ЭКРАНИРОВАНИЕ НИЗКОЧАСТОТНОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ ТОНКОСТЕННЫМ ЭЛЛИПСОИДАЛЬНЫМ ЭКРАНОМ

Г.Ч. Шушкевич

В условиях массового использования электротехнических, электронных и радиоэлектронных приборов и оборудования во всех сферах человеческой деятельности актуальной проблемой является электромагнитная безопасность окружающей среды и жизнедеятельности человека [1]. Для обеспечения благоприятной электромагнитной обстановки производится электромагнитное экранирование [2, 3]. Под экранированием понимается защита от воздействия внешних полей, локализация излучения каких-либо объектов с целью уменьшения его проявления в окружающей среде.

Пусть в пространстве $\mathbb{R}^3$ находится тонкостенный эллипсоидальный экран Γ толщиной Δ. Область пространства внутри экрана Γ обозначим через D_1, внешнюю область по отношению к экрану Γ – D_2, область экрана Γ – D.

Тонкостенный экран Γ выполнен из материала с электромагнитными параметрами ε, μ, γ: ε – диэлектрическая проницаемость, μ – абсолютная магнитная проницаемость, γ – удельная электрическая проводимость. Область D_m, $m = 1, 2$, заполнена средой с магнитной проницаемостью μ_m.

В точке O_1, которая находится в области D_2, расположен источник поля – тонкая нить с бесконечно малым поперечным сечением, по которой циркулирует ток I.

В точках O, O_1 введем соответственно декартовы координаты $Oxyz$, $O_1x_1y_1z_1$ с одинаково направленными осями координат. Точка O_1 – центр эллипсоидального экрана Γ.

Декартовы координаты $Oxyz$, введенные в точке O, связаны с вытянутыми вырожденными эллипсоидальными координатами $O\alpha\beta\varphi$ соотношением

$$x = c\,\mathrm{sh}\,\alpha\sin\beta\cos\varphi, \quad y = c\,\mathrm{sh}\,\alpha\sin\beta\sin\varphi, \quad z = c\,\mathrm{ch}\,\alpha\cos\beta,$$

где $0 \leqslant \alpha < \infty$, $0 \leqslant \beta \leqslant \pi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, c – масштабный множитель, $c > 0$, а декартовы координаты $O_1x_1y_1z_1$, введенные в точке O_1, связаны со сферическими координатами $O_1r_1\theta_1\varphi_1$ соотношением

$$x_1 = r_1\cos\varphi_1\sin\theta_1, \quad y_1 = r_1\sin\varphi_1\sin\theta_1, \quad z_1 = r_1\cos\theta_1,$$

где $0 \leqslant r_1 < \infty$, $0 \leqslant \theta_1 \leqslant \pi$, $0 \leqslant \varphi_1 \leqslant 2\pi$.

В результате взаимодействия первичного магнитного поля с экраном Γ образуются вторичные магнитные поля. Обозначим потенциал вторичного магнитного поля в области D_2 через U_2, в области D_1 – через U_1, потенциал исходного магнитного поля – через U_0.

В случае тонкостенных экранов магнитное поле внутри экрана не исследуется, а сшивается с помощью специальных граничных условий на срединной поверхности экрана Γ_c [4].

Срединная поверхность экрана Γ_c описывается в вытянутой вырожденной эллипсоидальной системе координат $O\alpha\beta\varphi$ следующим образом:

$$\Gamma_c = \{\,\alpha = \alpha_0 = \mathrm{Arch}(b/c),\ 0 \leqslant \beta \leqslant \pi,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi\,\},$$

где b, a – большая и малая полуоси эллипса соответственно, $c = \sqrt{b^2 - a^2}$.

Постановка задачи. Требуется найти скалярные магнитные потенциалы U_m в области D_m, $m = 1, 2$, которые удовлетворяют:

– уравнению Лапласа в системе координат $O\alpha\beta\varphi$

$$\Delta U_m = \frac{1}{c^2(\operatorname{sh}^2\alpha + \sin^2\beta)} \left\{ \frac{1}{\operatorname{sh}\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\operatorname{sh}\alpha\frac{\partial U_m}{\partial\alpha}\right) + \frac{1}{\sin\beta}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\sin\beta\frac{\partial U_m}{\partial\beta}\right) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{\operatorname{sh}^2\alpha} + \frac{1}{\sin^2\beta}\right)\frac{\partial^2 U_m}{\partial^2\varphi}\right\} = 0; \tag{1}$$

– граничным условиям на срединной поверхности Γ_c для тонкостенных слабо проводящих экранов [4]

$$\mu_2\frac{\partial\,(U_0+U_2)}{\partial\vec{n}} - \mu_1\frac{\partial U_1}{\partial\vec{n}}\bigg|_{\Gamma_c} = -pF\,(U_0+U_2+U_1)|_{\Gamma_c}\,, \tag{2}$$

где $\vec{n}$ – нормаль к поверхности Γ_c, $p = \mu\,\Delta/2$,

$$(U_0+U_2)|_{\Gamma_c} = U_1|_{\Gamma_c}\,; \tag{3}$$

– условию на бесконечности

$$U_2(M) \to 0, \quad M \to \infty, \tag{4}$$

где M – произвольная точка пространства.

Потенциал исходного магнитного поля представим в виде [3]

$$U_0(\,r_1,\,\theta_1,\phi_1) = P\left(\frac{r_0}{r_1}\right)^2 P_1(\cos\theta_1), \quad P = \frac{M_z}{4\pi r_0^2},$$

где M_z – магнитный момент, $P_n(x)$ – полиномы Лежандра [5].

Согласно методу разделения переменных решение поставленной граничной задачи будем искать в виде суперпозиции эллипсоидальных гармонических функций так, чтобы выполнялось условие на бесконечности

$$U_1(\alpha,\beta,\varphi) = P\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{k=-s}^{s} Y_{sk}P_s^k(\operatorname{ch}\alpha)P_s^k(\cos\beta)\,e^{ik\varphi}, \tag{5}$$

$$U_2(\alpha,\beta,\varphi) = P\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{k=-s}^{s} X_{sk}Q_s^k(\operatorname{ch}\alpha)P_s^k(\cos\beta)\,e^{ik\varphi}, \tag{6}$$

где $P_s^k(\operatorname{ch}\alpha)$ и $Q_s^k(\operatorname{ch}\alpha)$ – присоединенные функции Лежандра первого и второго рода соответственно [3], $s = 0,\,1,\,2,\,\ldots,$ $k = 0,\,\pm\,1,\,\pm\,2,\,\ldots,\,\pm\,s$.

Используя соответствующие теоремы сложения, показано, что решение поставленной задачи (1)–(4) сведено к решению системы линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов, входящих в представления (5),(6).

Вычислен коэффициент экранирования исходного низкочастотного магнитного поля тонкостенным эллипсоидальным экраном.

Работа выполнена при финансовой поддержке государственной программы научных исследований "Ковергенция - 2025"(подпрограмма "Математические модели и методы").

Литература

1. Задоя Н. И. *Электромагнитная безопасность.* Рубцовск: Рубцовский индустриальный институт, 2014.

2. Шапиро Д. Н. *Электромагнитное экранирование.* Долгопрудный: ИД Интеллект, 2010.

3. Шушкевич Г. Ч. *Аналитическое решение задачи экранирования низкочастотного магнитного поля тонкостенным цилиндрическим экраном в присутствии цилиндра* // Информатика. 2021. Т. 18. № 3. С. 45–55.

4. Аполлонский С. М., Ерофеенко В. Т. *Эквивалентные граничные условия в электродинамике.* СПб.: Безопасность, 1999.

5. *Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и таблицами* / под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. М.: Наука, 1979.

GEOMETRIC APPROACH TO THE STUDY NAVIER-STOKES EQUATIONS

V.S. Dryuma

Theorem 1. *The* $14D$ *Riemann metric in local coordinates*

$$\vec{x} = (x,\, y,\, z,\, t,\, \eta,\, \rho,\, m,\, u,\, v,\, w,\, p,\, \xi,\, \chi,\, n):$$

$$\begin{gathered} ds^2 = 2\,dxdu + 2\,dydv + 2\,dzdw + \big(-W(\vec{x},t)w - V(\vec{x},t)v - U(\vec{x},t)u\big)dt^2 + \\ + \Big(-U(\vec{x},t)p - u\,(U(\vec{x},t))^2 - uP(\vec{x},t) + w\mu\,\frac{\partial}{\partial z}U(\vec{x},t) - wU(\vec{x},t)W(\vec{x},t)\Big)d\eta^2 + \\ + \Big(v\mu\,\frac{\partial}{\partial y}U(\vec{x},t) - vU(\vec{x},t)V(\vec{x},t) + u\mu\,\frac{\partial}{\partial x}U(\vec{x},t)\Big)d\eta^2 + 2\,d\eta d\xi + 2\,d\rho d\chi + 2\,dmdn + \\ + \Big(-V(\vec{x},t)p - vP(\vec{x},t) - v\,((\vec{x},t))^2 - V(\vec{x},t)W(\vec{x},t)w + v\mu\,\frac{\partial}{\partial y}V(\vec{x},t) - uU(\vec{x},t)V(\vec{x},t)\Big)d\rho^2 + \\ + \Big(u\mu\,\frac{\partial}{\partial x}V(\vec{x},t)\Big)d\rho^2 + \Big(-uU(\vec{x},t)W(\vec{x},t) - w\,(W(\vec{x},t))^2 - wP(\vec{x},t) + w\mu\,\frac{\partial}{\partial z}W(\vec{x},t)\Big)dm^2 + \\ + \Big(v\mu\,\frac{\partial}{\partial y}W(\vec{x},t) - vV(\vec{x},t)W(\vec{x},t) + u\mu\,\frac{\partial}{\partial x}W(\vec{x},t) - W(\vec{x},t)p\Big)dm^2 \end{gathered} \tag{1}$$

is the Ricci-flat,

$$R_{44} = U_x + V_y + W_z = 0, \quad R_{55} = 0, \quad R_{66} = 0, \quad R_{77} = 0$$

on solutions of Navier-Stokes system of equations

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{Q}(\vec{x},t) + (\vec{Q}(\vec{x},t)\cdot\vec{\nabla})\vec{Q}(\vec{x},t) - \mu\,\Delta\vec{Q}(\vec{x},t) + \vec{\nabla}P(\vec{x},t) = 0, \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{Q}(\vec{x},t) = 0, \tag{2}$$

where $\vec{Q}(\vec{x},t) = [U(\vec{x},t), V(\vec{x},t), W(\vec{x},t)]$ *are the components of velocity and* $P(\vec{x},t)$ *is pressure of liquid* (see e.g. [1-2]).

To obtain the metric (1) presentation the NS-system of equations in the form of laws conservations

$$U_t + (U^2 - \mu U_x + P)_x + (UV - \mu U_y)_y + (UW - \mu U_z)_z = 0,$$