3. Денисов И. В. *Угловой пограничный слой в краевых задачах для сингулярно возмущенных параболических уравнений с монотонной нелинейностью* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2018. Т. 58. № 4. С. 1–11.
4. Денисов А. И., Денисов И. В. *Угловой пограничный слой в краевых задачах для сингулярно возмущенных параболических уравнений с нелинейностями* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т. 59. № 1. С. 102–117.
5. Денисов А. И., Денисов И. В. *Угловой пограничный слой в краевых задачах для сингулярно возмущенных параболических уравнений с немонотонными нелинейностями* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т. 59. № 9. С. 1581–1590.
6. Денисов И. В. *Угловой пограничный слой в краевых задачах для сингулярно возмущенных параболических уравнений с кубическими нелинейностями* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2021. Т. 61. № 2. С. 256–267.
7. Денисов И. В. *Угловой пограничный слой в краевых задачах с нелинейностями, имеющими стационарные точки* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2021. Т. 61. № 11. С. 1894–1903.

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ СТРУНЫ ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ НЕПРЕРЫВНОЙ СИЛЫ И СИЛ ИМПУЛЬСНОЙ ПРИРОДЫ

К.К. Елгондиев, Ю.Р. Кутлымуратова

Рассмотрена задача о вынужденных колебаниях струны с закрепленными концами под воздействием внешней непрерывной силы и сил импульсной природы, действующих на процесс колебания струны в фиксированные моменты времени. Математически эта задача является задачей решения линейного неоднородного уравнения колебания струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \quad t \neq t_k, \tag{1}$$

при граничных условиях

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \tag{2}$$

с начальными условиями

$$u(x,0) = \varphi_0(x), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \varphi_1(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{3}$$

и условиями импульсных воздействий вида

$$\Delta \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=t_k} = \frac{\partial u(x, t_k+0)}{\partial t} - \frac{\partial u(x, t_k-0)}{\partial t} = I_k(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{4}$$

где $t_k > 0$, $k \in \mathbb{N}$, – моменты импульсных воздействий, а $I_k(x)$, $k \in \mathbb{N}$, – соответствующие t_k, $k \in \mathbb{N}$, величины импульсных воздействий.

Относительно моментов импульсных воздействий предположим, что $t_k > t_m$ при $k > m$ и $t_k \to +\infty$ при $k \to +\infty$.

Определение. *Решением задачи (1)–(4)* называется функция

$$u(x,t) \in C\big([0,l] \times [0,+\infty)\big) \cap C^2\big([0,l] \bigcup_{k=0}^{\infty} (t_k, t_{k+1})\big),$$

имеющая непрерывную справа производную по t при $t = t_k$, $k \in \mathbb{N}$, удовлетворяющая уравнению (1) при $t \neq t_k$, $k \in \mathbb{N}$, граничным условиям (2), начальным условиям (3) и при $t = t_k$ условиям импульсных воздействий (4).

Решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям (2)–(4), ищем в виде:

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \cdot \sin \frac{n\pi}{l} x \tag{5}$$

по собственным функциям $\lambda_n = \sin\dfrac{n\pi x}{l}$, $n = 1, 2, \ldots,$ задачи Штурма–Лиувилля

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad X(0) = X(l) = 0,$$

где функции $T_n(t)$, $n = 1, 2, ...,$ определяются из уравнений

$$T_n{}''(t) + \omega_2^n T_n(t) = f_n(t), \quad t \neq t_k, \tag{6}$$

при начальных условиях

$$T_n(0) = \varphi_{0n}, \quad T_n{}'(0) = \varphi_{1n}, \tag{7}$$

и условиях импульсного воздействия

$$\Delta T_n{}'(t)\,|_{t=t_k} = I_{kn}\,, \tag{8}$$

Здесь $k,\, n \in \mathbb{N}$ и введены следующие обозначения

$$\varphi_{0n} = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \varphi_0(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx; \;\; \varphi_{1n} = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \varphi_1(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx; \;\; I_{kn} = \frac{2}{l}\int\limits_0^l I_k(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx.$$

Решение задачи (6)-(8) имеет вид

$$T_n(t) = \varphi_{01}\cos\omega_n t + \frac{\varphi_{1n}}{\omega_n}\sin\omega_n t + \frac{1}{\omega_n}\int\limits_{t_0}^t f_n(\tau)\sin\omega_n(t-\tau)\,d\tau + \sum_{0\leqslant t_i<t}\frac{I_{in}}{\omega_n}\sin\omega_n(t-t_i).$$

Подставив найденные выражения для $T_n(t)$ в ряд (5), получим решение задачи (1)–(4). Показано, что такая сходимость рядов будет обеспечена, если потребовать равномерную по n ограниченность частичных сумм ряда $\sum_{k=1}^{\infty} I_{kn}$ и чтобы непрерывная функция $f(x,t)$ имела непрерывные частные производные по x до второго порядка и при всех значениях t выполнялись условия $f(0,t) = f(l,t) = 0$, $I_k(0) = I_k(l) = 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

Литература

1. Samoilenko A. M., Perestyuk N. A. *Impulsive differential equations* // World Scientific Series on Non-linear Sciences. Ser. A. V. 14. Singapore: World Scientific, 1995.

2. Самойленко В. Г., Елгондиев К. К. *Исследование линейных дифференциальных уравнений в* $\mathbb{R}^2$. / Препринт/АН УССР, Ин-т математики; 89.59. Киев, 1989. 32 с.

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

Б.Ж. Кадиркулов, М.А. Жалилов

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1-\operatorname{sign}x}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1+\operatorname{sign}x}{2}\,{}_C D_{0y}^{\alpha}\right) = 0, \tag{1}$$

где ${}_C D_{0y}^{\alpha}\varphi(t) = I_{0+}^{1-\alpha}\varphi'(t)$ – оператор интегро-дифференцирования в смысле Капуто [1].