На основе полученного пути можно вычислить дуговые потоки в графе, соответствующие решению задачи поиска кратчайшего пути среди путей максимальной ширины из начального узла s в конечный узел t. Для этого требуется положить потоки по дугам, принадлежащим найденному пути, равными единице, а потоки по всем остальным дугам – равными нулю.

Алгоритм решения задачи нахождения среди всех путей минимальной стоимости (кратчайших путей) из узла s в достижимый узел t графа G путей максимальной ширины основан на выполнении условий теоремы 2, при этом сортировка значений ширины каждой дуги осуществляется в порядке неубывания. Формирование множеств дуг U^i, $i = \overline{1,k}$, осуществляется таким образом, чтобы каждое множество было определенной ширины.

Математическая модель задачи о кратчайших путях из узла $s \in I$ в достижимые узлы $i \in I \backslash \{s\}$ графа $G = (I, U)$ имеет следующий вид:

$$\sum_{(i,j)\in U} c_{i,j} x_{i,j} \to \min,$$

$$\sum_{j\in I_i^+(U)} x_{i,j} - \sum_{j\in I_i^-(U)} x_{j,i} = \begin{cases} n-1, & i = s, \\ -1, & i \in I\backslash\{s\}, \end{cases}$$

$$0 \leqslant x_{i,j} \leqslant n, \quad (i,j) \in U, \quad n = |I|, \quad x_{i,j} \in \mathbb{N},$$

где $I_i^+(U) = \{j \in I : (i,j) \in U\}, \quad I_i^-(U) = \{j \in I : (j,i) \in U\}$.

Технологии построения кратчайших путей из узла s в узел t и из узла s во все достижимые узлы графа, основанные на базисном подходе, представлены в работе [2]. Подход, основанный на применении динамического программирования, представлен в работе [3].

Литература

1. Пилипчук Л. А., Пилипчук А. С., Полячок Е. Н. *Двухкритериальные задачи потокового программирования* / // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. 2020. № 6(123). С. 144–150.

2. Пилипчук Л. А., Пилипчук А. С., Полячок Е. Н. *Оптимальные пути: алгоритмические, структурные и технологические решения* // Веснік Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Янкі Купалы. Серыя 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. 2020. Т. 10. № 3. С. 143—151.

3. Пилипчук Л. А., Полячок Е. Н. *О численных методах решения двухкритериальных задач потокового программирования* // Материалы 10-го международного семинара «Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений (AMADE)». Минск, 13–17 сентября 2021 г. – Институт математики НАН Беларуси. – Минск: ИВЦ Минфина, 2021. С. 67–68.

4. Пилипчук Л. А., Пилипчук А. С., Полячок Е. Н. *К методам построения начальных допустимых решений экстремальных задач сетевой оптимизации* // Материалы международной научной конференции «Информационные технологии и системы -2020 (ИТС 2020)». Минск, 18 ноября 2020 г. – Минск: БГУИР, – 2020. С. 134–135.

КЛАССИЧЕСКИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРИНЦИПЫ, ЛЕЖАЩИЕ В ОСНОВЕ КУРСА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Н.Я. Радыно

В курсе дифференциальных уравнений изучается широкий спектр непосредственно уравнений и методов их решения [1]. Предлагаем озвучить **фундаментальные принципы**, которые заложены как в уравнениях, так и в методах их решения, с целью определения отправных моментов методики преподавания курса дифференциальных уравнений.

Курс открывается линейными дифференциальными уравнениями первого порядка с постоянными коэффициентами. Это уравнения вида $r' = ar$, $x'(t) = ax(t) + f(t)$. Они являются простейшими моделями основных физических явлений: радиоактивного распада, падения давления воздуха в зависимости от высоты над уровнем моря, ослабление интенсивности излучения при прохождении его через поглощающую среду, ток размыкания, трение ремней, падение тела с высоты.

В основу изучения такого вида уравнений положен фундаментальный принцип или понятие – **«геометрическая прогрессия»**.

Далее рассматриваются линейные дифференциальные уравнения n-ого порядка с постоянными коэффициентами, в основе – **«сумма геометрических прогрессий»**.

Следующие в программе курса – линейные дифференциальные векторные уравнения с постоянными коэффициентами $\vec{x}\,' = A\vec{x}$. Метод решения таких уравнений основан на вычислении экспоненты матрицы. В этом случае применяется **«теорема Евклида о делении с остатком»**.

Обоснование существования и единственности задачи Коши $y' = f(x,y)$, $y(x_0) = y_0$ даётся с помощью теоремы Пикара, с использованием метода последовательных приближений. Базовый принцип — **«алгоритм Евклида»**.

Переходим к уравнению первого порядка в нормальной дифференциальной форме

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0.$$

Данное уравнение означает, что вектор (P,Q) ортогонален вектору (dx,dy). Вопросу ортогональности в курсе дифференциальных уравнений также посвящена задача И. Бернулли (о построении траекторий ортогональных данному однопараметрическому семейству линий). Кроме того, в курсе математического анализа в разделе «Функции комплексного переменного» рассматривается понятие дифференцируемости функции комплексного переменного. Следует обратить внимание, что функция комплексного переменного – это тот аппарат, который даёт два семейства ортогональных друг другу траекторий [2]. Указанные задачи дифференциальных уравнений и математического анализа практически применяются в электростатике и гидроаэродинамике. Во всех вышеназванных задачах проявляется принцип – **«силовые и эквипотенциальные линии»**.

Далее в курсе дифференциальных уравнений излагаются линейные уравнения с голоморфными коэффициентами и метод построения их решений при помощи степенных рядов. В основу решения положен принцип **«теорема Евклида о делении с остатком»**.

При изучении движения и устойчивости движения используют системы нелинейных дифференциальных уравнений и первые интегралы (законы сохранения). В этом случае применяется ряд принципов: **«основное свойство пропорций»**, **«интегралы движения»**, **«сведение системы дифференциальных уравнений к системе алгебраических уравнений»**, **«силовые и эквипотенциальные линии»**.

В заключение курса изучается тема «Линейные и квазилинейные уравнения с частными производными первого порядка», в основе которой лежит принцип **«основное свойство пропорций»**.

Таким образом, изучая диффренциальные уравнения и методы их решения, студенты практикуются в использовании классических математических понятий и принципов: **«геометрическая прогрессия»**, **«теорема Евклида о делении с остатком»**, **«алгоритм Евклида»**, **«силовые и эквипотенциальные линии»**, **«основное свойство пропорций»**.

Литература

1. Степанов В.В. *Курс дифференциальных уравнений.* Москва, ГТТИ, Физматлит, 1950.
2. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. *Методы теории функций комплексного переменного.* Москва, ГИФМЛ, 1958.

ОБ УЧЕБНОМ ПОСОБИИ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ» ДЛЯ СТУДЕНТОВ ФАКУЛЬТЕТА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ БГУ

Г.П. Размыслович, А.В. Филипцов

Роль аналитической геометрии в системе высшего образования весьма значительна. Наряду с тем, что эта дисциплина имеет большое самостоятельное теоретическое и прикладное значение, без неё невозможно построить курсы математического анализа, дифференциальных уравнений, дискретной математики, компьютерной графики и др.

В вступивших в действие в 2021 году образовательных стандартах и типовых учебных планах специальностей «Прикладная математика», «Информатика», «Актуарная математика» и направлений специальностей «Экономическая кибернетика (математические методы и компьютерное моделирование)», «Компьютерная безопасность (математические методы и программные средства)» изучение основ аналитической геометрии выделено в самостоятельную дисциплину. В связи с этим авторами разработаны учебные программы по дисциплине «Аналитическая геометрия» для указанных выше специальностей, а также отвечающее этим программам учебное пособие. Данное пособие отражает практику проведённых авторами занятий по аналитической геометрии на факультете прикладной математики и информатики Белорусского государственного университета. Основу данного издания составляют учебные пособия [1, 2].

Учебное пособие «Аналитическая геометрия» состоит из двух частей. В первой части рассматриваются системы координат на прямой, плоскости и в пространстве, изложена теория векторов. Вторая часть посвящена изучению алгебраических линий первого и второго порядков на плоскости, а также прямых, плоскостей и алгебраических поверхностей второго порядка в пространстве. В пособии вводятся основные понятия аналитической геометрии и их свойства, сформулированы и доказаны наиболее важные утверждения, использующие эти понятия, а также представлено большое количество рисунков, которые подтверждают и иллюстрируют основные положения аналитической геометрии.

Литература

1. Размыслович Г. П., Феденя М. М., Ширяев В. М. *Геометрия и алгебра.* Минск. БГУ. 1987.
2. Размыслович Г. П., Филипцов А. В., Ширяев В. М. *Геометрия и алгебра. Практикум.* Минск. БГУ. 2018.

МЕТОДИЧЕСКИЕ ПРИЕМЫ ФОРМИРОВАНИЯ МОТИВАЦИИ ПРИ ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ БАКАЛАВРОВ ТЕХНИЧЕСКОГО ВУЗА

Е.Л. Старовойтова

Обновление целей профессионального образования в высшей школе требует совершенствования методики обучения и организации образовательного процесса на основе