф. Бутузовым и его учениками были рассмотрены разнообразные прикладные задачи, исследование которых проводилось с помощью метода угловых погранфункций. В работах рассматривались либо линейные задачи, либо нелинейные задачи с краевыми условиями второго рода.

Задача с нелинейной по переменной u функцией F и краевыми условиями первого рода впервые была рассмотрена в 1991 году для эллиптического уравнения. В [2] было начато формирование нелинейного метода угловых пограничных функций. Первоначально с помощью этого метода была рассмотрена задача с квадратичной по переменной u функцией F. Для угловых погранфункций получались нелинейные уравнения того же типа, что и исходное уравнение. Для доказательства существования подходящих решений таких уранений был использован метод верхних и нижних решений. Были построены барьерные функции специального вида, которые были в дальнейшем модифицированы для более общих задач. Потребовалось конструировать барьерные функции, состоящие из нескольких кусков, с последующим сглаживанием этих кусков. Исследования в этом направлении (см. [3–7] позволили значительно расширить класс нелинейностей.

Литература

1. Бутузов В. Ф., Нестеров А. В. *Об одном сингулярно возмущенном уравнении параболического типа* // Вестник Московского университета. Серия 15: Вычислительная математика и кибернетика. 1978. № 2. С. 49–56.

2. Денисов И. В. *Об асимптотическом разложении решения сингулярно возмущенного эллиптического уравнения в прямоугольнике* // Асимптотические методы теории сингулярно возмущенных уравнений и некорректно поставленных задач: Сб. научн. тр. Бишкек: Илим, 1991. С. 37.

3. Денисов И. В. *Угловой пограничный слой в краевых задачах для сингулярно возмущенных параболических уравнений с монотонной нелинейностью* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2018. Т. 58. № 4. С. 1–11.

4. Денисов А. И., Денисов И. В. *Угловой пограничный слой в краевых задачах для сингулярно возмущенных параболических уравнений с нелинейностями* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т. 59. № 1. С. 102–117.

5. Денисов А. И., Денисов И. В. *Угловой пограничный слой в краевых задачах для сингулярно возмущенных параболических уравнений с немонотонными нелинейностями* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т. 59. № 9. С. 1581–1590.

6. Денисов И. В. *Угловой пограничный слой в краевых задачах для сингулярно возмущенных параболических уравнений с кубическими нелинейностями* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2021. Т. 61. № 2. С. 256–267.

7. Денисов И. В. *Угловой пограничный слой в краевых задачах с нелинейностями, имеющими стационарные точки* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2021. Т. 61. № 11. С. 1894–1903.

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ СТРУНЫ ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ НЕПРЕРЫВНОЙ СИЛЫ И СИЛ ИМПУЛЬСНОЙ ПРИРОДЫ

К.К. Елгондиев, Ю.Р. Кутлымуратова

Рассмотрена задача о вынужденных колебаниях струны с закрепленными концами под воздействием внешней непрерывной силы и сил импульсной природы, действующих на процесс колебания струны в фиксированные моменты времени. Математически эта задача является задачей решения линейного неоднородного уравнения колебания струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \quad t \neq t_k, \tag{1}$$

при граничных условиях

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \tag{2}$$

с начальными условиями

$$u(x,0) = \varphi_0(x), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \varphi_1(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{3}$$

и условиями импульсных воздействий вида

$$\Delta \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=t_k} = \frac{\partial u(x, t_k+0)}{\partial t} - \frac{\partial u(x, t_k-0)}{\partial t} = I_k(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{4}$$

где $t_k > 0$, $k \in \mathbb{N}$, – моменты импульсных воздействий, а $I_k(x)$, $k \in \mathbb{N}$, – соответствующие t_k, $k \in \mathbb{N}$, величины импульсных воздействий.

Относительно моментов импульсных воздействий предположим, что $t_k > t_m$ при $k > m$ и $t_k \to +\infty$ при $k \to +\infty$.

Определение. *Решением задачи (1)–(4)* называется функция

$$u(x,t) \in C\big([0,l] \times [0,+\infty)\big) \cap C^2\big([0,l] \bigcup_{k=0}^{\infty} (t_k, t_{k+1})\big),$$

имеющая непрерывную справа производную по t при $t = t_k$, $k \in \mathbb{N}$, удовлетворяющая уравнению (1) при $t \neq t_k$, $k \in \mathbb{N}$, граничным условиям (2), начальным условиям (3) и при $t = t_k$ условиям импульсных воздействий (4).

Решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям (2)–(4), ищем в виде:

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \cdot \sin \frac{n\pi}{l} x \tag{5}$$