

УДК 004.056

**ПРИМЕНЕНИЕ КРИТЕРИЯ РАУСА-ГУРВИЦА ПРИ РАСЧЕТЕ УСТОЙЧИВОСТИ
В СИСТЕМАХ ЗАЩИТЫ РЕЧЕВОЙ ИНФОРМАЦИИ****С.Н. ШУСТОВСКИЙ***(Представлено: д-р техн. наук, проф. В.К. ЖЕЛЕЗНЯК)*

Рассмотрены особенности применения критерия Рауса-Гурвица при расчете устойчивости электрических схем, выполняющих функции защищенной передачи речевого сигнала. Произведен подробный расчет электрической цепи в общем виде.

Одной из основных проблем при проектировке электрических систем связи является задача анализа устойчивости. На практике необходимо, чтобы выход системы некоторым образом соответствовал определенному заданному входу, а возмущения, действующие на систему, максимально подавлялись ею. Электрическая цепь может выполнять свои функции, когда она устойчива. Исключением являются автоколебательные цепи, которые по определению должны быть неустойчивы на заданной частоте.

Изучение методов поможет смоделировать устойчивую электрическую схему. Моделирование, в свою очередь, как метод исследования сложной информационной системы отражает характеристики каналов утечки информации [1]. Так как устойчивость цепи рассчитывается на стадии ее моделирования, технические каналы утечки информации можно выявить еще до исполнения схемы в материальной элементной базе.

Электрическую цепь можно обозначить, как устойчивую тогда, когда свободные колебания внутри затухают с течением времени. Такая электрическая система должна восстанавливать исходные параметры после возбуждения. В противном случае электрическая цепь неустойчива и работает в режиме самовозбуждения внутренних контуров, что может привести не только к утечке речевой информации в общей системе, но и выходе последней из строя.

Устойчивость является одним из самых важных критериев при проектировке электро- и радиоаппаратуры, содержащей усилители. В особенности важна устойчивость систем связи, как военных, так и ведомственных. Такая аппаратура должна быть защищена не только от внешних воздействий, но и от внутренних нежелательных процессов. Понятие устойчивости в данном случае и является защищенностью, так как при неустойчивости системы некоторая информация будет излучаться и приводить к утечке данных. Система может находиться на границе устойчивости, что так же не подходит для использования ее в аппаратуре двойного назначения.

При определении устойчивости существует ряд определенных сложностей. Для определения устойчивости нужно составить характеристическое уравнение системы и вычислить корни. Для цепей высокого порядка вышеперечисленные математические операции очень громоздки, а нули полиномов в аналитической форме найти принципиально невозможно [2].

Критерий устойчивости Рауса-Гурвица имеет ряд особенностей, в связи с которыми он более применим для анализа цепи высокого порядка расчетно-аналитическим методом, в отличие от критериев Михайлова, Найквиста, требующих построения сложных годографов в комплексной плоскости и произведения объемных математических операций.

Цель: показать перспективность применения метода Рауса-Гурвица при расчете устойчивости электрических цепей высокого порядка с обратной связью. Показать пример составления характеристического уравнения электрической цепи с использованием передаточной функции и обратной связи. Рассчитать устойчивость по Гурвицу в общем виде.

Для облегчения определения устойчивости необходимо ввести понятие передаточной функции и обратной связи, что позволит сократить количество математических операций для получения характеристического уравнения электрической цепи.

1. Расчет передаточной функции. Рассмотрим передаточную функцию на примере цепи с обратной связью, последовательной по напряжению (ОС Н-типа), представляющую собой два сложных параллельно соединённых четырехполюсника.

Для этого типа ОС запишем равенство (1) согласно Закону напряжений Кирхгофа в операторной форме:

$$U_{\text{вх}}(p) = U_1(p) - U_{\text{ос}}(p). \quad (1)$$

Для изображения выходного напряжения запишем равенство (2)

$$U_{\text{вых}}(p) = [U_1(p) - U_{\text{ос}}(p)]H(p), \quad (2)$$

где $H(p)$ – операторная передаточная функция по напряжению.

Операторное изображение $U_{oc}(p)$ запишем через передаточную функцию ОС $H_{oc}(p)$, а напряжение $U_1(p)$ через передаточную функцию усилителя $H_y(p)$:

$$U_{oc}(p) = U_{вх}(p)H_{oc}(p); \quad (3)$$

$$U_1(p) = U_{вх}(p) \times \frac{1}{H_y(p)}. \quad (4)$$

С учетом выражений (3) и (4) операторная передаточная функция по напряжению цепи (рисунок 1) имеет вид: $H(p) = \frac{U_{вх}(p)}{U_{вх}(p)} = \frac{H_y(p)}{1 - H_y(p) \times H_{oc}(p)}$.

Перейдем от оператора p к оператору $j\omega$, для получения комплексной передаточной функции $H(j\omega) = \frac{U_{вх}(j\omega)}{U_{вх}(j\omega)} = \frac{H_y(j\omega)}{1 - H_y(j\omega) \times H_{oc}(j\omega)}$.

Произведение $H_y(j\omega) \times H_{oc}(j\omega) = H_p(j\omega)$ является передаточной функцией по петле ОС или петлевым усилителем.

Так же операторную передаточную функцию $H(p)$ можно представить как дробно-рациональную функцию с вещественными коэффициентами:

$$H(p) = \frac{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0}{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0} = \frac{W(p)}{V(p)} \quad (5)$$

или

$$H(p) = H \frac{(p - p_0)(p - p_{02}) \dots (p - p_{0n})}{(p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_m)}, \quad (6)$$

где $p_{01}, p_{02}, \dots, p_{0n}$ – нули;

$p_1, p_2, \dots, p_m$ – полюсы передаточной функции;

$$H = \frac{a_n}{b_m}.$$

Заменяя в формуле (5) оператор p на $j\omega$, получим комплексную передаточную функцию цепи $H(j\omega) = |H(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)}$.

Для определения вида частотно зависимой ОС воспользуемся кривой, описывающей конец вектора $H_p(j\omega)$ при изменении частоты, называемой годографом. Изменения частоты показаны соответствующими годографами с нумерацией 1, 2, 3. (рисунок 1).

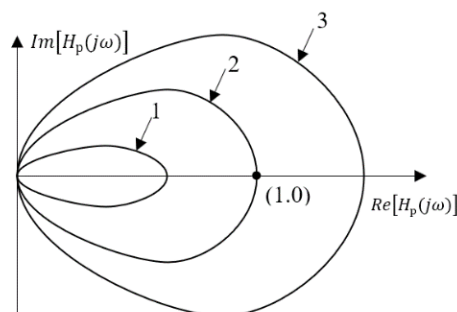


Рисунок 1. – Годограф ОС

Обратная связь называется положительной, если годограф $H_p(j\omega)$ лежит в правой, и отрицательной – если в левой полуплоскости комплексной плоскости. Отрицательная ОС применяется для стабилизации коэффициента усиления, подавления паразитных сигналов, коррекции частотных характеристик; положительная ОС может являться причиной неустойчивости цепи. [3]

Пусть H_{oc} и H_y – положительные вещественные числа. Тогда при $H_y \times H_{oc} = 1$, т. е. когда $H_{oc} = \frac{1}{H_y}$, значение передаточной функции стремится к бесконечности. Это означает, что даже при бесконечно малых значениях амплитуды входного напряжения $U_{ex}(t)$ амплитуда выходного напряжения $U_{вых}(t)$ $U_{ex}(t) = 0$ будет неограниченно возрастать. В этом случае наступает самовозбуждение цепи с ОС. Таким образом, термины неустойчивость и самовозбуждение являются синонимами.

2. Вычисление характеристического уравнения. Рассмотрим цепь с обратной связью и выведем для нее характеристическое уравнение.

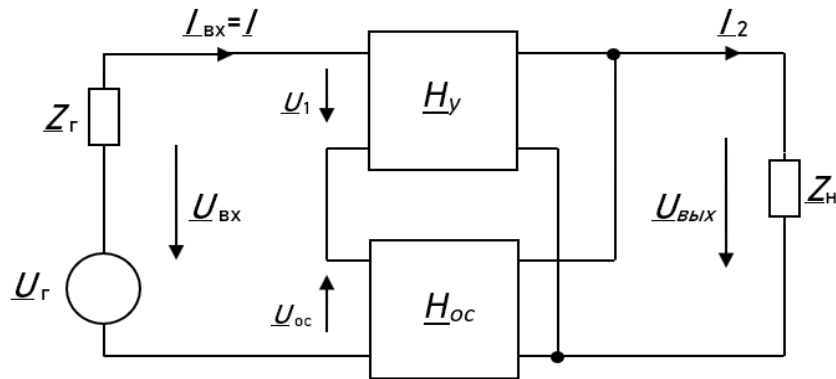


Рисунок 2. – Цепь с обратной связью, последовательной по напряжению

Пусть $U_{ex}(t) = 0$, значит $U_{ex}(p) = 0$, из рисунка 2 следует $U_{вых}(p) = [1 - H_{oc}(p) \times H_y(p)] = 0$. Для отрицательной и вещественной ОС согласно уравнению для коэффициента усиления усилителя, запишем

$$H = \frac{H_y}{1 + H_y \times H_{oc}}. \quad (7)$$

Запишем передаточную функцию основной цепи в виде (5): $H_{oc}(p) = \frac{W_2(p)}{V_2(p)}$, $H_y(p) = \frac{W_1(p)}{V_1(p)}$.

Тогда уравнение (7) переписывается следующим образом:

$$\frac{V_1(p)V_2(p) - W_1(p)W_2(p)}{V_1(p)V_2(p)} = 0. \quad (8)$$

Равенство (8) выполнимо при условии: $V_1(p)V_2(p) - W_1(p)W_2(p) = 0$.

Так как левая часть равенства является полиномом, можно и необходимо записать ее в каноническом виде: $b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0 = 0$. Данное выражение является характеристическим уравнением рассматриваемой цепи.

3. Применение критерия Рауса-Гурвица. Имея характеристическое уравнение можно судить об устойчивости цепи по критерию Рауса-Гурвица.

Критерий Рауса-Гурвица относится к алгебраическим критериям устойчивости и позволяет по значениям коэффициентов b_m, b_{m-1}, b_0 характеристического уравнения, без определения его корней, узнать является ли исследуемая цепь устойчивой, что является большим преимуществом при определении устойчивости, сравнительно с другими методами.

Критерий формулируется следующим образом: цепь с обратной связью является устойчивой, если полином характеристического уравнения, является полиномом Гурвица. При этом используется основное свойство полинома Гурвица: все его корни находятся в левой полуплоскости комплексной переменной p .

Для того чтобы многочлен $b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0 = 0$ являлся полиномом Гурвица, необходимо и достаточно, чтобы были положительными определитель Рауса-Гурвица (9)

$$D_{n-1} = \begin{bmatrix} b_{m-1} & b_{m-3} & b_{m-5} & \cdots & 0 \\ b_m & b_{m-2} & b_{m-4} & \cdots & 0 \\ 0 & b_{m-1} & b_{m-3} & \cdots & 0 \\ 0 & b_m & b_{m-2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

и все главные миноры этого определителя.

В первой строке записываются коэффициенты полинома Гурвица через один, начиная со второго. Во второй строке они записываются через один, начиная с первого. Вторая пара строк формируется путем смещения первой пары строк на одну позицию. Третья пара – смещением второй пары строк еще на одну вправо и т. д.

Если все $n-1$ главных миноров Гурвица положительны, а минор n -го порядка равен нулю: $\Delta n = 0$, то система находится на границе устойчивости.

Таким образом расчет устойчивости цепи сводится к простому решению матрицы Гурвица, а основные затруднения может вызвать только лишь составление характеристического уравнения и определение вида ОС.

1. Устойчивость цепи, вычисленная по критерию Рауса-Гурвица, дает понятие о защищенности информации, так как устойчивая цепь не будет излучать сигналы, приводящие к утечке данных.

2. Метод Рауса-Гурвица применим для вычисления цепей любого порядка, что немаловажно при проектировании сложной аппаратуры связи.

3. Метод пригоден для анализа схем двойного назначения с разными параметрами элементов.

4. Так как вычисление устойчивости сводится к решению матрицы, возможно применить компьютерные методы вычисления, что позволит автоматизировать процесс и ускорить его.

5. Метод позволяет определить запас устойчивости цепи, что довольно важно при проектировании оборудования, работающего в условиях влияния на него извне высокочастотных помех и импульсов.

6. Критерий Рауса-Гурвица применим для расчета электрической цепи и дает оценку ее устойчивости, что в свою очередь позволяет предотвратить утечки информации еще на стадии разработки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Железняк В.К. Защита информации от утечки по техническим каналам: учебное пособие; ГУАП. – СПб., 2006. С. 60-61.
2. Шамриков Б.М. Основы теории цифровых систем управления: Учебник для высших технических учебных заведений. – М.: Машиностроение, 1985. С.69-82.
3. Гуревич И.В. Основы расчетов радиотехнических цепей (линейные цепи при гармонических воздействиях). Издание третье, исправленное и дополненное. М., «Связь», 1975. С. 25-36.