Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Полоцкий государственный университет»

В. С. Вакульчик
А. П. Мателенок
Т. И. Завистовская

МАТЕМАТИКА

Методические указания
для организации самостоятельной работы
и подготовки к контрольным мероприятиям
для студентов специальностей 1-36 07 02
«Производство изделий на основе трехмерных технологий»,
1-44 01 02 «Организация дорожного движения»

В двух частях

Часть 1

**Элементы линейной алгебры. Элементы векторной алгебры.
Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве**

Текстовое электронное издание

Новополоцк
Полоцкий государственный университет
2022

Об издании – 1, 2

1 – дополнительный титульный экран – сведения об издании

УДК 51(075.8)

Одобрено и рекомендовано к изданию методической комиссией
механико-технологического факультета
в качестве методических указаний (протокол № 4 от 16.12.2021 г.)

Кафедра математики и компьютерной безопасности

Изложены теоретические основы трех разделов курса высшей математики для студентов технических специальностей: «Элементы линейной алгебры», «Элементы векторной алгебры» и «Элементы аналитической геометрии на плоскости и в пространстве». Предложено соответствующее дидактическое обеспечение: графические схемы, информационные таблицы, обучающие задачи, трехуровневые тесты, глоссарий. Спроектированы возможности использования информационных технологий для организации обучения математике.

2 – дополнительный титульный экран – производственно-технические сведения

Для создания текстового электронного издания «Математика», часть 1 «Элементы линейной алгебры. Элементы векторной алгебры. Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве» использованы текстовый процессор Microsoft Word и программа Adobe Acrobat XI Pro для создания и просмотра электронных публикаций в формате PDF.

Технические требования:
1 оптический диск.
Системные требования:
PC с процессором не ниже Core 2 Duo;
2 Gb RAM; свободное место на HDD 2 Mb;
Windows XP/7/8/8.1/10
привод CD-ROM/DVD-ROM;
мышь

Редактор *Т. А. Дарьянова*

Подписано к использованию 27.06.2022.
Объем издания 2,88 Мб. Заказ 379.

Издатель и полиграфическое исполнение:
учреждение образования «Полоцкий государственный университет».

Свидетельство о государственной регистрации
издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/305 от 22.04.2014.

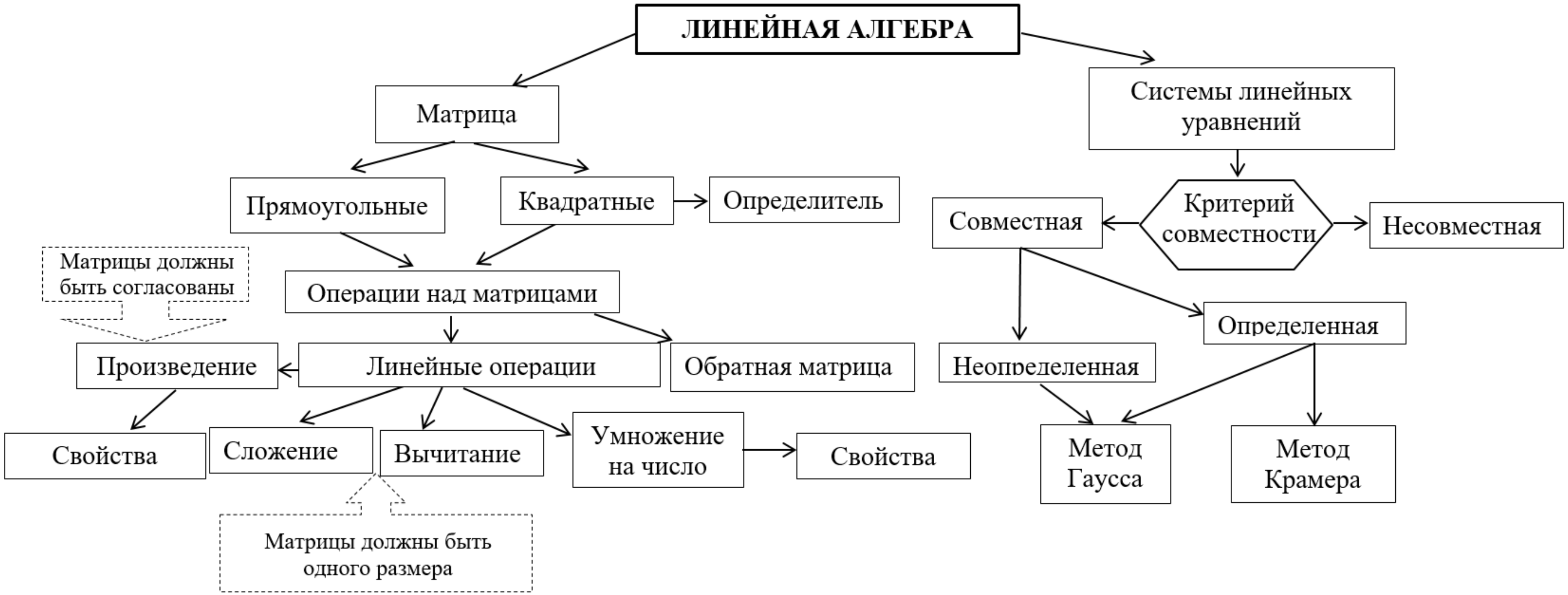
ЛП № 02330/278 от 08.05.2014.

211440, ул. Блохина, 29,
г. Новополоцк,
Тел. 8 (0214) 59-95-41, 59-95-44
http://www.psu.by

СОДЕРЖАНИЕ

Раздел 1
ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

Графическая схема



Информационная таблица «Элементы линейной алгебры»

Матрица $\boldsymbol{A_{m\times n}}$ – прямоугольная таблица из m строк и n столбцов, состоящая из элементов произвольной природы. $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$.

$A_{m\times n}+B_{m\times n}=(a_{ij})+(b_{ij})$

$\alpha\cdot A=(\alpha a_{ij})$

$A_{m\times k}\cdot B_{k\times n}=\left(\sum_{l=1}^{k}a_{il}\cdot b_{lj}\right)$

$\exists A$ и B, что $A\cdot B\neq B\cdot A$, $\exists A\neq 0$, $B\neq 0$, что $A\cdot B=0$

A^{-1}- ***обратная*** матрица для $A_{n\times n}$, если $AA^{-1}=$ $=A^{-1}A=E$.

Если $\Delta A_{n\times n}\neq 0$, то $\exists A^{-1}=\dfrac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1}\\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn}\end{pmatrix}$

Эффективные методы вычисления $\boldsymbol{\Delta A}$:

1) получение среди элементов произвольного ряда максимального количества нулей;
2) приведение ΔA к «треугольному» виду.

Элемент строки матрицы – ***крайний***, если он не равен 0, а все элементы этой строки, находящиеся левее него, равны 0.

Матрица – ***ступенчатая***, если крайний элемент каждой матрицы находится правее крайнего элемента предыдущей строки.

$$1^0.\begin{pmatrix}1 & 3 & 4 & 2\\ 0 & 0 & \underline{2} & 0\\ 0 & -\underline{1} & 3 & 1\end{pmatrix}\qquad 2^0.\begin{pmatrix}\underline{1} & 2 & 3 & 2\\ 0 & -\underline{2} & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

неступенчатая ступенчатая

Ранг матрицы – наибольший из порядков ее миноров, не равных 0.

Базисным минором называется любой из отличных от нуля миноров матрицы A, порядок которого равен $r(A)$.

(1) $A_{m\times n}\cdot \bar{X}_{n\times 1}=\bar{b}_{m\times 1}$ - матричная запись системы из m линейных уравнений с n неизвестными.

Решение системы (1) – такой набор чисел $(c_1,\dots,c_n)$, что при его подстановке в систему вместо соответствующих неизвестных ***каждое*** из уравнений системы обращается в тождество.

Система называется ***определенной***, если она имеет единственное решение, и ***неопределенной***, если она имеет более одного решения.

Система ***совместна***, если она имеет хотя бы одно решение.

Система, не имеющая ни одного решения, называется ***несовместной***.

Элементарные преобразования матрицы:

1) перемена местами двух параллельных рядов;
2) умножение элементов ряда на число, отличное от нуля;
3) прибавление к элементам одного ряда соответствующих элементов другого, параллельного ему ряда.

При элементарных преобразованиях ранг матрицы не изменяется.

Ранг ступенчатой матрицы равен количеству ее ненулевых строк.

Система (1) совместна тогда и только тогда, кода ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы системы.

$$r(A)=r(\bar{A}),\quad \bar{A}=(A|\bar{b})$$

Если $\Delta A\neq 0$, то система имеет единственное решение.

$x_i=\dfrac{\Delta i}{\Delta}$ (формулы Крамера).

Если $\Delta A\neq 0$, то система имеет единственное решение.

$\bar{X}=A^{-1}\cdot\bar{b}$ (матричный метод решения системы).

Суть метода Гаусса:

1) привести с помощью элементарных преобразований над строками $\bar{A}$ к ступенчатому виду;
2) вычислить и сравнить $r(A)$, $r(\bar{A})$;
3) если $r(A)\neq r(\bar{A})$, то система несовместна;
4) если $r(A)=r(\bar{A})$, то система совместна, выбрать базисный минор. Выделить свободные и базисные неизвестные. Получить решение.

Базовый минимум к разделу «Элементы линейной алгебры»

1. Вычислить определители второго порядка:

а) $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 2\cdot 9 - 3\cdot 5 = 18 - 15 = 3$ Ответ: 3.

б) $\begin{vmatrix} 5 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{vmatrix} = 5 - 3 = 2$ Ответ: 2.

2. Решить уравнение: $\begin{vmatrix} 2 & x-4 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$.

Решение.

$\begin{vmatrix} 2 & x-4 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 8 - (x-4) = 12 - x$

$12 - x = 0$, $x = 12$ Ответ: 12.

3. Для данного определителя $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ найти: M_{13}, A_{13}.

Решение.

$M_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 6$, $A_{13} = (-1)^{1+3}\cdot 6 = 6$. Ответ: 6; 2.

4. Вычислить определитель третьего порядка:

а) разложением по первой строке;
б) разложением по первому столбцу;
в) разложением по третьей строке.

$\begin{vmatrix} 4 & 7 & -2 \\ 3 & -1 & 5 \\ 5 & 0 & 7 \end{vmatrix}$

Решение.

а) $\begin{vmatrix} 4 & 7 & -2 \\ 3 & -1 & 5 \\ 5 & 0 & 7 \end{vmatrix} =$

$$=4\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-1 & 5\\ 0 & 7\end{vmatrix}+7\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}3 & 5\\ 5 & 7\end{vmatrix}+(-2)\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}3 & -1\\ 5 & 0\end{vmatrix}=$$

$$=4\cdot(-7)+(-7)\cdot(-4)+(-2)\cdot 5=-10;$$

б) $\begin{vmatrix}4 & 7 & -2\\ 3 & -1 & 5\\ 5 & 0 & 7\end{vmatrix}=$

$$=4\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-1 & 5\\ 0 & 7\end{vmatrix}+3\cdot(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}7 & -2\\ 0 & 7\end{vmatrix}+5\cdot(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}7 & -2\\ -1 & 5\end{vmatrix}=$$

$$=4\cdot(-7)-3\cdot 49+5\cdot 33=-10;$$

в) $\begin{vmatrix}4 & 7 & -2\\ 3 & -1 & 5\\ 5 & 0 & 7\end{vmatrix}=5\cdot(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}7 & -2\\ -1 & 5\end{vmatrix}+0+7\cdot(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}4 & 7\\ 3 & -1\end{vmatrix}=$

$$=5\cdot 33+7\cdot(-25)=165-175=-10$$

Ответ: -10.

5. Вычислить определитель третьего порядка по правилу треугольников:

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & -3\\ 4 & 6 & 5\\ 2 & -1 & 1\end{vmatrix}.$$

Решение.

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & -3\\ 4 & 6 & 5\\ 2 & -1 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=$$

$$=1\cdot 6\cdot 1+2\cdot 5\cdot 2+4\cdot(-3)\cdot(-1)-2\cdot 6\cdot(-3)-(-1)\cdot 5\cdot 1-4\cdot 2\cdot 1=$$

$$=6+20+12+36+5-8=71.$$

Ответ: 71.

6. Вычислить определитель, получением в некотором ряду максимального количества нулей:

$$\begin{vmatrix}-1 & 2 & 2\\ 2 & -1 & 2\\ 2 & 2 & -1\end{vmatrix}.$$

Решение.

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} \overset{[1]}{=} \begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 6 & 3 \end{vmatrix} \overset{[2]}{=} (-1)\cdot\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = -(9-36) = 27.$$

[1]: умножим первую строку на 2 и прибавим ее ко второй строке и третьей;

[2]: вычислим определитель разложением по первому столбцу.

Ответ: 27.

7. Вычислить определитель четвертого порядка:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \end{vmatrix}.$$

Решение.

Разложим определитель по первой строке.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -4 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -4 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+2\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -4 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -4 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} + 5\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+1\cdot(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 2\cdot(6-4+20-(6+2-40)) - (9-4+10-$$

$$-(6+1-60)) + 5(6-8+2-(4-2-12)) - (30+6+1-(2+10+9)) =$$

$$= 2\cdot 54 - 68 + 5\cdot 6 - 16 = 108 - 68 = 30 - 16 = 54.$$

Ответ: 54.

8. Вычислить определитель методом приведения его к треугольному виду: $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 & 9 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$.

Решение.

$$\begin{vmatrix}1&-2&5&9\\1&-1&7&4\\1&3&3&4\\1&2&3&4\end{vmatrix}\overset{[1]}{=}\begin{vmatrix}1&-2&5&9\\0&1&2&-5\\0&5&-2&-5\\0&4&-2&-5\end{vmatrix}\overset{[2]}{=}\begin{vmatrix}1&-2&5&9\\0&1&2&-5\\0&0&-12&20\\0&4&-2&-5\end{vmatrix}\overset{[3]}{=}$$

$$\begin{vmatrix}1&-2&5&9\\0&1&2&-5\\0&0&-12&20\\0&0&-10&15\end{vmatrix}\overset{[4]}{=}10\begin{vmatrix}1&-2&5&9\\0&1&2&-5\\0&0&2&-3\\0&0&-6&10\end{vmatrix}\overset{[5]}{=}=10\begin{vmatrix}1&-2&5&9\\0&1&2&-5\\0&0&2&-3\\0&0&0&1\end{vmatrix}=$$

$= 10\cdot1\cdot1\cdot2\cdot1=20$

[1]: умножим первую строку на (-1) и прибавим ее ко второй, третьей и четвертой строкам;

[2]:умножим вторую строку на (-5) и прибавим ее к третьей строке;

[3]:умножим вторую строку на (-4) и прибавим ее к четвертой строке;

[4]:вынесем 2 из третьей строки, а (-5) из четвертой строки, поменяем местами третью и четвертую строки;

[5]:умножим третью строку на 3 и прибавим ее к четвертой строке.

Ответ: 20.

9. Найти произведения матриц $A{\cdot}B$ и $B{\cdot}A$.

$$A=\begin{pmatrix}2&-2\\3&1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&0&2\\-1&-2&3\end{pmatrix}.$$

Решение.

$$C=\ A\cdot B=\begin{pmatrix}2\cdot1-2\cdot(-1)&2\cdot0-2\cdot(-2)&2\cdot2-2\cdot3\\3\cdot1+1\cdot(-1)&3\cdot0+1\cdot(-2)&3\cdot2+1\cdot3\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}4&4&-2\\2&-2&9\end{pmatrix}.$$

$B\cdot A$ – не существует, т.к. матрицы B и A не согласованы.

10. Найти обратную матрицу для матрицы

$$A=\begin{pmatrix}3&1&-2\\4&2&1\\3&-1&5\end{pmatrix}.$$

Решение. Вычислим $\det A$ по правилу треугольников

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 36.$$

Найдем алгебраические дополнения A_{ij} элементов матрицы A.

$A_{11} = 11$, $A_{12} = -17$, $A_{13} = -10$,
$A_{21} = -3$, $A_{22} = 21$, $A_{23} = 6$,
$A_{31} = 5$, $A_{32} = -11$, $A_{33} = 2$.
Тогда

$$A^{-1} = \frac{1}{36} \cdot \begin{pmatrix} 11 & -3 & 5 \\ -17 & 21 & -11 \\ -10 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

11. Дана система линейных неоднородных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 4. \end{cases}$$

Проверить, совместна ли эта система, и в случае совместности решить ее:

а) по формулам Крамера;

б) с помощью обратной матрицы;

в) методом Гаусса.

Решение. Совместность данной системы проверим по теореме Кронекера–Капелли. С помощью элементарных преобразований найдем ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

и ранг расширенной матрицы $(A \mid B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right)$.

Получим

$$(A|B) = \left(\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right)\right) \overset{[1]}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & -1 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right) \overset{[2]}{\sim} \left(\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \end{array}\right)\right) \overset{[3]}{\sim}$$

$$\overset{[3]}{\sim}\left(\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 1 & 5\\ 0 & 1 & -2 & -3\\ 0 & 3 & -1 & -4\end{array}\right)\right)\overset{[4]}{\sim}\left(\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 1 & 5\\ 0 & 1 & -2 & -3\\ 0 & 0 & 5 & 5\end{array}\right)\right).$$

[1]: умножим первую строку на (-2) и сложим со второй; затем умножим первую строку на (-1) и сложим с третьей;

[2]: вычтем из второй строки третью строку;

[3]:поменяем местами вторую и третью строку;

[4]: умножим вторую строку на (-3) и сложим с третьей.;

Следовательно, $r_A = r_{A\,|\,B} = 3 = n$ (т.е. числу неизвестных). Значит, исходная система имеет единственное решение.

а) решим систему уравнений по формулам Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta},\ x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta},\ x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta}.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{vmatrix} = 5 \neq 0, \Delta_x = \begin{vmatrix}5 & -1 & 1\\ 6 & 1 & 1\\ 4 & 1 & 2\end{vmatrix} = 15,\ \Delta_y = \begin{vmatrix}1 & 5 & 1\\ 2 & 6 & 1\\ 1 & 4 & 2\end{vmatrix} = -5,$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix}1 & -1 & 5\\ 2 & 1 & 6\\ 1 & 1 & 4\end{vmatrix} = 5,$$

$$x_1 = \frac{15}{5} = 3,\quad x_2 = \frac{-5}{5} = -1,\quad x_3 = \frac{5}{5} = 1;$$

б) для нахождения решения системы с помощью обратной матрицы запишем систему уравнений в матричной форме:

$$A \cdot X = B,$$

где $A = \begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix}5\\ 6\\ 4\end{pmatrix}$.

Решение определяется формулой $X = A^{-1} \cdot B$,

где $A^{-1} = \dfrac{1}{\Delta}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix}$, при условии $\Delta \neq 0$.

Находим A^{-1}:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=1,\ A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=3,\ A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-3,$$

$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-3,\ A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=1,\ A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=1,$

$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=1,\ A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-2,\ A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=3,$

$$A^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1 & 3 & -2\\ -3 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 3\end{pmatrix}.$$

Решение системы: $X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1 & 3 & -2\\ -3 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5\\ 6\\ 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ -1\\ 1\end{pmatrix}.$

Ответ: $x_1=3,\ x_2=-1,\ x_3=-1.$

в) решим систему уравнений методом Гаусса.

Исключим x_1 из второго и третьего уравнений, затем исключим x_2 из третьего уравнения. Для этого первое уравнение умножим на (-2) и сложим со вторым, затем первое уравнение умножим на (-1) и сложим с третьим. После элементарных преобразований получим:

$$\begin{cases}x_1 & -x_2 & +x_3 & = & 5,\\ & 3x_2 & -x_3 & = & -4,\\ & 2x_2 & +x_3 & = & -1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_1 & -x_2 & +x_3 & = & 5,\\ & x_2 & -2x_3 & = & -3,\\ & & 5x_3 & = & 5.\end{cases}$$

Обратным ходом находим: $x_3=1,\quad x_2=-1,\quad x_1=3.$

Ответ: $x_3=1, x_2=-1, x_1=3$

12. Исследовать на совместность и решить систему уравнений

$$\begin{cases}2x_1 & -3x_2 & +x_3 & = & 2,\\ 3x_1 & +x_2 & -3x_3 & = & 1,\\ 5x_1 & -2x_2 & -2x_3 & = & 4.\end{cases}$$

Решение. Проверим систему уравнений на совместность с помощью теоремы Кронекера–Капелли.

$$(A\mid B)=\left(\begin{array}{ccc|c}2 & -3 & 1 & 2\\ 3 & 1 & -3 & 1\\ 5 & -2 & -2 & 4\end{array}\right)\overset{[1]}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -3 & 2 & 2\\ -3 & 1 & 3 & 1\\ -2 & -2 & 5 & 4\end{array}\right)\overset{[2]}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -3 & 2 & 2\\ 0 & -8 & 9 & 7\\ 0 & -8 & 9 & 8\end{array}\right)\overset{[3]}{\sim}$$

$$\overset{[3]}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -3 & 2 & 2\\ 0 & -8 & 9 & 7\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right).$$

[1]: меняем первый и третий столбцы местами;

[2]: умножаем первую строку на 3 и прибавляем ко второй, затем умножаем первую строку на 2 и прибавляем к третьей;

[3]: из второй строки вычтем третью.

Получим $r_A = 2$, $r_{A\,|\,B} = 3$. Согласно теореме Кронекера-Капелли, следует несовместность исходной системы, так как $r_A \neq r_{A\,|\,B}$.

Ответ: система не имеет решений.

13. Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} 4x_1 & -x_2 & +10x_3 & = & 0, \\ x_1 & +2x_2 & -x_3 & = & 0, \\ 2x_1 & -3x_2 & +4x_3 & = & 0. \end{cases}$$

Решение. Определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 10 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix} = -44 \neq 0,$$

поэтому система имеет единственное решение: $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

Ответ: $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$.

Базовый минимум к разделу «Элементы линейной алгебры» (для самостоятельного решения)

1. Вычислить определители второго порядка:

а) $\begin{vmatrix} 3 & 16 \\ 5 & 10 \end{vmatrix}$ Ответ: 50; б) $\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -5 & 8 \end{vmatrix}$ Ответ: -4.

2. Решить уравнение $\begin{vmatrix} x+1 & -5 \\ 1 & x-1 \end{vmatrix} = 0$. Ответ: $\pm\, 2i$.

3. Для данного определителя $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ найти: M_{23}, A_{23}.

Ответ: -1; 6.

4. Вычислить определитель третьего порядка:

а) разложением по первой строке;

б) разложениеv по первому столбцу;

в) разложением по третьей строке.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

Ответ: 87.

5. Вычислить определитель третьего порядка по правилу треугольников:

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 8 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Ответ: -36.

6. Вычислить определитель четвертого порядка:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 8 \\ 1 & -3 & -6 & 9 \\ 0 & 2 & 2 & -5 \\ 1 & 4 & 6 & 0 \end{vmatrix}.$$

Ответ: 27.

7. Вычислить определитель методом приведения его к треугольному виду:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}.$$

Ответ: 1.

8. Найти произведения матриц $A \cdot B$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\begin{pmatrix} -9 & -10 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$.

9. Найти обратную матрицу для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $A^{-1} = -\dfrac{1}{12} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 & -8 \\ 1 & -7 & 4 \\ -5 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

10. Исследовать на совместность и решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 & +2x_2 & -4x_3 & = & 8, \\ 2x_1 & +4x_2 & -5x_3 & = & 1, \\ 5x_1 & +6x_2 & -9x_3 & = & 2. \end{cases}$$

Ответ: система не имеет решений.

11. Дана система линейных неоднородных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 12, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 6, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = -9. \end{cases}$$

Проверить совместна ли эта система, и в случае совместности решить ее:

а) по формулам Крамера;

б) с помощью обратной матрицы;

в) методом Гаусса.

Ответ: $x_3 = 0, \quad x_2 = 4, \quad x_1 = 5$.

12. Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 & -x_2 & -3x_3 & = & 0, \\ 2x_1 & +3x_2 & +x_3 & = & 0, \\ x_1 & +x_2 & +3x_3 & = & 0. \end{cases}$$

Ответ: $x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0$.

13. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 7 & 21 \end{pmatrix}$.

Ответ: $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Трехуровневые тестовые задания к разделу «Элементы линейной алгебры»

Уровень I

1. Найти значение многочлена $f(A)$:

$$f(x) = -x^3 + 2x^2 - x + 3, \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 4 & 7 & 0 \\ 2 & 9 & 3 \end{vmatrix}$.

а) разложением по первой строке;

б) получением максимального числа нулей в произвольно выбранном ряду;

в) приведением к треугольному виду.

Ответ: 48.

3. Найти матрицу, обратную к матрице $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 5 \\ -7 & -1 & 4 \\ 9 & -8 & -6 \end{pmatrix}$. Проверить выполнимость равенства $A^{-1} \cdot A = AA^{-1} = E$.

Ответ: $\frac{1}{231}\begin{pmatrix} 38 & -22 & 17 \\ -6 & -33 & -27 \\ 65 & 11 & 23 \end{pmatrix}$.

4. Решить систему с помощью формул Крамера и матричным методом:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -3, \\ -2x_1 + 6x_2 + 9x_3 = -11, \\ -4x_1 - 3x_2 + 8x_3 = -2. \end{cases}$$

Ответ: $(4; -2;\ 1)$.

5. Исследовать систему на совместность, найти ее решение:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -3, \\ -x_1 - 3x_2 + 2x_4 = -3, \\ x_1 - 4x_3 + \ x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 6. \end{cases}$$

Ответ: система не совместна.

6. Найти матрицу $D = (3A - 4B)C$, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & -4 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 39 & 57 \\ 77 & 126 \end{pmatrix}$

Уровень II

1. Решить уравнение: $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 7 & x-3 \\ 5 & -3 & 6 \end{vmatrix} = 0$.

Ответ: $\{5\}$.

2. Вычислить, используя свойства определителей:

$\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \cos^2\alpha & 1 \\ \sin^2\beta & \cos^2\beta & 1 \\ \sin^2\gamma & \cos^2\gamma & 1 \end{vmatrix}$.

Ответ: $\{0\}$.

3. Вычислить A^{-1}: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

Ответ: $\begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & -\frac{1}{5} & -\frac{61}{60} & \frac{23}{60} \\ \frac{1}{3} & \frac{3}{10} & \frac{11}{15} & -\frac{11}{30} \\ -\frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ 0 & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{20} & \frac{3}{20} \end{pmatrix}$.

4. Найти ранг матрицы приведением к ступенчатому виду.

$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 8 & 1 & -5 \\ 3 & -1 & 7 & 2 & 4 \\ -8 & 2 & -6 & -3 & -13 \\ 11 & -3 & 13 & 5 & 17 \end{pmatrix}$.

Ответ: $\{3\}$.

5. Исследовать систему на совместность и определенность. В случае совместности, найти решение.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2, \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 + 5x_5 = 3, \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 13x_5 = 9, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 4. \end{cases}$$

Ответ: совместна и неопределенна,
(c_1, c_2; 5 – c_1 + 4c_2; -3; 1 + 2c_1 – c_2).

6. Решить однородную систему $\begin{cases} 5x_1+6x_2-2x_3+7x_4+4x_5=0, \\ 2x_1+3x_2-\ \ x_3+4x_4+2x_5=0, \\ 5x_1+9x_2-3x_3+\ \ x_4+6x_5=0, \\ 7x_1+9x_2-3x_3+5x_4+6x_5=0. \end{cases}$

Ответ: (0; c_1-2c_2; $3c_1$; 0; $3c_2$).

Уровень III

1. Найти ранг матрицы:

а) $\begin{pmatrix} 1 & n & n & \dots & n \\ n & 2 & n & \dots & n \\ n & n & 3 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \dots & n \end{pmatrix}$; Ответ: n.

б) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$, Ответ: n.

2. Решить матричное уравнение

$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}$. Ответ: $\begin{pmatrix} -\frac{1}{7} & \frac{4}{7} & 1 \\ \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & -1 \\ \frac{4}{7} & -\frac{2}{7} & -1 \end{pmatrix}$.

3. Вычислить определители приведением к треугольному виду:

а) $\begin{vmatrix} -n & 1-n & 2-n & \dots & -2 & -1 \\ 1-n & 2-n & 3-n & \dots & -1 & 0 \\ 2-n & 3-n & 4-n & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}$, Ответ: $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$;

б) $\begin{vmatrix} 1-n & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-n & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}$. Ответ: 0.

6

4. Числа 255, 391, 578 делятся на 17. Не вычисляя значение определителя $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 3 & 9 & 1 \\ 5 & 7 & 8 \end{vmatrix}$, доказать, что он тоже делится на 17.

6

5. Исследовать систему на совместность и определенность. Найти решение:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_n = n-2, \\ x_1 + x_3 + \ldots + x_n = n-3, \\ x_1 + x_2 + x_4 + \ldots + x_n = n-3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} = n-3. \end{cases}.$$

Ответ: Система совместна и определенна, единственное решение $(-1;\ 1;\ 1,\cdots;\ 1)$.

6. Докажите, что третья строка матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 8 & 16 & 13 \end{pmatrix}$ является линейной комбинацией первых двух. Найдите коэффициенты этой линейной комбинации.

Ответ: (2; 3).

МЕТОДИЧЕСКИЕ СРЕДСТВА
ДЛЯ ПОДГОТОВКИ И ПРОВЕДЕНИЯ ИТОГОВОГО КОНТРОЛЯ
ПО РАЗДЕЛУ 1
«ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ»

Контрольная работа

1. Решить систему линейных уравнений:
а) по формулам Крамера;
б) с помощью обратной матрицы

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -4, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -3. \end{cases}$$

Ответ: (1; -3; -1).

2. Решить систему

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -5, \\ 2x_1 + 3x_3 = -2. \end{cases}$$

Ответ: нет решений.

3. Решить систему

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_4 + 5x_5 = 7, \\ 2x_1 - 3x_3 + x_5 = 4, \\ x_2 + 3x_4 - x_5 = 6. \end{cases}$$

Ответ: (115 – $53c_1 - 13c_2$; -36 + $18c_1 - 6c_2$;
(-26 + $20c_1 - 15c_2$)/3; c_1; c_2).

4. Решить систему

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$$

Ответ: $\left(-\frac{11}{7}c, -\frac{1}{7}c, c\right)$.

5. Решить систему

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

Ответ: (0; 0; 0).

ГЛОССАРИЙ

№ п/п	Новые понятия	Содержание
1	*2*	*3*
1	***Матрица – прямоугольная таблица порядка m × n, обозначаемая*** $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$	прямоугольная таблица из $m\times n$ элементов, где первое число m равно числу строк, а n – числу столбцов матрицы A; коротко матрица A обозначается $A=\left(a_{ij}\right)_{mn}$
2	***Элементы матрицы***	числа a_{ij}, из которых состоит матрица; индексы определяют положение элемента в таблице: первый индекс – число строк; второй – число столбцов
3	***Квадратная матрица порядка n***	матрица, число строк которой равно числу ее столбцов и равно числу n
4	***Главная диагональ квадратной матрицы***	образуется элементами с одинаковыми индексами $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$
5	***Симметричная матрица***	квадратная матрица, элементы которой, симметричные относительно главной диагонали, равны: $a_{ij}=a_{ji}, \quad i=1,2,\dots,m; \quad j=1,2,\dots,n$
6	***Единичная матрица (E)***	квадратная матрица, на главной диагонали которой стоят единицы, а остальные элементы нулевые
7	***Произведение матрицы $A_{m\times n}$ (порядка m × n) на матрицу $B_{n\times k}$ (порядка n × k)***	матрица C_{mk} (порядка $m\times k$), элементы которой вычисляются по формуле $C_{ij}=a_{i1}\cdot b_{1j}+a_{i2}\cdot b_{2j}+\dots+a_{in}\cdot b_{nj}$, $i=1,2,\dots,m; \ j=1,2,\dots,k$
8	***Определитель квадратной матрицы***	число, которое ставится в соответствие матрице A и вычисляется по ее элементам
9	***Алгебраическое дополнение*** A_{ij} ***элемента*** a_{ij}	величина $A_{ij}=\left(-1\right)^{i+j}M_{ij}$, где M_{ij} – определитель порядка $(n-1)$, полученный вычеркиванием i-й строки и j-го столбца, на пересечении которых стоит элемент a_{ij}
10	***Вырожденная матрица***	матрица, у которой определитель равен нулю
11	***Обратная матрица для матрицы A.***	квадратная матрица A^{-1}, которая удовлетворяет условию $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=E$; обратная матрица A^{-1} существует тогда и только тогда, когда исходная матрица невырожденная, $\det A\neq 0$
12	***Ранг матрицы A***	наибольший из порядков миноров данной матрицы, отличных от нуля

1	*2*	*3*
13	***Элементарные преобразования матрицы А***	– перестановка местами двух параллельных рядов матрицы; – умножение всех элементов ряда матрицы на число, отличное от нуля; – прибавление ко всем элементам ряда матрицы соответствующих элементов параллельного ряда, умноженных на одно и то же число
14	***Ступенчатая матрица***	матрица, обладающая следующими свойством: если в i-й строке матрицы левее элемента a_{ij} стоят только нули (a_{ij} – первый отличный от нуля элемент в i-й строке), то ниже этого элемента в j-м столбце стоят только нули
15	***Метод Гаусса***	метод приведения произвольной матрицы к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований
16	***Угловые элементы ступенчатой матрицы***	первые отличные от нуля элементы каждой строки, стоящие на углах ступенчатой матрицы; число угловых элементов ступенчатой матрицы равно рангу исходной матрицы
17	***Система из m линейных уравнений с n неизвестными***	система вида $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$, где $\overline{x} = (x_1; x_2; ...; x_n)$ – вектор неизвестных, подлежащих определению
18	***Матрица системы***	матрица коэффициентов при неизвестных $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$
19	***Расширенная матрица системы***	матрица, полученная присоединением столбца из свободных членов $b_1, b_2, \ldots, b_m$ к матрице системы $\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$
20	***Векторно-матричная запись системы***	запись системы в виде $A\overline{x} = \overline{b}$
21	***Однородная система***	система уравнений, в которых вектор правых частей является нулевым вектором: $\overline{b} = \overline{0}$; $A\overline{x} = \overline{0}$

1	*2*	*3*
22	***Неоднородная система уравнений***	система, в которой хотя бы в одном уравнении справа стоит ненулевой элемент: $\overline{b} \neq \overline{0}$
23	***Решение системы***	такой вектор $\overline{x} = \left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$, что при подстановке чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в уравнения системы, получаются верные равенства
24	***Совместная система***	система, у которой существует решение
25	***Несовместная система***	система, у которой нет решений
26	***Критерий (необходимое и достаточное условие) совместности системы***	равенство рангов основной и расширенной матрицы
27	***Общее решение системы***	совокупность всех решений системы
28	***Частное решение системы***	решение, получаемое из общего решения путем подстановки вместо свободных переменных конкретных численных значений
29	***Метод Гаусса для решения системы уравнений***	метод, состоящий из прямого и обратного хода: – *прямой ход метода Гаусса* – приведение системы к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований; – *обратный ход* – выбор свободных и базисных переменных и получение формул общего решения
30	***Общее решение неоднородной системы***	решение, состоящее из суммы общего решения однородной системы и некоторого частного решения неоднородной
31	***Определенная система или имеющая единственное решение***	система, которая имеет единственное решение (у которой число угловых элементов в ступенчатой форме равно числу переменных, т.е. ранг системы равен числу переменных)

ЗАДАЧИ
ПРОФЕССИОНАЛЬНО ОРИЕНТИРОВАННОГО ХАРАКТЕРА

1. Для сдачи в эксплуатацию машиностроительного завода необходимо подвести электропитание в заводские цеха и установить электрооборудование, приведенное в таблице.

Тип работ	Затраты времени на оборудование цеха одним типом электрооборудования (чел.-ч)			
	Цех обработки	Цех мелких деталей	Цех сборки крупных узлов	Затраты рабочего времени
Установка розеток	5	6	5	48
Установка выключателей	3	2	4	26
Установка силовых рубильников	3	4	5	34

Определить количество введенных в эксплуатацию цехов.

2. Для изготовления изделий трех типов A_1, A_2, A_3 используется три вида материала B_1, B_2, B_3. Количество материала каждого вида, расходуемого на производство единицы изделия A_1, A_2, A_3, приведено в таблице.

Вид материала	Затраты материала, расходуемого на производство единицы изделия (кг)		
	A_1	A_2	A_3
B_1	7	4	10
B_2	12	7	12
B_3	8	9	10

Завод планирует затратить 138 кг материала вида B_1, 196 кг – вида B_2, 164 кг – вида B_3. Определить, сколько будет изготовлено изделий каждого типа A_1, A_2, A_3.

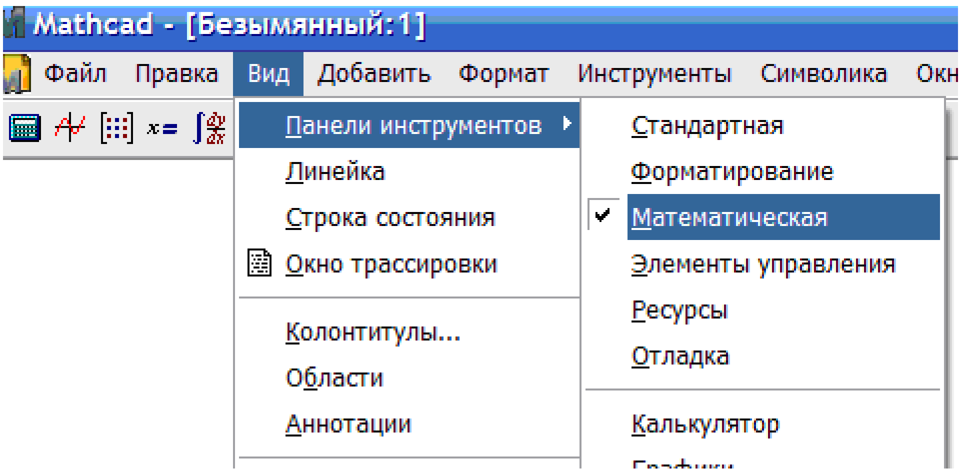
ПРИЛОЖЕНИЯ, РАЗРАБОТАННЫЕ В СИСТЕМАХ КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЫ

Рассмотрим программы, входящие в системы компьютерной алгебры: Mathcad и Maple. Предлагаемые программы помогут Вам при проверке домашнего задания или, при необходимости, предоставят возможность быстрого вычисления определителя, нахождения обратной матрицы, решения систем линейных уравнений, выполнения заданий из модуля «Элементы линейной алгебры» и др.

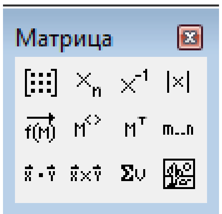
Рассмотрим один из наиболее популярных математических пакетов MathCAD.

Чтобы начать работать с приложением, вызовите панель Calculus (вычисления).

Выберите на панели вкладку ВИД → ПАНЕЛИ ИНСТРУМЕНТОВ → МАТЕМАТИЧЕСКАЯ.

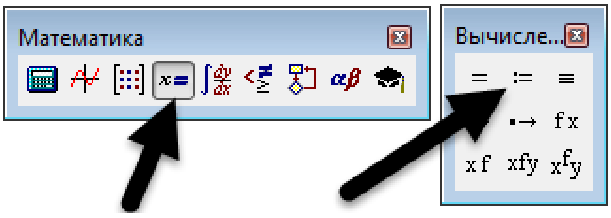


Далее появится панель 

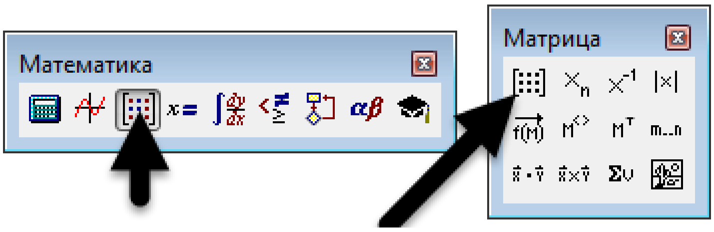
. На данной вкладке Вы выбираете панель «Матрица» 

и продолжаете работу. Например, Вы

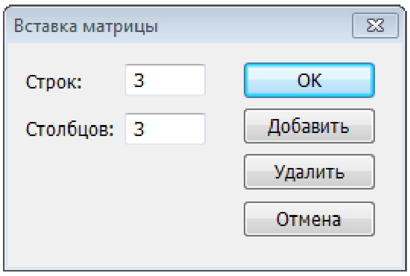
хотите вычислить определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -8 \\ 0 & 6 & 5 \\ 7 & -4 & 1 \end{pmatrix}$. Для этого необходимо выбрать вкладку «Математика», на ней вкладку «Вычисление»



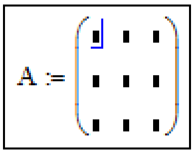
и ввести $A :=$ ▮. Затем выбрать на панели «Математика» вкладку «Матрица»



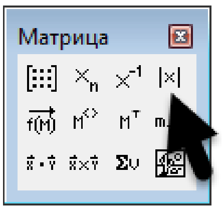
, (на рисунке обозначены стрелочкой). После этого появится следующий символ $A :=$ ▮



.Теперь введите нужное количество строк и столбцов



. В нашем примере три строки и три столбца. Поля мы заполняем соответственно заданному примеру $A := \begin{pmatrix} 1 & -2 & -8 \\ 0 & 6 & 5 \\ 7 & -4 & 1 \end{pmatrix}$. Затем, используя вкладку «Матрица»



, выбираем значок, указанный стрелочкой, заполняем его и вводим знак «=». Получаем ответ: $|A| = 292$.

Далее разобраны задачи, наиболее часто встречаемые в теме «Элементы линейной алгебры».

Решить систему линейных уравнений различными способами

$$\begin{cases} 2x - y + 5z = 0 \\ 3x + 2y - 5z = 1 \\ 3y - 2z = 4 \end{cases}$$

1. Решение системы линейных уравнений методом Гаусса

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & 2 & -5 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$P := \mathrm{augment}(A, B)$ Формируем расширенную матрицу

$$P = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & -5 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$R := \mathrm{rref}(P)$ Приводим расширенную матрицу к ступенчатому виду

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -0.115 \\ 0 & 1 & 0 & 1.574 \\ 0 & 0 & 1 & 0.361 \end{pmatrix}$$

Решить систему линейных уравнений различными способами

$$\begin{cases} 2x - y + 5z = 0 \\ 3x + 2y - 5z = 1 \\ 3y - 2z = 4 \end{cases}$$

1. Решение системы линейных уравнений методом обратной матрицы

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & 2 & -5 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Вычислить AX=B

$$X := A^{-1} \cdot B \qquad X = \begin{pmatrix} -0.115 \\ 1.574 \\ 0.361 \end{pmatrix}$$

2. Решение стстемы линейных уравнений методом Крамера

$\Delta := |A| \qquad \Delta = 61$ Вычислили главный определитель, убедились, что он отличен от нуля

$$A1 := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & -5 \\ 4 & 3 & -2 \end{pmatrix} \qquad A2 := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & -5 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \qquad A3 := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Сфорировали вспомогательные матрицы

$$\Delta1 := |A1| \qquad \Delta2 := |A2| \qquad \Delta3 := |A3|$$

$$\Delta1 = -7 \qquad \Delta2 = 96 \qquad \Delta3 = 22$$

Вычислили определители вспомогательных матриц

Применили формулы Крамера

$$x := \frac{\Delta1}{\Delta} \qquad y := \frac{\Delta2}{\Delta} \qquad z := \frac{\Delta3}{\Delta}$$

$$x = -0.115 \qquad y = 1.574 \qquad z = 0.361$$

Mathcad - [Элементарные операции над матрицами.xmcd]

Файл Правка Вид Добавить Формат Инструменты Символика Окно Справка

$$B := \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A := \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad C := \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Проверка выполнения тождества (AB)C=A(BC)

$$(A\cdot B)\cdot C = \begin{pmatrix} 34 & -18 \\ 40 & -22 \end{pmatrix} \qquad A\cdot(B\cdot C) = \begin{pmatrix} 34 & -18 \\ 40 & -22 \end{pmatrix}$$

следовательно тождество выполнено

2. Нахождение обратной матрицы

$$N := C^{-1}$$

$$N = \begin{pmatrix} 0.286 & 0.143 \\ -0.071 & 0.214 \end{pmatrix}$$

3. Вычисление определителя

$$H := |C|$$

$$H = 14$$

4. Выполнить (AB)C-4C+N

$$(A\cdot B)\cdot C - 4\cdot C + N = \begin{pmatrix} 22.286 & -9.857 \\ 35.929 & -37.786 \end{pmatrix}$$

Проверить систему на совместимость и, если это возможно решить её:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4 - 2x_5 = 4 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 - x_5 = 2 \\ 3x_1 - 2x_2 + x - x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 - x_2 + 5x_3 - 2x_4 + x_5 = 5 \end{cases}$$

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 5 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad b := \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Выделяем основные матрицы

$Ab := \mathrm{augment}(A, b)$

Создаём расширенную матрицу

$$Ab = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 5 & -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{rank}(A) = 5$

$\mathrm{rank}(Ab) = 5$

Вычисляем ранг заявленных матриц

$$\mathrm{lsolve}(A, b) = \begin{pmatrix} 0.732 \\ 0.281 \\ 1.248 \\ -0.19 \\ -2.072 \end{pmatrix}$$

Находим решение системы линейных уравнений

Создание матрицы

> $A := matrix(2, 2, [1, 2, 3, 4]);$

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

> $B := matrix(2, 2, [5, 6, 7, 8]);$

$$B := \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

> $C := matrix(2, 3, [3, 4, 4, 3, -1, 3]);$

$$C := \begin{bmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 3 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

> $mulcol(C, 1, 4);$ **Умножение 1 столбца матрицы C на 4**

$$\begin{bmatrix} 12 & 4 & 4 \\ 12 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

> $mulcol(A, 2, x);$ **Умножение 2 столбца матрицы A на x**

$$\begin{bmatrix} 1 & 2x \\ 3 & 4x \end{bmatrix}$$

> $mulrow(A, 2, 2);$ **Умножение 2 строки матрицы A на 2**

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$$

> $det(A);$ **Вычисляет определитель матрицы A**

$$-2$$

> $minor(A, 2, 1);$ **Вычисляет минор с индексами 2 , 1** $\{M_{21}\}$

$$[2]$$

> $rank(C);$ **Вычисляет ранг матриц**

$$2$$

> $inverse(A);$ **Вычисляет обратную матрицу** $[A^{-1}]$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \end{bmatrix}$$

> $evalm((A + B) \cdot C);$ **Элементарные матричные операции**

$$\begin{bmatrix} 42 & 16 & 48 \\ 66 & 28 & 76 \end{bmatrix}$$

> Решить систему линейных уравнений $\begin{cases} 2x - y + 5z = 0 \\ 3x + 2y - 5z = 1 \\ 3y - 2z = 4 \end{cases}$

```
> A := matrix(3, 3,[2,-1, 5, 3, 2,-5, 0, 3,-2]): b := vector(3,[0, 1, 4]);
```

$$b := [0 \quad 1 \quad 4]$$

```
> linsolve(A, b); # Решение линейной системы Ax = b
```

$$\left[\frac{-7}{61} \quad \frac{96}{61} \quad \frac{22}{61} \right]$$

```
> evalm(inverse(A)&* b); # Решение линейной системы Ax = b методом обратной матрицы
```

$$\left[\frac{-7}{61} \quad \frac{96}{61} \quad \frac{22}{61} \right]$$

Найти собственные значения и собственные векторы матрицы A:

> $A := \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$:

```
> eigenvals(A);# собственные числа
```

$$5, -1$$

```
> # Найдём собственные числа и собственные векторы матрицы A:
> v := eigenvectors(A) : L1 := v[1][1]; L2 := v[2][1];# собственные числа
```

$$L1 := 5$$

$$L2 := -1$$

```
> v1 := v[1][3]; v2 := v[2][3];# собственные векторы
```

$$v1 := \{[-2 \quad 1]\}$$

$$v2 := \{[1 \quad 1]\}$$

Рассмотрим элементы выполнения задания по разработки программы для вычисления системы линейных уравнений методом Жордано–Гаусса в EXSEL.

Решить систему методом Жордано–Гаусса

$$\begin{cases} 8,2x_1 - 3,2x_2 + 14,2x_3 + 14,8x_4 = -8,4 \\ 5,6x_1 - 12x_2 + 15x_3 - 6,4x_4 = 4,5 \\ 5,7x_1 + 3,6x_2 - 12,4x_3 - 2,3x_4 = 3,3 \\ 6,8x_1 + 13,2x_2 - 6,3x_3 - 8,7x_4 = 14,3 \end{cases}$$

Решение.

1. Составляем расширенную матрицу, заполняя таблицу вручную в Exsel.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2				$\begin{cases} 8,2x_1 - 3,2x_2 + 14,2x_3 + 14,8x_4 = -8,4 \\ 5,6x_1 - 12x_2 + 15x_3 - 6,4x_4 = 4,5 \\ 5,7x_1 + 3,6x_2 - 12,4x_3 - 2,3x_4 = 3,3 \\ 6,8x_1 + 13,2x_2 - 6,3x_3 - 8,7x_4 = 14,3 \end{cases}$				
3		Лабораторная 3						
4		Решение системы методом Жордано-Гаусса						
5								
6		решение						
7								
8		матрица (данная)						
9								
10		8,2	-3,2	14,2	14,8	-8,4		
11		5,6	-12	15	-6,4	4,5		
12		5,7	3,6	-12,4	-2,3	3,3		
13		6,8	13,2	-6,3	-8,7	14,3		

2. Далее выполняем первое действие. Делим каждый элемент 1-й строки матрицы на a11.

матрица1 (делим 1-ю строку матрицы на a11,получаем в 1-ом столбце 0)					
1	=C10/B10				
0					
0					
0					

Получаем в 1-м столбце 0. Для этого каждый элемент второй строки, кроме первого, мы преобразуем в соответствии с правилом Жордано–Гаусса от элемента C11-B11*C15, т.е. -12-5,6*(-0,39034…).

	A	B	C	D	E	F	G	H
7								
8		матрица (данная)						
9								
10		8,2	-3,2	14,2	14,8	-8,4		
11		5,6	-12	15	-6,4	4,5		
12		5,7	3,6	-12,4	-2,3	3,3		
13		6,8	13,2	-6,3	-8,7	14,3		
14		матрица1 (делим 1-ю строку матрицы на a11,получаем в 1-ом столбце 0)						
15		1	-0,390243902	1,731707317	1,804878	-1,024390244		
16		0	=(C11-$B11*C15)					
17		0						
18		0						

Подобным образом поступаем со следующим элементом, т.е 15,6*1,7317….

После заполнения второй строки приступаем к заполнению остальных строк. Обращаю внимание на знак «$», который мы ставили перед элементами. Он помогает нам закреплять значение этой ячейки, поэтому начиная со второй строки введенные формулы можно протянуть. Так заполнение проходит быстрее.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
7									
8		матрица (данная)							
9									
10		8,2	-3,2	14,2	14,8	-8,4			
11		5,6	-12	15	-6,4	4,5			
12		5,7	3,6	-12,4	-2,3	3,3			
13		6,8	13,2	-6,3	-8,7	14,3			
14		матрица1 (делим 1-ю строку матрицы на а11,получаем в 1-ом столбце 0)							
15		1	-0,390243902	1,731707317	1,804878	-1,024390244			
16		0	-9,814634146	=D11-$B11*D15					
17		0							

3. Далее выполняем второе действие. Делим каждый элемент 2-й строки матрицы на а22.

матрица2(делим 2-ю строку матрицы на а22,получаем в 2-ом столбце 0)					
1					
0	1	-0,540258449	1,681909	-1,042992048	
0					
0					

Получаем в 2-м столбце 0. Для этого каждый элемент второй строки, кроме первого, мы преобразуем в соответствии с правилом Жордано–Гаусса.

4. Заполняя таким образом таблицу, мы проходим четыре шага. На последнем шаге получаем таблицу, в которой по главной диагонали 1, а столбец свободных членов содержит ответ нашей задачи.

5. Выполняем проверку и записываем ответ.

Раздел 2
ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

Графическая схема

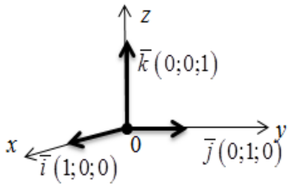
Информационная таблица «Элементы векторной алгебры»

Направленный отрезок прямой или упорядоченную пару точек называют *связным* (геометрическим) *вектором:* $\vec{a}$; $\bar{b}$; $\overline{AB}$; $\overline{M_1M_2}$ – векторы

Расстояние между началом и концом вектора называют *длиной вектора*.
Длина вектора $\leftrightarrow$ *модуль вектора*.

$$\bar{a}\left(a_x;a_y;a_z\right),\ |\bar{a}|=\sqrt{\left(a_x\right)^2+\left(a_y\right)^2+\left(a_z\right)^2}$$

В ДПСК базисные векторы принято обозначать:



для $R^1-\{\bar{i}\}$

для $R^2-\{\bar{i};\bar{j}\}$

для $R^3-\{\bar{i};\bar{j};\bar{k}\}$

Вектор, длина которого равна нулю, – *нулевой* вектор. Вектор, длина которого равна единице, – *единичный* вектор. Векторы *коллинеарны*, если они лежат на одной или параллельных прямых.
Единичный вектор, сонаправленный с вектором $\bar{a}$, называют его *ортом*: $\bar{a}_0=\frac{1}{|\bar{a}|}\bar{a}$. Векторы, лежащие в одной или параллельных плоскостях, называются *компланарными*

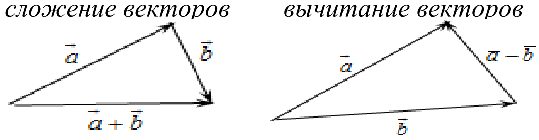
Аналитический способ задания вектора

1) координатами: $\bar{a}\left(a_x;a_y;a_z\right)$;
2) разложением по базису: $\bar{a}=a_x\cdot\bar{i}+a_y\cdot\bar{j}+a_z\cdot\bar{k}$;
3) двумя точками: $M_1\left(x_1;y_1;z_1\right)$, $M_2\left(x_2;y_2;z_2\right)$, $\overline{M_1M_2}\left(x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1\right)$;
4) орт вектором и длиной вектора: $\bar{a}_0;|\bar{a}|$;
5) направляющими косинусами и длиной вектора: $(\cos\alpha;\ \cos\beta;\ \cos\gamma)$; $|\bar{a}|$

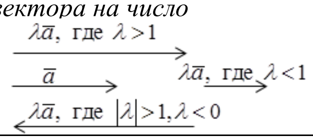
ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД ВЕКТОРАМИ

Вектор задан геометрически

сложение векторов *вычитание векторов*



умножение вектора на число



Вектор задан алгебраически

Если $\bar{a}\left(a_x;a_y;a_z\right)$ и $\bar{b}\left(b_x;b_y;b_z\right)$, то

сложение векторов

$$\bar{a}+\bar{b}=\left(a_x+b_x;a_y+b_y;a_y+b_y\right);$$

вычитание векторов

$$\bar{a}-\bar{b}=\left(a_x-b_x;a_y-b_y;a_y-b_y\right);$$

умножение вектора на число $\lambda\cdot\bar{a}=\left(\lambda a_x;\lambda a_y;\lambda a_z\right)$

Скалярное произведение векторов

Скалярное произведение двух векторов – число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними: $\bar{a}\cdot\bar{b}=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\cos\left(\bar{a}\hat{\ }\bar{b}\right)$.

Геометрические свойства: $\bar{a}\perp\bar{b}\Leftrightarrow\bar{a}\cdot\bar{b}=0$, вычисление угла между векторами: $\cos\left(a\hat{\ }b\right)=\frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|}$ $\Rightarrow$

$$\cos\left(a\hat{\ }b\right)=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}.$$

Физические приложения: вычисление работы силы, действующей при прямолинейном перемещении:

$A = F\cdot S$

Векторное произведение векторов

Векторное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ – вектор $\bar{c}$ ($\bar{c}=\bar{a}\times\bar{b}$), удовлетворяющий следующим условиям: 1) $\bar{c}\perp\bar{a}$ и $\bar{c}\perp\bar{b}$; 2) упорядоченная тройка векторов $\left(\bar{a},\bar{b},\bar{c}\right)$ – правая; 3) $|\bar{c}|=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\sin\left(\bar{a}\hat{\ }\bar{b}\right)$.

Геометрические свойства: $\bar{a}\parallel\bar{b}\Leftrightarrow\bar{a}\times\bar{b}=0$;

$S_{параллелограмма}=\left|\bar{a}\times\bar{b}\right|$; 3) $S_\Delta=\frac{1}{2}\left|\bar{a}\times\bar{b}\right|$.

Физические приложения: если $\bar{F}$ – сила, приложенная к точке *M*, то момент этой силы относительно точки *O* равен векторному произведению векторов $\bar{F}$ и $\overline{OM}$.

$$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}.$$

ВАЖНО! $\bar{a}\times\bar{b}=-\bar{b}\times\bar{a}$

Векторно-скалярным, или *смешанным*, *произведением* упорядоченной тройки векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ в R^3 называется число $\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\bar{c}$, которое получается скалярным умножением векторного произведения векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ на третий вектор $\bar{c}$ и обозначается $\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}$ или ($\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$): $\bar{a}\bar{b}\bar{c}=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}$.

Приложение: вычисление объемов параллелепипеда и пирамиды $V_{параллепипеда}=\left|\bar{a}\bar{b}\bar{c}\right|$; $V_{пирамиды}=\frac{1}{6}\cdot\left|\bar{a}\bar{b}\bar{c}\right|$

Базовый минимум к разделу «Элементы векторной алгебры»

Задача 1. Даны векторы $\overline{a}=(2;-1;3)$, $\overline{b}=(1;2;-3)$, $\overline{c}=(0;1;2)$, $\overline{d}=(-1;9;-13)$ со своими координатами в базисе $(\overline{e}_1;\overline{e}_2;\overline{e}_3)$. Показать, что векторы $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ сами образуют базис, и найти разложение вектора $\overline{d}$ в новом базисе.

Решение.

Вычислим определитель, составленный из координат этих векторов:

$$\Delta=\begin{vmatrix}2 & -1 & 3\\ 1 & 2 & -3\\ 0 & 1 & 2\end{vmatrix}=19\neq 0.$$

Это значит, что векторы $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ линейно независимы и, следовательно, образуют базис пространства R^3.

Пусть $\overline{d}=\alpha_1\overline{a}+\alpha_2\overline{b}+\alpha_3\overline{c}$ − разложение вектора $\overline{d}$ по базису $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$.

Согласно условию задачи,

$$-1\cdot\overline{e}_1+9\cdot\overline{e}_2-13\cdot\overline{e}_3=\alpha_1\left(2\cdot\overline{e}_1-1\cdot\overline{e}_2+3\cdot\overline{e}_3\right)+$$
$$+\alpha_2\left(1\cdot\overline{e}_1+2\cdot\overline{e}_2-3\cdot\overline{e}_3\right)+\alpha_3\left(0\cdot\overline{e}_1+1\cdot\overline{e}_2+2\cdot\overline{e}_3\right),$$
$$-1\cdot\overline{e}_1+9\cdot\overline{e}_2-13\cdot\overline{e}_3=\left(2\cdot\alpha_1+1\cdot\alpha_2+0\cdot\alpha_3\right)\cdot\overline{e}_1+$$
$$+\left(-1\cdot\alpha_1+2\cdot\alpha_2+1\cdot\alpha_3\right)\cdot\overline{e}_2+\left(3\cdot\alpha_1-3\cdot\alpha_2+2\cdot\alpha_3\right)\cdot\overline{e}_3.$$

Из условия равенства двух векторов получим:

$$\begin{cases}2\alpha_1+1\alpha_2+0\alpha_3=-1,\\ -1\alpha_1+2\alpha_2+1\alpha_3=9,\\ 3\alpha_1-3\alpha_2+2\alpha_3=-13.\end{cases}\overset{[1]}{\Rightarrow}\begin{cases}\alpha_1-2\alpha_2-\alpha_3=-9,\\ 2\alpha_1+\alpha_2=-1,\\ 3\alpha_1-3\alpha_2+2\alpha_3=-13.\end{cases}\overset{[2]}{\Rightarrow}$$

$$\begin{cases}\alpha_1-2\alpha_2-\alpha_3=-9,\\ 5\alpha_2+2\alpha_3=17,\\ 3\alpha_2+5\alpha_3=14.\end{cases}\overset{[3]}{\Rightarrow}\begin{cases}\alpha_1-2\alpha_2-\alpha_3=-9,\\ \alpha_2+\frac{2}{5}\alpha_3=\frac{17}{5},\\ 3\alpha_2+5\alpha_3=14.\end{cases}\overset{[4]}{\Rightarrow}$$

$$\overset{[5]}{\begin{cases}\alpha_1-2\alpha_2-\alpha_3=-9,\\ \alpha_2+\frac{2}{5}\alpha_3=\frac{17}{5},\\ \frac{19}{5}\alpha_3=\frac{19}{5}.\end{cases}}\Rightarrow\begin{cases}\alpha_1=-2,\\ \alpha_2=3,\\ \alpha_3=1.\end{cases}$$

[1]: обе части первого уравнения умножим на (-1), поменяем местами первое и второе уравнения;

[2]: обе части первого уравнения умножим на (-2) и прибавим, соответственно, ко второму уравнению. Затем обе части первого уравнения умножим на (-3) и прибавим, соответственно, к третьему уравнению;

[3]: обе части второго уравнения разделим на 5;

[4]: обе части второго уравнения умножим на (-3) и прибавим, соответственно, к третьему;

[5]: из третьего уравнения находим $\alpha_3 = 1$. Подставим это значение во второе уравнение и получим $\alpha_2 = 3$. Подставляя полученные значения $\alpha_2 = 3, \alpha_3 = 1$ в первое уравнение, найдем $\alpha_1 = -2$.

Эту систему можно решить по формулам Крамера:

$$\alpha_1 = \frac{\Delta_{\alpha_1}}{\Delta}, \quad \alpha_2 = \frac{\Delta_{\alpha_2}}{\Delta}, \quad \alpha_3 = \frac{\Delta_{\alpha_3}}{\Delta},$$

где $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 19$;

$$\Delta_{\alpha_1} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 9 & 2 & 1 \\ -13 & -3 & 2 \end{vmatrix} = -38; \ \Delta_{\alpha_2} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 9 & 1 \\ 3 & -13 & 2 \end{vmatrix} = 57; \ \Delta_{\alpha_3} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 9 \\ 3 & -3 & -13 \end{vmatrix} = 19.$$

Отсюда $\alpha_1 = -2$, $\alpha_2 = 3$, $\alpha_3 = 1$.

Итак, $\overline{d} = -2\overline{a} + 3\overline{b} + 1\overline{c}$.

Ответ: $\overline{d}(-2; \ 3; \ 1)$.

Задача 2. Найти объем пирамиды и длину высоты, опущенной на грань *BCD*, если вершины имеют координаты *A*(0; 0; 1), *B*(2; 3; 5), *C*(6; 2; 3), *D*(3; 7; 2).

Решение. Найдем координаты векторов: $\overrightarrow{BA} = (-2; -3; -4)$, $\overrightarrow{BD} = (1; 4; -3)$, $\overrightarrow{BC} = (4; -1; -2)$.

Объем пирамиды

$$V = \frac{1}{6} = \begin{vmatrix} -2 & -3 & -4 \\ 1 & 4 & -3 \\ 4 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}(-2(-8-3) + 3(-2+12) - 4(-1-16)) =$$

$$= \frac{1}{6}(22 + 30 + 68) = 20 \ (\text{ед}^3).$$

Для нахождения длины высоты пирамиды найдем сначала площадь основания BCD.

$$\overline{BD}\times\overline{BC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 4 & -3\\ 4 & -1 & -2\end{vmatrix}=\vec{i}\,(-8-3)-\vec{j}\,(-2+12)+\vec{k}\,(-1-16)=$$

$$=-11\vec{i}-10\vec{j}-17\vec{k}.$$

$$\left|\overline{BD}\times\overline{BC}\right|=\sqrt{11^2+10^2+17^2}=\sqrt{121+100+289}=\sqrt{510}\,.$$

$$S_{осн}=\frac{\sqrt{510}}{2}\ (\text{ед}^2).$$

Т.к. $V=\dfrac{S_{осн}\cdot h}{3}$, $h=\dfrac{3V}{S_{осн}}=\dfrac{120}{\sqrt{510}}=\dfrac{4\sqrt{510}}{17}$ (ед).

Задача 3. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы $A=\begin{pmatrix}2 & 2 & 1\\ 2 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}$

Решение.

Составляем характеристическое уравнение матрицы *A:*

$$\begin{vmatrix}a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda\end{vmatrix}=0,\qquad \begin{vmatrix}2-\lambda & 2 & 1\\ 2 & 2-\lambda & 1\\ 1 & 1 & 3-\lambda\end{vmatrix}=0,$$

или

$$(2-\lambda)(5-5\lambda+\lambda^2)-2(5-2\lambda)+\lambda=0.$$

Раскрывая скобки и приводя подобные члены, получим кубическое уравнение $-\lambda^3+7\lambda^2-10\lambda=0$, корни которого равны $\lambda_1=0$, $\lambda_2=2$, $\lambda_3=5$.

Чтобы найти собственные векторы, решаем систему уравнений

$$\begin{cases}(2-\lambda)x_1 & +2x_2 & +x_3 & = & 0;\\ 2x_1 & +(2-\lambda)x_2 & +x_3 & = & 0;\\ x_1 & +x_2 & +(3-\lambda)x_3 & = & 0.\end{cases}$$

Найдем собственный вектор $\overline{p}_1$, соответствующий собственному значению $\lambda_1=0$. Система уравнений примет следующий вид:

$$\begin{cases} (2-0)x_1 & +2x_2 & +x_3 & = & 0, \\ 2x_1 & +(2-0)x_2 & +x_3 & = & 0, \\ x_1 & +x_2 & +(3-0)x_3 & = & 0. \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 2x_1 & +2x_2 & +x_3 & = & 0, \\ x_1 & +x_2 & +3x_3 & = & 0. \end{cases}$$

Пусть $x_3 = 0$, тогда $x_1 = a$, $x_2 = -a$,

$\overline{p}_1 = a(1; -1; 0)$, $a \neq 0$. Для $\lambda_2 = 2$ получаем систему уравнений

$$\begin{cases} (2-2)x_1 & +2x_2 & +x_3 & = & 0, \\ 2x_1 & +(2-2)x_2 & +x_3 & = & 0, \\ x_1 & +x_2 & +(3-2)x_3 & = & 0. \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} & +2x_2 & +x_3 & = & 0; \\ 2x_1 & & +x_3 & = & 0; \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 0. \end{cases}$$

Пусть $x_2 = a$, тогда $x_3 = -2a$, $x_1 = a$, $\overline{p}_2 = (1;1;-2) \cdot a$, $a \neq 0$.

Для $\lambda_3 = 5$ имеем

$$\begin{cases} (2-5)x_1 & +2x_2 & +x_3 & = & 0, \\ 2x_1 & +(2-5)x_2 & +x_3 & = & 0, \\ x_1 & +x_2 & +(3-5)x_3 & = & 0. \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} -3x_1 & +2x_2 & +x_3 & = & 0, \\ 2x_1 & -3x_2 & +x_3 & = & 0, \\ x_1 & +x_2 & -2x_3 & = & 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 & +x_2 & -2x_3 & = & 0, \\ & -5x_2 & +5x_3 & = & 0; \end{cases} \quad x_2 = x_3.$$

Пусть $x_3 = a$, тогда $x_2 = a$, $\overline{p}_3 = (1;1;1)a$, $a \neq 0$.

Итак, собственные векторы заданной матрицы:

$\overline{p}_1 = (1;-1;0)a$; $\overline{p}_2 = (1;1;-2)a$; $\overline{p}_3 = (1;1;1)a$, $a \neq 0$.

Ответ: $\overline{p}_1 = (1;-1;0)a$; $\overline{p}_2 = (1;1;-2)a$; $\overline{p}_3 = (1;1;1)a$, $a \neq 0$.

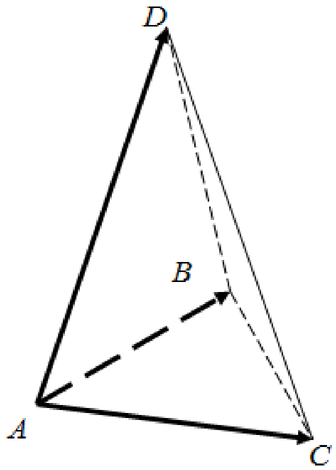
Решение нулевого варианта контрольной работы

Задача 1. Даны вершины пирамиды A (1;-1; 4), B (0; 3; 7), C (0; 0; -6), D(4;3;0). Вычислить:

а) площадь основания ΔABC;
б) угол между ребрами AB и AC;
в) объем пирамиды;
г) высоту пирамиды.

Решение.

Сделаем схематический чертеж.



Вычислим координаты следующих векторов по формуле $A(x_1;y_1;z_1), B(x_2;y_2;z_2) \Rightarrow \overline{AB}=(x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1)$:

$\overline{AB}=(0-1;\ 3+1;\ 7-4)=(-1;\ 4;\ 3)$;

$\overline{AC}=(0-1;\ 0+1;\ -6-4)=(-1;\ 1;\ -10)$;

$\overline{AD}=(4-1;\ 3+1;\ 0-4)=(3;\ 4;\ -4)$.

Вычислим площадь основания ΔABC по формуле $S=\frac{1}{2}\cdot\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|$:

$$\overline{AB}\times\overline{AC}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ -1 & 4 & 3\\ -1 & 1 & -10\end{vmatrix}=-40\overline{i}-3\overline{j}-\overline{k}+4\overline{k}-3\overline{i}-10\overline{j}=$$

$$=-43\overline{i}-13\overline{j}+3\overline{k}\Rightarrow\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|=\sqrt{(-43)^2+(-13)^2+(3)^2}=\sqrt{2027}\approx 45,02.$$

$$S=\frac{1}{2}\cdot\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|=\frac{1}{2}\cdot 45,02=22,51.$$

Вычислим угол между ребрами AB и AC по формуле

$$\overline{a}\left(a_x;a_y;a_z\right),\overline{b}\left(b_x;b_y;b_z\right)\Rightarrow \cos\alpha=\frac{a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y+a_z\cdot b_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}:$$

$$\cos\alpha=\frac{(-1)\cdot(-1)+4\cdot1+3\cdot(-10)}{\sqrt{(-1)^2+4^2+3^2}\cdot\sqrt{(-1)^2+1^2+(-10)^2}}=\frac{1+4-30}{\sqrt{26}\cdot\sqrt{102}}=\frac{-25}{\sqrt{2652}}\approx-0,46,$$

$$\alpha=\arccos(-0,46)\approx118.$$

Вычислим объем пирамиды по формуле $V=\frac{1}{6}\cdot\left|\overline{AB}\,\overline{AC}\,\overline{AD}\right|$:

$$\overline{AB}\,\overline{AC}\,\overline{AD}=\begin{vmatrix}-1 & 4 & 3\\ -1 & 1 & -10\\ 3 & 4 & -4\end{vmatrix}=4-12-120-9-40-16=-193.$$

$$V=\frac{1}{6}\cdot\left|\overline{AB}\,\overline{AC}\,\overline{AD}\right|=\frac{1}{6}\cdot|-193|=\frac{193}{6}\approx32,2.$$

Вычислим высоту пирамиды

$$V=\frac{1}{3}\cdot S_{осн}\cdot H\Rightarrow H=\frac{3V}{S_{осн}}=\frac{3\cdot32,3}{22,51}\approx4,3.$$

Ответ: 22,51; 118°; 32,2; 4,3.

Задача 2. Доказать, что векторы $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ образуют базис, и найти координаты вектора $\overline{d}$ в этом базисе.

$\overline{a}$ = (5, 4, 1), $\overline{b}$ = (-3, 5, 2), $\overline{c}$ = (2, -1, 3), $\overline{d}$ = (7, 23, 4).

Решение. Докажем, что $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ образуют базис. Для этого вычислим смешанное произведение векторов $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$.

$$\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix},\quad \overline{a}\overline{b}\overline{c}=\begin{vmatrix}5 & 4 & 1\\ -3 & 5 & 2\\ 2 & -1 & 3\end{vmatrix}=130.$$

Определитель не равен 0, поэтому данные вектора не компланарны и могут образовывать базис.

Разложим данные вектора по базису $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$.

$\overline{a}=5\overline{i}+4\overline{j}+\overline{k}$;

$\overline{b}=-3\overline{i}+5\overline{j}+2\overline{k}$;

$\overline{c}=2\overline{i}-\overline{j}+3\overline{k}$;

$\overline{d}=7\overline{i}+23\overline{j}+4\overline{k}$.

Представим разложение вектора $\overline{d}$ по новому базису

$\overline{d} = \alpha \cdot \overline{a} + \beta\overline{b} + \gamma\overline{c}$.

Теперь вместо $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ подставим их разложение по базису:

$\overline{d} = \alpha \cdot \left(5\overline{i} + 4\overline{j} + \overline{k}\right) + \beta\left(-3\overline{i} + 5\overline{j} + 2\overline{k}\right) + \gamma\left(2\overline{i} - \overline{j} + 3\overline{k}\right) = 7\overline{i} + 23\overline{j} + 4\overline{k}$.

Раскроем скобки и перегруппируем:

$$\overline{d} = 5\overline{i} \cdot \alpha + 4\overline{j} \cdot \alpha + \overline{k} \cdot \alpha - 3\overline{i} \cdot \beta + 5\overline{j} \cdot \beta + 2\overline{k} \cdot \beta + 2\overline{i} \cdot \gamma - \overline{j} \cdot \gamma + 3\overline{k} \cdot \gamma =$$
$$= \left(5\alpha - 3\beta + 2\gamma\right)\overline{i} + \left(4\alpha + 5\beta - \gamma\right)\overline{j} + \left(\alpha + 2\beta + 3\gamma\right)\overline{k} = 7\overline{i} + 23\overline{j} + 4\overline{k}.$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых переменных, т.к. данные уравнения тождественны, составляем систему:

$$\begin{cases} 5\alpha - 3\beta + 2\gamma = 7, \\ 4\alpha + 5\beta - \gamma = 23, \\ \alpha + 2\beta + 3\gamma = 4. \end{cases}$$

Решаем систему методом Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 4 & 5 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 130;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 7 & -3 & 2 \\ 23 & 5 & -1 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 390, \quad \alpha = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{390}{130} = 3,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 7 & 2 \\ 4 & 23 & -1 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 260, \quad \beta = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{260}{130} = 2,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & -3 & 7 \\ 4 & 5 & 23 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -130, \quad \gamma = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-130}{130} = -1.$$

Таким образом, новое разложение вектора $\overline{d}$ по базису $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ $\overline{d} = 3 \cdot \overline{a} + 2\overline{b} - \overline{c}$.

Ответ: $\overline{d} = 3\overline{a} + 2\overline{b} - \overline{c}$.

Задача 3. Выяснить, при каком значении α векторы $\overline{a}\left(1;\ 1;\ \alpha\right)$, $\overline{b}(-3;\ 2;\ 1)$, $\overline{c}(2;\ 0;\ -3)$ компланарны.

Решение. Вектора компланарны, если их смешанное произведение равно 0.

Следовательно, мы вычислим смешанное произведение, приравняем нулю и посмотрим, при каком значении α будет выполняться это условие.

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ -3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 0,$$

$$-6+0+2-4\alpha+0-9=0,\ \alpha=-\frac{13}{4}.$$

Ответ: $\alpha=-\dfrac{13}{4}$.

Задача 4. Вектор $\bar{x}$, перпендикулярный к векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$, образует с осью Oy тупой угол. Найти вектор $\bar{x}$, если $\bar{a}(-2;\ 7;\ 10)$, $\bar{b}(0;\ 3;\ 4)$, $|\bar{x}|=\sqrt{26}$.

Решение. Пусть существует вектор $\bar{c}\perp\bar{a}$ и $\bar{c}\perp\bar{b}$, значит $\bar{c}\parallel\bar{x}$.

Чтобы найти вектор $\bar{c}$, воспользуемся определением векторного произведения.

Следовательно $\bar{c}=\bar{a}\times\bar{b}$.

$$\bar{c}=\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -2 & 7 & 10 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix}=-2\bar{i}+8\bar{j}-6\bar{k}.$$

$\bar{c}(-2,8,-6)$.

$\bar{c}\parallel\bar{x}$, поэтому их координаты пропорциональны. Следовательно,

$\dfrac{x_x}{-2}=\dfrac{x_y}{8}=\dfrac{x_z}{-6}=\lambda$. Значит $\bar{x}=(-2\lambda;8\lambda;-6\lambda)$.

Найдем длину вектора $\bar{x}$.

$|\bar{x}|=\sqrt{4\lambda^2+64\lambda^2+36\lambda^2}=\sqrt{26}$ (по условию), $\Rightarrow\lambda^2=\dfrac{1}{4}$, $|\lambda|=\dfrac{1}{2}$.

Так как $\bar{x}$ образует с осью Oy тупой угол, то координата по y будет отрицательной, $\bar{x}=(-2\lambda;\ 8\lambda;\ -6\lambda)$.

Следовательно,

$$\lambda=-\frac{1}{2},\ \bar{x}=\left(-2\left(-\frac{1}{2}\right);8\left(-\frac{1}{2}\right);-6\left(-\frac{1}{2}\right)\right),\ \bar{x}=(1;-4;3).$$

Ответ: $\bar{x}=(1;-4;3)$.

Задача 5. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы $A=\begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

Решение. Составим характеристическое уравнение, для этого от элементов находящихся на главной диагонали отнимем λ и составим определитель равный 0.

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 & -1 \\ -2 & 2-\lambda & -2 \\ -1 & -2 & 5-\lambda \end{vmatrix}=0.$$

Вычислим данный определитель:

$$(5-\lambda)^2(2-\lambda)-4-4-(2-\lambda)-4(5-\lambda)-4(5-\lambda)=0$$

$$(5-\lambda)^2(2-\lambda)-8-(2-\lambda)-8(5-\lambda)=0$$

$$-\lambda^3+12\lambda^2-36\lambda=0$$

$$\lambda\left(-\lambda^2+12\lambda-36\right)=0$$

$\lambda_1=0$ или $-\lambda^2+12\lambda-36=0$

$\lambda_2=\lambda_3=6$ – собственные значения.

Найдем собственный вектор для собственного значения $\lambda_1=0$.

Составим однородную систему уравнений

$$\begin{cases} 5x-2y-z=0 \\ -2x+2y-2z=0 \\ -x-2y+5z=0 \end{cases}$$

Решая данную систему методом Гаусса, получаем

$$\begin{cases} x+2y-5z=0 \\ 6y-12z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=a \\ y=2a \\ x=a \end{cases}$$

Следовательно, собственный вектор $\overline{p}_1=(a;\ 2a;\ a)=(1;\ 2;\ 1)a$.

Найдем собственный вектор для собственного значения $\lambda_2=6$. Составим однородную систему уравнений:

$$\begin{cases} -x-2y-z=0 \\ -2x-4y-2z=0 \\ -x-2y-z=0 \end{cases}$$

Данная система сводится к одному уравнению $-x-2y-z=0$.

Значит, собственный вектор $\overline{P}_2=(a,-a,a)=(1,-1,1)a$.

Для того чтобы найти P_3, воспользуемся свойством $\overline{P_1}\perp\overline{P}_2\perp\overline{P_3}$. Следовательно $\overline{P_3}=\overline{P_1}\times\overline{P_2}$.

$$\overline{P_3}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix}=3\bar{i}-3\bar{k},\ \overline{P}_3=(3a,0,-3a)=(3,0,-3)a.$$

Ответ: $\bar{p}_1=(1;\ 2;\ 1)a$, $\bar{p}_2=(1;-1;\ 1)a$, $\bar{p}_3=(3;\ 0;\ -3)a$.

Вариант для самопроверки

1. Даны координаты вершин пирамиды АВСД:

A(2; -1; 1), *B*(5; 5; 4), *C*(3; 2; -1), *D*(4; 1; 3). Найти:

– длину ребра *AC*;
– угол между ребрами *AB* и *AC*;
– площадь грани *ABC*;
– длину высоты, опущенной из вершины *B* на сторону *AC*;
– объем пирамиды.

Ответ: $\sqrt{13},\ \arccos\left(\dfrac{15}{\sqrt{13}\sqrt{14}}\right),\ \dfrac{3\sqrt{59}}{2},\ \dfrac{3\sqrt{59}}{\sqrt{13}},\ 3.$

2. Доказать, что векторы $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ образуют базис и найти вектор $\bar{d}$ в этом базисе:

$\bar{a}(3;\ -2;\ 1),\ \bar{b}(-1;\ 1;\ -2),\ \bar{c}(2;\ 1;\ -3),\ \bar{d}(11;\ -6;\ 5)$.

Ответ: $\bar{d}=2\bar{a}-3\bar{b}+\bar{c}$.

3. Выяснить при каком значении α векторы $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ компланарны $\bar{a}(-4;\alpha;2),\bar{b}(2;0;-3),\bar{c}(-3;2;1)$.

Ответ: $\alpha=\dfrac{16}{7}$.

4. Вектор $\bar{x}$,перпендикулярный к векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$ образует с осью *Oy* тупой угол. Найти вектор $\bar{x}$, если $\bar{a}(4;0;3),\ \bar{b}(0;1;3),\ |\bar{x}|=26$

Ответ: $\bar{x}=(-6;-24;8)$.

5. Найти собственные вектора и собственные значения матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Ответ: $\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = -2,\ \lambda_3 = 6$;
$\overline{p}_1 = (1,-1,1)a_1, \overline{p}_2 = (1,0,-1)a_2, \overline{p}_3 = (1,2,1)a_3$,
$a_i \in R,\ i = 1,\ 2,\ 3.$

Трехуровневые тестовые задания к разделу «Элементы векторной алгебры»

Уровень I

1. Даны вектора $\overline{a}$ (2; 1; -2), $\overline{b}$ (3; 2; 4), $\overline{c}$ (-4; -2; 4).

I. Какие из заданных векторов
а) коллинеарные;
б) перпендикулярные.
– Найти $\overline{a} \times \overline{c}$.

II. Найти
– $\overline{a}_0$;
– $\left(\overline{a},\hat{}\ \overline{b}\right)$;
– $\text{пр}_{\overline{a}}\overline{c}$.

2. На плоскости даны точки A(1; 2), B(-1; 3), C(2; 5). Доказать, что векторы $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ образуют базис. Разложить $\overline{BC}$ по этому базису, найти направляющие косинусы вектора $\overline{AB}$.

Уровень II

1. Заданы три вектора $\overline{a}$ = (-1; 2; 0), $\overline{b}$ = (3; 1; 1), $\overline{c}$ = (2; 0; 1). Найти:
а) $\overline{a} \times \overline{b}$, $\overline{a} \cdot \overline{c}$;
б) $\text{пр}_{\overline{a}}\overline{c}$, $\cos\left(\overline{a},\hat{}\ \overline{b}\right)$;
c) $S_{\text{параллелограмма}}$, построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$;
д) $\overline{x} \uparrow\downarrow \overline{a}$, $|\overline{x}| = 2\sqrt{5}$, $\overline{x}$ – ?

2. Даны вершины пирамиды A_1(2; 0; -1), A_2(-2; -11; 5), A_3(1; -4; -1), A_4(-2; 1; -4). Найти:

а) проекцию вектора $\overline{A_3M}$ на вектор $\overline{A_3A_4}$;

б) угол $A_4A_1A_3$;

в) площадь грани $A_4A_1A_3$;

г) объем пирамиды;

д) высоту пирамиды.

3. Образует ли тройка $\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$ базис в пространстве? ($\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ из п. 1)

4. а) Как вычислить работу силы?

б) $\bar{a}\cdot\bar{b} = 0 \Leftrightarrow$?

5. Найти $|\bar{a}|^2$, если $\bar{a} = \bar{p} + \bar{r}$, $|\bar{p}| = 1$, $|\bar{r}| = 2$, $\left(\widehat{\bar{p}, \bar{r}}\right) = 60^0$.

Ответ: 7.

6. Даны векторы $\bar{a} = (4;\ 2;\ -1)$, $\bar{b} = (5;\ 3;\ -2)$, $\bar{c} = (3;\ 2;\ -1)$, $\bar{d} = (12; 7; -3)$ со своими координатами в базисе $\left(\bar{e}_1;\ \bar{e}_2;\ \bar{e}_3\right)$. Показать, что векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ сами образуют базис, и найти разложение вектора $\bar{d}$ в новом базисе.

Ответ: $\bar{d} = 2\bar{a} - \bar{b} + 3\bar{c}$.

Уровень III

1. Найти вектор, перпендикулярный к векторам $\bar{a}\,(1; 2; -3)$ и $\bar{b}\,(2; 4; 6)$.

2. Векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ имеют равные длины и образуют попарно равные углы. Найти координаты вектора $\bar{c}$, если $\bar{a} = \bar{i} + \bar{j}$, $\bar{b} = \bar{j} + \bar{k}$.

Ответ: $\bar{c}\left(-\dfrac{1}{3};\ \dfrac{4}{3};\ -\dfrac{1}{3}\right)$,

или $\bar{c}\,(1; 0; 1)$.

3. Даны три вектора $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$, удовлетворяющие условию $\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} = \bar{0}$. Зная, что $|\bar{a}| = 5$, $|\bar{b}| = 2$ и $|\bar{c}| = 3$, вычислить $\bar{a}\cdot\bar{b} + \bar{b}\cdot\bar{c} + \bar{c}\cdot\bar{a} = \bar{0}$.

Ответ: -19.

4. Четырехугольник $ABCD$ – параллелограмм, O – точка пересечения его диагоналей, M – произвольная точка, отличная от O. Можно ли выразить вектор $\bar{a} = \overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} + \overline{MD}$ через вектор $\overline{MO}$?

Ответ: да, $\bar{a} = 4\overline{MO}$.

5. Точка O является центром тяжести треугольника ABC. Доказать, что $\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}=\overline{0}$.

6. В равнобочной трапеции $ABCD$ известны нижнее основание $\overline{AB}=\overline{a}$, боковая сторона $\overline{AD}=\overline{b}$ и угол между ними $\angle A=\frac{\pi}{3}$. Разложить по $\overline{a}$ и $\overline{b}$ все векторы, составляющие остальные стороны и диагонали трапеции.

Ответ: $\overline{BC}=-\frac{|\overline{b}|}{|\overline{a}|}\overline{a}+\overline{b}$; $\overline{CD}=\frac{|\overline{b}|-|\overline{a}|}{|\overline{a}|}\overline{a}$; $\overline{AC}=\frac{|\overline{a}|-|\overline{b}|}{|\overline{a}|}\overline{a}+\overline{b}$.

7. Вычислить высоту пирамиды, опущенную на ABD, если пирамида построена на векторах AB + AC, AB, AD и $A(-1;\ 2;\ 1)$, $B(1;-2;-3)$, $C(1;-1;-4)$, $D(-1;-4;-2)$.

Ответ: $h=\frac{1}{2}$.

ГЛОССАРИЙ

№п/п	Новые понятия	Содержание
1	*2*	*3*
1	***Скалярная величина***	величина, которая может быть задана числом в выбранной системе единиц
2	***Векторная величина***	величина, которая задается значением и направлением
3	***Коллинеарные векторы***	векторы, лежащие на параллельных прямых (или на одной и той же прямой)
4	***Координаты вектора $\bar{a}$ в базисе $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$***	коэффициенты *X*, *Y*, *Z* в разложении вектора $\bar{a}$ по базису $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$: $\bar{a} = X \cdot \bar{i} + Y \cdot \bar{j} + Z \cdot \bar{k}$
5	***Условие коллинеарности двух векторов, заданных координатами $\bar{a} = \{X_1, Y_1, Z_1\}$ и $\bar{b} = \{X_2, Y_2, Z_2\}$***	пропорциональность их соответствующих координат: $\frac{X_1}{X_2} = \frac{Y_1}{Y_2} = \frac{Z_1}{Z_2}$
6	***Направляющие косинусы вектора $\bar{a} = \{X, Y, Z\}$***	косинусы углов, образуемых вектором $\bar{a}$ с положительными направлениями осей *OX*, *OY*, *OZ*: $\cos\alpha = \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}$; $\cos\beta = \frac{Y}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}$; $\cos\gamma = \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}$
7	***Скалярное произведение вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$***	число, равное произведению их модулей на косинус угла между ними: $(\bar{a}, \bar{b}) = \lvert\bar{a}\rvert \cdot \lvert\bar{b}\rvert \cdot \cos\varphi$
8	***Формула вычисления скалярного произведения векторов $\bar{a} = \{X_1, Y_1, Z_1\}$ и $\bar{b} = \{X_2, Y_2, Z_2\}$, заданных в координатной форме***	$(\bar{a}, \bar{b}) = X_1 \cdot X_2 + Y_1 \cdot Y_2 + Z_1 \cdot Z_2$
9	***Формула вычисления угла φ между векторами $\bar{a} = \{X_1, Y_1, Z_1\}$ и $\bar{b} = \{X_2, Y_2, Z_2\}$***	$\cos\varphi = \frac{X_1 \cdot X_2 + Y_1 \cdot Y_2 + Z_1 \cdot Z_2}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2} \cdot \sqrt{X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2}}$
10	***Условие перпендикулярности (ортогональности) двух векторов***	$X_1 \cdot X_2 + Y_1 \cdot Y_2 + Z_1 \cdot Z_2 = 0$
11	***Векторное произведение векторов в координатной форме***	$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$
12	***Геометрический смысл векторного произведения***	$S_{\square} = \lvert\bar{a} \times \bar{b}\rvert$
13	***Смешанное произведение***	$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = (\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} = \bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c})$

1	*2*	*3*
14	***Смешанное произведение в координатной форме***	$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$
15	***Условие компланарности трех векторов***	$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = 0$
16	***Объем параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ как на сторонах***	$V = \lvert \bar{a}\bar{b}\bar{c} \rvert$

ЗАДАЧИ
ПРОФЕССИОНАЛЬНО ОРИЕНТИРОВАННОГО ХАРАКТЕРА

1. Автомобиль весит 1 т. Во время движения по горизонтальной дороге на автомобиль действует сила трения, равная 0,1 его веса. Найти работу, совершаемую двигателем автомобиля при его движении с постоянной скоростью в гору с уклоном 1 м на каждые 25 м пути на расстоянии 1 км.

2. Человек везет за веревку санки с ребенком, прикладывая к веревке силу $\bar{F}$. Масса санок вместе с ребенком равна m, длина веревки l. При этом конец веревки, который держит человек, расположен на высоте, на h выше высоты крепления веревки к санкам. Какая работа совершается человеком по равномерному перемещению санок по прямой на расстоянии s? Чему равен коэффициент трения санок о снег?

ПРИЛОЖЕНИЕ

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ «ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ» С ПОМОЩЬЮ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ПАКЕТОВ Maple и Mathcad

Предлагаемые программы помогут Вам при проверке домашнего задания, решении задач или, при необходимости, предоставят возможность удобной и быстрой работы с векторами.

Рассмотрим решения задач из указанной темы с помощью математического пакета **Maple.**

```
> with(linalg);
> u := [2, 3, 4] : v := [5, 6, 7];
```

$$v := [5, 6, 7]$$

```
> linalg[dotprod](u, v);# Вычисляем скалярное произведение
```

$$56$$

```
> linalg[crossprod](u, v); Вычисляем векторное произведение
```

$$\begin{bmatrix} -3 & 6 & -3 \end{bmatrix}$$

```
> evalm(v + u);# Сложение двух векторов
```

$$\begin{bmatrix} 7 & 9 & 11 \end{bmatrix}$$

```
> evalm(v− u) # Вычитание векторов
```

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

```
> ϕ = angle(v, u);# Вычисление угла между векторами
```

$$\phi = \arccos\left(\frac{28}{1595}\sqrt{110}\,\sqrt{29}\right)$$

```
> norm(v, 2); # Вычисление длины вектора
```

$$\sqrt{110}$$

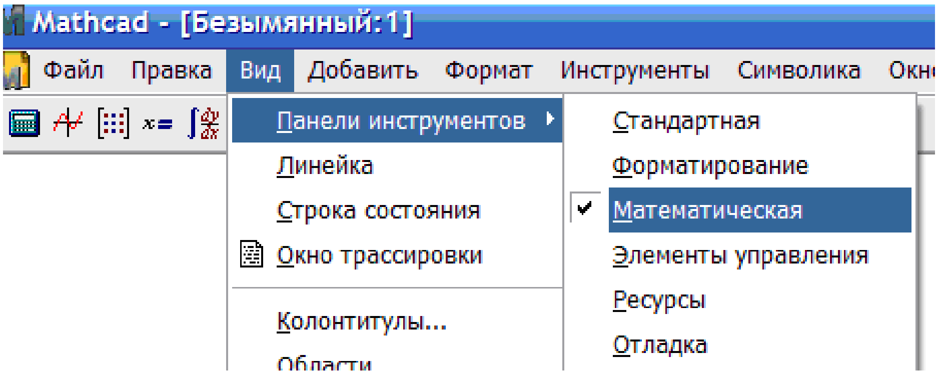
```
> normalize(v); Нормализация вектора
```

$$\left[\frac{1}{22}\sqrt{110} \quad \frac{3}{55}\sqrt{110} \quad \frac{7}{110}\sqrt{110}\right]$$

Рассмотрим один из наиболее популярных математических пакетов MathCAD.

Чтобы начать работать с приложением, вызовите панель Calculus (вычисления).

Выберите на панели вкладку ВИД → ПАНЕЛИ ИНСТРУМЕНТОВ → МАТЕМАТИЧЕСКАЯ.



Далее появится панель 

. На данной вкладке необходимо выбрать панель «Матрица» 

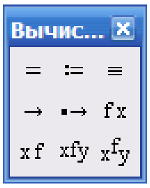
и продолжить работу.

Далее разобраны задачи, наиболее часто встречаемые в теме «Элементы векторной алгебры».

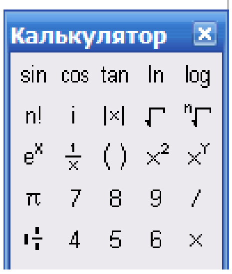
Операции над векторами 

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}=32$$ скалярное произведение

$$\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-6\\3\end{pmatrix}$$ векторное произведение



$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\7\\9\end{pmatrix}$$ сложение двух векторов



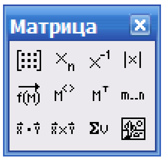
$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\-3\\-3\end{pmatrix}$$ разность двух векторов

Найти координаты вектора **d** в базисе **a,b,c**

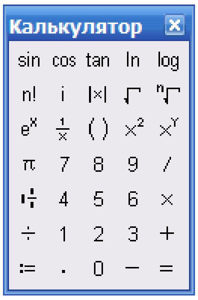
$$\bar{a}(3,-1,2), \bar{b}(-2,3,1), \bar{c}(4,-5,-3), \bar{d}(-3,2,-3)$$

$$a := \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad b := \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad c := \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

составим матрицу перехода

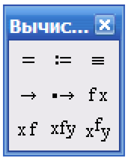


$$H := \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -1 & 3 & -5 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \qquad d := \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$



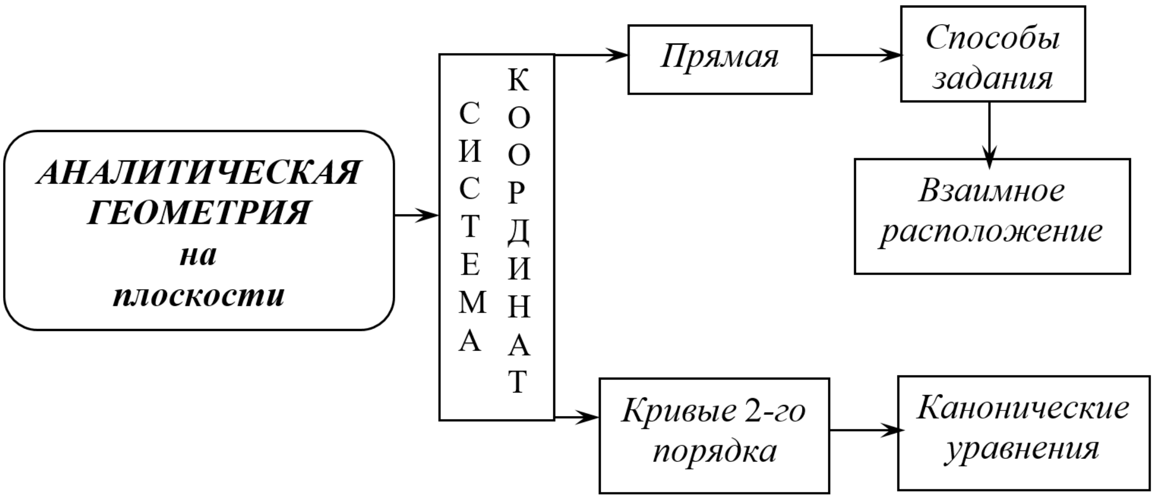
Координаты вектора d в новом базисе

$$D := H^{-1} \cdot d \qquad D = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Раздел 3
АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ

Графическая схема



Информационная таблица
«Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве»

Аналитическая геометрия на плоскости

1. *Общее уравнение прямой*

Всякое уравнение первой степени относительно двух переменных определяет прямую на плоскости $\boxed{Ax+By+C=0}$.

2. *Уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении*

$\boxed{y-y_0=k(x-x_0)}$.

3. *Уравнение прямой линии на плоскости, проходящей через данную точку $M_0(x_0, y_0)$, перпендикулярно данному вектору*

$\overline{N}\cdot\overline{M_0M}=0$, $A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$.

4. *Уравнение прямой линии, проходящей через две точки*

$\overline{M_1M_2}=(x_2-x_1, y_2-y_1)\ ||\ \overline{M_1M}=(x-x_1, y-y_1)$

$$\boxed{\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}}.$$

5. *Каноническое и параметрические уравнения прямой линии на плоскости*

1. *Каноническое* уравнение прямой на плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ с направляющим вектором $\overline{s}(m,n)$

$$\boxed{\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}}.$$

2. *Параметрические* уравнения прямой на плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ с направляющим вектором $\overline{s}(m,n)$, $\overline{M_0M}=t\cdot\overline{s}$, или $\begin{cases} x=x_0+mt \\ y=y_0+nt \end{cases}$

6. *Уравнение прямой линии в отрезках*

$\frac{y-0}{b-0}=\frac{x-a}{0-a}$, $a\cdot b\neq 0$, **или** $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

7. *Расстояние d от $M_0(x_0, y_0)$ до прямой*

$Ax+By+C=0$, $\boxed{d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}}$.

8. *Угол между прямыми на плоскости*

Пусть прямые L_1 и L_2 заданы *общими уравнениями* $L_1: A_1x+B_1y+C_1=0$, $L_2: A_2x+B_2y+C_2=0$, тогда $\cos\left(L_1,^\wedge L_2\right)=\cos\left(\overline{n}_1,^\wedge \overline{n}_2\right)=\frac{\overline{n}_1\cdot\overline{n}_2}{|\overline{n}_1|\cdot|\overline{n}_2|}$.

1. Пусть L_1 и L_2 заданы *каноническими уравнениями* $L_1: \frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}$, $L_2: \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}$, тогда

$$\cos\left(L_1,^\wedge L_2\right)=\cos\left(\overline{s}_1,^\wedge \overline{s}_2\right)=\frac{\overline{s}_1\cdot\overline{s}_2}{|\overline{s}_1|\cdot|\overline{s}_2|}.$$

2. Пусть L_1 и L_2 заданы уравнениями с *угловыми коэффициентами* $L_1: y=k_1x+b_1$, $L_2: y=k_2x+b_2$, тогда

$$\mathrm{tg}\left(L_1,^\wedge L_2\right)=\mathrm{tg}\,\varphi=\mathrm{tg}(\beta-\alpha)==\left|\frac{\mathrm{tg}\,\beta-\mathrm{tg}\,\alpha}{1+\mathrm{tg}\,\beta\cdot\mathrm{tg}\,\alpha}\right|=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_2\cdot k_1}\right|.$$

9. *Взаимное расположение двух прямых на плоскости*

Пусть заданы две прямые своими общими уравнениями (все остальные способы можно к этому свести): $L_1: A_1x+B_1y+C_1=0$, $L_2: A_2x+B_2y+C_2=0$. Тогда прямые L_1 и L_2:

– *совпадают*, $L_1\equiv L_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$.

– *параллельны и не совпадают*, $L_1 \parallel L_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_2}$,

– *пересекаются* $L_1\cap L_2=M_1 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2}\neq\frac{B_1}{B_2}$.

Аналитическая геометрия в пространстве

1. ***Плоскость в пространстве***

$Ax+By+Cz+D=0$ – ***общее уравнение плоскости***

1) $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ – уравнение плоскости проходящей через точку $M(x_0;y_0;z_0)$ $\perp \bar{n}(A,B,C)$.

2) Уравнение плоскости, проходящей через точку, || двум векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$, $M\in\alpha \Leftrightarrow \overline{M_0M}\cdot\bar{a}\cdot\bar{b}=0$

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}=0.$$

3) Уравнение плоскости проходящей через две точки, || вектору $\bar{a}$, $M(x,y,z)\in\alpha \Leftrightarrow \overline{M_1M}\cdot\overline{M_1M_2}\cdot\bar{a}=0$

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}=0.$$

4) Уравнение плоскости проходящей через три точки $M(x,y,z)\in\alpha \Leftrightarrow \overline{M_1M}\cdot\overline{M_1M_2}\cdot\overline{M_1M_3}=0$

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$$

2. ***Прямая в пространстве***

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$$ – ***общее уравнение прямой***

Параметрические уравнения прямой

$$\begin{cases} x=x_0+mt, \\ y=y_0+nt, \\ z=z_0+pt, \end{cases}$$

где t коэффициент пропорциональности

Канонические уравнения прямой

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}=t$$

Канонические уравнения прямой, проходящей через точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

Расстояние от точки до плоскости

1. if M_1 удовлетворяет уравнению L, то

$$d\left(M_1,L\right)=0.$$

2. if $M_1\notin L$, то

$$d\left(M_1,\alpha\right)=\frac{\left|Ax_1+By_1+Cz_1+D\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Угол между плоскостями

Пусть заданы две плоскости $\alpha_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$, $\alpha_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$.

$$\cos\left(\alpha_1,^\wedge\alpha_2\right)=\cos\left(\bar{n}_1,^\wedge\bar{n}_2\right)=\frac{\bar{n}_1\cdot\bar{n}_2}{|\bar{n}_1|\cdot|\bar{n}_2|}$$

Взаимное расположение плоскостей

Пусть заданы общие уравнения двух плоскостей: $\alpha_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$, $\alpha_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$. Тогда возможны следующие случаи:

1) $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}=\dfrac{D_1}{D_2}\Rightarrow\alpha_1\equiv\alpha_2$;

2) $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}\neq\dfrac{D_1}{D_2}\Rightarrow\alpha_1\parallel\alpha_2$.

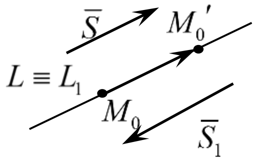
3) $\bar{n}_1\perp\bar{n}_2\Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0\Rightarrow\alpha_1\perp\alpha_2$;

4) $\bar{n}_1\nparallel\bar{n}_2\Leftrightarrow\alpha_1\cap\alpha_2=\{L\}$.

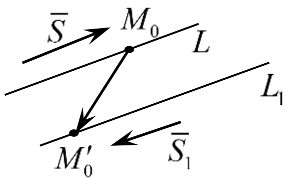
Взаимное расположение двух прямых в пространстве

Пусть $L: \dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$ и $L_1: \dfrac{x-x_0'}{m_1}=\dfrac{y-y_0'}{n_1}=\dfrac{z-z_0'}{p_1}$.

1. $L \equiv L_1 \Leftrightarrow \bar{S} \parallel \bar{S}_1 \parallel \overline{M_0M_0'}$:

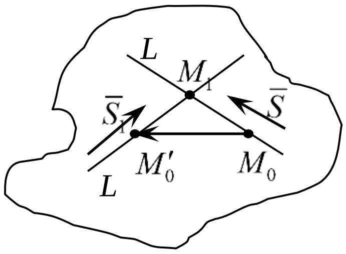


2. $L \parallel L_1 \Leftrightarrow \bar{S} \parallel \bar{S}_1$, но $\nparallel$ $\overline{M_0M_0'}$



3. $L \cap L_1 = \{M_1\} \Leftrightarrow$

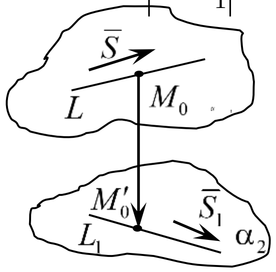
$\bar{S}\ \bar{S}_1\overline{M_0M_0'}=0, \bar{S} \nparallel \bar{S}_1$



4. Пусть L и L_1 ***скрещивающиеся*** $\Leftrightarrow$ $\bar{S}\ \bar{S}_1\overline{M_0M_0'} \neq 0$.

5. ***Расстояние между скрещивающимися прямыми:***

$$d(L, L_1)=\frac{\left|\bar{S}\bar{S}_1\overline{M_0M_0'}\right|}{\left|\bar{S}\times\bar{S}_1\right|}$$



Расстояние от точки до прямой

$L: \dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$, $M_1(x_1, y_1, z_1)$

$$d(M_1, L)=\left|\overline{M_0M_1}\right|\cdot\sin\alpha=\left|\overline{M_0M_1}\right|\cdot\sin\left(\overline{M_0M_1}, ^\wedge \bar{S}\right).$$

Угол между двумя прямыми в пространстве

$$\cos\left(L_1, ^\wedge L_2\right)=\cos\left(\bar{S}_1, ^\wedge \bar{S}_2\right)=\frac{\bar{S}_1\cdot\bar{S}_2}{\left|\bar{S}_1\right|\left|\bar{S}_2\right|}$$

Взаимное расположение прямой и плоскости

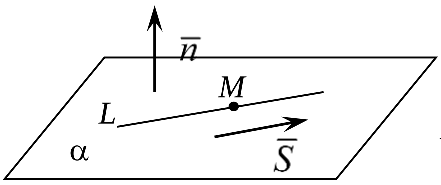
Пусть прямая L задана каноническими уравнениями $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$, плоскость $\alpha -$ общим уравнением $Ax+By+Cz+D=0$. В пространстве прямая и плоскость могут:

1) $L \in \alpha \Leftrightarrow$

1. $\bar{S} \perp \bar{n} \Leftrightarrow \bar{S}\cdot\bar{n}=0$.

2. $M_0 \in \alpha \Leftrightarrow$

$Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$

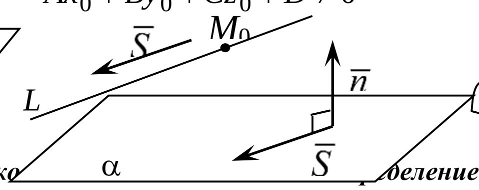


2) $L \parallel \alpha \Leftrightarrow$

1. $\bar{S} \perp \bar{n} \Leftrightarrow \bar{S}\cdot\bar{n}=0$

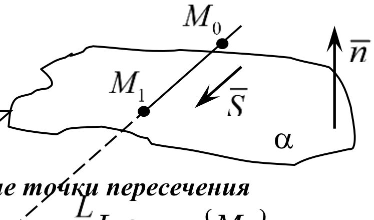
2. $M_0 \notin \alpha \Leftrightarrow$

$Ax_0+By_0+Cz_0+D \neq 0$



3) $L \cap \alpha = \{M_1\}$

1. $\bar{S}\cdot\bar{n} \neq 0$



Угол между прямой и плоско

Пусть заданы плоскость $\alpha: Ax+By+Cz+D=0$ и прямая $L: \dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$.

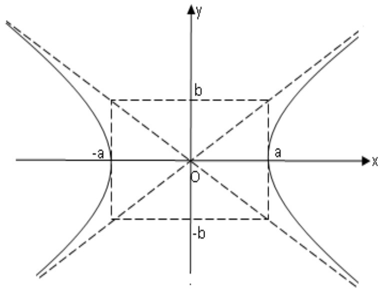
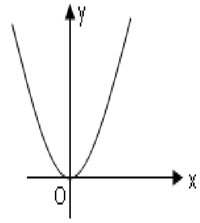
$$\sin\beta=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$$

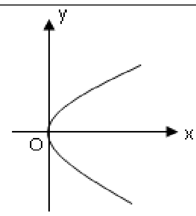
...деление точки пересечения прямой и плоскости $L \cap \alpha = \{M_1\}$

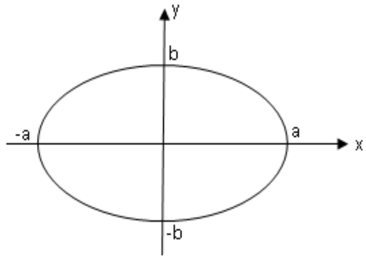
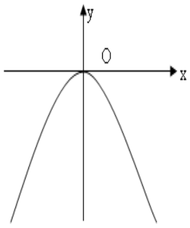
$\Leftrightarrow \bar{S}\cdot\bar{n} \neq 0$

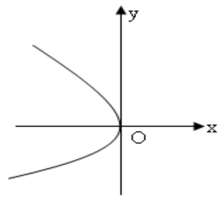
$$\begin{cases} Ax+By+Cz+D=0, \\ \begin{cases} x=x_0+mt, \\ y=y_0+nt, \\ z=z_0+pt. \end{cases} \end{cases}$$

Невырожденные кривые 2-го порядка на плоскости

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>Гипербола
$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$</td>
<td>

1</td>
<td>

3</td>
<td rowspan="2">Парабола
1. $x^2=2py$
2. $x^2=-2py$
3. $y^2=2px$
4. $y^2=-2px$</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>Эллипс
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$</td>
<td>

2.</td>
<td>

4.</td>
</tr>
</table>

1. Эллипс $\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$.

Важные характеристики:

1. Координаты фокусов: $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$, $c^2=a^2-b^2$
2. $A_1(-a;0)$, $A_2(a;0)$, $B_1(0;-b)$, $B_2(0;b)$ – координаты вершин эллипса
3. $\varepsilon=\frac{c}{a}$, $(\varepsilon<1)$ – эксцентриситет
4. $x=\pm\frac{a}{\varepsilon}$ – уравнения директрис.
5. $\varepsilon=\frac{r}{d}$, где r – расстояние от точки эллипса до фокуса; d – расстояние от точки эллипса до односторонней директрисы.
6. $\left.\begin{array}{l} r_1=\varepsilon x-a \\ r_2=\varepsilon x+a \end{array}\right\}$ – фокальные радиусы точек эллипса.

2. Гипербола $\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1}$.

Важные характеристики:

7. Координаты фокусов: $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$, $c^2=a^2+b^2$.
8. $A_1(-a;0)$, $A_2(a;0)$ – координаты вершин гиперболы.
9. $\varepsilon=\frac{c}{a}$, $(\varepsilon>1)$.
10. $y=\pm\frac{b}{a}\cdot x$ – уравнения асимптот.
11. $x=\pm\frac{a}{\varepsilon}$ – уравнения директрис.
12. $\varepsilon=\frac{r}{d}$, где r – расстояние от точки гиперболы до фокуса; d – расстояние от точки гиперболы до односторонней директрисы.
13. $\left.\begin{array}{l} r_1=\varepsilon x-a \\ r_2=\varepsilon x+a \end{array}\right\}$ – фокальные радиусы правой ветви гиперболы;

$\left.\begin{array}{l} r_3=-\varepsilon x+a \\ r_4=-\varepsilon x-a \end{array}\right\}$ – фокальные радиусы левой ветви гиперболы.

3. Парабола

$y^2=2px$, $y^2=-2px$,

$x^2=2py$, $x^2=-2py$

Поверхности 2-го порядка

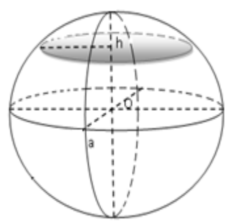
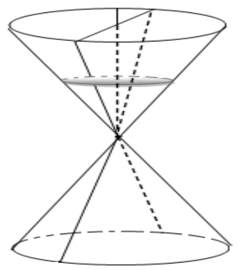
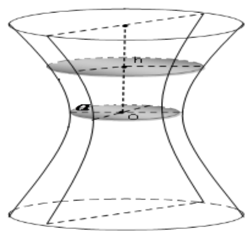
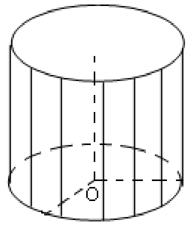
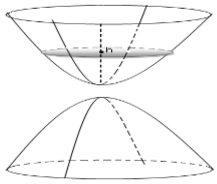
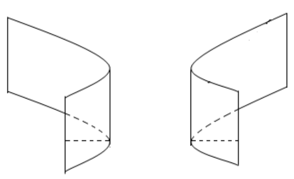
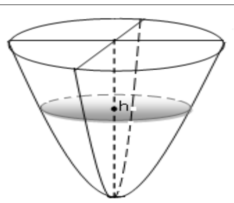
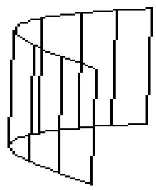
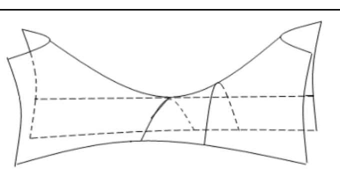
Поверхностью второго порядка называют поверхность, заданную алгебраическим *уравнением* второй степени.

$$\boxed{Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Exz+Gyz+Mx+Hy+Nz+F=0},$$

где $A^2+B^2+C^2\neq 0$.

Поверхность второго порядка можно разбить на классы основных невырожденных поверхностей, имеющих одну и ту же форму канонического уравнения:

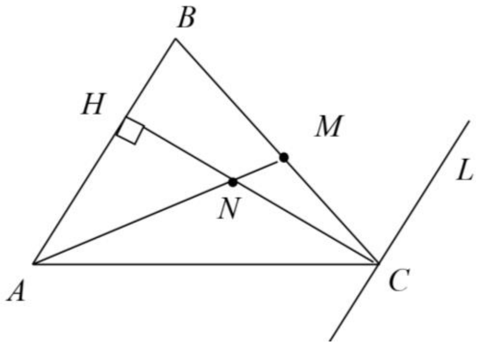
1) эллипсоид;
2) однополостный гиперболоид;
3) двуполостный гиперболоид;
4) конус второго порядка;
5) эллиптический параболоид;
6) гиперболический параболоид;
7) эллиптический цилиндр;
8) гиперболический цилиндр;
9) параболический цилиндр.

	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ *эллипсоид*		$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ *конус*
	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ *однополостный гиперболоид*		$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ *эллиптический цилиндр*
	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ *двуполостный гиперболоид*		$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ *гиперболический цилиндр*
	$\frac{x^2}{p^2}+\frac{y^2}{q^2}=2z$ *эллиптический параболоид*		$x^2=2py$ *параболический цилиндр*
	$\frac{x^2}{p^2}-\frac{y^2}{q^2}=2z$ *гиперболический параболоид*		

Базовый минимум к разделу «Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве»

Обучающая задача

Даны вершины треугольника ABC: $A(-2,-1)$, $B(1,0)$, $C(6,1)$.



Найти:

а) уравнение стороны AB;

б) уравнение высоты CH;

в) уравнение медианы AM;

г) точку N пересечения медианы AM и высоты CH;

д) уравнение прямой, проходящей через вершину C параллельно стороне AB;

е) расстояние от точки C до прямой AB.

Решение.

а) уравнение прямой, проходящей через две точки,

$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$. Значит,

AB: $\frac{x-(-2)}{1-(-2)}=\frac{y-(-1)}{0-(-1)}$, или $\frac{x+2}{3}=\frac{y+1}{1}$, или $x+2=3y+3$. Таким образом, окончательно имеем

AB: $x-3y-1=0$.

б) высота $CH \perp AB \Rightarrow \bar{n}_{AB} \parallel CH$. Воспользуемся каноническим уравнением прямой:

$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}$.

$\bar{n}_{AB}=(1;-3)=\bar{S}_{CH}$; $C(6;1)$.

$\frac{x-6}{1}=\frac{y-1}{-3}$, или $-3(x-6)=1(y-1)$, или $-3x+18=y-1$. Следовательно, *CH*: $3x+y-19=0$.

в) определим координаты *M* как середины отрезка *BC*.

$x_M=\frac{x_B+x_C}{2}$; $y_M=\frac{y_B+y_C}{2}$.

$M\left(\frac{1+6}{2};\frac{0+1}{2}\right)$, $M\left(\frac{7}{2};\frac{1}{2}\right)$.

Теперь по двум известным точкам *A* и *M* составляем уравнение медианы *AM*:

$$\frac{x-(-2)}{\frac{7}{2}-(-2)}=\frac{y-(-1)}{\frac{1}{2}-(-1)},\ \frac{x+2}{\frac{11}{2}}=\frac{y+1}{\frac{3}{2}},$$

или $\frac{x+2}{11}=\frac{y+1}{3}$, или $3(x+2)=11(y+1)$, или $3x+6=11y+11$.

Таким образом, *AM*: $13x-11y-5=0$.

г) для нахождения координат точки *N* пересечения медианы *AM* и высоты *CH* оставляем систему уравнений:

$$\begin{cases}13x-11y-5=0,\\ 3x+y-19=0.\end{cases}\qquad \begin{cases}13x-11\cdot(19-3x)-5=0,\\ y=19-3x.\end{cases}$$

$13x-11\cdot(19-3x)-5=0$, $13x-209+33x-5=0$, $46x-214=0$.

Отсюда, имеем $x=\frac{107}{23}$; $y=19-\frac{107}{23}=\frac{330}{23}$.

Таким образом, $N\left(\frac{107}{23};\frac{330}{23}\right)$.

д) прямая, проходящая через вершину *C*, параллельна стороне *AB*, поэтому за вектор нормали можно взять вектор $\bar{n}_{AB}=(1;-3)$. По точке и нормальному вектору составляем уравнение прямой:

$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$, $C(6;1)$.

L: $1(x-6)-3(y-1)=0$ или $x-6-3y+3=0$, L: $x-3y-3=0$.

е) расстояние от точки *C* до прямой *AB* вычисляем по формуле

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

$$d=\frac{|\,1\cdot 6-3\cdot 1-1\,|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}}=\frac{2}{\sqrt{10}}\approx 3{,}2.$$

Ответ:

а) AB: $x-3y-1=0$; б)CH: $3x+y-19=0$;

в) AM: $13x-11y-5=0$; г) $N\left(\frac{107}{23};\frac{330}{23}\right)$;

д) $x-3y-3=0$; е) $d=\frac{2}{\sqrt{10}}\approx 3{,}2$.

Обучающая задача

Даны четыре точки $A_1(0,7,1)$, $A_2(2,1,5)$, $A_3(1,0,3)$, $A_4(3,-9,8)$. Составить уравнения:

а) плоскости $A_1A_2A_3$,

б) плоскости, проходящей через точку A_4 перпендикулярно к вектору $\overline{A_1A_2}$.

Вычислить косинус угла между координатной плоскостью Oxy и плоскостью $A_1A_2A_3$.

Решение.

а) воспользуемся уравнением плоскости, проходящей через три точки:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix} x-0 & y-7 & z-1 \\ 2-0 & 1-7 & 5-1 \\ 1-0 & 0-7 & 3-1 \end{vmatrix}=0,$$

$$\begin{vmatrix} x & y-7 & z-1 \\ 2 & -6 & 4 \\ 1 & -7 & 2 \end{vmatrix}=0,\quad 2\cdot\begin{vmatrix} x & y-7 & z-1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & -7 & 2 \end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix} x & y-7 & z-1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & -7 & 2 \end{vmatrix}=0,$$

$$x\cdot\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -7 & 2 \end{vmatrix}-(y-7)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}+(z-1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -7 \end{vmatrix}=0,$$

$$x\cdot(8)-(y-7)\cdot(0)+(z-1)\cdot(-4)\;=\;0,$$

$$8x-4z+4=0,$$

$$(A_1A_2A_3):\quad 2x-z+1=0.$$

б) $\alpha \perp \overline{A_1A_2} \Rightarrow \bar{n}_\alpha = (1,-3,2)$.

Воспользуемся формулой

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

$1(x-3)-3(y+9)+2(z-8)=0, \quad x-3-3y-27+2z-16=0,$

$\alpha: \; x-3y+2z-46=0.$

Для вычисления угла между плоскостями воспользуемся формулой

$$\cos\left(\bar{n}_1,^\wedge \bar{n}_2\right)=\frac{\bar{n}_1\cdot\bar{n}_2}{|\bar{n}_1|\cdot|\bar{n}_2|}.$$

В нашем случае $\bar{n}_1=(0,0,1)$, $\bar{n}_2=(2,0,-1)$.

Поэтому

$$\cos\left(\bar{n}_1,^\wedge \bar{n}_2\right)=\frac{0\cdot2+0\cdot0+1\cdot(-1)}{\sqrt{1^2+0^2+0^2}\cdot\sqrt{2^2+0^2+(-1)^2}}=\frac{-1}{\sqrt{1}\cdot\sqrt{4+1}}=-\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Ответ: а) $2x-z+1=0$,

б) $x-3y+2z-46=0$,

в) $\cos\left(\bar{n}_1,^\wedge \bar{n}_2\right)=-\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Обучающая задача

Даны четыре точки $A_1(0,7,1)$, $A_2(2,1,5)$, $A_3(1,0,3)$, $A_4(3,-9,8)$. Составить уравнения:

а) прямой A_1A_2,

б) прямой A_4M, перпендикулярной к плоскости $A_1A_2A_3$,

в) прямой A_3N, параллельной прямой A_1A_2.

Вычислить синус угла между прямой A_1A_4 и плоскостью $A_1A_2A_3$.

Решение.

а) воспользуемся формулой уравнений прямой, проходящей через две точки,

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

$\dfrac{x-0}{2-0}=\dfrac{y-7}{1-7}=\dfrac{z-1}{5-1}$,

$\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-7}{-6}=\dfrac{z-1}{4}$, т.е. A_1A_2: $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-7}{-3}=\dfrac{z-1}{2}$.

б) из условия перпендикулярности прямой A_4M и плоскости $A_1A_2A_3$ следует, что в качестве направляющего вектора прямой можно взять нормальный вектор $\bar{n}=(2,0,-1)$ плоскости $A_1A_2A_3$. Воспользуемся формулой

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}.$$

$$A_4M: \qquad \frac{x-3}{2}=\frac{y+9}{0}=\frac{z-8}{-1}.$$

в) $\overline{A_1A_2} \parallel A_3N$, значит, воспользуемся формулой

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}.$$

$$\overline{A_1A_2}=(2-0;1-7;5-1)=(2;-6;4)\parallel(1;-3;2).$$

Тогда A_3N: $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-0}{-3}=\dfrac{z-3}{2}$.

Синус угла между прямой с направляющим вектором $\bar{S}=(m,n,p)$ и плоскостью с вектором нормали $\bar{n}=(A,B,C)$ вычисляется по формуле

$$\sin\varphi=\frac{\left|\bar{n}\cdot\bar{S}\right|}{\left|\bar{n}\right|\left|\bar{S}\right|}.$$

В нашем случае $\bar{n}_{(A_1A_2A_3)}=(2,0,-1)$,

$\bar{S}_{A_1A_4}=\overline{A_1A_4}=(3-0,-9-7,8-1)=(3,-16,7)$,

$\bar{n}\cdot\bar{S}=2\cdot3+0\cdot(-16)-1\cdot7=6-7=-1$,

$\left|\bar{n}\right|=\sqrt{2^2+0^2+(-1)^2}=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$,

$\left|\bar{S}\right|=\sqrt{3^2+(-16)^2+7^2}=\sqrt{9+256+49}=\sqrt{314}$.

Значит, $\qquad \sin\varphi=\dfrac{|-1|}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{314}}=\dfrac{1}{\sqrt{1570}}$.

Ответ: а) $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-7}{-3}=\dfrac{z-1}{2}$,

б) $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+9}{0}=\dfrac{z-8}{-1}$, в) $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-0}{-3}=\dfrac{z-3}{2}$,

г) $\sin\varphi=\dfrac{1}{\sqrt{1570}}$

Обучающая задача

Уравнение поверхности $4x^2+4y^2+3z^2-64x+64y-12z+253=0$ привести к каноническому виду и определить вид поверхности, изобразить.

Решение.

Выделим полный квадрат для x, y, z.

$4(x^2-16x+64)+4(y^2+16y+64)+3(z^2-4z+4)-256-256-12+500=0$,

$4(x-8)^2+4(y+8)^2+3(z-2)^2=24$.

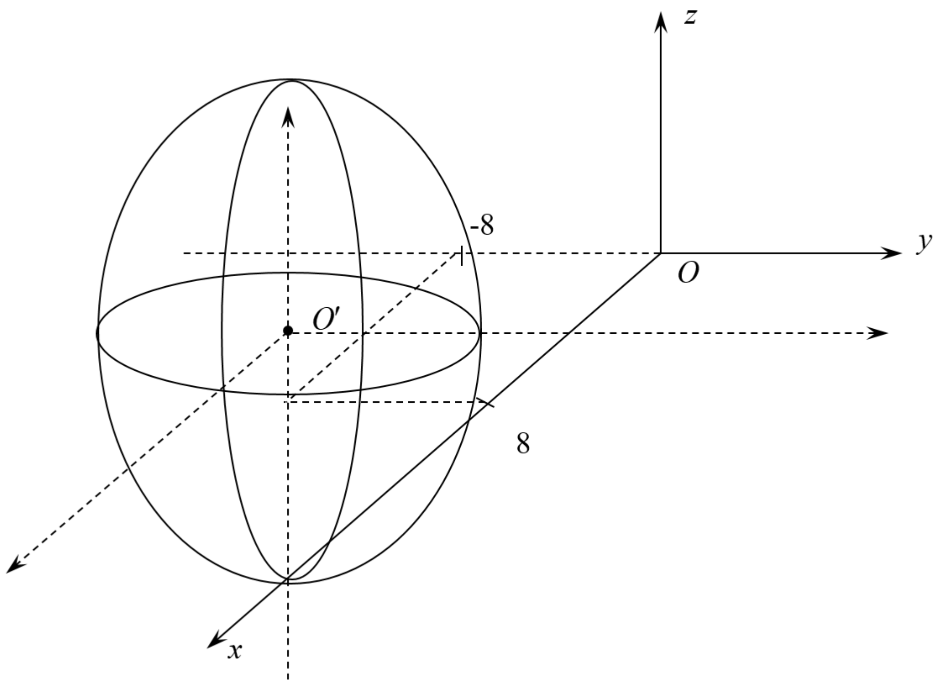
Каноническое уравнение эллипсоида имеет следующий вид:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

поэтому разделим правую и левую часть на 144:

$$\frac{(x-8)^2}{6}+\frac{(y+8)^2}{6}+\frac{(z-2)^2}{8}=1.$$

Ответ: Данная поверхность – эллипсоид с центром в точке $O'(8,-8,2)$ и полуосями a = 6, b = 6, c = 8.



Трехуровневые тестовые задания к разделу «Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве»

Уровень I

1. Написать уравнение прямой L_1, проходящей через точку $M_1(2;-5)$, перпендикулярно заданной прямой *L:* $2x+y-4=0$. Написать уравнение прямой L_2, проходящей через точку $M_2(-3;2)$, параллельно заданной прямой L.

2. Прямая L задана точкой $M_0(-3;2)\in L$ и нормальным вектором $\bar{n}=(-2,5)$. Требуется написать уравнение прямой L, привести его к общему виду.

3. Вычислить расстояние от точки $B(1,\ 0)$ до прямой AC, если $A(5,\ \text{-}3)$, $C(17,\ 2)$.

4. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M(0;-1;1)$ параллельно векторам $\bar{a}_1=(3;1;2)$ и $\bar{a}_2=(-1;0;1)$.

5. Привести уравнение к каноническому виду и определить вид поверхности: $4x^2 - 9y^2 + 3z^2 - 16x - 54y - 72z - 65 = 0$.

6. Установить, какую кривую второго порядка определяет следующее уравнение, найти координаты центра C, полуоси, эксцентриситет, уравнения асимптот (если существуют) и уравнения директрис этой кривой. $9x^2-16y^2-18x-32y-151=0.$

7. Найти уравнение плоскости, проходящей через точки $A(1;2;3),\ B(3;-1;1),\ C(-3;2;1)$.

Уровень II

1. Заданы прямые:

$AB: 7x+3y-5=0$,

$BC: x-y+10=0$,

$AC: x-3=0$.

Найти:

- вершины ΔABC;
- площадь ΔABC;
- составить уравнение прямой, проходящей через вершину $A\parallel BC$;
- определить углы ΔABC.

2. Написать уравнение траектории точки $M(x, y)$, которая при своем движении остается вдвое ближе к точке $A(-1, 1)$, чем к точке $B(-4, 4)$. Построить линию.

3. Дана точка $A(1; -3; 2)$.Написать уравнение плоскости α, проходящей через точку A, параллельно плоскости $X0Z$.

4. Заданы плоскость P: $x+y-z+1=0$ и точка $M(3;-2;1)$. Написать уравнение плоскости P', проходящей через точку M, параллельно плоскости P, и вычислить расстояние $\rho(P, P')$.

5. Прямая L задана общими уравнениями. Написать канонические уравнения параллельной ей прямой, проходящей через точку $M(3;-2;1)$.

$$L:\ \begin{cases} 2x-y+2z-3=0, \\ x+2y-z-1=0. \end{cases}$$

6. Исследовать форму поверхности и построить ее:
$2x^2 - 9y^2 - z^2 = 36$

7. Даны вершины треугольника $A(4;5)$, $B(8,13)$, $C(14;7)$. Найти координаты центра описанной около треугольника окружности.

Уровень III

1. Написать уравнение множества точек, сумма расстояний каждой из которых от точек $F_1(2, 0)$ и $F_2(-2, 0)$ равна $2\sqrt{5}$. Построить линию.

2. Написать уравнение множества точек плоскости, равноудаленных от точки $F(2, 2)$ и от оси $0X$. Построить линию.

3. Написать уравнение множества точек плоскости, равноудаленных от оси $0Y$ и точки $F(4, 0)$. Построить линию.

4. Дана плоскость (P) $x+y-z+1=0$ и прямая (l) $\dfrac{x-1}{0}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+1}{1}$.

Написать уравнение плоскости, проходящей через (l) перпендикулярно плоскости P .

5. Построить тело, ограниченное указанными поверхностями:
$x^2 + y^2 = 4z^2$, $z \geq 0$, $y = x$, $y = 8x$, $x = 2$.

ГЛОССАРИЙ

№ п/п	Новые понятия	Содержание
1	*2*	*3*
1	***Уравнение прямой с угловым коэффициентом***	$y = kx + b$, здесь k – угловой коэффициент.
2	***Общее уравнение прямой***	$Ax+By+C=0$, здесь A, B, C – произвольные числа, не равные нулю одновременно
3	***Формула вычисления угла между двумя прямыми***	$\operatorname{tg}\theta = \left\lvert \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} \right\rvert$
4	***Условие параллельности двух прямых*** $y = k_1 x + \overline{b}_1$ ***и*** $y = k_2 x + \overline{b}_2$	$k_1 = k_2$
5	***Условие перпендикулярности двух прямых*** $y = k_1 x + b_1$ ***и*** $y = k_2 x + b_2$	$k_1 = -\dfrac{1}{k_2}$
6	***Уравнение прямой, проходящей через заданную точку M₁(x₁, y₁), с данным угловым коэффициентом k***	$y - y_1 = k\left(x - x_1\right)$
7	***Формула вычисления расстояния d от точки*** $M_1(x_1, y_1)$ ***до прямой Ax + By + C = 0***	$d = \dfrac{\lvert Ax_1 + By_1 + C \rvert}{\sqrt{A^2 + B^2}}$
8	***Уравнение окружности с центром в точке C(a, b) и радиусом R***	$\left(x - a\right)^2 + \left(y - b\right)^2 = R^2$
9	***Окружность***	геометрическое место точек, удаленных от точки $C(a, b)$ на равное расстояние R
10	***Эллипс***	геометрическое место точек, сумма расстояний от которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, большая, чем расстояние между фокусами
11	***Каноническое уравнение эллипса***	$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, где a, b – полуоси эллипса
12	***Гипербола***	геометрическое место точек, разность расстояний от которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, меньшая, чем расстояние между фокусами
13	***Каноническое уравнение гиперболы***	$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, где a – действительная, b – мнимая полуоси гиперболы
14	***Парабола***	геометрическое место точек, равностоящих от данной точки, называемой фокусом, и данной прямой, называемой директрисой
15	***Каноническое уравнение параболы***	$y^2 = 2px$, здесь p – расстояние от фокуса до директрисы

1	*2*	*3*
16	***Общее уравнение плоскости***	$Ax+By+Cz+D=0$, где $\bar{n}\{A,B,C\}$ – вектор нормали к плоскости
17	***Формула вычисления угла между двумя плоскостями (угол между их нормалями)***	$\cos\varphi=\dfrac{A_1\cdot A_2+B_1\cdot B_2+C_1\cdot C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$, где $\bar{n}_1\{A_1,B_1,C_1\}$, $\bar{n}_2\{A_2,B_2,C_2\}$ – векторы нормали к данным плоскостям
18	***Условие перпендикулярности двух плоскостей (это условие эквивалентно условию перпендикулярности векторов нормали)***	$A_1\cdot A_2+B_1\cdot B_2+C_1\cdot C_2=0$
19	***Условие параллельности двух плоскостей (это условие эквивалентно условию параллельности векторов нормали $\bar{n}_1, \bar{n}_2$)***	$\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$
20	***Канонические уравнения прямой в пространстве***	$\dfrac{x-x_1}{m}=\dfrac{y-y_1}{n}=\dfrac{z-z_1}{p}$, здесь $M_1(x_1, y_1, z_1)$ – точка на прямой, $\bar{S}=(m,n,p)$ – направляющий вектор прямой
21	***Параметрические уравнения прямой в пространстве***	$\begin{cases}x=x_0+mt,\\ y=y_0+nt,\\ z=z_0+pt,\end{cases}$ где t коэффициент пропорциональности
22	***Общее уравнение прямой (пересечение двух плоскостей)***	$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$
23	***Формула вычисления угла между прямой $\dfrac{x-x_1}{m}=\dfrac{y-y_1}{n}=\dfrac{z-z_1}{p}$ и плоскостью Ax + By + Cz + D = 0***	$\sin\varphi=\dfrac{\lvert Am+Bn+Cp\rvert}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$
24	***Условие параллельности прямой $\dfrac{x-x_1}{m}=\dfrac{y-y_1}{n}=\dfrac{z-z_1}{p}$ и плоскости Ax + By + Cz + D = 0***	$Am+Bn+Cp=0$, $Ax_1+By_1+Cz_1+D\neq 0$
25	***Условие перпендикулярности прямой $\dfrac{x-x_1}{m}=\dfrac{y-y_1}{n}=\dfrac{z-z_1}{p}$ и плоскости Ax + By + Cz + D = 0***	$\dfrac{A}{m}=\dfrac{B}{n}=\dfrac{C}{p}$
26	***Формула вычисления угла между двумя прямыми $\dfrac{x-x_1}{m_1}=\dfrac{y-y_1}{n_1}=\dfrac{z-z_1}{p_1}$ и $\dfrac{x-x_2}{m_2}=\dfrac{y-y_2}{n_2}=\dfrac{z-z_2}{p_2}$***	$\cos\varphi=\dfrac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}$

1	2	3
27	***Условие параллельности двух прямых*** $\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$ ***и*** $\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$	$\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}$
28	***Условие перпендикулярности двух прямых*** $\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$ ***и*** $\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$	$m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$
29	***Расстояние от точки до плоскости***	$d\left(M_1,\alpha\right)=\frac{\left\|Ax_1+By_1+Cz_1+D\right\|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$
30	***Расстояние от точки до прямой***	$d\left(M,L\right)=\left\|\overline{M_0M_1}\right\|\cdot\sin\left(\overline{M_0M_1},\wedge\ \overline{S}\right)$
31	***Расстояние между скрещивающимися прямыми***	$d\left(L_1,L_2\right)=\frac{\left\|\overline{S_1}\ \overline{S_2}\overline{M_0M_0'}\right\|}{\left\|\overline{S_1}\times\overline{S_2}\right\|}$

ПРИЛОЖЕНИЕ

Решение задач по теме «Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве» с помощью математического пакета Maple

Предлагаемые программы помогут Вам при проверке домашнего задания или, при необходимости, предоставят возможность быстрого построения графиков, поверхностей, решения задач.

Обращаем ваше внимание, что перед работой необходимо подключить пакет по геометрии, для этого первой строкой набираете with(geom3d); и нажимаете ввод. Появится несколько строк (на рисунках они убраны), далее можно производить ввод операторов, необходимых для решения задач. Ниже представлены решения наиболее распространенных задач по этой теме.

Написать канонические и параметрические уравнения прямой, параллельной прямой l, проходящей через точку M.

$$\frac{x-5}{-1}=\frac{y-4}{-5}=\frac{z-2}{2} \qquad M(1,2,3)$$

```
> with(geom3d);
> point(M, 1, 2, 3): # Зададим точку M
> line(l, [-t+5, -5·t+4, 2·t+2 ], t):#Построим заданную прямую
> v:=ParallelVector(l): #Найдем вектор, параллельный заданной и искомой прямым
> line(l1,[M, v]): #Построим искомую прямую по точке, ей принадлежащей, и параллельному вектору.
> Equation(l1,'t'); Функция Equation(l, 't') возвращает уравнение прямой l относительно параметра t.
```

$$[1-t, 2-5t, 3+2t]$$

Записать уравнение прямой, заданной пересечением двух плоскостей

$$2x-3y+z=2 \qquad x+y+z=8$$

```
> with(geom3d);
> line(l1,[p1, p2]):
> Equation(l1,'t');# Запишем уравнение прямой относительно параметра t
```

$$\left[\frac{26}{5}-4t, \frac{14}{5}-t, 5t\right]$$

Записать уравнение плоскости

```
> with(geom3d);
> 1. Проходящей через три точки A(1, 2, 3), B(4,−5, 6), C(7,−8, 9)
> point(A, 1, 2, 3), point(B, 4,−5, 6), point(C, 7,−8, 9): #Зададим точки
> plane(p,[A, B, C]): #строим плоскость p по точкам
> Equation(p,[x, y, z]); #Функция Equation(p, [x, y, z]) возвращает уравнение плоскости p в координатах x, y, z.
```

$$-24 - 12x + 12z = 0$$

```
> 2.Написать каноническое уравнение плоскости, перпендикулярной вектору n={0, 0, 2} и проходящей через точку
  -1, 2).
> point(M, 0,-1, 2):
> n := Vector([0, 0, 2]):
> plane(p,[M, n]):
> Equation(p,[x, y, z]);
```

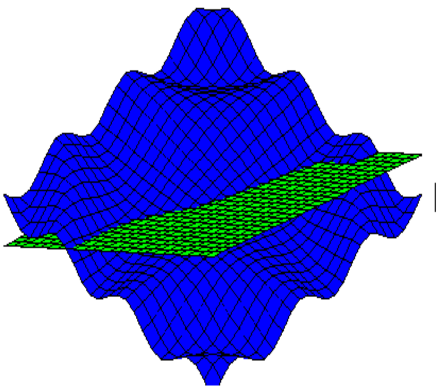
$$-4 + 2z = 0$$

Пересечение поверхностей

```
> with(geom3d);
> with(plots);
```

[*Interactive, animate, animate3d, animatecurve, arrow, changecoords, complexplot, complexplot3d, conformal, conformal3d, contourplot, contourplot3d, coordplot, coordplot3d, cylinderplot, densityplot, display, display3d, fieldplot, fieldplot3d, gradplot, gradplot3d, graphplot3d, implicitplot, implicitplot3 inequal, interactive, interactiveparams, listcontplot, listcontplot3d, listdensityplot, listplot, listplot3d, loglogplot, logplot, matrixplot, multiple, odeplot, pareto, plotcompare, pointplot, pointplot3d, polarplot, polygonplot, polygonplot3d, polyhedra_supported, polyhedraplot, replot, rootlocus, semilogplot, setoptions, setoptions3d, spacecurve, sparsematrixplot, sphereplot, surfdata, textplot, textplot3d, tubeplot*]

```
> plot3d([sin(x·y), x + 2·y], x=-π..π, y=-π..π, color=[blue, green]);
```



Пересечение поверхностей

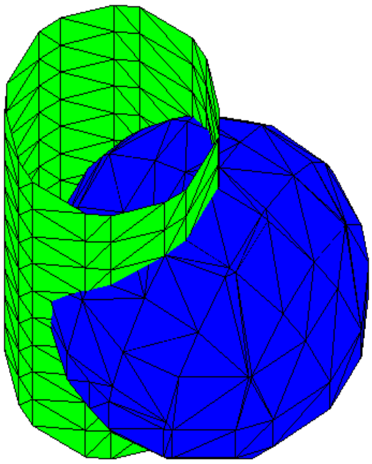
> with(geom3d);

> with(plots);

[Interactive, animate, animate3d, animatecurve, arrow, changecoords, complexplot, complexplot3d, conformal, conformal3d, contourplot, contourplot3d, coordplot, coordplot3d, cylinderplot, densityplot, display, display3d, fieldplot, fieldplot3d, gradplot, gradplot3d, graphplot3d, implicitplot, implicitplot3d, inequal, interactive, interactiveparams, listcontplot, listcontplot3d, listdensityplot, listplot, listplot3d, loglogplot, logplot, matrixplot, multiple, odeplot, pareto, plotcompare, pointplot, pointplot3d, polarplot, polygonplot, polygonplot3d, polyhedra_supported, polyhedraplot, replot, rootlocus, semilogplot, setoptions, setoptions3d, spacecurve, sparsematrixplot, sphereplot, surfdata, textplot, textplot3d, tubeplot]

>

> implicitplot3d$\left(\left[x^2+(y+2)^2+z^2=9,\ x^2+y^2=4\right],\ x=-5..5,\ y=-5..5,\ z=-5..5,\ color=[blue, green]\right)$;



Пересечение поверхностей

> with(geom3d);

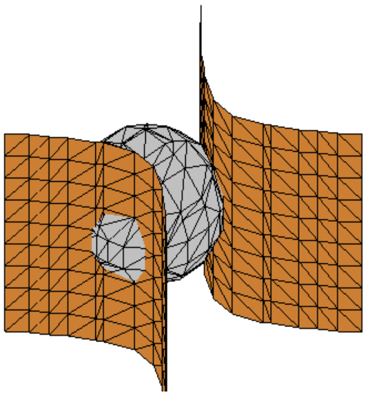
> with(plots);

[Interactive, animate, animate3d, animatecurve, arrow, changecoords, complexplot, complexplot3d, conformal, conformal3d, contourplot, contourplot3d, coordplot, coordplot3d, cylinderplot, densityplot, display, display3d, fieldplot, fieldplot3d, gradplot, gradplot3d, graphplot3d, implicitplot, implicitplot3d, inequal, interactive, interactiveparams, listcontplot, listcontplot3d, listdensityplot, listplot, listplot3d, loglogplot, logplot, matrixplot, multiple, odeplot, pareto, plotcompare, pointplot, pointplot3d, polarplot, polygonplot, polygonplot3d, polyhedra_supported, polyhedraplot, replot, rootlocus, semilogplot, setoptions, setoptions3d, spacecurve, sparsematrixplot, sphereplot, surfdata, textplot, textplot3d, tubeplot]

>

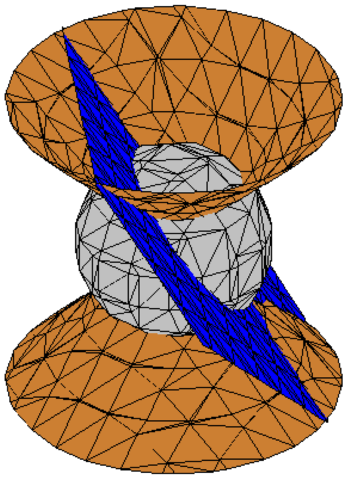
>

> implicitplot3d$\left(\left[x^2+(y+2)^2+z^2=9,\ x^2-y^2=4\right],\ x=-5..5,\ y=-5..5,\ z=-5..5,\ color=[grey, gold]\right)$;



Пересечение поверхностей

```
> with(geom3d);
> with(plots);
> 
> implicitplot3d([x^2+y^2+z^2=9, x^2+y^2-z^2=0, x+y+z=1], x=-5..5, y=-5..5, z=-5..5, color=[grey, gold, blue]);
```



Найти расстояние от точки до плоскости и прямой

$A(2,1,7)$ $\quad 2x-y+5z=1 \quad \frac{x-2}{2}=\frac{y}{5}=\frac{z-1}{2}$

```
> with(geom3d);# подключаем пакет "геометрия"
> point(A, 2, 1, 7); зададим точку
```

A

```
> plane(p, 2·x − y + 5·z = 1, [x, y, z]);# зададим плоскость
```

p

```
> line(l, [2·t + 2, 5·t, 2·t + 1], t); # зададим прямую
```

l

```
> distance(A, p);# Вычислим расстояние между плоскостью и точкой
```

$$\frac{37}{30}\sqrt{30}$$

```
> distance(A, l); # Вычислим расстояние между плоскостью и точкой
```

$$\frac{2}{33}\sqrt{233}\sqrt{33}$$

Найти точку пересечения плоскости и прямой в пространстве в декартовой системе координат.

$\frac{x-2}{2}=\frac{y}{5}=\frac{z-1}{2}$ и $2x-y+5z=1$

```
> with(geom3d);# Подключаем пакет геометрия
> line(l, [2·t + 2, 5·t, 2·t + 1], t); # зададим прямую
```

l

```
> plane(p, 2·x − y + 5·z = 1, [x, y, z]);# зададим плоскость
```

p

```
> intersection(A, l, p):
> coordinates(A); # Вычислям точку пересечения
```

$$\left[\frac{2}{9}, \frac{-40}{9}, \frac{-7}{9}\right]$$