А. В. Картынник, Трехточечная смешанная задача с интегральным условием по пространственной переменной для параболических уравнений второго порядка, *Дифференц. уравнения*, 1990, том 26, номер 9, 1568–1575

УДК 517.956

А. В. КАРТЫННИК

ТРЕХТОЧЕЧНАЯ СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ ПО ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

1. Постановка задачи. В прямоугольнике $G=(0,T)\times(0,l)$ рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\mathscr{L}u\equiv Du(x,t)-A(t)u(x,t)=f(x,t), \tag{1}$$

где $Du=\dfrac{\partial u}{\partial t}$, $t\in(0,T)$, $A(t)u=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(a(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)$, $x\in(0,l)$, функция $a(x,t)$ ограничена $0<a_0\leqslant a(x,t)\leqslant a_1$ и имеет ограниченные частные производные $\left|\dfrac{\partial a}{\partial x}\right|\leqslant C_x$, $\left|\dfrac{\partial a}{\partial t}\right|\leqslant C_T$ для всех $(x,t)\in\bar{G}$.

К уравнению (1) присоединяются начальные условия

$$lu\equiv u|_{t=0}=\varphi(x) \tag{2}$$

и краевые условия

$$u|_{x=0}=0, \tag{3}$$

$$\int_{l_1}^{l}u(\xi,t)\,d\xi=0,\ 0<l_1<l, \tag{4}$$

являющиеся комбинацией локального и интегрального условий. Условия (3), (4) связаны с тремя точками $x=0$, $x=l_1$, $x=l$, поэтому задачу (1)—(4) можно считать нелокальной разновидностью трехточечных краевых задач. Подобная задача на отрезке переменной длины при более жестких ограничениях на коэффициенты и правую часть уравнения изучалась методом потенциалов в работах Л. И. Камынина [1, 2]. Двухточечные краевые задачи для параболических уравнений с интегральным условием исследовались методом Фурье в работах [3—5] и методом энергетических неравенств в работах Н. И. Юрчука [6] и автора [7, 8].

В настоящей работе методом энергетических неравенств устанавливается существование и единственность решения почти везде задачи (1)—(4).

2. Двусторонние априорные оценки. Задаче (1)—(4) поставим в соответствие оператор $L=(\mathscr{L},l)$, который действует из E в F, где E — банахово пространство, состоящее из всех функций $u\in L_2(G)$, удовлетворяющих условиям (3), (4) и имеющих конечную норму

$$\|u\|_E^2=\int_G\psi(x)\left(|Du|^2+\left|\frac{\partial^2u}{\partial x^2}\right|^2\right)dx\,dt+\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\int_0^l\left(\psi(x)\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2+|u|^2\right)dx, \tag{5}$$

а F — гильбертово пространство, состоящее из вектор-функций $\mathscr{F}=(f,\varphi)$, полученное пополнением $L_2(G)\times W_2^2(0,l)$ по норме

$$\|\mathscr{F}\|_F^2=\int_G\psi(x)|f|^2dx\,dt+\int_0^l\left(\psi(x)\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|^2+|\varphi|^2\right)dx. \tag{6}$$

Здесь функция

$$\psi(x)=\begin{cases}l-l_1, & 0\leqslant x<l_1,\\ l-x, & l_1\leqslant x\leqslant l.\end{cases}$$

Теорема 1. *$\forall u \in E$ справедливо априорное неравенство*

$$\|Lu\|_F^2 \leqslant C_{A,1}\|u\|_E^2, \tag{7}$$

где постоянная $C_{A,1}$ не зависит от u.

Доказательство. Из уравнения (1) следует неравенство

$$\int_G \psi(x)\,|\mathscr{L}u|^2 dxdt \leqslant 3\int_G \psi(x)\left(|Du|^2 + C_x^2\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 + a_0^2\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|^2\right)dxdt \leqslant$$

$$\leqslant 3\int_G \psi(x)\left(|Du|^2 + a_0^2\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|^2\right)dxdt + 3TC_x^2 \sup_{0\leqslant t\leqslant T}\int_0^l \psi(x)\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 dx,$$

а из начальных условий (2) — неравенство

$$\int_0^l \left(\psi(x)\left|\frac{\partial lu}{\partial x}\right|^2 + |lu|^2\right)dx \leqslant \sup_{0\leqslant t\leqslant T}\int_0^l \left(\psi(x)\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 + |u|^2\right)dx.$$

Складывая эти неравенства, придем к утверждению теоремы.

Теорема 2. *$\forall u \in E$ справедливо априорное неравенство*

$$\|u\|_E^2 \leqslant C_{A,2}\|Lu\|_F^2, \tag{8}$$

где постоянная $C_{A,2}$ не зависит от u.

Доказательство. Для краткости в дальнейшем греческими буквами α, β, γ будем обозначать положительные постоянные, конкретные значения которых легко могут быть вычислены при необходимости.

Обозначим $D(L) = \left\{u \in E : \psi(x)\,\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} \in L_2(G)\right\}$,

$$Ju = \int_{l_1}^x u(\xi, t)\,d\xi,\quad Mu = \begin{cases} (l-l_1)Du, & 0 \leqslant x \leqslant l_1, \\ (l-x)Du + JDu, & l_1 \leqslant x \leqslant l, \end{cases}$$

и рассмотрим для $u \in D(L)$ квадратичную форму

$$\int_{G_\tau} \Phi(u, u)\,dxdt = \mathrm{Re}\int_0^\tau \int_0^l \exp(-ct)\,\mathscr{L}uM\bar{u}\,dxdt,$$

где $0 \leqslant \tau \leqslant T$, а постоянная c удовлетворяет неравенству

$$ca_0 \geqslant C_T. \tag{9}$$

Интегрируя по частям, установим равенства

$$\mathrm{Re}\int_{l_1}^l DuJD\bar{u}\,dx = 0, \tag{10}$$

$$\mathrm{Re}\int_0^l DuM\bar{u}\,dx = \int_0^l \psi(x)\,|Du|^2 dx, \tag{11}$$

$$-\int_0^l A(t)\,uD\bar{u}\,dx = -a\frac{\partial u}{\partial x}D\bar{u}\Big|_{x=l_1-0} + \int_0^{l_1} a\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}D\bar{u}\,dx, \tag{12}$$

$$-\int_{l_1}^l A(t)\,u(l-x)D\bar{u}\,dx = (l-l_1)\,a\frac{\partial u}{\partial x}D\bar{u}\Big|_{x=l_1+0} -$$

$$-\int_{l_1}^l a\frac{\partial u}{\partial x}D\bar{u}\,dx + \int_{l_1}^l a(l-x)\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}D\bar{u}\,dx, \tag{13}$$

$$-\int_{l_1}^l A(t)\,uJD\bar{u}\,dx = \int_{l_1}^l a\frac{\partial u}{\partial x}D\bar{u}\,dx. \tag{14}$$

Из равенств (12)—(14), учитывая непрерывность $\frac{\partial u}{\partial x}$ в точке $x=l_1$, выведем тождество

$$-\operatorname{Re}\int_{G_\tau}\exp(-ct)A(t)uM\bar{u}dxdt=\operatorname{Re}\int_{G_\tau}\exp(-ct)\psi(x)a\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial Du}{\partial x}dxdt=$$

$$=\int_{G_\tau}D\left(\exp(-ct)\psi(x)a\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2\right)dxdt-\int_{G_\tau}\exp(-ct)\psi(x)Da\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2dxdt+$$

$$+c\int_{G_\tau}\exp(-ct)\psi(x)a\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2dxdt. \qquad (15)$$

Используя оценку (9), из равенств (11), (15) получим неравенство

$$\int_{G_\tau}\exp(-ct)\psi(x)|Du|^2dxdt+a_0\exp(-c\tau)\int_0^l\psi(x)\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2dx|_{t=\tau}\leqslant$$

$$\leqslant\int_{G_\tau}\Phi(u,u)dxdt+a_1\int_0^l\psi(x)\left|\frac{\partial lu}{\partial x}\right|^2dx. \qquad (16)$$

Для любой функции u, такой, что $\sqrt{\psi(x)}\ \frac{\partial u}{\partial x}\in L_2(0,l)$ и $u|_{x=0}=0$, справедливо неравенство

$$\frac{1}{8l}\min\left\{\frac{l-l_1}{l_1};\ 1\right\}\int_0^l|u|^2dx\leqslant\frac{1}{2}\int_0^l\psi(x)\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2dx,$$

с учетом которого неравенство (16) можно переписать в виде

$$\int_{G_\tau}\exp(-ct)\psi(x)|Du|^2dxdt+\alpha\exp(-c\tau)\int_0^l\left(\psi(x)\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2+|u|^2\right)dx|_{t=\tau}\leqslant$$

$$\leqslant\int_{G_\tau}\Phi(u,u)dxdt+a_1\int_0^l\psi(x)\left|\frac{\partial lu}{\partial x}\right|^2dx. \qquad (17)$$

Оценим первый интеграл в правой части (17) посредством ε-неравенства

$$\int_{G_\tau}\Phi(u,u)dxdt\leqslant\int_0^\tau\exp(-ct)\left(\frac{l-l_1}{2}\int_0^{l_1}(|\mathscr{L}u|^2+|Du|^2)dx+\right.$$

$$+\int_{l_1}^l\left((l-x)(|\mathscr{L}u|^2+\frac{1}{4}|Du|^2)+10\sqrt{l-x}|\mathscr{L}u|^2+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{40}\frac{|JDu|^2}{\sqrt{l-x}}\right)dx\right)dt. \qquad (18)$$

С помощью элементарных преобразований и оценок устанавливается, что

$$\int_{l_1}^l\frac{|JDu|^2}{\sqrt{l-x}}dx\leqslant10\int_{l_1}^l(l-x)|Du|^2dx,$$

$$\int_{l_1}^l\sqrt{l-x}|\mathscr{L}u|^2dx\leqslant\frac{1}{\sqrt{l-l_1}}\int_{l_1}^l(l-x)|\mathscr{L}u|^2dx.$$

В результате неравенство (17) преобразуется к виду

$$\frac{1}{2}\int_{G_\tau}\psi(x)|Du|^2dxdt+\alpha\int_0^l\left(\psi(x)\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2+|u|^2\right)dx|_{t=\tau}\leqslant$$

$$\leqslant \beta \exp(cT) \int_G \psi(x) |\mathscr{L}u|^2 dxdt + a_1 \int_0^l \left(\psi(x) \left| \frac{\partial lu}{\partial x} \right|^2 + |lu|^2 \right) dx. \quad (19)$$

Правая часть (19) не зависит от τ, поэтому в левой части можно взять точную верхнюю грань по τ от 0 до T. Получим неравенство

$$\int_G \psi(x) |Du|^2 dxdt + \sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \int_0^l \left(\psi(x) \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 + |u|^2 \right) dx \leqslant$$

$$\leqslant \gamma \left(\int_G \psi(x) |\mathscr{L}u|^2 dxdt + \int_0^l \left(\psi(x) \left| \frac{\partial lu}{\partial x} \right|^2 + |lu|^2 \right) dx \right). \quad (20)$$

Согласно уравнению (1), справедливо неравенство

$$\psi(x) \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|^2 \leqslant \frac{3}{a_0^2} \psi(x) \left(|\mathscr{L}u|^2 + |Du|^2 + C_x^2 \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 \right),$$

из которого в силу неравенства (20) вытекает, что

$$\int_G \psi(x) \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|^2 dxdt \leqslant \frac{3}{2a_0^2} \left((1 + \gamma + TC_x^2 \gamma) \int_G \psi(x) |\mathscr{L}u|^2 dxdt + \right.$$

$$\left. + \gamma (1 + TC_x^2) \int_0^l \left(\psi(x) \left| \frac{\partial lu}{\partial x} \right|^2 + |lu|^2 \right) dx \right).$$

Складывая это неравенство с (20), получим неравенство (8) для $u \in D(L)$. Предельным переходом устанавливается справедливость неравенства (8) и для $u \in E$. Теорема 2 доказана.

3. Разрешимость задачи. Из неравенства (8) следует, что непрерывный в силу (7) оператор $L: E \to F$ имеет в F замкнутое множество значений $R(L)$ и на нем определен непрерывный обратный оператор L^{-1}, дающий решение, т. е. L осуществляет линейный гомеоморфизм пространства E на замкнутое множество $R(L) \subset F$. Для существования единственного решения задачи (1)—(4) осталось доказать, что $R(L) = F$. Доказательство основано на следующей лемме $\left(\text{при дополнительном предположении об ограниченности производных } \frac{\partial^3 a(x, t)}{\partial x^2 \partial t} \right)$.

Лемма. *Пусть* $D_0(L) = \{u \in D(L) : u|_{t=0} = 0\}$. *Если для всех* $u \in D_0(L)$ *и некоторой функции* $w \in L_2(G)$ *выполняется равенство*

$$\int_G \mathscr{L}u \psi(x) \bar{w} dxdt = 0, \quad (21)$$

то $w = 0$.

Доказательство. Обозначим $\rho(x) = \psi(x) w$ и запишем равенство (21) в виде

$$\int_G Du \overline{\rho(x)} dxdt = \int_G A(t) u \overline{\rho(x)} dxdt. \quad (22)$$

Используем в качестве операторов сглаживания [6] по переменной t операторы $D_\varepsilon^{-1} = (I + \varepsilon D)^{-1}$ и $(D_\varepsilon^{-1})^*$. Эти операторы дают решение задач

$$\begin{cases} \varepsilon D g_\varepsilon(t) + g_\varepsilon(t) = g(t), \\ g_\varepsilon(t)|_{t=0} = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} -\varepsilon D g_\varepsilon^*(t) + g_\varepsilon^*(t) = g(t), \\ g_\varepsilon^*(t)|_{t=T} = 0 \end{cases}$$

соответственно, а также обладают следующими свойствами: $\forall g \in L_2(0, T)$ функции $g_\varepsilon = D_\varepsilon^{-1} g$ и $g_\varepsilon^* = (D_\varepsilon^{-1})^* g$ принадлежат $W_2^1(0, T)$ и удовлетворяют условиям $g_\varepsilon|_{t=0} = 0$, $g_\varepsilon^*|_{t=T} = 0$. Кроме того, оператор D_ε^{-1} перестановочен с D и $\int_0^T |g_\varepsilon - g|^2 dt \to 0$, $\int_0^T |g_\varepsilon^* - g|^2 dt \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Подставим в равенство (22) вместо u сглаженную функцию $u_\varepsilon = D_\varepsilon^{-1} u$, воспользуемся равенством

$$A(t) D_\varepsilon^{-1} = D_\varepsilon^{-1} A(t) + \varepsilon D_\varepsilon^{-1} \frac{\partial A(t)}{\partial t} D_\varepsilon^{-1}$$

и перейдем от операторов D_ε^{-1} к сопряженным $(D_\varepsilon^{-1})^*$, а в левой части проинтегрируем по частям по t. В результате получим равенство

$$\int_G u D \bar{\rho}_\varepsilon^* dx dt = \int_G \left(A(t) + \varepsilon \frac{\partial A(t)}{\partial t} D_\varepsilon^{-1} \right) u \bar{\rho}_\varepsilon^* dx dt. \tag{23}$$

Оператор $A(t)$ с условиями (3), (4) имеет на $L_2(0, l)$ непрерывный обратный

$$A^{-1}(t) g = \int_0^x \frac{1}{a(\xi, t)} \int_0^\xi g(\eta) d\eta d\xi + C_1 \int_0^x \frac{d\xi}{a(\xi, t)},$$

где

$$C_1 = - \int_0^l K(x) \int_0^x \frac{1}{a(\xi, t)} \int_0^\xi g(\eta) d\eta d\xi dx \Big/ \int_0^l K(x) \int_0^x \frac{d\xi}{a(\xi, t)} dx,$$

$$K(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant x \leqslant l_1, \\ 1, & l_1 \leqslant x \leqslant l. \end{cases}$$

Следовательно, справедливо представление $\frac{\partial A(t)}{\partial t} D_\varepsilon^{-1} u = \frac{\partial A(t)}{\partial t} \times$ $\times A^{-1}(t) A(t) u = A_\varepsilon(t) A(t) u$, где

$$A_\varepsilon(t) g = \left(\frac{\partial D a}{\partial x} D_\varepsilon^{-1} - (Da) D_\varepsilon^{-1} \frac{1}{a} \frac{\partial a}{\partial x} \right) \times$$

$$\times \frac{1}{a} \left(\int_0^x g(\xi) d\xi + C_1 \right) + (Da) D_\varepsilon^{-1} \frac{1}{a} g.$$

Введем обозначения $N(x, t) = \int_x^l \frac{1}{a(\xi, t)} \int_\xi^l K(\eta) d\xi$,

$$B(x, t) \bar{\rho}_\varepsilon^* = \int_x^l \frac{1}{a(\xi, t)} \left((D_\varepsilon^{-1})^* \frac{\partial^2 a(\xi, t)}{\partial \xi \partial t} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{a(\xi, t)} \frac{\partial a(\xi, t)}{\partial \xi} (D_\varepsilon^{-1})^* \frac{\partial a(\xi, t)}{\partial t} \right) \bar{\rho}_\varepsilon^*(\xi, t) d\xi.$$

Тогда равенство (23) приводится к виду

$$\int_G u D \bar{\rho}_\varepsilon^* dx dt = \int_G A(t) u (\bar{\rho}_\varepsilon^* + \varepsilon A_\varepsilon^*(t) \bar{\rho}_\varepsilon^*) dx dt, \tag{24}$$

в котором сопряженные к $A_\varepsilon(t)$ операторы $A_\varepsilon^*(t)$ равны

$$A_\varepsilon^*(t) \bar{\rho}_\varepsilon^* = \frac{1}{a} (D_\varepsilon^{-1})^* (Da) \bar{\rho}_\varepsilon^* + B(x, t) \bar{\rho}_\varepsilon^* - B(0, t) \bar{\rho}_\varepsilon^* N(x, t) / N(0, t). \tag{25}$$

Левая часть равенства (24) есть линейный непрерывный функционал от функции u. Отсюда вытекает, что функция $h_\varepsilon = \bar{\rho}_\varepsilon^* + \varepsilon A_\varepsilon^*(t) \bar{\rho}_\varepsilon^*$ обладает производными $\frac{\partial h_\varepsilon}{\partial x} \in L_2(G)$, $\frac{\partial^2 h_\varepsilon}{\partial x^2} \in L_2(G)$ и выполняются условия

$$h_\varepsilon |_{x=0} = 0, \quad h_\varepsilon |_{x=l} = 0, \quad \left. \frac{\partial h_\varepsilon}{\partial x} \right|_{x=l} = 0. \tag{26}$$

Операторы $A_\varepsilon^*(t)$ являются ограниченными операторами в $L_2(G)$. Поэтому при достаточно малом ε справедлива оценка $\|\varepsilon A_\varepsilon^*(t)\|<1$, и, следовательно, оператор $(I+\varepsilon A_\varepsilon^*(t))(D_\varepsilon^{-1})^*$ имеет в $L_2(G)$ непрерывный обратный, т. е. $\rho(x)\in L_2(G)$. Более того, дифференцируя равенство (25) по x, убеждаемся, что производная $\dfrac{\partial A_\varepsilon^*(t)}{\partial x}$, определяемая тождеством

$$\frac{\partial A_\varepsilon^*(t)}{\partial x}g=B(0,t)g\frac{1}{a}\int_x^l K(\xi)\,d\xi/N(0,t), \tag{27}$$

является непрерывным оператором в $L_2(G)$. Поэтому из равенства

$$\frac{\partial h_\varepsilon}{\partial x}=(I+\varepsilon A_\varepsilon^*(t))(D_\varepsilon^{-1})^*\frac{\partial\rho}{\partial x}+\varepsilon\frac{\partial A_\varepsilon^*(t)}{\partial x}(D_\varepsilon^{-1})^*\rho \tag{28}$$

при достаточно малом ε следует, что $\dfrac{\partial\rho}{\partial x}\in L_2(G)$.

Аналогично, пользуясь ограниченностью производной $\dfrac{\partial^2 A_\varepsilon^*(t)}{\partial x^2}$, установим, что $\dfrac{\partial^2\rho}{\partial x^2}\in L_2(G)$.

Согласно свойствам h_ε и равенствам (27), (28), выполняются условия

$$h_\varepsilon|_{x=0}=\left(I+\varepsilon\frac{1}{a}(D_\varepsilon^{-1})^*Da\right)\bar\rho_\varepsilon^*|_{x=0}=0, \tag{29}$$

$$h_\varepsilon|_{x=l}=\left(I+\varepsilon\frac{1}{a}(D_\varepsilon^{-1})^*Da\right)\bar\rho_\varepsilon^*|_{x=l}=0, \tag{30}$$

$$\left.\frac{\partial h_\varepsilon}{\partial x}\right|_{x=l}=\left(I+\varepsilon\frac{1}{a}(D_\varepsilon^{-1})^*Da\right)(D_\varepsilon^{-1})^*\left.\frac{\partial\rho}{\partial x}\right|_{x=l}=0. \tag{31}$$

Но так как в каждой фиксированной точке $x\in[0,l]$ при достаточно малом ε оператор $\left(I+\varepsilon\dfrac{1}{a}(D_\varepsilon^{-1})^*Da\right)(D_\varepsilon^{-1})^*$ непрерывно обратим в $L_2(0,T)$, то из равенств (29)—(31) следуют равенства

$$\rho|_{x=0}=0,\ \rho|_{x=l}=0,\ \left.\frac{\partial\rho}{\partial x}\right|_{x=l}=0. \tag{32}$$

Теперь возвратимся к равенству (21).

По заданной функции $w(x,t)$ определим функцию

$$v(x,t)=\begin{cases} w(x,t),\ 0\leqslant x<l_1,\\ w(x,t)-\displaystyle\int_{l_1}^x\frac{w(\xi,t)}{l-\xi}\,d\xi,\ l_1\leqslant x\leqslant l.\end{cases}$$

Интегрируя по частям по ξ, установим тождество

$$\int_{l_1}^x v(\xi,t)\,d\xi=\int_{l_1}^x w(\xi,t)+\int_{l_1}^x\frac{\partial}{\partial\xi}(l-\xi)\times$$

$$\times\int_{l_1}^{\xi}\frac{w(\eta,t)}{l-\eta}\,d\eta\,d\xi=(l-x)(w(x,t)-v(x,t)),$$

из которого следует, что

$$\rho(x)=\psi(x)w=\begin{cases}(l-l_1)v,\ 0\leqslant x<l_1,\\ (l-x)v+Jv,\ l_1\leqslant x\leqslant l.\end{cases} \tag{33}$$

Дифференцируя по x последнее равенство, получим

$$\frac{\partial\rho}{\partial x}=\psi(x)\frac{\partial v}{\partial x}\in L_2(G),\ \frac{\partial^2\rho}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\psi(x)\frac{\partial v}{\partial x}\right)\in L_2(G),$$

$$\psi(x)\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{x=l}=0.$$

На основании свойств функции $\rho(x)$ и тождества (33) заключаем, что $\sqrt{\psi(x)}\ \frac{\partial v}{\partial x}\in L_2(G)$ и выполняются условия

$$v|_{x=0}=0,\ \psi(x)v|_{x=l}=0,\ \int_{l_1}^{l}v(x,t)\,dx=0.$$

Интегрируя по частям в правой части равенства (22), приведем его к виду

$$\int_G Du\bar{\rho}(x)\,dxdt=-\int_G a\frac{\partial u}{\partial x}\psi(x)\frac{\partial\bar{v}}{\partial x}\,dxdt. \tag{34}$$

Предельным переходом равенство (34) распространяется на все функции $u\in L_2(G)$, такие, что $u\in W_2^1(0,T)$, $u|_{t=0}=0$, $\sqrt{\psi(x)}\ \frac{\partial u}{\partial x}\in L_2(G)$ и выполняются условия (3), (4). Положим в этом равенстве

$$u=\int_0^t\exp(c\tau)v(x,\tau)\,d\tau,$$

где постоянная c из неравенства (9), и возьмем вещественные части. Получим тождество

$$\mathrm{Re}\int_G\exp(ct)v\bar{\rho}\,dxdt=-\mathrm{Re}\int_G a\frac{\partial u}{\partial x}\exp(-ct)\frac{\partial}{\partial x}Du\,dxdt. \tag{35}$$

Интегрируя по частям по t, установим равенство

$$2\mathrm{Re}\int_G a\frac{\partial u}{\partial x}\psi(x)\exp(-ct)\frac{\partial}{\partial x}Du\,dxdt=$$

$$=\int_0^l\exp(-ct)\psi(x)a\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2dx|_{t=T}+c\int_G\exp(-ct)\psi(x)a\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2dxdt-$$

$$-\int_G\exp(-ct)\psi(x)Da\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2dxdt,$$

из которого заключаем, что правая часть равенства (35) при указанном выборе постоянной c не положительна. Таким образом,

$$\mathrm{Re}\int_0^T\exp(ct)\left(\int_0^l\psi(x)|v|^2dx+\int_{l_1}^{l}vJ\bar{v}\,dx\right)dt\leqslant 0. \tag{36}$$

Но так как $\mathrm{Re}\int_{l_1}^{L}vJ\bar{v}\,dx=0$, то из неравенства (36) вытекает, что $v=0$, и, следовательно, $w=0$. Лемма доказана.

Теорема 3. *Множество значений $R(L)$ оператора L совпадает с F.*

Доказательство. Поскольку F — гильбертово пространство, то $R(L)=F$ тогда и только тогда, когда из равенства

$$\int_G\psi(x)\mathscr{L}u\bar{f}\,dxdt+\int_0^l\left(\psi(x)\frac{\partial lu}{\partial x}\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial x}+lu\bar{\varphi}\right)dx=0, \tag{37}$$

где u пробегает E, а $\mathscr{F}=(f,\varphi)\in F$, следует, что $f=0$ и $\varphi=0$.

Полагая в равенстве (37) $u \in D_0(L)$, в силу леммы заключаем, что $f=0$. Таким образом, $\forall u \in F$ справедливо равенство

$$\int_0^l \left(\psi(x) \frac{\partial lu}{\partial x} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} + lu\bar{\varphi}\right) dx = 0.$$

Но так как множество значений оператора следа l плотно в гильбертовом пространстве с нормой $\left(\int_0^l \left(\psi(x) \left|\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right|^2 + |\varphi|^2\right) dx\right)^{1/2}$, то $\varphi=0$. Теорема 3 доказана.

Замечание. Определенная модификация приведенных в работе рассуждений позволяет заключить, что полученные результаты остаются справедливыми и для плюрипараболических уравнений вида (1) (обобщение параболических уравнений на случай многомерного времени $t = (t_1, \ldots, t_p) \in \prod_{k=1}^{p} (0, T_k)$, $T_k < \infty$). В этом случае оператор D имеет вид

$$Du = \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t_k}$$

с соответствующей системой начальных условий $l_k u \equiv u(x, t)|_{t_k=0} = \varphi_k(x, t_1, \ldots, t_{k-1}, t_{k+1}, \ldots, t_p)$, $k=1, \ldots, p$.

Литература

1. Камынин Л. И. // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1964. Т. 4, № 6. С. 1006—1024.
2. Камынин Л. И. // Дифференц. уравнения. 1972. Т. 8, № 6. С. 1015—1026.
3. Ионкин Н. И. // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13, № 2. С. 294—304.
4. Ионкин Н. И. // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15, № 7. С. 1279—1283.
5. Ионкин Н. И., Моисеев Е. И. // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15, № 7. С. 1284—1295.
6. Юрчук Н. И. // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22, № 12. С. 2117—2126.
7. Картынник А. В. Смешанные задачи с интегральным условием для плюрипараболических уравнений высших порядков с одной пространственной переменной. Минск, 1985. Деп. в ВИНИТИ 19.09.85, № 6737—85.
8. Картынник А. В. Смешанные задачи с несколькими интегральными условиями для плюрипараболических уравнений высших порядков с одной пространственной переменной. Минск, 1985. Деп. в ВИНИТИ 19.05.85, № 6736—85.

Новополоцкий политехнический институт им. Ленинского комсомола Белоруссии

Поступила в редакцию 28 октября 1988 г.

УДК 517.95

Я. С. КУШИЦКИЙ

О ЗАДАЧЕ ТИХОНОВА ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

1. Постановка задачи. В работе А. Н. Тихонова [1] рассматривалась граничная задача для одномерного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x > 0, \tag{1}$$

$$u(0, x) = 0, \tag{2}$$

$$B\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u|_{x=+0} = \sum_{k=0}^{r} \alpha_k \frac{\partial^k u}{\partial x^k}\bigg|_{x=+0} = g(t). \tag{3}$$