при температуре 93°C. Температура окружающей среды 21°C. Рассчитать температуру продуктов выдержки через 5 суток. Справочные данные: $\gamma = 1018$ *кг/м*^{3} – плотность раствора, $c = 0,6$ *ккал/кг · град* – теплоемкость раствора» [3].

Отметим, что в дальнейшем студенты указанной специальности будут встречаться с дифференциальными уравнениями при изучении специальных дисциплин. Например, дисциплина «Процессы и аппараты химических технологий» при изучении тем «Основное уравнение гидростатики и его практические приложения», «Уравнение Бернулли»; дисциплина «Физическая химия» при изучении тем «Основное уравнение диффузионной кинетики», «Запись дифференциальных уравнений химической кинетики» и другие.

На наш взгляд, практическая готовность студентов к решению профессионально ориентированных заданий обеспечивает формирование у будущих инженеров потребности в самореализации и приумножении профессионального потенциала. Предлагаемая методика включения в УМК специального средства обучения «Фонда профессионально ориентированных заданий» при решении математических задач с применением теории дифференциальных уравнений служит реализации принципов преемственности, пролонгации, профессиональной направленности, развивающего обучения, отвечает требованиям непрерывности и целостности, единства и последовательности обучения студентов на выделенной специальности.

Литература

1. Вакульчик В. С., Мателенок А. П. *УМК как средство формирования познавательной самостоятельности в контексте компетентностной модели подготовки выпускника вуза*// Вестн. СПГУТД. 2018. № 2. С. 90–98.

2. Мателенок А. П. *Элементы эвристического обучения математике в компонентах УМК нового поколения* // Матэматыка. 2019. № 6. С. 45–52.

3. Вакульчик В. С., Мателенок А. П. *Формирование компетенций исследовательской деятельности студентов технических специальностей в математическом междисциплинарном модуле* // Выш. шк. 2021. № 1. С. 27–32.

АЛГОРИТМЫ И ТЕХНОЛОГИИ ПОСТРОЕНИЯ ЧИСЛЕННЫХ РЕШЕНИЙ ДВУХКРИТЕРИАЛЬНЫХ СЕТЕВЫХ ЗАДАЧ

Л.А. Пилипчук, М.П. Романчук

Двухкритериальными задачами называются типы задач, поиск решений которых проводится на основании двух критериев оптимизации. В рамках подхода [1–4] оба критерия влияют на выбор алгоритмических, структурных и технологических методов решения двухкритериальных задач. В статье рассматриваются двухкритериальные задачи, одним из критериев оптимизации которых являются задачи поиска кратчайших путей (путей минимальной стоимости).

Пусть имеется конечный ориентированный связный граф $G = (I, U)$, где I – множество узлов, U – множество дуг графа, $|I| < \infty$, $|U| < \infty$. Обозначим $x = (x_{i,j},\ (i,j) \in U)$ – вектор дуговых потоков, где каждая дуга $(i,j) \in U$ имеет величину дугового потока $x_{i,j}$, стоимость перемещения единицы дугового потока $c_{i,j}$ по дуге $(i,j) \in U$ и пропускную способность $d_{i,j}$ (ширину) дуги $(i,j) \in U$. Определим ширину $d(L_{s,t})$ и стоимость $c(L_{s,t})$ пути $L_{s,t}$ из узла s в достижимый узел t

следующим образом:

$$d(L_{s,t}) = \min\{d_{i,j}, (i,j) \in L_{s,t}\}, \quad c(L_{s,t}) = \sum_{(i,j)\in L_{s,t}} c_{i,j}x_{i,j}.$$

Для каждого $i = 1, \ldots, k$ сформируем множества дуг $\tilde{U}^i$: $\tilde{U}^i = \bigcup_{j=1}^{i} U^j$.

Теорема 1. *Пусть $L^i_{s,t}$ – кратчайший путь в графе $G^i = (I, \tilde{U}^i)$ из узла s в достижимый узел t, $i \in \{1, \ldots, k\}$. Если выполняются условия*

$$c\left(L^k_{s,t}\right) = c\left(L^{k-1}_{s,t}\right) = \cdots = c\left(L^l_{s,t}\right) < c\left(L^{l-1}_{s,t}\right),$$

то путь $L^l_{s,t}$ имеет наибольшую ширину среди всех кратчайших путей из узла s в достижимый узел t в графе $G = (I, U)$.

Теорема 2. *Пусть $L^p_{s,t}$ – некоторый путь в графе $G^p = (I, \tilde{U}^p)$ из узла s в достижимый узел t, где $p \in \{1, \ldots, h\}$. Пусть $L^p_{s,t}$ может быть не единственным в графе $G^p = (I, \tilde{U}^p)$. Если для ширины каждого пути $L^1_{s,t}, \ldots, L^p_{s,t}$ графа $G^p = (I, \tilde{U}^p)$ выполняются условия*

$$d\left(L^1_{s,t}\right) = d\left(L^2_{s,t}\right) = \cdots = d\left(L^p_{s,t}\right) > d\left(L^{p+1}_{s,t}\right),$$

то $\{L^1_{s,t}, \ldots, L^p_{s,t}\}$ – множество путей максимальной ширины из узла s в достижимый узел t в начальном графе $G = (I, U)$.

Доказательства теорем 1–2 представлено в [1].

Для рассмотрения задачи (теорема 1) требуется иметь на входе алгоритма ориентированный ациклический граф, дуги которого характеризуются описанными выше дополнительными характеристиками – стоимостью и шириной. На основании теоремы 1 двухкритериальная задача отличается от задачи поиска кратчайших путей только тем, что поиск последних будет происходить не среди всех дуг графа, а только тех, которые входят в пути максимальной ширины. Следовательно, задача разбивается на две подзадачи, которые могут выполняться только последовательно.

Рассмотрим алгоритм решения задачи поиска кратчайшего пути среди путей максимальной ширины из начального узла s в конечный узел t в графе $G = (I, U)$, $s \in I$, $t \in I$:

Algorithm 1. Дуги графа $G = (I, U)$ сортируются в порядке невозрастания ширины и формируются множества дуг U^i, $i = \overline{1, k}$, таким образом, чтобы каждое множество содержало только дуги одной определенной ширины, то есть пересечение этих множеств есть пустое множество, а их объединение совпадает с множеством U, причем, для всякого $i = \overline{2, k}$ ширина любой дуги множества U^i меньше ширины любой дуги множества U^{i-1}.

1: Создаются множества $\tilde{U}^i$, $i = \overline{1, k}$ так, что $\tilde{U}^i = \bigcup_{j=1}^{i} U^j$
2: **for** $i = 1$ to k **do**
3: Строится граф $G^i = (I, \tilde{U}^i)$
4: Если в графе $G^i = (I, \tilde{U}^i)$ узел t достижим из узла s, то поиск специального графа G^i завершается, переход к шагу 6
5: **end for**
6: Для полученного графа $G^i = (I, \tilde{U}^i)$ решается задача поиска кратчайшего пути из узла s в узел t, причем шириной полученного пути является ширина, соответствующая дугам множества U^i.

На основе полученного пути можно вычислить дуговые потоки в графе, соответствующие решению задачи поиска кратчайшего пути среди путей максимальной ширины из начального узла s в конечный узел t. Для этого требуется положить потоки по дугам, принадлежащим найденному пути, равными единице, а потоки по всем остальным дугам – равными нулю.

Алгоритм решения задачи нахождения среди всех путей минимальной стоимости (кратчайших путей) из узла s в достижимый узел t графа G путей максимальной ширины основан на выполнении условий теоремы 2, при этом сортировка значений ширины каждой дуги осуществляется в порядке неубывания. Формирование множеств дуг U^i, $i = \overline{1,k}$, осуществляется таким образом, чтобы каждое множество было определенной ширины.

Математическая модель задачи о кратчайших путях из узла $s \in I$ в достижимые узлы $i \in I \backslash \{s\}$ графа $G = (I, U)$ имеет следующий вид:

$$\sum_{(i,j)\in U} c_{i,j} x_{i,j} \to \min,$$

$$\sum_{j\in I_i^+(U)} x_{i,j} - \sum_{j\in I_i^-(U)} x_{j,i} = \begin{cases} n-1, & i = s, \\ -1, & i \in I\backslash\{s\}, \end{cases}$$

$$0 \leqslant x_{i,j} \leqslant n, \quad (i,j) \in U, \quad n = |I|, \quad x_{i,j} \in \mathbb{N},$$

где $I_i^+(U) = \{j \in I : (i,j) \in U\}, \quad I_i^-(U) = \{j \in I : (j,i) \in U\}.$

Технологии построения кратчайших путей из узла s в узел t и из узла s во все достижимые узлы графа, основанные на базисном подходе, представлены в работе [2]. Подход, основанный на применении динамического программирования, представлен в работе [3].

Литература

1. Пилипчук Л. А., Пилипчук А. С., Полячок Е. Н. *Двухкритериальные задачи потокового программирования* / // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. 2020. № 6(123). С. 144–150.

2. Пилипчук Л. А., Пилипчук А. С., Полячок Е. Н. *Оптимальные пути: алгоритмические, структурные и технологические решения* // Веснік Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Янкі Купалы. Серыя 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. 2020. Т. 10. № 3. С. 143—151.

3. Пилипчук Л. А., Полячок Е. Н. *О численных методах решения двухкритериальных задач потокового программирования* // Материалы 10-го международного семинара «Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений (AMADE)». Минск, 13–17 сентября 2021 г. – Институт математики НАН Беларуси. – Минск: ИВЦ Минфина, 2021. С. 67–68.

4. Пилипчук Л. А., Пилипчук А. С., Полячок Е. Н. *К методам построения начальных допустимых решений экстремальных задач сетевой оптимизации* // Материалы международной научной конференции «Информационные технологии и системы -2020 (ИТС 2020)». Минск, 18 ноября 2020 г. – Минск: БГУИР, – 2020. С. 134–135.

КЛАССИЧЕСКИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРИНЦИПЫ, ЛЕЖАЩИЕ В ОСНОВЕ КУРСА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Н.Я. Радыно

В курсе дифференциальных уравнений изучается широкий спектр непосредственно уравнений и методов их решения [1]. Предлагаем озвучить **фундаментальные принципы**, которые заложены как в уравнениях, так и в методах их решения, с