А. В. Капусто, Уравнения Бернулли с обобщенными коэффициентами, *Дифференц. уравнения*, 1996, том 32, номер 11, 1561–1562

1996. Т. 32, № 11. С. 1561 — 1562

УДК 517.92

УРАВНЕНИЕ БЕРНУЛЛИ С ОБОБЩЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

А. В. Капусто

Пусть в уравнении Бернулли

$$u' + au + bu^\alpha = 0, \quad \alpha \neq 0, \quad \alpha \neq 1, \tag{1}$$

коэффициенты a и b являются обобщенными функциями. Для такого уравнения не определено даже понятие решения, так как гладких решений обычно нет, а если в качестве решения взять обобщенную функцию, то не определено произведение au и не определена степень u^α. Один из подходов введения понятия решения уравнения (1) и других уравнений с обобщенными коэффициентами и нелинейностями состоит в построении вместо обобщенных функций новых объектов, которые сохраняют основные свойства обобщенных функций и допускают всюду определенное умножение. Различные варианты таких построений даны в [1 — 3]. В работе [4] построен новый вариант такой алгебры $\mathrm{G}[t_0, t_1]$, рассмотрены линейные дифференциальные уравнения первого порядка с обобщенными коэффициентами и выделено подмножество $\mathrm{Exp}[t_0, t_1] \subset \mathrm{G}[t_0, t_1]$, состоящее из мнемофункций a, для которых существует операция $\exp a$. В дальнейшем без дополнительных пояснений будем пользоваться понятиями и результатами из [4]. Напомним только, что элементы пространства $\mathrm{G}[t_0, t_1]$, называемые мнемофункциями, есть классы эквивалентных семейств бесконечно дифференцируемых функций $(u_{q,\varepsilon}(t))$, где $q = 1, 2, \ldots$, $\varepsilon \in (0, 1)$, $t \in [t_0, t_1]$. В настоящей работе рассмотрено уравнение Бернулли в $\mathrm{G}[t_0, t_1]$ и отмечены особенности, возникающие в связи с его нелинейностью.

Для элементов $u \in \mathrm{G}[t_0, t_1]$ определено значение в точке, поэтому имеет смысл постановка задачи Коши

$$Du + au + bu^\alpha = 0, \quad \alpha \neq 0, \quad \alpha \neq 1, \tag{2}$$

$$u(t_0) = C, \tag{3}$$

где a, $b \in \mathrm{G}[t_0, t_1]$, $C \in \mathbb{R}$.

Теорема. *Пусть* $\alpha = 1 - 1/n$, *где* $n = 2, 3, \ldots$, $\int\limits_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau \in \mathrm{Exp}[t_0, t_1]$, $b \in \mathrm{G}[t_0, t_1]$. *Тогда в* $\mathrm{G}[t_0, t_1]$ *существует решение задачи Коши (2), (3) при* $n = 3, 5, \ldots$ *для любого* $C \in \mathbb{R}$ *и при* $n = 2, 4, \ldots$ *для* $C > 0$.

Доказательство. Как и в случае непрерывных коэффициентов, решение получаем в виде $u = v^{1/(1-\alpha)}$, где v — решение линейного уравнения с коэффициентами из $\mathrm{G}[t_0, t_1]$ $Dv + (1-\alpha)av + (1-\alpha)b = 0$, исследованного в [4].

Специальный выбор значений α связан с тем, что при построении решения уравнения (2) и непосредственной подстановке его в уравнение появляются выражения вида $v^{1/(1-\alpha)}$ и $v^{\alpha/(1-\alpha)}$, где $v \in \mathrm{G}[t_0, t_1]$. Только при $\alpha = 1 - 1/n$, где $n = 2, 3, \ldots$, показатели степеней являются натуральными числами и корректно определены соответствующие степени.

Замечание. Если показатель степени не является натуральным числом, то возведение в степень определено не для всех мнемофункций, тогда нужно наложить дополнительные ограничения на коэффициенты, чтобы были определены степени $v^{1/(1-\alpha)}$ и $v^{\alpha/(1-\alpha)}$.

Пример. Рассмотрим задачу Коши

$$Du + (a_0 + a_1\delta)u + (b_0 + b_1\delta)u^\alpha = 0, \quad \alpha = 1 - 1/n, \quad n = 2, 3, \ldots, \tag{4}$$

$$u(t_0) = C, \tag{5}$$

где $a_0, a_1, b_0, b_1 \in \mathbb{R}$, δ — функция Дирака, $t_0 < 0$.

Чтобы придать этому уравнению смысл в пространстве $\mathrm{G}[t_0, t_1]$, коэффициенты из $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ заменим некоторыми мнемофункциями, ассоциированными с ними. Такая замена представляет собой внесение дополнительной информации, позволяющей устранить неопределенности, возникающие при рассмотрении уравнения (4). Например, мнемофункция $\delta_{\varphi_k}(t) = (1/\varepsilon)\varphi_k(t/\varepsilon)$, где $\varphi_k \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)dt = 1$, ассоциирована с δ-функцией. Заменим δ в первом коэффициенте на δ_{φ_1} и во втором на δ_{φ_2} соответственно. Для представителей получаем уравнение Бернулли с малым параметром ε

$$Du_\varepsilon(t) + (a_0 + \varepsilon^{-1}a_1\varphi_1(\varepsilon^{-1}t))u_\varepsilon(t) + (b_0 + \varepsilon^{-1}b_1\varphi_2(\varepsilon^{-1}t))u_\varepsilon^\alpha(t) = 0. \tag{6}$$

При всех естественных подходах решение задачи Коши (4), (5) должно совпадать с одним из решений уравнения

$$Dw + a_0 w + b_0 w^{\alpha} = 0 \tag{7}$$

при $t < 0$ и с другим решением этого же уравнения при $t > 0$. Поведение решения задачи (4), (5) полностью определяется скачком в точке $t = 0$.

Для представителя решения задачи Коши (4), (5) получаем

$$u_{\varepsilon}(t) = \exp\left(-\int_{t_0}^{t}(a_0 + a_1\delta_{\varphi_1}(\tau))d\tau\right)\left(C^{1/n} - \left(\frac{1}{n}\right)\int_{t_0}^{t}(b_0 + b_1\delta_{\varphi_2}(\tau))\exp\left(\left(\frac{1}{n}\right)\int_{t_0}^{\tau}(a_0 + a_1\delta_{\varphi_1}(\xi))d\xi\right)d\tau\right)^{n}. \tag{8}$$

Обозначим:

$$h_1(t) = \int_{-\infty}^{t}\varphi_1(\tau)d\tau, \quad h_2(t) = \exp(-(a_0(t - t_0) + a_1 h_1(t))), \quad h_3(t) = \int_{-\infty}^{t}\varphi_2(\tau)h_2^{-1/n}(\tau)d\tau.$$

Тогда мнемофункция (8) ассоциирована с обычной функцией

$$\widetilde{u}(t) = \begin{cases} w_1 & \text{при } t \le 0, \\ w_2 & \text{при } t > 0, \end{cases}$$

где $w_1(t) = \exp(-a_0(t - t_0))(C^{1/n} - (b_0/a_0)(\exp(a_0(t - t_0)/n) - 1))^n$, $w_2(t) = \exp(-a_0(t - t_0) - a_1)(C^{1/n} - (b_0/a_0)(\exp((a_0(t - t_0) + a_1)/n) - \exp(a_1/n)) - (b_1/n)h_3(+\infty))^n$.

Заметим, что $w_1(t)$ и $w_2(t)$ являются решениями обыкновенного дифференциального уравнения (7) и величина скачка в точке 0 достаточно сложным образом зависит не только от коэффициентов уравнения (4), но и от выбора ассоциированных мнемофункций.

Литература

1. *Colombeau J.-F.* Elementary introduction to new generalized functions. Amsterdam, 1985.
2. *Егоров Ю. В.* // Успехи мат. наук. 1990. Т. 45, вып. 5. С. 3 — 40.
3. *Антоневич А. Б., Радыно Я. В.* // Докл. АН СССР. 1991. Т. 318, № 2. С. 267 — 270.
4. *Антоневич А. Б., Турло А. В.* // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30, № 5. С. 758 — 767.

Полоцкий государственный университет

Поступила в редакцию 7 февраля 1996 г.