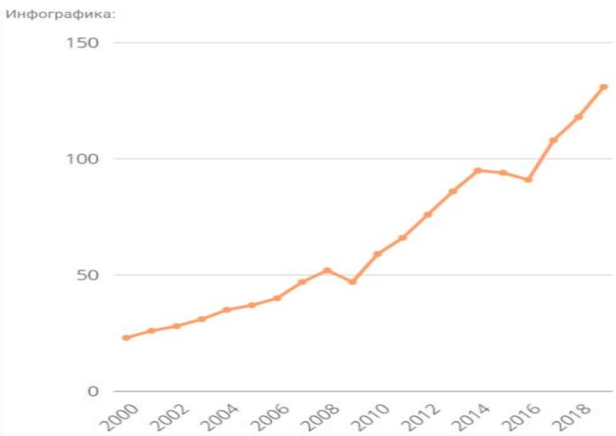

Рисунок 3. График изменения пассажиропотока в авиакомпании Аэрофлот (по вертикали - воздушный путь перевозок, миллионов человек, по горизонтали - год).

Так в чем же выгода авиакомпаний?

Выгода перевозчика в том, что вы становитесь постоянным клиентом, а ваша — в том, чтобы иногда летать почти бесплатно.

Чтобы использовать «Аэрофлот-бонус» правильно, нужно завести привычку считать мили и их стоимость. Она поможет не только дороже продать мили, но и быстрее их накопить.

Вывод: На основе проделанной работы можно сделать вывод, что программа лояльностей благоприятно влияет на пассажиропоток авиакомпании(что видно на графике), мили стали неотъемлемой частью путешественников, каждый день сотни людей приобретают авиабилеты за частичную стоимость, списывая заработанные мили. Благодаря вычислениям, мы выяснили, что каждая миля имеет свою стоимость, в зависимости от рейса, поэтому так важно быть знакомым с правилами участия в системе лояльностей, и уметь выгодно совершать перелеты.

***

1. Программа Аэрофлот Бонус [Электронный ресурс], системные требования: интернет-браузер, URL: https://www.aeroflot.ru/ru-ru/afl_bonus.
2. Как летать бесплатно? [Электронный ресурс], системные требования: интернет-браузер, URL: https://www.aviasales.kz/blog/miles-and-flights

Волосова Н.К.[1], Волосов К.А.[2], Волосова А.К.[2], Пастухов Д.Ф.[3], Пастухов Ю.Ф.[3]

Решение интегральных уравнений Фредгольма с невырожденными ядрами последовательными приближениями квадратурой с десятым порядком погрешности

[1]МГТУ им. Н.Э. Баумана
[2]МИИТ
(Россия, Москва)
[3]Полоцкий государственный университет
(Россия, Новополоцк)

doi: 10.18411/trnio-05-2022-55

Аннотация

Для численного решения уравнения Фредгольма второго рода с невырожденным ядром методом последовательных приближений предложена квадратурная формула с десятым порядком погрешности, если число узлов на отрезке интегрирования кратно десяти. Новая формула по сравнению с формулой Симпсона дает верных 15-16 значащих цифр вычисленной функции решения даже при небольшом числе интервалов 10,20 на отрезке. Полученный алгоритм существенно повышает точность и уменьшает время вычислений. В то время как формула Симпсона дает только 13 значащих цифр с числом интервалов 1000 на отрезке.

Ключевые слова: интегральные уравнения, численные методы, прямые методы, уравнения математической физики.

Abstract

For the numerical solution of the Fredholm equation of the second kind with a nondegenerate kernel by the method of successive approximations, a quadrature formula with the tenth order of error is proposed if the number of nodes on the integration interval is a multiple of ten. The new formula, compared to Simpson's formula, gives the correct 15-16 significant digits of the calculated solution function even with a small number of intervals of 10, 20 on the segment. The resulting algorithm significantly improves the accuracy and reduces the computation time. While Simpson's formula gives only 13 significant figures with the number of intervals 1000 on the segment.

Keywords: integral equations, numerical methods, direct methods, equations of mathematical physics.

Введение. В работах [1], [2], [3] указаны методы решения уравнения Фредгольма второго рода численно и аналитически, то есть методы замены интеграла и метод вырожденного ядра. А в работе [3] описан метод последовательных итераций численного решения интегральных уравнений. В работе [1] применяется квадратурная формула Симпсона. В данной работе мы предложим алгоритм численного решения подобных уравнений с большей точности и за существенно меньшее время используя квадратурную интегральную формулу с 10 порядком погрешности [2].

Постановка задачи.

Рассмотрим два примера с уравнением Фредгольма 2 рода, которые решим точно методом вырожденного ядра. Суть метода [1] заключается в следующем.

$$y(x)-\lambda\int_a^b K(x,s)y(s)ds = f(x),\ K(x,s)=\sum_{i=1}^n A_i(x)B_i(s) \tag{1}$$

$K(x,s)=\sum_{i=1}^n A_i(x)B_i(s)$ - в вырожденном ядре все слагаемые можно разбить на множители с разделенными переменными x,s. $\{A_i(x)\}_{i=1}^n, \{B_i(s)\}_{i=1}^n$ - системы линейно независимых функций. Согласно [1] решаем систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ).

$$D_i-\lambda\sum_{j=1}^n a_{i,j}D_j = f_i, a_{i,j}=\int_a^b A_j(s)B_i(s)ds,\ \ i,j=\overline{1,n},\ f_i=\int_a^b f(s)B_i(s)ds,\ i=\overline{1,n},\ \ y(x)=f(x)+\lambda\sum_{i=1}^n D_iA_i(x) \tag{2}$$

Рассмотрим пример 29.3 [1, стр. 137]

$$y(x)=e^{-x}+\frac{1}{2}\int_0^1 xe^s y(s)ds,\ f(x)=e^{-x}, K(x,s)=xe^s, \lambda=\frac{1}{2}, A_1(x)=x, B_1(s)=e^s \tag{3}$$

Решаем(3) $a_{1,1}=\int_0^1 A_1(s)B_1(s)ds=\int_0^1 se^s ds = se^s\Big|_0^1-\int_0^1 e^s ds = e-(e-1)=1,\ f_1=\int_0^1 f(s)B_1(s)ds=\int_0^1 e^{-s}e^s ds=1$.

Запишем СЛАУ(2)

$$D_1-\frac{1}{2}a_{1,1}D_1=f_1 \Leftrightarrow \frac{D_1}{2}=1 \Leftrightarrow D_1=2, y(x)=f(x)+\lambda D_1A_1(x)=e^{-x}+\frac{1}{2}\cdot 2x=e^{-x}+x \tag{4}$$

Второй пример. Рассмотрим измененное условие примера 29.12 [1,стр. 139]

$$y(x)=-\frac{x}{6}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\int_0^1(1+2xs)y(s)ds,\ f(x)=-\frac{x}{6}-\frac{1}{2}, K(x,s)=1+2xs, \lambda=\frac{1}{2}, A_1(x)=1, B_1(s)=1, A_1(x)=2x, B_1(s)=s \tag{5}$$

В условии(5) собственное значение $\lambda=\frac{1}{2}$, что отличается от примера 29.12 со значением $\lambda=1$. Дело в том, чтобы решить уравнение (1) методом последовательных приближений необходимо выполнить неравенство[1],[2] то есть метод численно расходится при $\lambda = 1$.

$$\lambda = \frac{1}{2} \le \frac{1}{\left(\int\limits_a^b\int\limits_a^b K^2(x,s)dsdx\right)^{1/2}} = \frac{1}{\left(\int\limits_0^1\int\limits_0^1 (1+2xs)^2 dsdx\right)^{1/2}} = \frac{1}{\left(\int\limits_0^1\int\limits_0^1 1+4sx+4s^2x^2dsdx\right)^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{\int\limits_0^1\left(1+2x+\frac{4}{3}x^2\right)dx}} = \frac{1}{\sqrt{\left(x+x^2+\frac{4}{9}x^3\right)\Big|_0^1}} = \frac{3}{\sqrt{22}} < 1$$

Далее найдем точное решение примера (5) методом вырожденного ядра, получим

$$a_{1,1} = \int\limits_0^1 A_1(s)B_1(s)ds = \int\limits_0^1 1\cdot 1ds = 1, a_{1,2} = \int\limits_0^1 A_2(s)B_1(s)ds = \int\limits_0^1 2s\cdot 1ds = s^2\Big|_0^1 = 1, a_{2,1} = \int\limits_0^1 A_1(s)B_2(s)ds = \int\limits_0^1 1\cdot sds = \frac{s^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2},$$

$$a_{2,2} = \int\limits_0^1 A_2(s)B_2(s)ds = \int\limits_0^1 2s\cdot sds = \frac{2s^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{2}{3},\ f_1 = \int\limits_0^1 f(s)B_1(s)ds = \int\limits_0^1\left(-\frac{s}{6}-\frac{1}{2}\right)\cdot 1ds = -\frac{s^2}{12}-\frac{s}{2}\Big|_0^1 = -\frac{7}{12},$$

$$f_2 = \int\limits_0^1 f(s)B_2(s)ds = \int\limits_0^1\left(-\frac{s}{6}-\frac{1}{2}\right)\cdot sds = -\frac{s^3}{18}-\frac{s^2}{4}\Big|_0^1 = -\frac{11}{36}$$

Запишем СЛАУ (2) для условия (5)

$$\begin{cases} D_1 - \lambda\left(a_{1,1}D_1 + a_{1,2}D_2\right) = f_1 \\ D_2 - \lambda\left(a_{2,1}D_1 + a_{2,2}D_2\right) = f_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D_1 - \frac{1}{2}\left(D_1 + D_2\right) = -\frac{7}{12} \\ D_2 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}D_1 + \frac{2}{3}D_2\right) = -\frac{11}{36} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6D_1 - 6D_2 = -7 \\ -9D_1 + 24D_2 = -11 \end{cases} \Leftrightarrow D_1 = -\frac{13}{5}, D_2 = -\frac{43}{30}$$

$$y(x) = f(x) + \lambda\left(D_1A_1(x) + D_2A_2(x)\right) = -\frac{x}{6} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(-\frac{13}{5}\cdot 1 - \frac{43}{30}\cdot 2x\right) = -\frac{8}{5}x - \frac{9}{5} \qquad (6)$$

Функция (6) - точное решение интегрального уравнения (5).

Запишем формулу метода последовательных приближений [3] для интегрального уравнения второго рода

$$y^{k+1}(x) = \lambda\int\limits_a^b K(x,s)y^k(s)ds + f(x),\ k = 0,1,2,...y^0(s) \equiv 0, y^1(s) \equiv f(x) \qquad (7)$$

В формуле (7) будем численно вычислять интеграл квадратурной формулой [1], [2], получим

$$y_i^{k+1} = \lambda H_p\left(\sum_{j=1}^n y_i^k K_{i,j} C_j\right) + f_i, y_i^k = y^k(x_i), K_{i,j} = K(x_i, s_j), i, j = \overline{0,n}, x_i = a + h\cdot i, h = \frac{b-a}{n}, k = 0,1,2,..., y_i^1 \equiv f_i = f(x_i) \quad (8)$$

$s_j = a + h\cdot j, j = \overline{0,n}$. В формуле(8) C_j - квадратурные коэффициенты, а качество численного решения уравнения(1) с помощью квадратурной формулы(8) зависит, прежде всего, от качества выбора C_j. H_p- эквивалентный шаг интегрирования, который зависит от $n = pk, p,k \in N$ числа кратности p, которому кратно полное число интервалов n.

В работе[2] авторами был предложен следующий алгоритм для выбора коэффициентов C_j, который гарантирует интегрирование формулы(7) с десятым порядком погрешности.

$$C_j = \begin{cases} C_1 = 16067\ /\ 299376,\ j = 0 \vee j = n; \\ C_2 = 26575\ /\ 74844,\ j(\mathrm{mod}\,10) \equiv 1 \vee j(\mathrm{mod}\,10) \equiv 9; \\ C_3 = -16175\ /\ 99792,\ j(\mathrm{mod}\,10) \equiv 2 \vee j(\mathrm{mod}\,10) \equiv 8; \\ C_4 = 5675\ /\ 6237,\ j(\mathrm{mod}\,10) \equiv 3 \vee j(\mathrm{mod}\,10) \equiv 7; \\ C_5 = -4825\ /\ 5544,\ j(\mathrm{mod}\,10) \equiv 4 \vee j(\mathrm{mod}\,10) \equiv 6; \\ C_6 = 17807\ /\ 12474,\ j(\mathrm{mod}\,10) \equiv 5; \\ C_7 = 16067\ /\ 149688,\ j(\mathrm{mod}\,10) \equiv 0 \wedge 0 < j < n; \\ \sum\limits_{j=0}^{10} C_j = 2 \end{cases} \qquad (9)$$

Окончательно, формула(8) переходит в формулу(10) [2,стр.197] $n = 10k, k \in N$

$$y_i^{k+1} = 5h\lambda\left(\sum_{j=1}^{n} y_i^k K_{i,j} C_j\right) + f_i\,, y_i^k = y^k(x_i), K_{i,j} = K(x_i, s_j), i, j = \overline{0,n}, k = 0,1,2,...h = \frac{b-a}{n}, y_i^1 \equiv f_i \qquad (10)$$

В формуле (10) весовые коэффициенты вычисляются с двойной точностью алгоритмом (9).

Таблица 1

Значение узлов равномерной сетки, численные значения неизвестной функции, точные значения и модуль их разности с параметрами n=20,p=50 для первого примера(5).

x_i	$y_i = f(x_i)$	y_i^{exact}	$\Delta_i = \left\lvert y_i - y_i^{exact}\right\rvert$
0.0000000000000000	*1.0000000000000000*	*1.0000000000000000*	*0.0000000000000000*
0.0500000000000000	*1.0012294245007141*	*1.0012294245007141*	*0.0000000000000000*
0.1000000000000000	*1.0048374180359596*	*1.0048374180359596*	*0.0000000000000000*
0.1500000000000000	*1.0107079764250579*	*1.0107079764250577*	*0.0000000000000002*
0.2000000000000000	*1.0187307530779819*	*1.0187307530779819*	*0.0000000000000000*
0.2500000000000000	*1.0288007830714048*	*1.0288007830714050*	*0.0000000000000002*
0.3000000000000000	*1.0408182206817178*	*1.0408182206817178*	*0.0000000000000000*
0.3500000000000000	*1.0546880897187134*	*1.0546880897187134*	*0.0000000000000000*
0.4000000000000000	*1.0703200460356395*	*1.0703200460356395*	*0.0000000000000000*
0.4500000000000000	*1.0876281516217734*	*1.0876281516217732*	*0.0000000000000002*
0.5000000000000000	*1.1065306597126334*	*1.1065306597126334*	*0.0000000000000000*
0.5500000000000000	*1.1269498103804867*	*1.1269498103804867*	*0.0000000000000000*
0.6000000000000001	*1.1488116360940266*	*1.1488116360940266*	*0.0000000000000000*
0.6500000000000000	*1.1720457767610160*	*1.1720457767610162*	*0.0000000000000002*
0.7000000000000001	*1.1965853037914096*	*1.1965853037914096*	*0.0000000000000000*
0.7500000000000000	*1.2223665527410148*	*1.2223665527410148*	*0.0000000000000000*
0.8000000000000000	*1.2493289641172218*	*1.2493289641172216*	*0.0000000000000002*
0.8500000000000001	*1.2774149319487269*	*1.2774149319487267*	*0.0000000000000002*
0.9000000000000000	*1.3065696597405991*	*1.3065696597405991*	*0.0000000000000000*
0.9500000000000001	*1.3367410234545012*	*1.3367410234545012*	*0.0000000000000000*
1.0000000000000000	*1.3678794411714423*	*1.3678794411714423*	*0.0000000000000000*

Из таблицы(1) видно, что за небольшое число итераций p=50 даже с крупным шагом равномерной сетки (число интервалов сетки n=20) достигается двойная точность- 16 верных знаков, то есть 15-16 значащих цифр совпадающих у точного решения и численного во всех узлах сетки с нормой Чебышева для разности сеточных функций. $\Delta_{n=20} = \left\lVert y^{num} - y^{exact}\right\rVert = \max\limits_{i=0,n=20}\left\lvert y_i^{num} - y_i^{exact}\right\rvert = 2\cdot 10^{-16}$- Если взять 10 интервалов на отрезке $[a=0, b=1]$ программа дает значение $\Delta_{n=10} = \left\lVert y^{num} - y^{exact}\right\rVert = \max\limits_{i=0,n=10}\left\lvert y_i^{num} - y_i^{exact}\right\rvert = 80\cdot 10^{-16}$. То есть двойная точность достигается настолько быстро даже при грубом большом шаге , что нет возможности проверить порядок погрешности формулы(10). В то же время[2] применение квадратурной формулы Симпсона с числом интервалов 1000 двойная точность не достигается $\Delta_{n=1000} = \left\lVert y^{num} - y^{exact}\right\rVert = \max\limits_{i=0,n=1000}\left\lvert y_i^{num} - y_i^{exact}\right\rvert = 446\cdot 10^{-16}$, три последних знака в вычислениях неверны. Поэтому преимущество нашей формулы(10) налицо!

Рассмотрим второй пример и норму Чебышева для погрешности с параметрами программы n=20,p=200 $\Delta_{n=20} = \left\lVert y^{num} - y^{exact}\right\rVert = \max\limits_{i=0,n=20}\left\lvert y_i^{num} - y_i^{exact}\right\rvert = 22\cdot 10^{-16}$. Фактически это предельное значение погрешности достигается при небольшом числе интервалов n=20. Верными в записи полученных значений являются 15 цифр.

Далее написана программа с двойной точностью для переменных, функций на языке C++, что связано с популярностью данного языка для первого примера.

```
#include<stdio.h>
 #include<math.h>
double f1(double x,double s){return x*exp(s);}
```

```
double f(double x){return exp(-x);}
double ff(double x){return exp(-x)+x;}
int const n=20,p=50;int main()
{int i,j,k; double a,b,x,h,y,z,y1,mass[n+1],mass2[n+1],mass3[n+1],eps[n+1],lambda,max;
double s,c1,c2,c3,c4,c5,c6,c7;double ss;
x=1.0;a=0.0;b=1.0;c1=16067.0/299376.0; c2=26575.0/74844.0;c3=-16175.0/99792.0; c4=5675.0/6237.0;c5=-4825.0/5544.0; c6=17807.0/12474.0;c7=16067/149688.0;
lambda=0.5;h=(b-a)/double(n);ss=0.0;
for(i=0;i<=n;i++){x=a+h*double(i);mass[i]=f(x);}
for(k=0;k<=p;k++){for(i=0;i<=n;i++){x=a+h*double(i);ss=0.0;for(j=0;j<=n;j++)
{s=a+h*double(j);y=f1(x,s)*mass[j];if(j==0 || j==n){ss=ss+h*c1*y;}if(j%10==1 || j%10==9)
{ss=ss+h*c2*y;}if(j%10==2 || j%10==8){ss=ss+h*c3*y;}if(j%10==3 || j%10==7){ss=ss+h*c4*y;}
if(j%10==4 || j%10==6){ss=ss+h*c5*y;}
if(j%10==5){ss=ss+h*c6*y;}if(j%10==0 && j>0 && j<n){ss=ss+h*c7*y;}}ss=ss*5.0*lambda;
mass2[i]=ss+f(x);}for(i=0;i<=n;i++){mass[i]=mass2[i];}}max=-10.0;for(j=0;j<=n;j++)
{x=a+h*double(j);mass3[j]=ff(x);eps[j]=ff(x)-mass2[j];if(eps[j]<0.0){eps[j]=-eps[j];}if(eps[j]>max){max=eps[j];}
printf("x=%.16lf res=%.16lf exact=%.16lf eps=%.16lf\n",x,mass2[j],mass3[j],eps[j]);}printf("norma=%.16lf\n",max);}
```

Отметим, что полученный алгоритм решения интегрального уравнения с двойной точностью входит в класс аналогичных математических задач решаемых численно с высокой степенью точности, полученных авторами работами ранее в работах [4],[5], а также исследователями А.Д. Чернышевым, В.В. Горяйновым, С.В. Кузнецовым, О.Ю. Никифоровой в работах [6], [7].

***

1. Бахвалов Н.С., Лапин А.В., Чижонков Е.В. Численные методы в задачах и упражнениях: учебное пособие. – М.:БИНОМ. Лаборатория знаний, 2010. – 240 с.
2. Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф., Волосова Н.К., Волосова К.А., Волосова А.К. Численные методы. Лекции. Численный практикум. Учебное пособие к лекционным и практическим занятиям для студентов специальности 1- 40 01 01 Программное обеспечение информационных технологий 1-98 01 01 Компьютерная безопасность/ Новополоцк. Москва, 2021. (3-е изд., дополненное).
3. А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1976. 508 с.
4. Пастухов Д.Ф., Волосова Н.К., Волосова А.К. Некоторые методы передачи QR-кода в стеганографии/ Д.Ф. Пастухов, Н.К. Волосова, А.К. Волосова //Мир транспорта. – 2019. Т.17. № 3(82). С. 16-39.
5. Волосова Н.К., Волосова А.К., Волосов К.А., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф. Некоторые конечные методы решения уравнения Пуассона на прямоугольнике с шестым порядком погрешности: Учебное пособие к лекционным и практическим занятиям для студентов специальности 1-40 01 01 Программное обеспечение информационных технологий 1-98 01 01 Компьютерная безопасность/Д.Ф. Пастухов, Н.К. Волосова, Ю.Ф. Пастухов [и др.]. -3-е издание. – Москва: Учреждение образования ”Полоцкий государственный университет”,2022. – 33 С. EDN PWLFIQ.
6. Некоторые методы уравнения теплопроводности в параллелепипеде, полученные методом быстрых разложений/А.Д. Чернышев, В.В. Горяйнов, С.В. Кузнецов, О.Ю. Никифорова// Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: сборник трудов Международной научной конференции, Воронеж, 07-09 декабря 2020 года/ФБГОУ ВО “Воронежский государственный университет”. – Воронеж: Научно-исследовательские публикации, 2021. – С. 1461-1473.
7. Применение быстрых разложений для построения точных решений задачи о прогибе прямоугольной мембраны под действием переменной нагрузки/ А.Д. Чернышев, В.В. Горяйнов, С.В. Кузнецов, О.Ю. Никифорова//Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2021. №70. – С. 127-142. DOI 10.17223/19988621/70/11.