Таблица 5

Ульяновск-Москва.

Стоимость билета + Багаж	*Коэффициент комфорта*
4.794	*1*
3.248	*1.5*
6.010	*0.375*
7.807	*15*
11.476	*5.5*

Таблица 6

Ульяновск-Сочи.

Стоимость билета + Багаж	*Коэффициент комфорта*
5.700	*1.25*
7.087	*6.5*
6.360	*9*
6.360	*11*
7.087	*13*

В данной формуле мы наблюдаем обратно пропорциональную зависимость: чем меньше коэффициент комфорта, тем более комфортным будет полет. Для выбора оптимального рейса необходимо сопоставить стоимость билета (с учетом багажа) и коэффициент комфорта.

Коэффициент комфорта был рассмотрен в наиболее обобщенном виде, то есть, например, не учитывалось конкретное время вылета (утром/днем/вечером/ночью), а лишь общее время в пути.

Резюме. Таким образом, мы оптимизировали выбор наиболее оптимального рейса по трём направлениям на 10 марта 2022 года. С помощью формулы мы смогли наиболее общим путем определить оптимальность рейса, сопоставив коэффициента комфорта и стоимости полета (билет + багаж). Мы постарались облегчить людям выбирать оптимальный полет с помощью коэффициента комфорта.

***

1. Приложение Aviasales

Пастухов Ю.Ф.[1], Волосова Н.К.[2], Волосов К.А.[3], Волосова А.К.[3], Пастухов Д.Ф.[1], Карлов М.И.[4]

Матрица Гессе по старшим производным локальной записи гладкой функции в расслоении скоростей – тензор второго ранга типа (0,2)

[1]Полоцкий государственный университет (Россия, Новополоцк)
[2]МГТУ им. Н.Э. Баумана
[3]МИИТ
[4]Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет) (Россия, Москва)

doi: 10.18411/trnio-05-2022-57

Аннотация

В данной статье исследуются свойства гладких функций в расслоенных пространствах скоростей конечного порядка $n \geq 1$. Изучено преобразование матрицы Гессе по старшим производным в локальной записи гладкой функции. Сформулирован и доказан следующий результат: матрица вторых частных производных по старшим производным локальной записи $L\left(x,\overset{\bullet}{x},...,x^{(n)}\right)$ в гладкой функции $L:T^nX_m\to\Re\ (n\geq1)$ преобразуется как тензор 2-ого ранга типа (0,2).

Ключевые слова: гладкие функции, частные производные, матрица Гессе, гладкие многообразия, расслоенное пространство скоростей, база расслоения, тензор.

Abstract

In this paper, we study the properties of smooth smooth functions in finite - order stratified velocity spaces. The transformation of the Hessen matrix by the highest derivatives in the local notation of a smooth function is studied. The following result is formulated and proved: the matrix of second partial derivatives with respect to the highest derivatives of a local entry in a smooth function is transformed as a rank 2 tensor of type (0,2).

Keywords: smooth functions, partial derivatives, the Hessen matrix, smooth manifolds, stratified velocity space, bundle base, tensor.

Введение. Пусть X_m – гладкое многообразие размерности m; $T^nX_m\ (n\geq1)$ – гладкое расслоенное пространство скоростей порядка n с базой расслоения X_m; $L:T^nX_m\to\Re$ – гладкая функция в точке $v_x^n\in T^nX_m$. В данной работе доказано: матрица вторых частных производных по старшим производным локальной записи $L\left(x,\overset{\bullet}{x},...,x^{(n)}\right)$ в гладкой функции $L:T^nX_m\to\Re\ (n\geq1)$ преобразуется как тензор 2-ого ранга типа (0,2)

$$\frac{\partial^2\bar{L}(\bar{x},\overset{\bullet}{\bar{x}},...,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial\overset{(n)}{\bar{x}}{}^k\,\partial\overset{(n)}{\bar{x}}{}^l}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial^2L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial\overset{(n)}{x}{}^i\,\partial\overset{(n)}{x}{}^j}\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial\bar{x}^k}\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial\bar{x}^l}.$$

Постановка задачи и основные полученные результаты

Теорема 1 [1]. Пусть $x^i=S^i(\overline{x_1},\overline{x_2},...,\overline{x_m})$ $S:(\bar{x})\to x(\bar{x})$ – невырожденное гладкое преобразование координат в базе гладкого многообразия X_m расслоенного пространства скоростей порядка T^pX_m, $i=\overline{1,m}$, тогда

$$\frac{\partial x^{(l)i}(\bar{x},\overset{\bullet}{\bar{x}},...,\overset{(p)}{\bar{x}})}{\partial\overset{(s)}{\bar{x}}{}^j}=\begin{cases}C_l^s\cdot D_t^{l-s}\left(\dfrac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial\bar{x}^j}\right),\ C_l^s=\dfrac{l!}{s!\cdot(l-s)!},\ l!=\prod\limits_{k=1}^{l}k,\ l\geq s\\ 0,\ l<s.\end{cases}\tag{1}$$

Теорема 2. Пусть $L:T^nX_m\to\Re$ (n ≥1) – гладкая функция в точке $v_x^n\in T^nX_m$, $L\left(x,\overset{\bullet}{x},...,x^{(n)}\right)$ – локальная запись L в системе координат (x) в базе X_m, $L\left(\bar{x},\overset{\bullet}{\bar{x}},...,\overset{(n)}{\bar{x}}\right)$ – локальная запись функции L в системе координат $(\bar{x})$. Тогда матрица вторых частных производных по старшим производным $L\left(x,\overset{\bullet}{x},...,x^{(n)}\right)$ преобразуется как тензор 2-ого ранга типа (0,2):

$$\frac{\partial^2\bar{L}(\bar{x},\overset{\bullet}{\bar{x}},...,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial\overset{(n)}{\bar{x}}{}^k\,\partial\overset{(n)}{\bar{x}}{}^l}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial^2L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial\overset{(n)}{x}{}^i\,\partial\overset{(n)}{x}{}^j}\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial\bar{x}^k}\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial\bar{x}^l}.\tag{2}$$

Доказательство. $\dfrac{\partial\bar{L}(\bar{x},\overset{\bullet}{\bar{x}},...,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial\overset{(n)}{\bar{x}}{}^l}=\sum\limits_{j=1}^{m}\sum\limits_{t=0}^{n}\dfrac{\partial L(x(\bar{x}),...,\overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial\overset{(t)}{x}{}^j}\dfrac{\partial\overset{(t)}{x}{}^j(\bar{x})}{\partial\overset{(n)}{\bar{x}}{}^l}.$

$$\frac{\partial^2 \bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ldots,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(n)k}{\bar{x}}\,\partial \overset{(n)l}{\bar{x}}}=\frac{\partial}{\partial \overset{(n)k}{\bar{x}}}\Big(\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ldots,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(n)l}{\bar{x}}}\Big)=\frac{\partial}{\partial \overset{(n)k}{\bar{x}}}\Big(\sum_{j=1}^{m}\sum_{t=0}^{n}\frac{\partial L(x(\bar{x}),\ldots,\overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial \overset{(t)j}{x}}\frac{\partial \overset{(t)j}{x}(\bar{x})}{\partial \overset{(n)l}{\bar{x}}}\Big)=$$

$$=\sum_{j=1}^{m}\sum_{t=0}^{n}\Big(\frac{\partial}{\partial \overset{(n)k}{\bar{x}}}\Big(\frac{\partial L(x(\bar{x}),\ldots,\overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial \overset{(t)j}{x}}\Big)\frac{\partial \overset{(t)j}{x}(\bar{x})}{\partial \overset{(n)l}{\bar{x}}}+\frac{\partial L(x(\bar{x}),\ldots,\overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial \overset{(t)j}{x}}\frac{\partial}{\partial \overset{(n)k}{\bar{x}}}\Big(\frac{\partial \overset{(t)j}{x}(\bar{x})}{\partial \overset{(n)l}{\bar{x}}}\Big)\Big)=$$

$$=\sum_{j=1}^{m}\sum_{t=0}^{n}\frac{\partial}{\partial \overset{(n)k}{\bar{x}}}\Big(\frac{\partial L(x(\bar{x}),\ldots,\overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial \overset{(t)j}{x}}\Big)\frac{\partial \overset{(t)j}{x}(\bar{x})}{\partial \overset{(n)l}{\bar{x}}}+\sum_{j=1}^{m}\sum_{t=0}^{n}\frac{\partial L(x(\bar{x}),\ldots,\overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial \overset{(t)j}{x}}\frac{\partial}{\partial \overset{(n)k}{\bar{x}}}\Big(\frac{\partial \overset{(t)j}{x}(\bar{x})}{\partial \overset{(n)l}{\bar{x}}}\Big)=\frac{\partial^2 \bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ldots,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(n)k}{\bar{x}}\,\partial \overset{(n)l}{\bar{x}}}. \quad (3)$$

Преобразуем левую часть в формуле (3):

$$\frac{\partial}{\partial \overset{(n)k}{\bar{x}}}\Big(\frac{\partial L(x(\bar{x}),\ldots,\overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial \overset{(t)j}{x}}\Big)=\sum_{d=1}^{m}\sum_{s=0}^{n}\frac{\partial}{\partial \overset{(s)d}{x}}\Big(\frac{\partial L(x(\bar{x}),\ldots,\overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial \overset{(t)j}{x}}\Big)\frac{\partial \overset{(s)d}{x}(\bar{x})}{\partial \overset{(n)l}{\bar{x}}}. \quad (4)$$

Подставляем формулу (4) в левую часть формулы (3):

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{t=0}^{n}\frac{\partial}{\partial \overset{(n)k}{\bar{x}}}\Big(\frac{\partial L(x(\bar{x}),\ldots,\overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial \overset{(t)j}{x}}\Big)\frac{\partial \overset{(t)j}{x}(\bar{x})}{\partial \overset{(n)l}{\bar{x}}}=$$

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{t=0}^{n}\Big(\sum_{d=1}^{m}\sum_{s=0}^{n}\frac{\partial}{\partial \overset{(s)d}{x}}\Big(\frac{\partial L(x(\bar{x}),\ldots,\overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial \overset{(t)j}{x}}\Big)\Big)\cdot\frac{\partial \overset{(s)d}{x}(\bar{x})}{\partial \overset{(n)k}{\bar{x}}}\frac{\partial \overset{(t)j}{x}(\bar{x})}{\partial \overset{(n)l}{\bar{x}}}. \quad (5)$$

Учитываем полученную формулу (5) в формуле (3):

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{t=0}^{n}\frac{\partial}{\partial \overset{(n)k}{\bar{x}}}\Big(\frac{\partial L(x(\bar{x}),\ldots,\overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial \overset{(t)j}{x}}\Big)\frac{\partial \overset{(t)j}{x}(\bar{x})}{\partial \overset{(n)l}{\bar{x}}}+\sum_{j=1}^{m}\sum_{t=0}^{n}\frac{\partial L(x(\bar{x}),\ldots,\overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial \overset{(t)j}{x}}\frac{\partial}{\partial \overset{(n)k}{\bar{x}}}\Big(\frac{\partial \overset{(t)j}{x}(\bar{x})}{\partial \overset{(n)l}{\bar{x}}}\Big)=$$

$$=\sum_{j=1}^{m}\sum_{t=0}^{n}\Big(\sum_{d=1}^{m}\sum_{s=0}^{n}\frac{\partial}{\partial \overset{(s)d}{x}}\Big(\frac{\partial L(x(\bar{x}),\ldots,\overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial \overset{(t)j}{x}}\Big)\frac{\partial \overset{(s)d}{x}(\bar{x})}{\partial \overset{(n)k}{\bar{x}}}\Big)\cdot\frac{\partial \overset{(t)j}{x}(\bar{x})}{\partial \overset{(n)l}{\bar{x}}}+\sum_{j=1}^{m}\sum_{t=0}^{n}\frac{\partial L(x(\bar{x}),\ldots,\overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial \overset{(t)j}{x}}\frac{\partial}{\partial \overset{(n)k}{\bar{x}}}\Big(\frac{\partial \overset{(t)j}{x}(\bar{x})}{\partial \overset{(n)l}{\bar{x}}}\Big)=$$

$$=\sum_{j=1}^{m}\sum_{t=0}^{n}\sum_{d=1}^{m}\sum_{s=0}^{n}\frac{\partial}{\partial \overset{(s)d}{x}}\Big(\frac{\partial L(x(\bar{x}),\ldots,\overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial \overset{(t)j}{x}}\Big)\frac{\partial \overset{(s)d}{x}(\bar{x})}{\partial \overset{(n)k}{\bar{x}}}\frac{\partial \overset{(t)j}{x}(\bar{x})}{\partial \overset{(n)l}{\bar{x}}}+\sum_{j=1}^{m}\sum_{t=0}^{n}\frac{\partial L(x(\bar{x}),\ldots,\overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial \overset{(t)j}{x}}\frac{\partial}{\partial \overset{(n)k}{\bar{x}}}\Big(\frac{\partial \overset{(t)j}{x}(\bar{x})}{\partial \overset{(n)l}{\bar{x}}}\Big)=$$

$$=\sum_{j=1}^{m}\sum_{t=0}^{n}\sum_{d=1}^{m}\sum_{s=0}^{n}\frac{\partial^2 L(x(\bar{x}),\ldots,\overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial \overset{(s)d}{x}\,\partial \overset{(t)j}{x}}\frac{\partial \overset{(s)d}{x}(\bar{x})}{\partial \overset{(n)k}{\bar{x}}}\frac{\partial \overset{(t)j}{x}(\bar{x})}{\partial \overset{(n)l}{\bar{x}}}+\sum_{j=1}^{m}\sum_{t=0}^{n}\frac{\partial L(x(\bar{x}),\ldots,\overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial \overset{(t)j}{x}}\frac{\partial}{\partial \overset{(n)k}{\bar{x}}}\Big(\frac{\partial \overset{(t)j}{x}(\bar{x})}{\partial \overset{(n)l}{\bar{x}}}\Big). \quad (6)$$

По теореме 1 $\dfrac{\partial x^{(l)i}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ldots,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(s)j}{\bar{x}}}=\begin{cases}C_l^s\cdot D_t^{l-s}\left(\dfrac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right), C_l^s=\dfrac{l!}{s!\cdot(l-s)!}, l!=\prod_{k=1}^{l}k, l\ge s \\ 0, l<s\end{cases}$ $i,j=\overline{1,m}$.

Так как $n\ge t\ge 0$, то

$$\frac{\partial x^{(t)j}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ldots,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(n)l}{\bar{x}}}=\begin{cases}C_n^n\cdot D_t^{n-n=0}\left(\dfrac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^l}\right)=D_t^{n-n=0}\left(\dfrac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^l}\right)=\dfrac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^l}, C_n^n=\dfrac{n!}{n!\cdot(n-n)!}=1, n!=\prod_{k=1}^{n}k, t=n=\delta_n^t\dfrac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^l} \\ 0, t<n.\end{cases}$$

Поэтому, при $n\ge t\ge 0$,

$$\frac{\partial x^{(t)j}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ldots,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(n)i}{\bar{x}}}=\delta_n^t\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}. \quad (7)$$

где $\delta_n^t = \begin{cases} 1, t = n \\ 0, t \neq n \end{cases}$ – символ Кронекера.

Подставляем выражение (7) в правую часть формулы (6):

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{t=0}^{n}\frac{\partial L(x(\bar{x}),...,\overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial \overset{(t)j}{x}}\frac{\partial}{\partial \overset{(n)k}{x}}\Big(\frac{\partial \overset{(t)j}{x}(\bar{x})}{\partial \overset{(n)l}{x}}\Big)=\sum_{j=1}^{m}\sum_{t=0}^{n}\frac{\partial L(x(\bar{x}),...,\overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial \overset{(t)j}{x}}\frac{\partial}{\partial \overset{(n)k}{x}}\Big(\delta_n^t\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\Big)=$$

$$=\sum_{j=1}^{m}\sum_{t=0}^{n}\frac{\partial L(x(\bar{x}),...,\overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial \overset{(t)j}{x}}\delta_n^t\frac{\partial}{\partial \overset{(n)k}{x}}\Big(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\Big)=\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial L(x(\bar{x}),...,\overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial \overset{(n)j}{x}}\frac{\partial}{\partial \overset{(n)k}{x}}\Big(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\Big). \tag{8}$$

Поскольку $n \geq 1$, то $\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}$ зависит от $\bar{x}$ и не зависит от производных 1-ого порядка и выше. Значит, $\frac{\partial}{\partial \overset{(n)k}{x}}\Big(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\Big)=0.$ Следовательно, полученное выражение (8) – это правая часть в выражении (6)

$$\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial L(x(\bar{x}),...,\overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial \overset{(n)j}{x}}\frac{\partial}{\partial \overset{(n)k}{x}}\Big(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\Big)=0.$$

Значит, формула (3), равная формуле (6), с учетом (8) преобразуется следующим образом:

$$\frac{\partial^2 \bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}},...,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(n)k}{\bar{x}}\,\partial \overset{(n)l}{\bar{x}}}=\sum_{j=1}^{m}\sum_{t=0}^{n}\sum_{d=1}^{m}\sum_{s=0}^{n}\frac{\partial^2 L(x(\bar{x}),...,\overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial \overset{(s)d}{x}\,\partial \overset{(t)j}{x}}\frac{\partial \overset{(s)d}{x}(\bar{x})}{\partial \overset{(n)k}{\bar{x}}}\frac{\partial \overset{(t)j}{x}(\bar{x})}{\partial \overset{(n)l}{\bar{x}}}+\sum_{j=1}^{m}\sum_{t=0}^{n}\frac{\partial L(x(\bar{x}),...,\overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial \overset{(t)j}{x}}\frac{\partial}{\partial \overset{(n)k}{\bar{x}}}\Big(\frac{\partial \overset{(t)j}{x}(\bar{x})}{\partial \overset{(n)l}{\bar{x}}}\Big)=$$

$$=\sum_{j=1}^{m}\sum_{t=0}^{n}\sum_{d=1}^{m}\sum_{s=0}^{n}\frac{\partial^2 L(x(\bar{x}),...,\overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial \overset{(s)d}{x}\,\partial \overset{(t)j}{x}}\frac{\partial \overset{(s)d}{x}(\bar{x})}{\partial \overset{(n)k}{\bar{x}}}\frac{\partial \overset{(t)j}{x}(\bar{x})}{\partial \overset{(n)l}{\bar{x}}}. \tag{9}$$

Учитывая формулы (7) справедливы равенства:

$$n \geq t \geq 0,\ \frac{\partial x^{(t)j}(\bar{x},\dot{\bar{x}},...,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(n)l}{\bar{x}}}=\delta_n^t\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^l},\ \text{где } \delta_n^t=\begin{cases}1, t=n\\ 0, t<n\end{cases} \text{– символ Кронекера}; \tag{10}$$

$$n \geq s \geq 0,\ \frac{\partial x^{(s)d}(\bar{x},\dot{\bar{x}},...,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(n)k}{\bar{x}}}=\delta_n^s\frac{\partial x^d(\bar{x})}{\partial \bar{x}^k},\ \text{где } \delta_n^s=\begin{cases}1, s=n\\ 0, s<n\end{cases} \text{– символ Кронекера.} \tag{11}$$

Подставляя выражения (10), (11) в формулу (9), имеем

$$\frac{\partial^2 \bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}},...,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(n)k}{\bar{x}}\,\partial \overset{(n)l}{\bar{x}}}=\sum_{j=1}^{m}\sum_{t=0}^{n}\sum_{d=1}^{m}\sum_{s=0}^{n}\frac{\partial^2 L(x(\bar{x}),...,\overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial \overset{(s)d}{x}\,\partial \overset{(t)j}{x}}\frac{\partial \overset{(s)d}{x}(\bar{x})}{\partial \overset{(n)k}{\bar{x}}}\frac{\partial \overset{(t)j}{x}(\bar{x})}{\partial \overset{(n)l}{\bar{x}}}=$$

$$=\sum_{j=1}^{m}\sum_{t=0}^{n}\sum_{d=1}^{m}\sum_{s=0}^{n}\frac{\partial^2 L(x(\bar{x}),...,\overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial \overset{(s)d}{x}\,\partial \overset{(t)j}{x}}\delta_n^s\frac{\partial x^d(\bar{x})}{\partial \bar{x}^k}\delta_n^t\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^l}. \tag{12}$$

Поскольку $\delta_n^s=\begin{cases}1, s=n\\ 0, s<n\end{cases}$ – символ Кронекера, то

$$\sum_{s=0}^{n}\frac{\partial^2 L(x(\bar{x}),...,\overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial \overset{(s)d}{x}\,\partial \overset{(t)j}{x}}\delta_n^s\frac{\partial x^d(\bar{x})}{\partial \bar{x}^k}=\sum_{s=0}^{n-1}\frac{\partial^2 L(x(\bar{x}),...,\overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial \overset{(s)d}{x}\,\partial \overset{(t)j}{x}}\delta_n^s\frac{\partial x^d(\bar{x})}{\partial \bar{x}^k}+\frac{\partial^2 L(x(\bar{x}),...,\overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial \overset{(s)d=n}{x}\,\partial \overset{(t)j}{x}}\delta_n^{s=n}\frac{\partial x^d(\bar{x})}{\partial \bar{x}^k}=$$

$$=\frac{\partial^2 L(x(\bar{x}),...,\overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial \overset{(s=n)d}{x}\,\partial \overset{(t)j}{x}}\delta_n^{s=n}\frac{\partial x^d(\bar{x})}{\partial \bar{x}^k}=\frac{\partial^2 L(x(\bar{x}),...,\overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial \overset{(n)d}{x}\,\partial \overset{(t)j}{x}}\frac{\partial x^d(\bar{x})}{\partial \bar{x}^k}, \tag{13}$$

поскольку $\delta_n^s = 0,\ s < n;\ \delta_n^{s=n} = 1$.

Подставляем формулу (13) в выражение (12):

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{t=0}^{n}\sum_{d=1}^{m}\sum_{s=0}^{n}\frac{\partial^2 L(x(\bar{x}),\dots,\overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial \overset{(s)d}{x}\,\partial \overset{(t)j}{x}}\delta_n^s\frac{\partial x^d(\bar{x})}{\partial \bar{x}^k}\delta_n^t\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^l} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{t=0}^{n}\delta_n^t\sum_{d=1}^{m}(\sum_{s=0}^{n}\frac{\partial^2 L(x(\bar{x}),\dots,\overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial \overset{(s)d}{x}\,\partial \overset{(t)j}{x}}\delta_n^s\frac{\partial x^d(\bar{x})}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^l}) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m}\sum_{t=1}^{m}\sum_{d=0}^{n}\frac{\partial^2 L(x(\bar{x}),\dots,\overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial \overset{(n)d}{x}\,\partial \overset{(t)j}{x}}\delta_n^t\frac{\partial x^d(\bar{x})}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^l} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{d=1}^{m}\sum_{t=0}^{n}\frac{\partial^2 L(x(\bar{x}),\dots,\overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial \overset{(n)d}{x}\,\partial \overset{(t)j}{x}}\delta_n^t\frac{\partial x^d(\bar{x})}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^l}. \quad (14)$$

Поскольку $\delta_n^t = 0,\ t < n;\ \delta_n^{t=n} = 1$, то

$$\sum_{t=0}^{n}\frac{\partial^2 L(x(\bar{x}),\dots,\overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial \overset{(n)d}{x}\,\partial \overset{(t)j}{x}}\delta_n^t\frac{\partial x^d(\bar{x})}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^l} = \sum_{t=0}^{n-1}\frac{\partial^2 L(x(\bar{x}),\dots,\overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial \overset{(n)d}{x}\,\partial \overset{(t)j}{x}}\delta_n^t\frac{\partial x^d(\bar{x})}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^l} + \frac{\partial^2 L(x(\bar{x}),\dots,\overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial \overset{(n)d}{x}\,\partial \overset{(t=n)j}{x}}\delta_n^{t=n}\frac{\partial x^d(\bar{x})}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^l} =$$

$$= \frac{\partial^2 L(x(\bar{x}),\dots,\overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial \overset{(n)d}{x}\,\partial \overset{(n)j}{x}}\frac{\partial x^d(\bar{x})}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^l}. \quad (15)$$

Учитывая выражение (15) в (14), имеем

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{d=1}^{m}\sum_{t=0}^{n}\frac{\partial^2 L(x(\bar{x}),\dots,\overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial \overset{(n)d}{x}\,\partial \overset{(t)j}{x}}\delta_n^t\frac{\partial x^d(\bar{x})}{\partial \bar{x}^k} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{d=1}^{m}(\sum_{t=0}^{n}\frac{\partial^2 L(x(\bar{x}),\dots,\overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial \overset{(n)d}{x}\,\partial \overset{(t)j}{x}}\delta_n^t\frac{\partial x^d(\bar{x})}{\partial \bar{x}^k}) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m}\sum_{d=1}^{m}\frac{\partial^2 L(x(\bar{x}),\dots,\overset{(n)}{x}(\bar{x}))}{\partial \overset{(n)d}{x}\,\partial \overset{(n)j}{x}}\frac{\partial x^d(\bar{x})}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial x^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^l} = \frac{\partial^2 \bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\dots,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(n)k}{\bar{x}}\,\partial \overset{(n)l}{\bar{x}}}.$$

Теорема 2 доказана.

Полученные в статье результаты кроме дифференциальной геометрии, несомненно, связаны также с задачами математической физики, как полигоном уравнений в частных производных для многих областей математики [2],[3],[4],[5],[6].

***

1. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях / Л.Е. Евтушик [и др.] // Итоги науки и техники. Серия «Проблемы геометрии»: ВИНИТИ. – 1979. – Т. 9. – С. 5–246.
2. Некоторые методы уравнения теплопроводности в параллелепипеде, полученные методом быстрых разложений/А.Д. Чернышев, В.В. Горяйнов, С.В. Кузнецов, О.Ю. Никифорова// Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: сборник трудов Международной научной конференции, Воронеж, 07-09 декабря 2020 года/ФБГОУ ВО “Воронежский государственный университет”. – Воронеж: Научно-исследовательские публикации, 2021. – С. 1461-1473.
3. Применение быстрых разложений для построения точных решений задачи о прогибе прямоугольной мембраны под действием переменной нагрузки/ А.Д. Чернышев, В.В. Горяйнов, С.В. Кузнецов, О.Ю. Никифорова//Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2021. №70. – С. 127-142. DOI 10.17223/19988621/70/11.
4. Волосова Н.К., Волосова А.К., Волосов К.А., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф. Некоторые конечные методы решения уравнения Пуассона на прямоугольнике с шестым порядком погрешности: Учебное пособие к лекционным и практическим занятиям для студентов специальности 1-40 01 01 Программное обеспечение информационных технологий 1-98 01 01 Компьютерная безопасность/Д.Ф. Пастухов, Н.К. Волосова, Ю.Ф. Пастухов [и др.]. -3-е издание. – Москва: Учреждение образования ”Полоцкий государственный университет”,2022. – 33 С. EDN PWLFIQ.
5. Волосова Н.К., Волосова К.А., Волосова А.К., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф. Метод последовательных функциональных компенсаций в задачах математической физики: Учебное пособие для практических занятий по курсу Уравнения математической физики/ Н.К. Волосова, К.А. Волосов, А.К. Волосова, Д.Ф. Пастухов, Ю.Ф. Пастухов – Москва: Полоцкий государственный университет, 2022. – 32 С.
6. Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф., Волосова Н.К., Волосова К.А., Волосова А.К. Численные методы. Лекции. Численный практикум. Учебное пособие к лекционным и практическим занятиям для студентов специальности 1- 40 01 01 Программное обеспечение информационных технологий 1-98 01 01 Компьютерная безопасность/ Новополоцк. Москва, 2021. (3-е изд., дополненное).