ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ (МАТЕМАТИКА)

УДК 517.956.32 **DOI 10.52928/2070-1624-2022-38-4-92-102**

ЗАДАЧА ГУРСА ДЛЯ СОПРЯЖЕННОГО МОДЕЛЬНОГО ТЕЛЕГРАФНОГО УРАВНЕНИЯ СО СКОРОСТЬЮ $a(s,\tau)$ В ВЕРХНЕЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ

д-р физ.-мат. наук, проф. Ф. Е. ЛОМОВЦЕВ
(Белорусский государственный университет, Минск)

В верхней полуплоскости найдены в явном виде классическое решение и критерий корректности задачи Гурса для линейного неоднородного сопряженного модельного телеграфного уравнения с переменной скоростью $a(s,\tau)$. *Получена явная формула единственного и устойчивого по правой части уравнения и данным Гурса классического решения этой задачи Гурса. Данная формула содержит неявные функции характеристик уравнения. В случае однородного сопряженного модельного телеграфного уравнения классическое решение этой задачи Гурса является функцией Римана во всех линейных смешанных (начально-граничных) задачах для неоднородного модельного телеграфного уравнения с переменной скоростью* $a(s,\tau)$. *Эта функция Римана нами вычислена. Найден критерий корректности по Адамару (необходимые и достаточные условия) её однозначной и устойчивой по правой части уравнения и данным Гурса всюду разрешимости. Этот критерий состоит из требований гладкости на правую часть уравнения и два данных Гурса. Требования гладкости на правую часть уравнения – условие непрерывности правой части и соответствующие интегральные условия гладкости на правую часть уравнения и на данные Гурса – их дважды непрерывная дифференцируемость в верхней полуплоскости.*

Ключевые слова: *задача Гурса, сопряженное модельное телеграфное уравнение, неявные функции характеристик, критерий корректности, классическое решение, функция Римана.*

Введение. В настоящей работе найдено в явном виде классическое решение и полностью изучена корректность по Адамару (существование, единственность и устойчивость) задачи Гурса для линейного неоднородного сопряженного модельного телеграфного уравнения с переменной скоростью $a(s,\tau)$ в верхней полуплоскости (теорема 1). Формула единственного и устойчивого классического решения этой задачи Гурса содержит неявные функции характеристик уравнения и их обратные функции. Вывод и применение этой формулы классического решения основаны на соответствующих двенадцати тождествах обращения для двух неявных функций g_1, g_2 характеристик уравнения и их четырёх обратных функций $h_1, h_2, h^{(1)}, h^{(2)}$ из [1]. Эти тождества обращения справедливы в силу определения взаимно обратных функций. Установлен критерий корректности по Адамару однозначной и устойчивой по правой части уравнения и данным Гурса всюду разрешимости этой задачи Гурса. Этот критерий состоит из необходимых и достаточных требований гладкости на правую часть уравнения и два данных Гурса. Необходимые и достаточные требования гладкости на правую часть уравнения – условие непрерывности правой части и соответствующие интегральные условия гладкости на правую часть уравнения [2; 3] и на данные Гурса – их дважды непрерывная дифференцируемость в верхней полуплоскости. Сопряженность модельного телеграфного уравнения понимается в смысле распределений и обобщённых функций соответственно из работ [4; 5]. В нашей статье поставленная задача Гурса решена не методом последовательных приближений из [6], а авторской модификацией известного метода характеристик из [6], которая предполагает выявление общего интеграла (общего решения) уравнения и его подстановку в краевые условия, т.е. в условия Гурса в случае задачи Гурса.

Для однородного сопряженного модельного телеграфного уравнения сужение решения этой задачи Гурса на первую четверть плоскости играет роль функции Римана в смешанных (начально-граничных) задачах для неоднородного модельного телеграфного уравнения с переменной скоростью $a(s,\tau)$ в этой четверти плоскости. Вычислено частное классическое решение неоднородного сопряженного модельного телеграфного уравнения (замечание 2). Найдена функция Римана к задаче Коши. В случае однородного сопряженного модельного телеграфного уравнения классическое решение задачи Гурса служит функцией Римана для различных линейных смешанных задач для неоднородного модельного телеграфного уравнения. Нами вычислена функция Римана в верхней полуплоскости, из которой можно выводить функции Римана для смешанных (начально-граничных) задач с неоднородным модельным телеграфным уравнением в первой четверти плоскости (теорема 2). Выведена формула типа Римана единственного и устойчивого классического решения и установлен критерий корректности первой смешанной задачи для общего телеграфного уравнения с переменными коэффициентами в [7].

1. Постановка задачи и методы исследования. В верхней полуплоскости $G =]-\infty,+\infty[\times]0,+\infty[$ найти классическое решение задачи Гурса для сопряженного модельного телеграфного уравнения

$$\widehat{\mathcal{M}}v(s,\tau) \equiv v_{\tau\tau}(s,\tau) - \left(a^2(s,\tau)v(s,\tau)\right)_{ss} + \left(a^{-1}(s,\tau)a_\tau(s,\tau)v(s,\tau)\right)_\tau + \left(a(s,\tau)a_s(s,\tau)v(s,\tau)\right)_s = f(s,\tau), \quad (1)$$

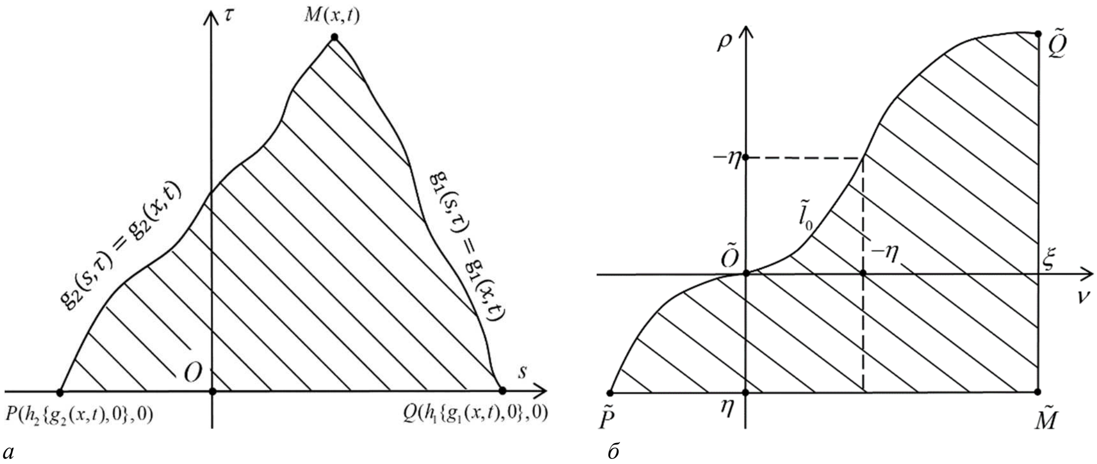
на криволинейных характеристических треугольниках $\Delta MPQ \subset G$, т.е. для всех точек $(s,\tau) \in \Delta MPQ$ в уравнении (1), при условиях Гурса на его сторонах

$$v(s,\tau) = \gamma_1(s,\tau), \; s = h_1\{g_1(x,t),\tau\}, \qquad v(s,\tau) = \gamma_2(s,\tau), \; s = h_2\{g_2(x,t),\tau\}, \quad (2)$$

и условии согласования (сопряжения) данных Гурса

$$\gamma_1(x,t) = \gamma_2(x,t), \; (x,t) \in G, \quad (3)$$

в точках $M(x,t)$ пересечения характеристик $g_1(s,\tau) = g_1(x,t)$, $g_2(s,\tau) = g_2(x,t)$ уравнения (1) (рисунок 1, *а*).



***а* – для функции F ; *б* – для функции $\tilde{F}$**

Рисунок 1. – Характеристические треугольники ΔMPQ и $\Delta\tilde{M}\tilde{P}\tilde{Q}$

Мы обозначаем числом нижних индексов функций соответствующие порядки их частных производных.

Здесь правая часть уравнения f – заданная вещественная функция переменных s, τ; коэффициент уравнения $a(s,\tau) \ge a_0 > 0$, $(s,\tau) \in G$; данные Гурса γ_1, γ_2 – заданные вещественные функции переменных s, τ; g_1, g_2 – указанные ниже характеристики уравнения (1) и h_1, h_2 – указанные ниже их обратные функции из [1].

Линейный дифференциальный оператор $\widehat{\mathcal{M}}$ уравнения (1) является сопряженным оператором к линейному дифференциальному оператору $\mathcal{L}$ модельного телеграфного уравнения

$$\mathcal{L}\, u(s,\tau) \equiv u_{\tau\tau}(s,\tau) - a^2(s,\tau)u_{ss}(s,\tau) - a^{-1}(s,\tau)a_\tau(s,\tau)u_\tau(s,\tau) - a(s,\tau)a_s(s,\tau)u_s(s,\tau) = \tilde{f}(s,\tau), \; (s,\tau) \in G, \quad (4)$$

из статьи [1] в смысле распределений Шварца $\mathcal{D}'(G)$ (обобщенных функций на основном пространстве $\mathcal{D}(G)$ бесконечно дифференцируемых функций $C_0^\infty(G)$ с компактными носителями в G) [4; 5]. Линейное уравнение (1) принято называть формально сопряженным к линейному уравнению (4) [6].

Пусть $C^k(\Omega)$ – множество k раз непрерывно дифференцируемых функций на подмножестве $\Omega \subset R^2$, $R =]-\infty,+\infty[$, и $C^0(\Omega) = C(\Omega)$. Уравнению (1) соответствуют характеристические уравнения

$$ds = (-1)^i a(s,\tau)d\tau, \; i = 1, 2, \quad (5)$$

которые имеют общие интегралы $g_i(s,\tau) = C_i$, $C_i \in R$, $i = 1, 2$. Если коэффициент a строго положителен, т.е. $a(s,\tau) \ge a_0 > 0$, $(s,\tau) \in G$, то переменная τ на характеристиках $g_1(s,\tau) = C_1$, $C_1 \in R$, строго убывает и на характеристиках $g_2(s,\tau)=C_2, C_2\in R$, строго возрастает вместе с ростом s. Поэтому неявные функции характеристик

$$y_i = g_i(s,\tau)=C_i, s\in R, \tau\geq 0, \quad i=1,2, \tag{6}$$

имеют строго монотонные обратные функции $s=h_i\{y_i,\tau\}, \tau\geq 0$, $\tau = h^{(i)}[s,y_i], s\in R$, $i=1,2$. По определению обратных отображений они удовлетворяют следующим тождествам обращения из [1]:

$$g_i(h_i\{y_i,\tau\},\tau)=y_i, \quad \forall\, y_i, \quad h_i\{g_i(s,\tau),\tau\}=s, \quad s\in R, \quad i=1,2, \tag{7}$$

$$g_i(s,h^{(i)}[s,y_i])=y_i, \quad \forall\, y_i, \quad h^{(i)}[s,g_i(s,\tau)]=\tau, \quad \tau\geq 0, \quad i=1,2, \tag{8}$$

$$h_i\{y_i,h^{(i)}[s,y_i]\}=s, \quad s\in R, \quad h^{(i)}[h_i\{y_i,\tau\},y_i]=\tau, \quad \tau\geq 0, \quad i=1,2. \tag{9}$$

В правых частях тождеств (7)–(9) вместе со взаимообратными функциями исключаются переменные, повторяющиеся дважды в левых частях, если даже в левых частях этих тождеств повторяется дважды лишь одно из возможных значений этих переменных. Если коэффициент $a(s,\tau)\geq a_0>0$, $(s,\tau)\in G$, $a\in C^2(G)$, то функции g_i, h_i, $h^{(i)}\in C^2$ по s,τ, y_i, $i=1,2$ [1].

Определение 1. *Классическим решением* задачи Гурса (1)–(3) в $\Delta MPQ\subset G$ называется функция $v(s,\tau)=v(s,\tau;x,t)\in C^2(\Delta MPQ)$, удовлетворяющая в обычном смысле уравнению (1) для $(s,\tau)\in\Delta MPQ$ и условиям Гурса (2) на сторонах MP и QM с условием согласования (3) в вершине треугольника $M(x,t)$.

Мы будем решать задачу Гурса (1)–(3) методом характеристик (распространяющихся волн) из курса уравнений математической физики [6]. Сначала мы найдем общий интеграл уравнения (1) на G, т.е. аналитическое представление множества всех его классических решений на G. Затем подстановкой этого общего интеграла в условия Гурса (2) и условие согласования (3) мы выведем выражение формального решения задачи Гурса (1)–(3) на ΔMPQ. Это решение $v(s,\tau)=v(s,\tau;x,t)$ независимых переменных s и τ содержит в качестве параметра координаты вершины $M(x,t)$ характеристического треугольника ΔMPQ. Наконец, мы установим критерий корректности по Адамару (необходимые и достаточные требования гладкости на f, γ_1,γ_2 существования единственного и устойчивого по f, γ_1,γ_2 классического решения) задачи Гурса (1)–(3) на G.

Замечание 1. В случае $a(s,\tau)=a=const>0$ из [8] ими являются функции:

$$g_1(s,\tau)=s+a\tau, \quad g_2(s,\tau)=s-a\tau, \quad h_1\{y_1,\tau\}=y_1-a\tau,$$

$$h_2\{y_2,\tau\}=y_2+a\tau, \quad h^{(1)}[s,y_1]=(y_1-s)/a, \quad h^{(2)}[s,y_2]=(s-y_2)/a.$$

2. Основной результат. Сначала выведем некоторые необходимые требования гладкости на правую часть уравнения и данные Гурса.

Из постановки задачи Гурса (1)–(3) и определения 1 её классических решений в любом треугольнике $\Delta MPQ\subset G$ легко заключаем необходимость гладкости

$$f\in C(G), \ \gamma_1, \ \gamma_2\in C^2(G). \tag{10}$$

Теорема 1. Пусть в сопряженном модельном телеграфном уравнении (1) коэффициент $a(s,\tau)\geq a_0>0$, $(s,\tau)\in G$, $a\in C^2(G)$. В любом характеристическом треугольнике $\Delta MPQ\subset G$ задача Гурса (1)–(3) имеет единственное и устойчивое по f, γ_1, γ_2 классическое решение $v(s,\tau)\in C^2(\Delta MPQ)$ тогда и только тогда, когда выполняются требования гладкости (10) и

$$H^{(i)}(s,\tau)\equiv\int_0^{\tau} f(h_i\{g_i(s,\tilde\tau),\tilde\tau\},\tilde\tau)\,d\tilde\tau\in C^1(G), \quad i=1,2. \tag{11}$$

Для каждой точки $M(x,t)\in G$ классическим решением задачи Гурса (1)–(3) в ΔMPQ является функция

$$v(s,\tau;x,t)=\{[a(\tilde{s},\tilde{\tau})\gamma_2(\tilde{s},\tilde{\tau})-F(\tilde{s},\tilde{\tau})]\Big|_{\tilde{s}=h_2\{g_2(x,t),\,\tilde{\tau}\}}\Big|_{\tilde{\tau}=\tau_1(g_1(s,\tau))}+$$

$$+[a(\tilde{s},\tilde{\tau})\gamma_1(\tilde{s},\tilde{\tau})-F(\tilde{s},\tilde{\tau})]\Big|_{\tilde{s}=h_1\{g_1(x,t),\,\tilde{\tau}\}}\Big|_{\tilde{\tau}=\tau_2(g_2(s,\tau))}- \qquad (12)$$

$$-[a(\tilde{s},\tilde{\tau})\gamma_2(\tilde{s},\tilde{\tau})-F(\tilde{s},\tilde{\tau})]\Big|_{\tilde{s}=h_2\{g_2(x,t),\,\tilde{\tau}\}}\Big|_{\tilde{\tau}=\tau_1(g_1(x,t))}+F(s,\tau)\}/a(s,\tau),\qquad (s,\tau)\in\Delta MPQ\subset G,$$

где частным классическим решением неоднородного уравнения (1) служит произведение $1/a(s,\tau)$ на

$$F(s,\tau)=\frac{1}{2}\int_0^\tau d\tilde{\tau}\int_{h_2\{g_2(s,\tau),\,\tilde{\tau}\}}^{h_1\{g_1(s,\tau),\,\tilde{\tau}\}}f(\tilde{s},\tilde{\tau})d\,\tilde{s}. \qquad (13)$$

Доказательство. Чтобы вычислить общий интеграл уравнения (1) на G, в нем производим невырожденную замену независимых переменных

$$\xi=g_1(s,\tau),\quad \eta=g_2(s,\tau) \qquad (14)$$

с невырожденным якобианом $J(s,\tau)=\xi_s\eta_\tau-\xi_\tau\eta_s\neq 0$ в G, потому что $a(s,\tau)\geq a_0>0$ в $\widetilde{G}$. Для новой функции $\tilde{v}(\xi,\eta)=v(s(\xi,\eta),\tau(\xi,\eta))\in C^2(\tilde{G})$ уравнение (1) заменой (14) приводится к виду

$$[(\xi_\tau)^2-a^2(\xi_s)^2]\tilde{v}_{\xi\xi}+2aJ(s,\tau)\tilde{v}_{\xi\eta}+[(\eta_\tau)^2-a^2(\eta_s)^2]\tilde{v}_{\eta\eta}+[\xi_{\tau\tau}-a^2\xi_{ss}+a^{-1}a_\tau\xi_\tau-3aa_s\xi_s]\tilde{v}_\xi+$$

$$+[\eta_{\tau\tau}-a^2\eta_{ss}+a^{-1}a_\tau\eta_\tau-3aa_s\eta_s]\tilde{v}_\eta-[(a_s)^2+aa_{ss}-a^{-1}a_{\tau\tau}+a^{-2}(a_\tau)^2]\tilde{v}\equiv$$

$$=\tilde{f}(\xi,\eta)=f(s(\xi,\eta),\tau(\xi,\eta)),\ \ (\xi,\eta)\in\widetilde{G}, \qquad (15)$$

где множество $\widetilde{G}$ (указанное ниже в (28) – образ верхней полуплоскости G при замене (14).

Полные дифференциалы характеристик (6) очевидно тождественно равны нулю, и в силу характеристических уравнений (5) справедливы равенства

$$dg_i=(g_i)_s ds+(g_i)_\tau d\tau=[(g_i)_\tau+(-1)^i a(s,\tau)(g_i)_s]d\tau\equiv 0,\quad (s,\tau)\in G,\quad i=1,2,$$

поэтому согласно (14) имеем соотношения

$$(g_i)_\tau\equiv(-1)^{i+1}a(s,\tau)(g_i)_s,\quad (s,\tau)\in G,\quad i=1,2, \qquad (16)$$

$$\xi_\tau-a(s,\tau)\xi_s=0,\quad \eta_\tau+a(s,\tau)\eta_s=0,\quad (s,\tau)\in G. \qquad (17)$$

Мы дифференцируем уравнения из (17) один раз по τ

$$\xi_{\tau\tau}-a_\tau(s,\tau)\xi_s-a(s,\tau)\xi_{s\tau}=0,\quad \eta_{\tau\tau}+a_\tau(s,\tau)\eta_s+a(s,\tau)\eta_{s\tau}=0, \qquad (18)$$

и затем снова уравнения из (17) дифференцируем один раз по s

$$\xi_{\tau s}-a_s(s,\tau)\xi_s-a(s,\tau)\xi_{ss}=0,\quad \eta_{\tau s}+a_s(s,\tau)\eta_s+a(s,\tau)\eta_{ss}=0. \qquad (19)$$

Уравнения из (18) соответственно суммируем и вычитаем с уравнениями из (19), умноженными на коэффициент $a(s,\tau)$, и приходим к уравнениям

$$\xi_{\tau\tau}-a_\tau(s,\tau)\xi_s-a(s,\tau)a_s(s,\tau)\xi_s-a^2(s,\tau)\xi_{ss}=0,$$

$$\eta_{\tau\tau}-a_\tau(s,\tau)\eta_s-a(s,\tau)a_s(s,\tau)\eta_s-a^2(s,\tau)\eta_{ss}=0. \qquad (20)$$

С помощью уравнений (17) из уравнений (20) соответственно выводим тождества

$$\xi_{\tau\tau} - a^2(s,\tau)\xi_{ss} = a_\tau(s,\tau)\xi_s + a(s,\tau)a_s(s,\tau)\xi_s = a^{-1}(s,\tau)a_\tau(s,\tau)\xi_\tau + a(s,\tau)a_s(s,\tau)\xi_s,$$

$$\eta_{\tau\tau} - a^2(s,\tau)\eta_{ss} = a_\tau(s,\tau)\eta_s + a(s,\tau)a_s(s,\tau)\eta_s = a^{-1}(s,\tau)a_\tau(s,\tau)\eta_\tau + a(s,\tau)a_s(s,\tau)\eta_s,\ (s,\tau)\in G. \quad (21)$$

Соотношения, уравнения и тождества (16)–(21) имеются в работах [1–3].

Благодаря тождествам (17) и (21) уравнение (15) становится уравнением

$$2aJ(s,\tau)\tilde v_{\xi\eta}(\xi,\eta) + 2[a^{-1}a_\tau\xi_\tau - aa_s\xi_s]\tilde v_\xi + 2[a^{-1}a_\tau\eta_\tau - aa_s\eta_s]\tilde v_\eta -$$

$$-[(a_s)^2 + aa_{ss} - a^{-1}a_{\tau\tau} + a^{-2}(a_\tau)^2]\tilde v = \tilde f(\xi,\eta), \quad (\xi,\mu)\in\widetilde G, \quad (22)$$

где коэффициент $\tilde a(\xi,\eta) = a(s(\xi,\eta),\tau(\xi,\eta))$, $(\xi,\mu)\in\widetilde G$, и якобиан замены $J(s,\tau) = \xi_s\eta_\tau - \xi_\tau\eta_s \neq 0$ на $\widetilde G$.

В коэффициентах уравнения (22) также, как выше для реализованного приведения уравнения (1) к уравнению (15), делаем замену переменных (14):

$$a_\tau = \tilde a_\xi\xi_\tau + \tilde a_\eta\eta_\tau,\ a_{\tau\tau} = \tilde a_{\xi\xi}(\xi_\tau)^2 + 2\tilde a_{\xi\eta}\xi_\tau\eta_\tau + \tilde a_{\eta\eta}(\eta_\tau)^2 + \tilde a_\xi\xi_{\tau\tau} + \tilde a_\eta\eta_{\tau\tau},$$

$$a_s = \tilde a_\xi\xi_s + \tilde a_\eta\eta_s,\ a_{ss} = \tilde a_{\xi\xi}(\xi_s)^2 + 2\tilde a_{\xi\eta}\xi_s\eta_s + \tilde a_{\eta\eta}(\eta_s)^2 + \tilde a_\xi\xi_{ss} + \tilde a_\eta\eta_{ss}.$$

В результате после деления уравнения (22) на $2a$ мы имеем следующие значения коэффициентов при первых частных производных $\tilde v_\xi$, $\tilde v_\eta$ и функции $\tilde v$:

$$\tilde v_\xi: \quad a^{-2}a_\tau\xi_\tau - a_s\xi_s = a^{-2}[\tilde a_\xi\xi_\tau + \tilde a_\eta\eta_\tau]\xi_\tau - [\tilde a_\xi\xi_s + \tilde a_\eta\eta_s]\xi_s = a^{-2}\tilde a_\xi(\xi_\tau)^2 - \tilde a_\xi(\xi_s)^2 + \tilde a_\eta[a^{-2}\xi_\tau\eta_\tau - \xi_s\eta_s] =$$

$$= \tilde a_\xi[a^{-2}(\xi_\tau)^2 - (\xi_s)^2] + \tilde a_\eta[\xi_\tau\eta_\tau - a^2\xi_s\eta_s]/a^2 = \tilde a_\eta[\xi_s\eta_\tau - \xi_\tau\eta_s] = \tilde a_\eta J(s,\tau)/a,$$

$$\tilde v_\eta: \quad a^{-2}a_\tau\eta_\tau - a_s\eta_s = a^{-2}[\tilde a_\xi\xi_\tau + \tilde a_\eta\eta_\tau]\eta_\tau - [\tilde a_\xi\xi_s + \tilde a_\eta\eta_s]\eta_s = \tilde a_\eta[a^{-2}(\eta_\tau)^2 - (\eta_s)^2] + \tilde a_\xi[a^{-2}\xi_\tau\eta_\tau - \xi_s\eta_s] =$$

$$= \tilde a_\eta[a^{-2}(\eta_\tau)^2 - (\eta_s)^2] + \tilde a_\xi[\xi_\tau\eta_\tau - a^2\xi_s\eta_s]/a^2 = \tilde a_\xi[\xi_s\eta_\tau - \xi_\tau\eta_s] = \tilde a_\xi J(s,\tau)/a,$$

$$\tilde v: \quad [a_{\tau\tau} - a^2a_{ss}]/(2a^2) - [(a_\tau)^2 + a^2(a_s)^2]/(2a^3). \quad (23)$$

Далее вычисляем последний коэффициент перед функцией $\tilde v$ из равенств (23):

$$a_{\tau\tau} - a^2a_{ss} = [(\xi_\tau)^2 - a^2(\xi_s)^2]\tilde a_{\xi\xi} + 2[\xi_\tau\eta_\tau - a^2\xi_s\eta_s]\tilde a_{\xi\eta} + [(\eta_\tau)^2 - a^2(\eta_s)^2]\tilde v_{\eta\eta} +$$

$$+[\xi_{\tau\tau} - a^2\xi_{ss}]\tilde a_\xi + [\eta_{\tau\tau} - a^2\eta_{ss}]\tilde a_\eta = 2aJ(s,\tau)\tilde a_{\xi\eta} + [a^{-1}a_\tau\xi_\tau + aa_s\xi_s]\tilde a_\xi + [a^{-1}a_\tau\eta_\tau + aa_s\eta_s]\tilde a_\eta =$$

$$= 2aJ(s,\tau)\tilde a_{\xi\eta} + [a^{-1}(\tilde a_\xi\xi_\tau + \tilde a_\eta\eta_\tau)\xi_\tau + a(\tilde a_\xi\xi_s + \tilde a_\eta\eta_s)\xi_s]\tilde a_\xi + [a^{-1}(\tilde a_\xi\xi_\tau + \tilde a_\eta\eta_\tau)\eta_\tau + a(\tilde a_\xi\xi_s + \tilde a_\eta\eta_s)\eta_s]\tilde a_\eta =$$

$$= 2aJ(s,\tau)\tilde a_{\xi\eta} + \{(\xi_\tau)^2(\tilde a_\xi)^2 + a^2(\xi_s)^2(\tilde a_\xi)^2 + 2[\xi_\tau\eta_\tau\tilde a_\xi\tilde a_\eta + a^2\xi_s\eta_s\tilde a_\xi\tilde a_\eta] + (\eta_\tau)^2(\tilde a_\eta)^2 + a^2(\eta_s)^2(\tilde a_\eta)^2\}/a =$$

$$= 2aJ(s,\tau)\tilde a_{\xi\eta} + \{[(\xi_\tau)^2 + a^2(\xi_s)^2](\tilde a_\xi)^2 + 2[\xi_\tau\eta_\tau + a^2\xi_s\eta_s]\tilde a_\xi\tilde a_\eta + [(\eta_\tau)^2 + a^2(\eta_s)^2](\tilde a_\eta)^2\}/a =$$

$$= 2aJ(s,\tau)\tilde a_{\xi\eta} + \{[(\xi_\tau)^2 + a^2(\xi_s)^2](\tilde a_\xi)^2 + [(\eta_\tau)^2 + a^2(\eta_s)^2](\tilde a_\eta)^2\}/a, \quad (24)$$

$$(a_\tau)^2 + a^2(a_s)^2 = [(\xi_\tau)^2 + a^2(\xi_s)^2](\tilde a_\xi)^2 + 2[\xi_\tau\eta_\tau + a^2\xi_s\eta_s]\tilde a_\xi\tilde a_\eta + [(\eta_\tau)^2 + a^2(\eta_s)^2](\tilde a_\eta)^2 =$$

$$= [(\xi_\tau)^2 + a^2(\xi_s)^2](\tilde a_\xi)^2 + [(\eta_\tau)^2 + a^2(\eta_s)^2](\tilde a_\eta)^2. \quad (25)$$

При вычислении равенств (23)–(25) используются соотношения (18)–(21) и благодаря (17) тождества

$$(\xi_\tau)^2 - a^2(\xi_s)^2 = 0,\ (\eta_\tau)^2 - a^2(\eta_s)^2 = 0,\ \xi_\tau\eta_\tau + a^2\xi_s\eta_s = 0.$$

Поскольку после подстановки выражений (24) и (25) в последний коэффициент (23) их итоговые общие слагаемые сокращаются, то, разделив уравнение (22) на $J(s,\tau)/\tilde{a}$, получаем канонический вид

$$\tilde{a}(\xi,\eta)\tilde{v}_{\xi\eta}(\xi,\eta)+\tilde{a}_{\eta}(\xi,\eta)\tilde{v}_{\xi}(\xi,\eta)+\tilde{a}_{\xi}(\xi,\eta)\tilde{v}_{\eta}(\xi,\eta)+\tilde{a}_{\xi\eta}(\xi,\eta)\tilde{v}(\xi,\eta)=$$

$$=(\tilde{a}(\xi,\eta)\tilde{v}(\xi,\eta))_{\xi\eta}=\tilde{f}(\xi,\eta)/2J(s,\tau) \tag{26}$$

сопряженного модельного телеграфного уравнения (1) в $\widetilde{G}$ (см. ниже (28).

В плоскости $Os\tau$ через любую вершину $M(x,t)\in G$ треугольника ΔMPQ проходят характеристики $g_2(s,\tau)=g_2(x,t)$ и $g_1(s,\tau)=g_1(x,t)$, которые пересекают ось Os при $\tau=0$ соответственно в точках основания $P\big(h_2\{g_2(x,t),0\},0\big)$ и $Q\big(h_1\{g_1(x,t),0\},0\big)$. Отображение (14) переводит точку $M(x,t)$ плоскости $Os\tau$ в точку $\tilde{M}(\xi,\eta)$ плоскости $\tilde{O}\nu\rho$. После замены переменных (14) уравнения характеристик $g_i(s,\tau)=g_i(x,t)$, $i=1,2$, боковых сторон MP и MQ треугольника ΔMPQ соответственно становятся уравнениями $\nu = g_1(s,\tau) = g_1(x,t) = \xi$, $\rho = g_2(s,\tau)= g_2(x,t) = \eta$ боковых сторон $\tilde{M}\tilde{P}$ и $\tilde{M}\tilde{Q}$ треугольника $\Delta\tilde{M}\tilde{P}\tilde{Q}$ в плоскости $\tilde{O}\nu\rho$. Найдём образ отрезка OP с уравнением $\tau=0$, $s\in[0,h_2\{g_2(x,t),0\}]$ при отображении (14) из плоскости $Os\tau$ в плоскость $\tilde{O}\nu\rho$. Полагая $\tau=0$ в замене (14), приходим к уравнениям $\nu=g_1(s,0)$, $\rho=g_2(s,0)$, из которых ввиду единственности решений $s=h_1\{\nu,0\}$, $s=h_2\{\rho,0\}$ системы уравнений (14) относительно (s,τ) и первых тождеств обращения из (7) получаем уравнение кривой $\tilde{l}_0$ в плоскости $\tilde{O}\nu\rho$ (см. рисунок 1, *б*):

$$\nu_0(\rho)\equiv\nu=g_1(h_2\{\rho,0\},0)\ :\ \ h_2\{\rho,0\}-h_1\{\nu,0\}=0. \tag{27}$$

Уравнение (27) выполняется для координат точки $\tilde{O}(0,0)$, так как отрезок OP действительно соединяет начало координат $O(0,0)$ и точку P в плоскости $Os\tau$ и уравнение (27) найдено невырожденной заменой (14) из уравнения отрезка OP. Из формул производных обратных функций $(h_i)_\tau=1/(g_i)_s$, $i=1,2$, строгого возрастания функции g_2 и строгого убывания функции g_1 с ростом s следует строгое возрастание значений ρ функции (27) вместе с ростом ν в плоскости $\tilde{O}\nu\rho$. Подстановкой координат точек $\tilde{P}$ и $\tilde{Q}$ в уравнение (27) можно убедиться в том, что кривая уравнения (27) проходит через эти точки $\tilde{P}$ и $\tilde{Q}$, т.е. кривая $\tilde{l}_0$ уравнения (27) является криволинейным основанием треугольника $\Delta\tilde{M}\tilde{P}\tilde{Q}$ в плоскости $\tilde{O}\nu\rho$ (см. рисунок 1, *б*). Более того, верхняя полуплоскость $Os\tau$, $\tau\geq 0$, взаимно однозначно отображается заменой (14) в часть $h_2\{\rho,0\}\leq h_1\{\nu,0\}$, $\nu,\rho\in R$, плоскости $\tilde{O}\nu\rho$, т.е.

$$\widetilde{G}=\{(\nu,\rho): h_2\{\rho,0\}\leq h_1\{\nu,0\},\nu,\rho\in R=]-\infty,+\infty[\}. \tag{28}$$

Интегрируем уравнение (26) по треугольнику $\Delta\tilde{M}\tilde{P}\tilde{Q}$ и имеем общий интеграл уравнения (26)

$$\tilde{a}(\xi,\eta)\tilde{v}(\xi,\eta)=\tilde{f}_1(\xi)+\tilde{f}_2(\eta)+\tilde{F}(\xi,\eta),$$

$$\tilde{F}(\xi,\eta)=\frac{1}{2}\int\limits_{g_2(h_1\{\xi,0\},0)}^{\eta}d\rho\int\limits_{g_1(h_2\{\rho,0\},0)}^{\xi}\tilde{f}(\nu,\rho)J(\nu,\rho)d\nu, \tag{29}$$

где якобиан обратной замены к (14) равен $J(\xi,\eta)=s_\xi\tau_\eta-s_\eta\tau_\xi\neq 0$ на $\widetilde{G}$ и $J(s,\tau)\ J(\xi,\eta)=1$. Из общего интеграла (29) аналогично статьям [1; 2] обратной заменой к (14) находим общий интеграл уравнения (1)

$$v(s,\tau)=[\tilde{f}_1(g_1(s,\tau))+\tilde{f}_2(g_2(s,\tau))+F(s,\tau)]/a(s,\tau),\ F(s,\tau)=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\tau}d\tilde{\tau}\int\limits_{h_2\{g_2(s,\tau),\tilde{\tau}\}}^{h_1\{g_1(s,\tau),\tilde{\tau}\}}f(\tilde{s},\tilde{\tau})d\tilde{s}, \tag{30}$$

где $\tilde{f}_1$ и $\tilde{f}_2$ – любые дважды непрерывно дифференцируемые функции переменных ξ и η из [9] вида

$$\tilde{f}_1(\xi)=f_1(\xi)+f_2(g_2(x,t)),\quad \tilde{f}_2(\eta)=f_2(\eta)-f_2(g_2(x,t)). \tag{31}$$

Ясно, что функции $\tilde{f}_1,\ \tilde{f}_2$ и $f_1,\ f_2$ дважды непрерывно дифференцируемы одновременно. Решения (31) однородного уравнения (1) при $f=0$ получены «методом погружения в решения с фиксированными значениями» из [9] для упрощения вычисления решений систем дифференциальных уравнений.

Подставив общий интеграл (30) в условия Гурса (2), приходим к системе уравнений

$$[\tilde{f}_1(g_1(x,t))+\tilde{f}_2(g_2(\tilde{s},\tau))+F(\tilde{s},\tau)]\Big|_{\tilde{s}=h_1\{g_1(x,t),\ \tau\}}=a(\tilde{s},\tau)\gamma_1(\tilde{s},\tau)\Big|_{\tilde{s}=h_1\{g_1(x,t),\ \tau\}},$$

$$[\tilde{f}_1(g_1(\tilde{s},\tau))+\tilde{f}_2(g_2(x,t))+F(\tilde{s},\tau)]\Big|_{\tilde{s}=h_2\{g_2(x,t),\ \tau\}}=a(\tilde{s},\tau)\gamma_2(\tilde{s},\tau)\Big|_{\tilde{s}=h_2\{g_2(x,t),\ \tau\}}. \tag{32}$$

Поскольку $\tilde{f}_2(g_2(x,t))=0$ в (31), то из второго уравнения этой системы имеем

$$\tilde{f}_1(g_1(h_2\{g_2(x,t),\ \tau\},\tau))=[a(\tilde{s},\tau)\gamma_2(\tilde{s},\tau)-F(\tilde{s},\tau)]\Big|_{\tilde{s}=h_2\{g_2(x,t),\ \tau\}}.$$

Здесь полагаем $y=g_1(h_2\{g_2(x,t),\ \tau\},\tau)$, т.е. обратная функция $\tau=h^{(1)}[h_2\{g_2(x,t),\ \tau\},y]$. Пусть $\tau_1=\tau_1(y)$ – решение уравнения $\tau_1=h^{(1)}[h_2\{g_2(x,t),\ \tau_1\},y]$. Оно единственно, так как h_2 и $h^{(1)}$ – строго монотонные функции. Отсюда при $\tau=\tau_1(y)$ находим первую функцию решения системы (32)

$$\tilde{f}_1(y)=[a(\tilde{s},\tilde{\tau})\gamma_2(\tilde{s},\tilde{\tau})-F(\tilde{s},\tilde{\tau})]\Big|_{\tilde{s}=h_2\{g_2(x,t),\ \tilde{\tau}\}}\Big|_{\tilde{\tau}=\tau_1(y)}. \tag{33}$$

Теперь из первого уравнения системы (32) выражаем вторую функцию

$$\tilde{f}_2(g_2(h_1\{g_1(x,t),\ \tau\},\tau))=[a(\tilde{s},\tau)\gamma_1(\tilde{s},\tau)-\tilde{f}_1(g_1(x,t))-F(\tilde{s},\tau)]\Big|_{\tilde{s}=h_1\{g_1(x,t),\ \tau\}}=$$

$$=[a(\tilde{s},\tau)\gamma_1(\tilde{s},\tau)-F(\tilde{s},\tau)]\Big|_{\tilde{s}=h_1\{g_1(x,t),\ \tau\}}-[a(\tilde{s},\tilde{\tau})\gamma_2(\tilde{s},\tilde{\tau})-F(\tilde{s},\tilde{\tau})]\Big|_{\tilde{s}=h_2\{g_2(x,t),\ \tilde{\tau}\}}\Big|_{\tilde{\tau}=\tau_1(g_1(x,t))}.$$

Пусть $\tau_2=\tau_2(z)$ – решение уравнения $z=g_2(h_1\{g_1(x,t),\ \tau\},\tau)$, т.е. единственное решение эквивалентного уравнения для обратной функции $\tau_2=h^{(2)}[h_1\{g_1(x,t),\ \tau_2\},z]$, где h_1 и $h^{(2)}$ – строго монотонные функции. Отсюда при $\tau=\tau_2(z)$ выводим вторую функцию решения системы (32)

$$\tilde{f}_2(z)=[a(\tilde{s},\tilde{\tau})\gamma_1(\tilde{s},\tilde{\tau})-F(\tilde{s},\tilde{\tau})]\Big|_{\tilde{s}=h_1\{g_1(x,t),\ \tilde{\tau}\}}\Big|_{\tilde{\tau}=\tau_2(z)}-$$

$$-[a(\tilde{s},\tilde{\tau})\gamma_2(\tilde{s},\tilde{\tau})-F(\tilde{s},\tilde{\tau})]\Big|_{\tilde{s}=h_2\{g_2(x,t),\ \tilde{\tau}\}}\Big|_{\tilde{\tau}=\tau_1(g_1(x,t))}. \tag{34}$$

Подставив решения (33) и (34) системы (32) соответственно при $y=g_1(s,\tau)$ и $z=g_2(s,\tau)$ в общий интеграл (30), получаем формальное решение (12) задачи Гурса (1)–(3).

Необходимость. Необходимость гладкости (10) на правую часть f уравнения (1) и данные Гурса γ_1,γ_2 показана перед формулировкой нашей теоремы. Необходимость интегральных гладкостей (11) на $f\in C(G)$ для дважды непрерывной дифференцируемости слагаемого $F(s,\tau)$ вида (13) в (12) следует из теоремы 2.1 и замечания 3.1 статьи [2] ([3]). Фактически необходимость требований (11) на непрерывную $f\in C(G)$ непосредственно вытекает из дважды непрерывной дифференцируемости функции $F(s,\tau)$, так как интегралы (11) представляют собой производные от $F(s,\tau)$ вдоль характеристик (14) уравнения (1).

Достаточность. Для дважды непрерывной дифференцируемости на G слагаемых функции (12), которые содержат данные Гурса γ_1,γ_2, очевидно достаточно их гладкости из (10). Достаточность непрерывности $f\in C(G)$ и интегральной гладкости (11) на зависящие от s и τ правые части f для дважды непрерывной дифференцируемости слагаемого $F(s,\tau)$ вида (13) в функции (12) вытекает из теоремы 2.1 и замечания 3.1 статьи [2]. Достаточность интегральной гладкости (11) при непрерывной $f\in C(G)$ для дважды непрерывной дифференцируемости функции $F(s,\tau)$ вида (13) можно вывести из непрерывной дифференцируемости её первых частных производных $F_\tau(s,\tau),\ F_s(s,\tau)$ как решений линейной системы уравнений, равных производным от $F(s,\tau)$ вдоль характеристик (14), правые части которой – непрерывно дифференцируемые интегралы $H^{(i)}(s,\tau)\in C^1(G), i=1,2,$ из (11)[1].

Теорема 1 доказана.

Следствие 1. Если правая часть f уравнения (1) не зависит от s или τ в $G,$ то утверждение теоремы 1 справедливо без интегральных требований гладкости (11)[2].

Здесь для непрерывной правой части f по τ или s гладкости (11) автоматически выполняются.

Следствие 2. Если правая часть f зависит от s и τ, то в теореме 1 для $f\in C(G)$ требования принадлежности интегралов из (11) пространству $C^1(G)$ эквивалентны требованиям их принадлежности пространству $C^{(1,0)}(G)$ или $C^{(0,1)}(G)$. Здесь $C^{(1,0)}(G)$, $C^{(0,1)}(G)$ – соответственно пространства непрерывно дифференцируемых по s и τ и непрерывных по τ и s функций на G[3].

Обоснование следствия 2 проводится также, как в диссертации[4].

Из теоремы 1 и её доказательства вытекает важное

Замечание 2. Пусть $a(s,\tau)\ge a_0>0,\ (s,\tau)\in G,\ a\in C^2(G).$ Тогда частным классическим решением неоднородного сопряженного модельного телеграфного уравнения (1) является функция

$$\widehat{F}(s,\tau)=\frac{F(s,\tau)}{a(s,\tau)}=\frac{1}{2a(s,\tau)}\int_0^{\tau}d\tilde{\tau}\int_{h_2\{g_2(s,\tau),\tilde{\tau}\}}^{h_1\{g_1(s,\tau),\tilde{\tau}\}}f(\tilde{s},\tilde{\tau})d\tilde{s},$$

которая поточечно удовлетворяет уравнению (1) на $G,$ потому что согласно доказательству теоремы 1 функция $\breve{F}(\xi,\eta)=\tilde{F}(\xi,\eta)/\tilde{a}(\xi,\eta)$ из (29) поточечно удовлетворяет его каноническому виду (26) на $\widetilde{G}$.

3. Приложение результатов работы к поиску функции Римана в формулах Римана при решении различных смешанных (начально-граничных) задач для неоднородного модельного телеграфного уравнения с переменной скоростью $a(s,\tau)$ в первой четверти плоскости, например, для первой смешанной задачи из работ [1; 7]. В работе [7] указана формула типа Римана классического решения первой смешанной задачи для общего телеграфного уравнения с ещё переменными коэффициентами $b(s,\tau),\ c(s,\tau),\ q(s,\tau),$ в которой функция Римана $v(s,\tau)=v(s,\tau;t,x)$ является решением задачи Гурса:

$$v_{\tau\tau}(s,\tau)-\left(a^2(s,\tau)v(s,\tau)\right)_{ss}-\left(b(s,\tau)v(s,\tau)\right)_{\tau}-\left(c(s,\tau)v(s,\tau)\right)_{s}+q(s,\tau)v(s,\tau)=0,\qquad (s,\tau)\in\Delta MPQ, \tag{35}$$

на характеристических треугольниках $\Delta MPQ\subset G$ при согласованных условиях Гурса на его сторонах

$$v(s,\tau)=\exp\left\{\int_t^{\tau}k_1\left(h_1\{g_1(x,t),\rho\},\rho\right)d\rho\right\},\ g_1(s,\tau)=g_1(x,t),$$

$$v(s,\tau)=\exp\left\{\int_t^{\tau}k_2\left(h_2\{g_2(x,t),\rho\},\rho\right)d\rho\right\},\ g_2(s,\tau)=g_2(x,t), \tag{36}$$

где функция $k_1(s,\tau)=\{a(s,\tau)b(s,\tau)+3a(s,\tau)a_s(s,\tau)-a_{\tau}(s,\tau)+c(s,\tau)\}/4a(s,\tau)$ на кривой QM и функция $k_2(s,\tau)=\{a(s,\tau)b(s,\tau)-3a(s,\tau)a_s(s,\tau)-a_{\tau}(s,\tau)-c(s,\tau)\}/4a(s,\tau)$ на кривой MP (см. рисунок 1, *a*).

Теорема 2. Пусть коэффициент $a(s,\tau)\ge a_0>0,\ (s,\tau)\in G,\ a\in C^2(G).$ В каждом характеристическом треугольнике $\Delta MPQ\subset G$ задача Гурса (1), (36) имеет единственное и устойчивое по f классическое решение $v(s,\tau)\in C^2(\Delta MPQ)$ тогда и только тогда, когда правая часть $f\in C(G)$ и (11). Для каждой точки $M(x,t)\in G$ классическим решением задачи Гурса (1), (36) в ΔMPQ является функция

$$v(s,\tau;x,t)=\{a(x,t)+F(\tilde{s},\tilde{\tau})\Big|_{\tilde{s}=h_2\{g_2(x,t),\tilde{\tau}\}}\Big|_{\tilde{\tau}=\tau_1(g_1(x,t))}-F(\tilde{s},\tilde{\tau})\Big|_{\tilde{s}=h_2\{g_2(x,t),\tilde{\tau}\}}\Big|_{\tilde{\tau}=\tau_1(g_1(s,\tau))}-$$

[1] Новиков, Е. Н. Смешанные задачи для уравнения вынужденных колебаний ограниченной струны при нестационарных граничных условиях с первой и второй косыми производными : дис. … канд. физ.-мат. наук : 01.01.02 / Е. Н. Новиков. – Минск, 2017. – 258 л.

[2] Там же.

[3] Там же.

[4] Там же.

$$-F(\tilde{s},\tilde{\tau})\Big|_{\tilde{s}=h_1\{g_1(x,t),\ \tilde{\tau}\}}\Big|_{\tilde{\tau}=\tau_2(g_2(s,\tau))} + F(s,\tau)\}/a(s,\tau),\ (s,\tau)\in\Delta MPQ\subset G. \quad (37)$$

Доказательство. На характеристиках $g_i(s,\tau)=C_i$, $i=1,2$, указанных в (6), для всех непрерывно дифференцируемых функций и, в частности, для коэффициента $a(s,\tau)\in C^2(G)$ верны тождества

$$a_s(s,\tau)=(-1)^i a_\tau(s,\tau)/a(s,\tau),\ s=h_i\{g_i(x,t),\tau\},\ i=1,2. \quad (38)$$

Когда из сопряженного модельного телеграфного уравнения (1) коэффициенты $b(s,\tau)=-a^{-1}(s,\tau)a_\tau(s,\tau)$, $c(s,\tau)=-a(s,\tau)a_s(s,\tau)$, $q(s,\tau)=0$ и в уравнении (35), тогда ввиду (38) в условиях Гурса (36) функции

$$k_i(s,\tau)=-\{a_\tau(s,\tau)+(-1)^i a(s,\tau)a_s(s,\tau)\}/2a(s,\tau)=-a_\tau(s,\tau)/a(s,\tau)=-\left(\ln a(s,\tau)\right)_\tau,\quad i=1,2.$$

Следовательно, в условиях Гурса (36) для всех вершин $M(x,t)\in G$ мы имеем данные Гурса

$$\gamma_i(s,\tau)=\exp\left\{\int_t^\tau k_i(s,\rho)d\rho\right\}=\exp\left\{-\int_t^\tau\left(\ln a(s,\rho)\right)_\rho d\rho\right\}=\exp\left\{\ln a(s,\rho)\Big|_{\rho=\tau}^{\rho=t}\right\}=\frac{a(x,t)}{a(s,\tau)},\ i=1,2, \quad (39)$$

так как если одна переменная $\tau=t$, то здесь другая переменная $s=h_i\{g_i(x,t),t\}=x$, $i=1,2$, по вторым тождествам обращения из (7).

Подставляя данные Гурса (39) в формулу (12) теоремы 1, получаем единственное и устойчивое по f классическое решение (37) задачи Гурса (1), (36) в треугольниках ΔMPQ с любой вершиной $M(x,t)\in G.$ Необходимость и достаточность условий $f\in C(G)$ и (11) подтверждает теорема 1.

Теорема 2 доказана.

Из теоремы 2 при $F(s,\tau)=0$ вытекает

Следствие 3. Пусть коэффициент $a(s,\tau)\geq a_0>0$, $(s,\tau)\in G$, $a\in C^2(G)$. Тогда функцией Римана задачи Коши для модельного телеграфного уравнения (4) при начальных условиях $u(s,0)=\varphi(s)$, $u_\tau(s,0)=\psi(s)$, $s\in R$, в верхней полуплоскости G является функция $v(s,\tau;x,t)=a(x,t)/a(s,\tau)$, $(s,\tau)\in G$.

Заключение. Получено классическое решение и установлен критерий корректности по Адамару задачи Гурса для линейного неоднородного сопряженного модельного телеграфного уравнения с переменной скоростью $a(s,\tau)$ в верхней полуплоскости (теорема 1). Этот критерий корректности её однозначной и устойчивой всюду разрешимости состоит из необходимых и достаточных требований гладкости на правую часть уравнения и данные Гурса. Требования гладкости на правую часть уравнения представляют собой требования непрерывности правой части и непрерывной дифференцируемости соответствующих интегралов от неё. Если правая часть зависит только от одной из независимых переменных, то для корректности необходимо и достаточно только непрерывности правой части (следствие 1). Причём указанная непрерывная дифференцируемость соответствующих интегралов эквивалентна их непрерывной дифференцируемости только по одной из двух независимых переменных (следствие 2). Вычислено частное классическое решение неоднородного сопряженного модельного телеграфного уравнения (замечание 2). В случае однородного сопряженного модельного телеграфного уравнения классическое решение задачи Гурса служит функцией Римана для различных линейных смешанных задач для неоднородного модельного телеграфного уравнения. Найдена функция Римана к задаче Коши (следствие 3) и смешанным задачам для модельного телеграфного уравнения (теорема 2).

Работа поддержана БРФФИ Республики Беларусь (проект № Ф22КИ-001от 05.11.2021 г.).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ломовцев, Ф. Е. Первая смешанная задача для общего телеграфного уравнения с переменными коэффициентами на полупрямой / Ф. Е. Ломовцев // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. – 2021. – № 1. – С. 18–38. – DOI: 10.33581/2520-6508-2021-1-18-38.
2. Lomovtsev, F. E. The Smoothness Criterion for the Classical Solution to Inhomogeneous Model Telegraph Equation at the Rate *a(x,t)* on the Half-Line / F. E. Lomovcev // Труды 10-го междунар. науч. семинара АМАДЕ-2021. – БГУ : ИВЦ Минфина. – 2022. – С. 43–53.
3. Lomovtsev, F. E. Conclusion of the Smoothness Criterion for the Right-Hand Side of the Model Telegraph Equation with the Rate *a(x,t)* by the Correction Method / F. E. Lomovtsev // Современные методы теории краевых задач : материалы XXXIV Междунар. конф. «Воронежская весенняя математическая школа «Понтрягинские чтения-

XXXII», посвященной памяти А. Д. Баева, 3–9 мая 2021 г. Воронеж / ВГУ, МГУ им. М. В. Ломоносова, Математический ин-т им. В. А. Стеклова РАН. – Воронеж : ВГУ, 2021. – С. 284–287.
4. Schwartz, L. Theorie des distributions : in 2 vol. / L. Schwartz. – Paris : Hermann, 1950–1951. – 2 vol.
5. Владимиров, В. С. Обобщенные функции в математической физике / В. С. Владимиров. – М. : Наука, 1976. – 280 с.
6. Тихонов, А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. – М. : Наука, 2004. – 798 с.
7. Lomovtsev, F. E. Riemann Formula of the Classical Solution to the First Mixed Problem for the General Telegraph Equation with Variable Coefficients on the Half-Line. / F. E. Lomovtsev // Седьмые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям, посвященные 100-летию со дня рождения профессора Ю. С. Богданова : материалы Междунар. науч. конф., Минск, 1–4 июня 2021 г. / Ин-т математики НАН Беларуси. – Минск, 2021. – С. 201–203.
8. Ломовцев, Ф. Е. Смешанная задача для неоднородного уравнения колебаний ограниченной струны при характеристических нестационарных первых косых производных на концах / Ф. Е. Ломовцев, Т. С. Точко // Весн. Гродз. дзярж. ун-та імя Янкі Купалы. Сер. 2, Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. – 2019. – Т. 9, № 2. – С. 56–75.
9. Ломовцев, Ф. Е. Нехарактеристическая смешанная задача для одномерного волнового уравнения в первой четверти плоскости при нестационарных граничных вторых производных. / Ф. Е. Ломовцев, В. В. Лысенко // Весн. Віцеб. дзярж. ун-та. – 2019. – № 3(104). – С. 5–17.

REFERENCES

1. Lomovtsev, F. E. (2021). Pervaya smeshannaya zadacha dlya obshchego telegrafnogo uravneniya s peremennymi koeffitsiyentami na polupryamoy [The first mixed problem for the general telegraph equation with variable coefficients on the half-line]. Zhurnal Belorusskogo gosudarstvennogo universiteta. *Matematika. Informatika [Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics]*, (1), 18–38. DOI: 10.33581/2520-6508-2021-1-18-38. (In Russ., abstr. in Engl.).
2. Lomovtsev, F. E. (2022). Kriteriy gladkosti klassicheskogo resheniya neodnorodnogo model'nogo telegrafnogo uravneniya pri skorosti *a(x,t)* na poluosi [The Smoothness Criterion for the Classical Solution to Inhomogeneous Model Telegraph Equation at the Rate *a(x,t)* on the Half-Line]. In *Trudy 10-go mezhdunarodnogo nauchnogo seminara AMADE-2021 [Proc. 10th International Workshop AMADE-2021]* (43–53). Minsk: BSU, ITC of the Ministry of Finance. (In Russ.).
3. Lomovtsev, F. E. (2021) Conclusion of the Smoothness Criterion for the Right-Hand Side of the Model Telegraph Equation with the Rate *a(x,t)* by the Correction Method. In *Sovremennye metody teorii kraevykh zadach [Modern methods of the theory of boundary value problems]* (284–287). Voronezh: Publ. VSU.
4. Schwartz, L. (1950–1951). *Theorie des distributions* (Vols. 1–2). Paris: Hermann.
5. Vladimirov, V. S. (1976). *Obobshchennye funktsii v matematicheskoi fizike [Generalized functions in mathematical physics]*. Moscow: Nauka. (In Russ.).
6. Tikhonov, A. N., & Samarskii, A. A. (2004). *Uravneniya matematicheskoi fiziki [The equations of mathematical physics]*. Moscow: Nauka. (In Russ.).
7. Lomovtsev, F. E. (2021). Riemann Formula of the Classical Solution to the First Mixed Problem for the General Telegraph Equation with Variable Coefficients on the Half-Line. *Sed'mye Bogdanovskie chteniya po obyknovennym differentsial'nym uravneniyam, posvyashchennye 100-letiyu so dnya rozhdeniya professora Yu. S. Bogdanova [Seventh Bogdanov Readings on Ordinary Differential Equations, dedicated to the 100th anniversary of the birth of Professor Yu. S. Bogdanova]* (201–203). Minsk: IM NAS of Belarus.
8. Lomovtsev, F. E., & Tochko, T. S. (2019). Smeshannaya zadacha dlya neodnorodnogo uravneniya kolebanii ogranichennoi struny pri kharakteristicheskikh nestatsionarnykh pervykh kosykh proizvodnykh na kontsakh [Mixed problem for an inhomogeneous vibration equation of a bounded string with characteristic non-stationary first oblique derivatives at the ends]. *Vesnik Hrodzenskaha Dziarzhaunaha Universiteta Imia Ianki Kupaly. Seryia 2. Matematyka. Fizika. Infarmatyka, Vylichal'naia Tekhnika i Kiravanne [Vesnik of Yanka Kupala State University of Grodno. Series 2. Mathematics. Physics. Informatics, Computer Technology and its Control], 9*(2), 56–75. (In Russ.).
9. Lomovtsev, F. E., & Lysenko, V. V. (2019). Nekharakteristicheskaya smeshannaya zadacha dlya odnomernogo volnovogo uravneniya v pervoi chetverti ploskosti pri nestatsionarnykh granichnykh vtorykh proizvodnykh [A non-characteristic mixed problem for a one-dimensional wave equation in the first quarter of the plane with non-stationary boundary second derivatives]. *Vesnik Vitsebskaga dzyarzhaunaga universiteta [Bulletin of the Vitebsk Dzyarzhaunaga University], 3*(104), 5–17. (In Russ., abstr. in Engl.).

Поступила 24.03.2022

GOURSAT PROBLEM FOR THE ADJOINT MODEL TELEGRAPH EQUATION WITH THE RATE $a(s,\tau)$ IN THE UPPER HALF-PLANE

F. LOMOVTSEV

In the upper half-plane, the classical solution and correctness criterion of the Goursat problem for a linear inhomogeneous adjoint model telegraph equation with variable rate $a(s,\tau)$ are found explicitly. An explicit formula is obtained for the classical solution of this Goursat problem, unique and stable with respect to the right-

hand side of the equation and Goursat data. This formula contains implicit characteristic functions of the equation. In the case of a homogeneous conjugate model telegraph equation, the classical solution of this Goursat problem is the Riemann function in all linear mixed (initial-boundary) problems for an inhomogeneous model telegraph equation with variable rate $a(s,\tau)$. *This Riemann function has been calculated by us. A correctness criterion according to Hadamard (necessary and sufficient conditions) of its unique and stable on the right-hand side of the equation and the Goursat data solvability is found. This criterion consists of smoothness requirements on the right-hand side of the equation and two Goursat data. The smoothness requirements on the right side of the equation are the condition of continuity of the right-side and the corresponding integral smoothness conditions on the right side of the equation and on the Goursat data – their twice continuous differentiability in the upper half-plane.*

Keywords: *the Goursat problem, a adjoint model telegraph equation, an implicit characteristic functions, a correctness criterion, a classical solution, the Riemann function.*