УДК 519.6: 517.958

# КОНЕЧНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА НА ПРЯМОУГОЛЬНИКЕ ПРОГОНКОЙ СТОЛБЦОВ НЕИЗВЕСТНОЙ МАТРИЦЫ С ШЕСТЫМ ПОРЯДКОМ ПОГРЕШНОСТИ

# FINITE METHODS FOR SOLVING THE POISSON EQUATION ON THE RECTANGLE OF THE COLUMN SWEEP OF AN UNKNOWN MATRIX WITH THE SIXTH OEDER OF ERROR

**ВОЛОСОВА НАТАЛЬЯ КОНСТАНТИНОВНА,**
*Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана.*
**ВОЛОСОВ КОНСТАНТИН АЛЕКСАНДРОВИЧ,**
*Российский университет транспорта.*
**ВОЛОСОВА АЛЕКСАНДРА КОНСТАНТИНОВНА,**
*Российский университет транспорта.*
**ПАСТУХОВ ДМИТРИЙ ФЕЛИКСОВИЧ,**
*Полоцкий государственный университет.*
**ПАСТУХОВ ЮРИЙ ФЕЛИКСОВИЧ,**
*Полоцкий государственный университет.*

**VOLOSOVA NATALIYA KONSTANTINOVNA,**
*Moscow State Technical University N.E.Bauman.*
**VOLOSOV KONSTANTIN ALEKSANDROVICH,**
*Russian university of transport.*
**VOLOSOVA ALEXANDRA KONSTANTINOVNA,**
*Russian university of transport.*
**PASTUHOV DMITRY FELIKSOVICH,**
*Polotsk state university.*
**PASTUHOV YURY FELIKSOVICH,**
*Polotsk state university.*

*Данная статья посвящена рассмотрению конечные методы решения уравнения Пуассона на прямоугольнике прогонкой столбцов неизвестной матрицы с шестым порядком погрешности. В ходе исследования получен алгоритм численного уравнения Пуассона на прямоугольнике с краевым условием Дирихле методом прогонки столбцов матрицы решения за конечное число элементарных операций с шестым порядком погрешности. Алгоритм обобщен на случай трех различных трехдиагональных матриц в разностном уравнении. В результате численно подтвержден шестой порядок погрешности алгоритма и написана программа.*

*This article is devoted to the consideration of finite methods for solving the Poisson equation on a rectangle by running columns of an unknown matrix with the sixth order of error. In the course of the study, an algorithm for the numerical Poisson equation on a rectangle with a Dirichlet boundary condition was obtained by running the columns of the solution matrix for a finite number of elementary operations with the sixth order of error. The algorithm is generalized to the case of three different tridiagonal matrices in the difference equation. As a result, the sixth order of error of the algorithm was numerically confirmed and the program was written.*

***Ключевые слова:*** *уравнение Пуассона, метод прогонки, уравнения в частных производных, гидродинамика, конечные методы.*

***Key words:*** *Poisson equation, sweep method, partial differential equations, hydrodynamics, finite methods.*

**Постановка задачи.** В работах [1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8] рассмотрены методы решения первой краевой задачи уравнения Пуассона за конечное число элементарных операций матричным методом. Краевая задача Дирихле (1) для уравнения Пуассона на прямоугольнике с неизвестной функцией $u(x,y)$ с непрерывными граничными условиями и правой частью

$$\varphi_1(y), \varphi_2(y), \varphi_3(x), \varphi_4(x),\ f(x,y) \in C(D),\ D = \{(x,y) | x \in [a,b],\ y \in [c,d]\}$$

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = f(x,y),\ (x,y) \in D = (a,b) \times (c,d) \\ u(a,y) = \varphi_1(y), u(b,y) = \varphi_2(y), u(x,c) = \varphi_3(x), u(x,d) = \varphi_4(x), x \in [a,b], y \in [c,d] \end{cases} \quad (1)$$

сводится к методу матричной прогонки(2) [2,с.585]

$$\begin{cases} Au_1^T + Bu_2^T = F_1^T \\ Bu_{n-1}^T + Au_n^T + Bu_{n+1}^T = F_n^T, n = \overline{2, n_2 - 2} \\ Bu_{n_2-2}^T + Au_{n_2-1}^T = F_{n_2-1}^T \end{cases} \quad (2)$$

Порядки матриц в системе (2) $A, B: (n_1 - 1) \times (n_1 - 1)$, решения $U: (n_2 - 1) \times (n_1 - 1)$, правой части $F: (n_2 - 1) \times (n_1 - 1)$. Численная сетка равномерная $x_n = a + h_1 \cdot n(n = \overline{0, n_1}), y_m = c + h_2 \cdot m(m = \overline{0, n_2}), h_1 = \dfrac{b-a}{n_1}, h_2 = \dfrac{d-c}{n_2}$. Как видно из задачи(2)строки $u_n: 1 \times (n_1 - 1)$ матрицы решения $U: (n_2 - 1) \times (n_1 - 1)$ после транспонирования являются вектор – столбцами $u_n^T: (n_1 - 1) \times 1$.

Однако на практике часто приходится использовать метод прогонки по столбцам, а не по строкам для ускорения счета вычислительного алгоритма. С учетом свойств транспонирования матриц $(A+B)^T = A^T + B^T, (A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$ транспонируем систему матричных уравнений(2)

$$\begin{cases} u_1^T A^T + u_2^T B_2^T = \tilde{F}_1^T \\ u_{n-1}^T B_1^T + u_n^T A^T + u_{n+1}^T B_2^T = \tilde{F}_n^T, n = \overline{2, n_1 - 2} \\ u_{n_1-2}^T B_1^T + u_{n_1-1}^T A^T = \tilde{F}_{n_1-1}^T \end{cases} \quad (3)$$

Волна над правой частью $\tilde{F}_n^T$ в формулах(3)означает, что после вычисления ее по формуле (4) необходимо продолжить ее модифицировать по формулам (13). D системе (3) порядки матриц $A^T, B_1^T, B_2^T: (n_2 - 1) \times (n_2 - 1)$, решения $U^T: (n_1 - 1) \times (n_2 - 1)$, правой части $\tilde{F}^T: (n_1 - 1) \times (n_2 - 1)$. В системе матричных уравнений(3) для умножения векторов $u_n^T: (n_2 - 1) \times 1$ слева на матрицы $A^T, B_1^T, B_2^T$ необходимо столбцы решения $u_n, n = \overline{1, n_1 - 1}$

транспонировать. Также обобщением алгоритма(2) являются неравные матрицы $B_1^T \neq B_2^T \Leftrightarrow B_1 \neq B_2$, так как такие численные задачи возникают в механике [9; 10], в гидродинамике [12; 13; 14; 15; 16; 17; 18; 19; 20; 30; 33] и т.д. Используем формулу аппроксимации уравнения Пуассона с 6 порядком погрешности для равных шагов сетки $h_1 = h_2 = h$ [3],[7].

$$\left(\frac{-10}{3}u_{m,n} + \frac{2}{3}\left(u_{m-1,n} + u_{m+1,n} + u_{m,n-1} + u_{m,n+1}\right) + \frac{1}{6}\left(u_{m-1,n-1} + u_{m+1,n-1} + u_{m-1,n+1} + u_{m+1,n+1}\right)\right) =$$

$$= h^2 f_{m,n} + \frac{h4}{12}\left(f_{xx} + f_{yy}\right) + h^6\left(\frac{1}{360}\left(f_x^{(4)} + f_y^{(4)}\right) + \frac{1}{90} f_{xxyy}^{(4)}\right) + O\left(h^8\right)\Big|_{x=x_n, y=y_m} \equiv F_{m,n}, m = \overline{1, n_2 - 1}, n = \overline{1, n_1 - 1} \quad (4)$$

С учетом индекса транспонирования формула(5) совпадает с формулой (4).

$$\left(\frac{-10}{3}u_{n,m}^T + \frac{2}{3}\left(u_{n,m-1}^T + u_{n,m+1}^T + u_{n-1,m}^T + u_{n+1,m}^T\right) + \frac{1}{6}\left(u_{n-1,m-1}^T + u_{n-1,m+1}^T + u_{n+1,m-1}^T + u_{n+1,m+1}^T\right)\right) = F_{n,m}^T,$$

$$F_{n,m}^T = \left(h^2 f + \frac{h^4}{12}\left(f_{xx} + f_{yy}\right) + h^6\left(\frac{1}{360}\left(f_x^{(4)} + f_y^{(4)}\right) + \frac{1}{90} f_{xxyy}^{(4)}\right) + O\left(h^8\right)\right)^T_{x=x_n, y=y_m}, m = \overline{1, n_2 - 1}, n = \overline{1, n_1 - 1} \quad (5)$$

Сравнивая второе уравнение системы (3) с формулой (5), видно, что у разностного уравнения(5) симметричные матрицы $a_{m,n}^T = a_{m,n}, b_{1m,n}^T = b_{1m,n}, b_{2m,n}^T = b_{2m,n}$

$$a_{m,n} = \begin{cases} -\dfrac{10}{3}, m = n; m = \overline{1, n_2 - 1}, n = \overline{1, n_2 - 1} \\ \dfrac{2}{3}, m = n + 1 \vee m = n - 1 \\ 0, m \geq n + 2 \vee m \leq n - 2 \end{cases}, \qquad b_{2m,n} = b_{1m,n} = \begin{cases} \dfrac{2}{3}, m = n; m = \overline{1, n_2 - 1}, n = \overline{1, n_2 - 1} \\ \dfrac{1}{6}, m = n + 1 \vee m = n - 1 \\ 0, m \geq n + 2 \vee m \leq n - 2 \end{cases} \quad (6)$$

Второе уравнение системы(3) перепишем более подробно

$$u_{n-1}^T B_1^T + u_n^T A^T + u_{n+1}^T B_2^T = \tilde{F}_n^T \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n_2-1} u^T{}_{n-1,k} b_{m,k}^1 + \sum_{k=1}^{n_2-1} u^T{}_{n,k} a_{m.k} + \sum_{k=1}^{n_2-1} u^T{}_{n+1,k} b_{m.k}^2 = \tilde{F}^T{}_{n,m}, \overline{n = 2, n_1 - 2} \Leftrightarrow$$

$$u^T{}_{n-1,m-1} b_{m,m-1}^1 + u^T{}_{n-1,m} b_{m,m}^1 + u^T{}_{n-1,m+1} b_{m,m+1}^1 + u^T{}_{n,m-1} a_{m,m-1} + u^T{}_{n,m} a_{m,m} + u^T{}_{n,m+1} a_{m,m+1} +$$

$$+ u^T{}_{n+1,m-1} b_{m,m-1}^2 + u^T{}_{n+1,m} b_{m,m}^2 + u^T{}_{n+1,m+1} b_{m,m+1}^2 = \tilde{F}^T{}_{n,m}, \overline{n = 2, n_1 - 2}, m = \overline{1, n_2 - 1} \quad (7)$$

Решение системы(3) ищем в виде(8)

$$u_n^T = u_{n+1}^T \lambda_n + \nu_n, \overline{n = 1, n_1 - 2}, u_{n_1-1}^T = \nu_{n_1-1} \quad (8)$$

В формуле(8) $u_n^T\left(1 \times (n_2 - 1)\right)$-вектор, $\lambda_n\left((n_2 - 1) \times (n_2 - 1)\right)$ матрица, $\nu_n\left(1 \times (n_2 - 1)\right)$- вектор. Из первого уравнения системы(3) получим

$$u_1^T A^T + u_2^T B_2^T = \tilde{F}_1^T \Leftrightarrow u_1^T = -u_2^T B_2^T \left(A^T\right)^{-1} + \tilde{F}_1^T \left(A^T\right)^{-1} \Leftrightarrow \lambda_1 = -B_2^T \left(A^T\right)^{-1}, \nu_1 = \tilde{F}_1^T \left(A^T\right)^{-1} \quad (9)$$

Подставим $u_{n-1}^T = u_n^T \lambda_{n-1} + \nu_{n-1}$ из формулы(8) во вторую формулу системы(3)

$$u_{n-1}^T B_1^T + u_n^T A^T + u_{n+1}^T B_2^T = \tilde{F}_n^T \Leftrightarrow \left(u_n^T \lambda_{n-1} + \nu_{n-1}\right) B_1^T + u_n^T A^T + u_{n+1}^T B_2^T = \tilde{F}_n^T \Leftrightarrow$$

$$u_n^T = -u_{n+1}^T B_2^T \left(\lambda_{n-1} B_1^T + A^T\right)^{-1} + \left(\tilde{F}_n^T - \nu_{n-1} B_1^T\right)\left(\lambda_{n-1} B_1^T + A^T\right)^{-1} \Leftrightarrow$$

$$\lambda_n = -B_2^T\left(\lambda_{n-1}B_1^T + A^T\right)^{-1}, \nu_n = \left(\tilde{F}^T_n - \nu_{n-1}B_1^T\right)\left(\lambda_{n-1}B_1^T + A^T\right)^{-1}, n = \overline{2, n_1 - 2} \tag{10}$$

Формулы (10) для коэффициентов $\lambda_n, \nu_n$ называем формулами прогонки вперед.

Рассмотрим третью формулу системы(3) $u^T_{n_1-2}B_1^T + u^T_{n_1-1}A^T = \tilde{F}^T_{n_1-1}$, в которую подставим столбец $u^T_{n_1-2}$ с использованием формулы(8) $u^T_{n_1-2} = u^T_{n_1-1}\lambda_{n_1-2} + \nu_{n_1-2}$

$$u^T_{n_1-2}B_1^T + u^T_{n_1-1}A^T = \tilde{F}^T_{n_1-1} \Leftrightarrow \left(u^T_{n_1-1}\lambda_{n_1-2} + \nu_{n_1-2}\right)B_1^T + u^T_{n_1-1}A^T = \tilde{F}^T_{n_1-1} \Leftrightarrow u^T_{n_1-1} = \left(\tilde{F}^T_{n_1-1} - \nu_{n_1-2}B_1^T\right)\left(\lambda_{n_1-2}B_1^T + A^T\right)^{-1} \tag{11}$$

Зная столбец $u^T_{n_1-1}$ по формуле (11), получим остальные столбцы решения по формулам прогонки назад (12) $u^T_n = u^T_{n+1}\lambda_n + \nu_n, \overline{n = n_1 - 2, 1, -1}$ (12)

Аналогично работам[3; 4; 5; 6] необходимо модифицировать правую часть системы разностных уравнений(3), которая учитывала бы краевые значения задачи(1), то есть значения $u^T_{0,m}(m = \overline{0, n_2}), u^T_{n_1,m}(m = \overline{0, n_2}), u^T_{n,0}(n = \overline{0, n_1}), u^T_{n,n_2}(n = \overline{0, n_1})$.

Учитывая формулу(7), для четырех угловых точек $u^T_{0,0}, u^T_{n_1,0}, u^T_{0,n_2}, u^T_{n_1,n_2}$, а также модификацию правой части с учетом граничных значений $u^T_{0,m}(m = \overline{1, n_2 - 1}), u^T_{n_1,m}(m = \overline{1, n_2 - 1}), u^T_{n,0}(n = \overline{1, n_1 - 1}), u^T_{n,n_2}(n = \overline{1, n_1 - 1})$ на четырех отрезках получим(13)

$$\begin{cases}
u^T_{0,0}b^1_{1,0} + u^T_{0,1}b^1_{1,1} + u^T_{0,2}b^1_{1,2} + u^T_{1,0}a_{1,0} + u^T_{1,1}a_{1,1} + u^T_{1,2}a_{1,2} + u^T_{2,0}b^2_{1,0} + u^T_{2,1}b^2_{1,1} + u^T_{2,2}b^2_{1,2} = F^T_{1,1} \Leftrightarrow \\
u_{1,1}a_{1,1} + u_{2,1}a_{1,2} + u_{1,2}b^2_{1,1} + u_{2,2}b^2_{1,2} = F_{1,1} - u_{0,0}b^1_{1,0} - u_{1,0}b^1_{1,1} - u_{2,0}b^1_{1,2} - u_{0,1}a_{1,0} - u_{0,2}b^2_{1,0} \equiv \tilde{F}_{1,1}, m = n = 1. \\
u_{0,n_1-2}b^1_{1,0} + u_{1,n_1-2}b^1_{1,1} + u_{2,n_1-2}b^1_{1,2} + u_{0,n_1-1}a_{1,0} + u_{1,n_1-1}a_{1,1} + u_{2,n_1-1}a_{1,2} + u_{0,n_1}b^2_{1,0} + u_{1,n_1}b^2_{1,1} + u_{2,n_1}b^2_{1,2} = F_{1,n_1-1} \Leftrightarrow \\
u_{1,n_1-2}b^1_{1,1} + u_{2,n_1-2}b^1_{1,2} + u_{1,n_1-1}a_{1,1} + u_{2,n_1-1}a_{1,2} = F_{1,n_1-1} - u_{0,n_1-2}b^1_{1,0} - u_{0,n_1-1}a_{1,0} - u_{0,n_1}b^2_{1,0} - u_{1,n_1}b^2_{1,1} - u_{2,n_1}b^2_{1,2} = \tilde{F}_{1,n_1-1}, m = 1, n = n_1 - 1. \\
u_{n_2-2,0}b^1_{n_2-1,n_2-2} + u_{n_2-1,0}b^1_{n_2-1,n_2-1} + u_{n_2,0}b^1_{n_2-1,n_2} + u_{n_2-2,1}a_{n_2-1,n_2-2} + u_{n_2-1,1}a_{n_2-1,n_2-1} + u_{n_2,1}a_{n_2-1,n_2} + u_{n_2-2,2}b^2_{n_2-1,n_2-2} + u_{n_2-1,2}b^2_{n_2-1,n_2-1} + u_{n_2,2}b^2_{n_2-1,n_2} = F_{n_2-1,1} \Leftrightarrow \\
\tilde{F}_{n_2-1,1} = F_{n_2-1,1} - u_{n_2-2,0}b^1_{n_2-1,n_2-2} - u_{n_2-1,0}b^1_{n_2-1,n_2-1} - u_{n_2,0}b^1_{n_2-1,n_2} - u_{n_2,1}a_{n_2-1,n_2} - u_{n_2,2}b^2_{n_2-1,n_2}, m = n_2 - 1, n = 1. \\
u_{n_2-2,n_1-2}b^1_{n_2-1,n_2-2} + u_{n_2-1,n_1-2}b^1_{n_2-1,n_2-1} + u_{n_2,n_1-2}b^1_{n_2-1,n_2} + u_{n_2-2,n_1-1}a_{n_2-1,n_2-2} + u_{n_2-1,n_1-1}a_{n_2-1,n_2-1} + u_{n_2,n_1-1}a_{n_2-1,n_2} + u_{n_2-2,n_1}b^2_{n_2-1,n_2-2} + u_{n_2-1,n_1}b^2_{n_2-1,n_2-1} + u_{n_2,n_1}b^2_{n_2-1,n_2} = F_{n_2-1,n_1-1} \Leftrightarrow \\
\tilde{F}_{n_2-1,n_1-1} = F_{n_2-1,n_1-1} - u_{n_2,n_1-2}b^1_{n_2-1,n_2} - u_{n_2,n_1-1}a_{n_2-1,n_2} - u_{n_2-2,n_1}b^2_{n_2-1,n_2-2} - u_{n_2-1,n_1}b^2_{n_2-1,n_2-1} - u_{n_2,n_1}b^2_{n_2-1,n_2}, m = n_2 - 1, n = n_1 - 1.
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
u^T_{n-1,0}b^1_{1,0} + u^T_{n-1,1}b^1_{1,1} + u^T_{n-1,2}b^1_{1,2} + u^T_{n,0}a_{1,0} + u^T_{n,1}a_{1,1} + u^T_{n,2}a_{1,2} + u^T_{n+1,0}b^2_{1,0} + u^T_{n+1,1}b^2_{1,1} + u^T_{n+1,2}b^2_{1,2} = F^T_{n,1} \Leftrightarrow \\
u_{1,n-1}b^1_{1,1} + u_{2,n-1}b^1_{1,2} + u_{1,n}a_{1,1} + u_{2,n}a_{1,2} + u_{1,n+1}b^2_{1,1} + u_{2,n+1}b^2_{1,2} = F_{1,n} - u_{0,n-1}b^1_{1,0} - u_{0,n}a_{1,0} - u_{0,n+1}b^2_{1,0} \equiv \tilde{F}_{1,n}, m = 1, n = \overline{2, n_1 - 2}. \\
u_{n_2-2,n-1}b^1_{n_2-1,n_2-2} + u_{n_2-1,n-1}b^1_{n_2-1,n_2-1} + u_{n_2,n-1}b^1_{n_2-1,n_2} + u_{n_2-2,n}a_{n_2-1,n_2-2} + u_{n_2-1,n}a_{n_2-1,n_2-1} + u_{n_2,n}a_{n_2-1,n_2} + u_{n_2-2,n+1}b^2_{n_2-1,n_2-2} + u_{n_2-1,n+1}b^2_{n_2-1,n_2-1} + u_{n_2,n+1}b^2_{n_2-1,n_2} = F_{n_2-1,n} \Leftrightarrow \\
u_{n_2-2,n-1}b^1_{n_2-1,n_2-2} + u_{n_2-1,n-1}b^1_{n_2-1,n_2-1} + u_{n_2-2,n}a_{n_2-1,n_2-2} + u_{n_2-1,n}a_{n_2-1,n_2-1} + u_{n_2-2,n+1}b^2_{n_2-1,n_2-2} + u_{n_2-1,n+1}b^2_{n_2-1,n_2-1} = F_{n_2-1,n} - u_{n_2,n-1}b^1_{n_2-1,n_2} - u_{n_2,n}a_{n_2-1,n_2} - u_{n_2,n+1}b^2_{n_2-1,n_2} = \tilde{F}_{n_2-1,n}, \\
u_{m-1,0}b^1_{m,m-1} + u_{m,0}b^1_{m,m} + u_{m+1,0}b^1_{m,m+1} + u_{m-1,1}a_{m,m-1} + u_{m,1}a_{m,m} + u_{m+1,1}a_{m,m+1} + u_{m-1,2}b^2_{m,m-1} + u_{m,2}b^2_{m,m} + u_{m+1,2}b^2_{m,m+1} = F_{m,1} \Leftrightarrow \\
\tilde{F}_{m,1} = F_{m,1} - u_{m-1,0}b^1_{m,m-1} - u_{m,0}b^1_{m,m} - u_{m+1,0}b^1_{m,m+1}, m = \overline{2, n_2 - 2}, n = 1. \\
u_{m-1,n_1-2}b^1_{m,m-1} + u_{m,n_1-2}b^1_{m,m} + u_{m+1,n_1-2}b^1_{m,m+1} + u_{m-1,n_1-1}a_{m,m-1} + u_{m,n_1-1}a_{m,m} + u_{m+1,n_1-1}a_{m,m+1} + u_{m-1,n_1}b^2_{m,m-1} + u_{m,n_1}b^2_{m,m} + u_{m+1,n_1}b^2_{m,m+1} = F_{m,n_1-1} \\
\tilde{F}_{m,n_1-1} = F_{m,n_1-1} - u_{m-1,n_1}b^2_{m,m-1} - u_{m,n_1}b^2_{m,m} - u_{m+1,n_1}b^2_{m,m+1}, m = \overline{2, n_2 - 2}, n = n_1 - 1. \\
\tilde{F}_{m,n} = F_{m,n}, m = \overline{2, n_2 - 2}, n = \overline{2, n_1 - 2}
\end{cases} \tag{13}$$

Обратим внимание, что модифицированная правая часть в точках $\tilde{F}_{1,1}$, $\tilde{F}_{1,n_1-1}$, $\tilde{F}_{n_2-1,1}$, $\tilde{F}_{n_2-1,n_1-1}$, $\tilde{F}_{1,n}, m=1, n=\overline{2,n_1-2}$, $\tilde{F}_{1,n}, m=n_2-1, n=\overline{2,n_1-2}$, $\tilde{F}_{m,1}, m=\overline{2,n_2-2}, n=1$, $\tilde{F}_{m,n_1-1}, m=\overline{2,n_2-2}, n=n_1-1$ в формулах (13) определяется только элементами исходных матриц, а не элементами транспонированных матриц, поэтому модифицирование правой части удобнее проводить с исходными матрицами.

Рассмотрим тестовый пример, придерживаясь обозначений из задачи(1)

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=\sin x\cdot\sin y\equiv f(x,y), 0<x<2\pi, 0<y<\pi \\ u(0,y)=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{y}{2}\equiv\varphi_1(y), 0\le y\le\pi \\ u(2\pi,y)=\pi+y\equiv\varphi_2(y), 0\le y\le\pi \\ u(x,0)=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{x}{4}\equiv\varphi_3(x), 0\le x\le 2\pi \\ u(x,\pi)=\pi+\dfrac{x}{2}\equiv\varphi_4(x), 0\le x\le 2\pi \end{cases} \tag{14}$$

Решение данной задачи можно разделить на две группы слагаемых

$$u(x,y)=\left(-\frac{\sin x\cdot\sin y}{2}\right)+\left(\frac{\pi}{2}+\frac{x}{4}+\frac{y}{2}+\frac{xy}{4\pi}\right) \tag{15}$$

так как исходная задача (14) линейна, то [11] допускает редукцию к двум раздельным задачам $u(x,y)=u_1(x,y)+u_2(x,y)$, где каждая из функций решает:

$$\begin{cases} u_{1xx}+u_{1yy}=\sin x\cdot\sin y, 0<x<2\pi, 0<y<\pi \\ u_1(0,y)=0, 0\le y\le\pi \\ u_1(x,0)=0, 0\le x\le 2\pi \\ u_1(2\pi,y)=0, 0\le y\le\pi \\ u_1(x,\pi)=0, 0\le x\le 2\pi \end{cases} \Leftrightarrow u_1(x,y)=-\frac{\sin x\cdot\sin y}{2} \tag{16}$$

$$\begin{cases} u_{2xx}+u_{2yy}=0, 0<x<2\pi, 0<y<\pi \\ u_2(0,y)=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{y}{2}, 0\le y\le\pi \\ u_2(x,0)=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{x}{4}, 0\le x\le 2\pi \\ u_2(2\pi,y)=\pi+y, 0\le y\le\pi \\ u_2(x,\pi)=\pi+\dfrac{x}{2}, 0\le x\le 2\pi \end{cases} \Leftrightarrow u_2(x,y)=\frac{\pi}{2}+\frac{x}{4}+\frac{y}{2}+\frac{xy}{4\pi} \tag{17}$$

Таблица 1. 3,4,5 столбцы-точное решение, численное решение и модуль их разности соответственно.

| $x_n = a + nh_1$ | $y_m = a + mh_2$ | $exact(x_n, y_m)$ | $u(x_n, y_m)$ | $\|eps(x_n, y_m)\|$ |
|---|---|---|---|---|
| 0.00000000 | 0.00000000 | 1.57079632679 | 1.57079632679 | 0.00000000000 |
| 0.00000000 | 0.62831853 | 1.88495559215 | 1.88495559215 | 0.00000000000 |
| 0.00000000 | 1.25663702 | 2.19911485751 | 2.19911485751 | 0.00000000000 |
| 0.00000000 | 1.88495559 | 2.51327412287 | 2.51327412287 | 0.00000000000 |
| 0.00000000 | 2.51327412 | 2.82743338823 | 2.82743338823 | 0.00000000000 |
| 0.00000000 | 3.14159265 | 3.14159265358 | 3.14159265358 | 0.00000000000 |
| 0.62831853 | 0.00000000 | 1.72787595947 | 1.72787595947 | 0.00000000000 |
| 0.62831853 | 0.62831853 | 1.900705399963 | 1.900705399962 | 7.787104E-013 |
| 0.62831853 | 1.25663706 | 2.139517846076 | 2.139517846075 | 1.145750E-012 |
| 0.62831853 | 1.88495559 | 2.485093037971 | 2.485093037970 | 1.315836E-012 |
| 0.62831853 | 2.51327412 | 2.937430975647 | 2.937430975646 | 1.193711E-012 |
| 0.62831853 | 3.14159265 | 3.455751918948 | 3.455751918948 | 0.00000000000 |
| 1.25663706 | 0.00000000 | 1.884955592153 | 1.884955592153 | 0.00000000000 |
| 1.25663706 | 0.62831853 | 1.982438213397 | 1.982438213396 | 1.124655E-012 |
| 1.25663706 | 1.25663706 | 2.186683580421 | 2.186683580419 | 1.763478E-012 |
| 1.25663706 | 1.88495559 | 2.563674698852 | 2.563674698850 | 1.894484E-012 |
| 1.25663706 | 2.51327412 | 3.113411568689 | 3.113411568688 | 1.418420E-012 |
| 1.25663706 | 3.14159265 | 3.769911184307 | 3.769911184307 | 4.440892E-016 |
| 1.88495559 | 0.00000000 | 2.042035224833 | 2.042035224833 | 0.00000000000 |
| 1.88495559 | 0.62831853 | 2.170933772612 | 2.170933772611 | 1.423750E-012 |
| 1.88495559 | 1.25663706 | 2.406595066172 | 2.406595066170 | 2.207567E-012 |
| 1.88495559 | 1.88495559 | 2.815002111139 | 2.815002111137 | 2.299938E-012 |
| 1.88495559 | 2.51327412 | 3.396154907512 | 3.396154907510 | 1.654232E-012 |
| 1.88495559 | 3.14159265 | 4.084070449666 | 4.084070449666 | 0.00000000000 |
| 2.51327412 | 0.00000000 | 2.199114857512 | 2.199114857512 | 0.00000000000 |
| 2.51327412 | 0.62831853 | 2.466192077609 | 2.466192077607 | 1.601385E-012 |
| 2.51327412 | 1.25663706 | 2.799252303330 | 2.799252303328 | 2.468691E-012 |
| 2.51327412 | 1.88495559 | 3.239075274833 | 3.239075274830 | 2.562838E-012 |
| 2.51327412 | 2.51327412 | 3.785660992116 | 3.785660992115 | 1.814104E-012 |
| 2.51327412 | 3.14159265 | 4.398229715025 | 4.398229715025 | 0.00000000000 |
| 3.14159265 | 0.00000000 | 2.356194490192 | 2.356194490192 | 0.00000000000 |
| 3.14159265 | 0.62831853 | 2.827433388230 | 2.827433388229 | 1.758593E-012 |
| 3.14159265 | 1.25663706 | 3.298672286269 | 3.298672286266 | 2.716493E-012 |
| 3.14159265 | 1.88495559 | 3.769911184307 | 3.769911184304 | 2.822631E-012 |
| 3.14159265 | 2.51327412 | 4.241150082346 | 4.241150082344 | 2.002842E-012 |
| 3.14159265 | 3.14159265 | 4.712388980384 | 4.712388980384 | 0.00000000000 |
| 3.7699111 | 0.00000000 | 2.513274122871 | 2.513274122871 | 0.00000000000 |
| 3.7699111 | 0.62831853 | 3.188674698852 | 3.188674698850 | 1.846078E-012 |
| 3.7699111 | 1.25663706 | 3.798092269208 | 3.798092269205 | 2.930988E-012 |
| 3.7699111 | 1.88495559 | 4.300747093782 | 4.300747093779 | 3.117506E-012 |
| 3.7699111 | 2.51327412 | 4.696639172575 | 4.696639172573 | 2.172484E-012 |
| 3.7699111 | 3.14159265 | 5.026548245743 | 5.026548245743 | 0.00000000000 |
| 4.3982297 | 0.00000000 | 2.670353755551 | 2.670353755551 | 0.00000000000 |

*Продолжение таблицы 1.*

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 4.3982297 | 0.62831853 | 3.483933003849 | 3.483933003847 | 1.870059E-012 |
| 4.3982297 | 1.25663706 | 4.190749506365 | 4.190749506362 | 2.932765E-012 |
| 4.3982297 | 1.88495559 | 4.724820257475 | 4.724820257472 | 3.102407E-012 |
| 4.3982297 | 2.51327412 | 5.086145257179 | 5.086145257177 | 2.168043E-012 |
| 4.3982297 | 3.14159265 | 5.340707511102 | 5.340707511102 | 0.00000000000 |
| 5.0265482 | 0.00000000 | 2.827433388230 | 2.827433388230 | 0.00000000000 |
| 5.0265482 | 0.62831853 | 3.672428563064 | 3.672428563062 | 1.682654E-012 |
| 5.0265482 | 1.25663706 | 4.410660992116 | 4.410660992114 | 2.596145E-012 |
| 5.0265482 | 1.88495559 | 4.976147669763 | 4.976147669760 | 2.775557E-012 |
| 5.0265482 | 2.51327412 | 5.368888596002 | 5.368888596000 | 2.011724E-012 |
| 5.0265482 | 3.14159265 | 5.654866776461 | 5.654866776461 | 0.00000000000 |
| 5.6548667 | 0.00000000 | 2.984513020910 | 2.984513020910 | 0.00000000000 |
| 5.6548667 | 0.62831853 | 3.754161376498 | 3.754161376497 | 1.147526E-012 |
| 5.6548667 | 1.25663706 | 4.457826726461 | 4.457826726460 | 1.705302E-012 |
| 5.6548667 | 1.88495559 | 5.054729330643 | 5.054729330642 | 1.857181E-012 |
| 5.6548667 | 2.51327412 | 5.544869189044 | 5.544869189043 | 1.461053E-012 |
| 5.6548667 | 3.14159265 | 5.969026041820 | 5.969026041820 | 0.00000000000 |
| 6.2831853 | 0.00000000 | 3.141592653589 | 3.141592653589 | 0.00000000000 |
| 6.2831853 | 0.62831853 | 3.769911184307 | 3.769911184307 | 4.440892E-016 |
| 6.2831853 | 1.25663706 | 4.398229715025 | 4.398229715025 | 8.881784E-016 |
| 6.2831853 | 1.88495559 | 5.026548245743 | 5.026548245743 | 8.881784E-016 |
| 6.2831853 | 2.51327412 | 5.654866776461 | 5.654866776461 | 0.00000000000 |
| 6.2831853 | 3.14159265 | 6.283185307179 | 6.283185307179 | 0.00000000000 |

$h_1 = h_2 = 2.094395102393195\text{E-}002$, $n_1 = 300, n_2 = 150$

Бесконечная норма невязки (норма Чебышева), абсолютное и относительное значения равны

$$\|eps\|_C = \max_{m=0,n_2,\,n=0,n_1} \left| u_{m,n} - exact_{m,n} \right| = 3.2152058 \cdot 10^{-12}, \quad \frac{\|eps\|_C}{\|u\|_C} = 5.11715908 \cdot 10^{-13}.$$

Норма Чебышева для невязки любой задачи зависит от числа узлов и уменьшается при увеличении числа узлов в сетке. Можно сказать, что норма уменьшается тем быстрее, чем больше порядок погрешности разностной схемы. То есть справедлива формула [1; 2; 3]

$$\|eps\|_C^{2n_1,2n_2} = \frac{\|eps\|_C^{n_1,n_2}}{2^p} \tag{18}$$

Где p-порядок погрешности, более подробная сетка содержит $2n_1 \times 2n_2$ узлов, а менее подробная исходная сетка $n_1 \times n_2$ узлов. В нашем алгоритме программа дает нормы невязок

$$\frac{\|eps\|_C^{n_1,n_2}}{\|eps\|_C^{2n_1,2n_2}} = \frac{\|eps\|_C^{n_1=50,n_2=25}}{\|eps\|_C^{n_1=100,n_2=50}} = \frac{2.144382893476404\text{E-}009}{3.381916968692167\text{E-}011} \approx 63{,}4 \approx 2^6 \Leftrightarrow p = 6$$

То есть, алгоритм имеет шестой порядок погрешности. Все функции и переменные в программе, написанной на языке FORTRAN (с примером (14)), имеют двойную точность. Программа содержит две самостоятельных подпрограммы – решение уравнения Пуассона методом прогонки по столбцам матрицы за конечное число элементарных операций и подпрограмму модификации правой части уравнения Пуассона.

```
module stolb;integer(8),parameter::n1=300,n2=150,n22=n2-1,n11=n1-1;end module stolb;
program puasson1;use stolb;use dfimsl;integer(8)::i,j,k
re-
al(8)::h1,h2,hh2,exact(0:n2,0:n1),x,y,z,f1,f2,f3,f,u(0:n2,0:n1),u11(0:n2,0:n1),ff0(n22,n11),ff(n22,n1
1),fff(n22,n11);
real(8)::aa(0:n2,0:n2),bb1(0:n2,0:n2),bb2(0:n2,0:n2),a,b,c,d,max,max1,max2,eps(0:n2,0:n1),pi
f(x,y)=dsin(x)*dsin(y);f1(x,y)=-dsin(x)*dsin(y)/2d0;f2(x,y,z)=z/2d0+x/4d0+y/2d0+x*y/(4d0*z)
f3(x,y,h1)=(h1*h1-(h1*h1*h1*h1/6d0)+h1*h1*h1*h1*h1*h1*(2d0/360d0+1d0/90d0))*f(x,y)
pi=2d0*dasin(1d0);max1=-1d3;min1=1d3;a=0d0;b=2d0*pi;c=0d0;d=pi;
h1=(b-a)/dfloat(n1);h2=(d-c)/dfloat(n2); print*,"h1=",h1,"h2=",h2
do i=0,n2;do j=0,n2;if(j==i)then;aa(i,j)=-10d0/3d0;bb1(i,j)=2d0/3d0;bb2(i,j)=2d0/3d0
elseif(j==i+1.or. j==i-1)then;aa(i,j)=2d0/3d0;bb1(i,j)=1d0/6d0;bb2(i,j)=1d0/6d0;
else;aa(i,j)=0d0;bb1(i,j)=0d0;bb2(i,j)=0d0;endif;enddo;enddo;
do i=0,n2;y=c+h2*dfloat(i);do j=0,n1;x=a+h1*dfloat(j);exact(i,j)=f1(x,y)+f2(x,y,pi);
if(mod(i,10)==0.and.mod(j,10)==0)then;endif;if(abs(exact(i,j))>max1)then;max1=abs(exact(i,j));
endif;enddo;enddo;do i=1,n22;y=c+h2*dfloat(i); do j=1,n11;x=a+h1*dfloat(j);ff0(i,j)=f3(x,y,h1);
enddo;enddo;do i=1,n22;x=a+h1*dfloat(i); do
j=1,n11;y=c+h2*dfloat(j);u11(i,j)=0d0;enddo;enddo;
do i=0,n2;y=c+h2*dfloat(i);u11(i,0)=f2(0,y,pi);u11(i,n1)=f2(2d0*pi,y,pi);enddo;do j=0,n1;
x=a+h1*dfloat(j);u11(0,j)=f2(x,0,pi);u11(n2,j)=f2(x,pi,pi);enddo;call modifica-
tion3(aa,bb1,bb2,u11,ff0,fff);
max2=-1d3;do i=1,n22;do
j=1,n11;if(abs(fff(i,j))>max2)then;max2=abs(fff(i,j));endif;enddo;enddo;
call puasson(u11,fff,u);do i=1,n2;enddo;max=-1d3;do i=0,n2;do j=0,n1;eps(i,j)=dabs(exact(i,j)-
u(i,j));
if(eps(i,j)>max)then;max=dabs(exact(i,j)-u(i,j));endif;enddo;enddo;print*,"norma
C=",max,"eps=",max/max1;
open(1, file='1.txt');do j=0,n1;do
i=0,n2;x=a+h1*dfloat(j);y=c+h2*dfloat(i);if(mod(j,30)==0.and.mod(i,30)==0)then
2 write(1,*) x,y,exact(i,j),u(i,j),eps(i,j);endif;enddo;enddo;end program puasson1;
subroutine puasson(u11,fff,u);use stolb;integer(4)::i,j,k,kk;
real(8)::a,b,c,d,h,h1,h2,x,y,u(0:n2,0:n1),u11(0:n2,0:n1),uu11(0:n1,0:n2),fff(n22,n11),ff(n11,n22);
re-
al(8)::nu(n11,n22),lamda(n11,n22,n22),aa1(n22,n22),aa(n22,n22),cc(n22,n22),bb1(n22,n22),u1(n1
1,n22);
re-
al(8)::bb22(n22,n22),bb2(n22,n22),aa11(n22,n22),cc11(n22,n22),bb11(n22,n22),bb0(n22,n22),bb1
0(n22,n22);
do i=1,n22;do j=1,n22;if(j==i)then;aa(i,j)=-
10d0/3d0;bb1(i,j)=2d0/3d0;bb2(i,j)=2d0/3d0;elseif(j==i+1.or. j==i-1)then;
aa(i,j)=2d0/3d0;bb1(i,j)=1d0/6d0;bb2(i,j)=1d0/6d0;else;aa(i,j)=0d0;bb1(i,j)=0d0;bb2(i,j)=0d0;en
dif;enddo;enddo;
ff=transpose(fff);aa11=transpose(aa);bb11=transpose(bb1);bb22=transpose(bb2);do
j=0,n1,1;u(0,j)=u11(0,j);
u(n2,j)=u11(n2,j);enddo;do i=0,n2,1;u(i,0)=u11(i,0);u(i,n1)=u11(i,n1);enddo;call
obr(n22,aa11,aa1);
lamda(1,1:n22,1:n22)=-
matmul(bb22(1:n22,1:n22),aa1(1:n22,1:n22));nu(1,1:n22)=matmul(ff(1,1:n22),aa1(1:n22,1:n22));
```

```
do j=2,n11-1;bb10(1:n22,1:n22)=matmul(lamda(j-
1,1:n22,1:n22),bb11(1:n22,1:n22))+aa11(1:n22,1:n22);call obr(n22,bb10,aa1);
lamda(j,1:n22,1:n22)=-matmul(bb22(1:n22,1:n22),aa1(1:n22,1:n22));
nu(j,1:n22)=matmul((ff(j,1:n22)-matmul(nu(j-
1,1:n22),bb11(1:n22,1:n22))),aa1(1:n22,1:n22));enddo;
bb0(1:n22,1:n22)=matmul(lamda(n11-1,1:n22,1:n22),bb11(1:n22,1:n22))+aa11(1:n22,1:n22);call
obr(n22,bb0,aa1);
u1(n11,1:n22)=matmul(ff(n11,1:n22)-matmul(nu(n11-
1,1:n22),bb11(1:n22,1:n22)),aa1(1:n22,1:n22));do j=n11-1,1,-1;
u1(j,1:n22)=matmul(u1(j+1,1:n22),lamda(j,1:n22,1:n22))+nu(j,1:n22);enddo;
do i=1,n22;do j=1,n11;u(i,j)=u1(j,i);enddo;enddo;end subroutine;
subroutine obr(n11,bb,aa1);
use msimsl;integer(4)::n11,Lda,Ldainv;real(8)::ainv(n11,n11) ,bb(n11,n11),aa1(n11,n11);
Lda=n11;Ldainv=n11;call dLinrg(n11,bb,n11,ainv,n11);aa1(:,:)=ainv(:,:);end subroutine;
subroutine modification3(aa,bb1,bb2,w1,ff0,ff);use
stolb;integer(8)::i,j;real(8)::w1(0:n2,0:n1),ff0(n22,n11),ff(n22,n11);
real(8)::aa(0:n2,0:n2),bb1(0:n2,0:n2),bb2(0:n2,0:n2);do j=2,n11-1,1;ff(1,j)=ff0(1,j)-
bb1(1,0)*w1(0,j-1)-aa(1,0)*w1(0,j)-bb2(1,0)*w1(0,j+1);
ff(n22,j)=ff0(n22,j)-bb1(n2-1,n2)*w1(n2,j-1)-aa(n2-1,n2)*w1(n2,j)-bb2(n2-
1,n2)*w1(n2,j+1);enddo;do i=2,n22-1,1;
ff(i,1)=ff0(i,1)-bb1(i,i-1)*w1(i-1,0)-bb1(i,i)*w1(i,0)-bb1(i,i+1)*w1(i+1,0);
ff(i,n11)=ff0(i,n11)-bb2(i,i-1)*w1(i-1,n1)-bb2(i,i)*w1(i,n1)-bb2(i,i+1)*w1(i+1,n1);enddo
ff(1,1)=ff0(1,1)-bb1(1,0)*w1(0,0)-bb1(1,1)*w1(1,0)-bb1(1,2)*w1(2,0)-aa(1,0)*w1(0,1)-
bb2(1,0)*w1(0,2);
ff(1,n11)=ff0(1,n11)-bb1(1,0)*w1(0,n1-2)-bb2(1,0)*w1(0,n1)-bb2(1,1)*w1(1,n1)-aa(1,0)*w1(0,n1-
1)-bb2(1,2)*w1(2,n1);
ff(n22,1)=ff0(n22,1)-bb1(n2-1,n2-2)*w1(n2-2,0)-aa(n2-1 ,n2)*w1(n2,1)-bb1(n2-1,n2-1)*w1(n2-
1,0)-bb1(n2-1,n2)*w1(n2,0)-bb2(n2-1,n2)*w1(n2,2);
ff(n22,n11)=ff0(n22,n11)-bb1(n22,n2)*w1(n2,n1-2)-aa(n22,n2)*w1(n2,n1-1)-bb2(n2-1,n2-
2)*w1(n2-2,n1)-bb2(n2-1,n2-1)*w1(n2-1,n1)-bb2(n2-1,n2)*w1(n2,n1);
do i=2,n2-2;do j=2,n1-2;ff(i,j)=ff0(i,j);enddo;enddo;
end subroutine;
```

Таким образом, опишем кратко алгоритм решения задачи (1) прогонкой по столбцам.

1) Во внутренних узлах прямоугольной сетки вычислить значения правой части уравнения Пуассона по формуле (4) $F_{m,n}$;

2) Модифицировать правую часть уравнения(4) по формулам(13) $\tilde{F}_{m,n}$;

3) Вычислить коэффициенты прогонки вперед по формуле(9);

4) Вычислить последний вектор-столбец решения $u^T_{n_1-1}$ по формуле(10);

5) Вычислить оставшиеся столбцы решения $u^T_n = u^T_{n+1}\lambda_n + \nu_n, \overline{n = n_1 - 2,1,-1};$ (11)

6) Транспонировать полученную матрицу решения $u^T_n, \overline{n = 1, n_1 - 1};$.

Норма невязки в данном примере для $\|eps\|_C^{n_1=300, n_2=150} = 3.2152058793144 \cdot 10^{-12}$ с прогонкой по столбцам сопоставима с нормой невязки в статье[7] $\|eps\|_C^{n_1=250, n_2=375} = 6.436 \cdot 10^{-12}$ с прогонкой по строкам.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. Бахвалов Н.С., Лапин А.В., Чижонков Е.В. Численные методы в задачах и упражнениях: учебное пособие. М.:БИНОМ. Лаборатория знаний. 2010. 240 с.
2. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы/Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков. 7-е изд. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний,2011. 636 с.
3. Волосова Н.К. О решении уравнения Пуассона на прямоугольнике с шестым порядком погрешности за конечное число элементарных операций// Евразийское Научное Объединение. 2020. № 3-1 (61). С. 20-27.
4. Волосова Н.К., Басараб М.А., Волосов К.А., Волосова А.К., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф. Модифицированное разностное уравнение К.Н. Волкова для уравнения Пуассона на прямоугольнике с четвертым порядком погрешности// Евразийское Научное Объединение. 2020. № 6-1 (52). С. 4-11.
5. Волосова Н.К. О решении уравнения Пуассона на прямоугольнике с четвертым порядком погрешности за конечное число элементарных операций// Евразийское Научное Объединение. 2020. № 2-1 (60). С. 11-17.
6. Волосова Н.К., Пастухов Д.Ф., Волосов К.А. Методы расширения области применения методов математической физики // Международная конференция “Квазилинейные уравнения и обратные задачи”. QIPA conference handbook and proceedings. М.: МФТИ. 2018. 20 с..
7. Волосова Н.К. Конечные методы решения уравнения Пуассона на произвольном прямоугольнике с краевым условием Дирихле// Евразийское Научное Объединение.2020.№5-1 (63).С.17-28.
8. Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф., Волосова Н.К., Волосова К.А., Волосова А.К. Численные методы. Лекции. Численный практикум/ Учебное пособие. Новополоцк. Москва, 2021. (3-е издание, дополненное). 237 с.
9. Некоторые методы уравнения теплопроводности в параллелепипеде, полученные методом быстрых разложений/А.Д. Чернышев, В.В. Горяйнов, С.В. Кузнецов, О.Ю. Никифорова // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: сборник трудов Международной научной конференции, Воронеж, 07-09 декабря 2020 года/ФБГОУ ВО “Воронежский государственный университет”. Воронеж: Научно-исследовательские публикации, 2021. С. 1461-1473.
10. Применение быстрых разложений для построения точных решений задачи о прогибе прямоугольной мембраны под действием переменной нагрузки / А.Д. Чернышев, В.В. Горяйнов, С.В. Кузнецов, О.Ю. Никифорова // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2021. №70. С. 127-142.
11. Пикулин В.П. Практический курс по уравнениям математической физики/ В.П. Пикулин, С.И. Похожаев. Москва: МЦНМО. 2004. 208 с.
12. Волосова Н.К., Басараб М.А., Волосов К.А., Волосова А.К., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф. Простейшая математическая модель образования фибрина в аневризмах кровеносных капилляров// Евразийское Научное Объединение. 2021. № 10-1 (80). С. 17-23.
13. Волосова Н.К., Басараб М.А., Волосов К.А., Волосова А.К., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф. Обобщенная модель открытой каверны для аневризмы кровеносных сосудов // Евразийское Научное Объединение. 2021. № 8-1 (78). С. 34-38.
14. Волосова Н.К. Нестационарная гидродинамическая задача в открытой прямоугольной каверне// Евразийское Научное Объединение. 2021. № 3-1 (73). С. 16-21.
15. Волосова Н.К., Басараб М.А., Волосов К.А., Волосова А.К., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф. О роли профиля скорости на верхнем отрезке в гидродинамической задаче для прямоугольной каверны// Евразийское Научное Объединение. 2020. № 5-1 (63). С. 11-17.
16. Волосова Н.К. Возможные виды течения в закрытой каверне и противоречия в задаче с подвижной крышкой// Евразийское Научное Объединение. 2020. № 12-1 (70). С. 4-14.
17. Волосова Н.К., Басараб М.А., Волосов К.А., Волосова А.К., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф. Вычисление поля давления по полю скорости в гидродинамической задаче для прямоугольной каверны// Евразийское Научное Объединение. 2020. № 9-1 (67). С. 1-8.

18. Волосова Н.К. О нестационарном уравнении диффузии с полной производной по времени на прямоугольнике // Евразийское Научное Объединение. 2021. № 1-1 (71). С. 9-14.

19. Волосова Н.К. Мягкие краевые условия в гидродинамической задаче для профиля скорости в открытой прямоугольной каверне// Евразийское Научное Объединение. 2021. № 5-1 (75).С.9-14.

20. Волосова Н.К., Басараб М.А., Волосова А.К., Зайцев В.Ф. Волосов К.А., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф. Этап конструирования математической модели аневризмы. Течения в каверне и противоречия в задаче в “закрытой” кювете // В сборнике: Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Материалы 74-й научной конференции «Герценовские чтения 2021”. Санкт-Петербург». 2021. С. 208-213.

21. Волосов К.А. Одевание решений для некоторых неинтегрируемых задач и некоторые инвариантные свойства анзаца метода Хироты//Дифференциальные уравнения. 2005. Т 41.№ 11.С. 1572-1575.

22. Волосов К.А. Построение решений квазилинейных параболических уравнений в параметрическом виде // Дифференциальные уравнения. 2007, Т.43. №.4. С.492-497.

23. Волосов К.А. Новый метод построения решений уравнений с частными производными в параметрической форме // Известия Российского государственного педагогического университета им. А.И. Герцена. 2007. Т.7. № 26. С. 13-20.

24. Волосов К.А. Конструкция решений квазилинейных уравнений с частными производными// Сибирский журнал индустриальной математики 2008. Т.11. №.2(34). С. 29-39.

25. Вакуленко С.П., Волосова Н.К., Пастухов Д.Ф. Способы передачи QR-кода в стеганографии / С.П. Вакуленко, Н.К. Волосова, Д.Ф. Пастухов //Мир транспорта. 2018. Т.16. № 5(78). С. 14-25.

26. Пастухов Д.Ф., Волосова Н.К., Волосова А.К. Некоторые методы передачи QR-кода в стеганографии / Д.Ф. Пастухов, Н.К. Волосова, А.К. Волосова //Мир транспорта. 2019. Т.17. № 3(82). С. 16-39.

27. Волосова Н.К., Волосов К.А., Волосова А.К., Карлов М.И., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф. Модифицированная формула Ньютона – касательных парабол на комплексной плоскости// Евразийское Научное Объединение. 2021. № 6-1 (76). С. 21-27.

28. Пастухов Ю.Ф., Волосова Н.К., Волосов К.А., Волосова А.К., Пастухов Д.Ф., Пастухов А.Ю. Теорема о связи чисел Кармайкла с функцией Кармайкла// Евразийское Научное Объединение. 2021. № 6-1 (76). С. 50-53.

29. Волосова Н.К., Волосов К.А., Волосова А.К., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф., Сперанская О.А. Геометрический подход для качественного поиска конвективных ячеек по температурному полю// Евразийское Научное Объединение. –2021. № 6-1 (76). С. 21-27.

30. Волосова Н.К. Вычисление производных дробного порядка с высокой степенью точности // Евразийское Научное Объединение. 2020. № 11-1 (69). С. 1-9.

31. Волосова Н.К. Вычисление производных дробного порядка, принимающего значения на интервале(0,1), с высокой степенью точности// Евразийское Научное Объединение. –2021. № 2-1 (72). С. 30-37.

32. Волосова Н.К. Математическая модель динамики образования фибрина в аневризмах кровеносных капилляров// Евразийское Научное Объединение. –2021. № 12-1 (63). С. 11-17.

*© Волосова Н.К., Волосов К.А., Волосова А.К.,*
*Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф., 2022.*