

УДК 517.983

$\mathcal{L}_{v,2}$ -ТЕОРИЯ ОДНОГО ОДНОМЕРНОГО ОБОБЩЕННОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ С G-ФУНКЦИЕЙ МЕЙЕРА В ЯДРЕ

Е.Н. АРХИПОВЕЦ

(Представлено: канд. физ.-мат. наук, доц. О.В. СКОРОМНИК)

Рассматривается одно обобщенное одномерное интегральное преобразование $G^1_{\eta,\gamma;\delta} f$, содержащее в ядре G-функцию Мейера в весовом пространстве $\mathcal{L}_{v,2}$ ($v \in R$) измеримых по Лебегу функций f на положительной полуоси.

Показывается, что преобразование $G^1_{\eta,\gamma;\delta} f$ является модификацией преобразования $G^1_{\eta,\gamma} f$, функциональные свойства которого уже изучены в пространстве $\mathcal{L}_{v,2}$. На основании этого даются условия ограниченности оператора преобразования $G^1_{\eta,\gamma;\delta} f$ из одних пространств $\mathcal{L}_{v,2}$ в другие, доказывается аналог формулы интегрирования по частям, выводятся две другие различные формы его представления, дается описание образа изучаемого оператора преобразования, а также устанавливаются формулы его обращения.

1. Введение. Рассмотрим интегральное преобразование первого рода, содержащее G-функцию Мейера в ядре:

$$\left(G^1_{\eta,\gamma;\delta} f\right)(x) = x^\eta \int_0^x G^{m,n}_{p,q} \left[\begin{matrix} x^\delta \\ t^\delta \end{matrix} \left| \begin{matrix} (a_i)_{1,p} \\ (b_j)_{1,q} \end{matrix} \right. \right] t^\gamma f(t) \frac{dt}{t} \quad (x > 0). \tag{1.1}$$

G-функцией Мейера порядка (m, n, p, q) , где $0 \leq m \leq q, 0 \leq n \leq p$ называется функция, определяемая интегралом Меллина – Барнса [1, §1.3; 2]:

$$G^{m,n}_{p,q} \left[\begin{matrix} (a_p) \\ (b_q) \end{matrix} \right] = G^{m,n}_{p,q} \left[\begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right] = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j + s) \prod_{i=1}^n \Gamma(1 - a_i - s)}{\prod_{i=n+1}^p \Gamma(a_i + s) \prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 - b_j - s)} z^{-s} ds, \tag{1.2}$$

где L – специально выбранный бесконечный контур, оставляющий полюса $s = -b_j - k, j = 1, 2, \dots, m, k = 0, 1, 2, \dots$, слева, а полюса $s = 1 - a_j + k, j = 1, 2, \dots, n, k = 0, 1, 2, \dots$, - справа.

В работе преобразование (1.1) изучается в весовом пространстве $\mathcal{L}_{v,2}$ измеримых по Лебегу, вообще говоря, комплекснозначных функций f на $R_+ = (0, \infty)$, для которых $\|f\|_{v,r} < \infty$, где

$$\|f\|_{v,2} = \left(\int_0^\infty \left| t^v f(t) \right|^2 \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (v \in R). \tag{1.3}$$

В работе показывается, что преобразование $G^1_{\eta,\gamma;\delta} f$ является модификацией преобразования $G^1_{\eta,\gamma} f$, функциональные свойства которого уже изучены в пространстве $\mathcal{L}_{v,2}$. На основании этого даются условия ограниченности оператора преобразования $G^1_{\eta,\gamma;\delta} f$ из одних пространств $\mathcal{L}_{v,2}$ в другие, доказывается аналог формулы интегрирования по частям, выводятся две другие различные формы его представления, дается описание образа изучаемого оператора преобразования, а также устанавливаются формулы его обращения.

2. Предварительные сведения. Множество ограниченных линейных операторов, действующих из банахова пространства Λ в банахово пространство Ω , обозначим через $[\Lambda, \Omega]$.

Пусть $\mathcal{L}_{v,r}$ – пространство измеримых по Лебегу функций f на $R_+ = (0, \infty)$, для которых $\|f\|_{v,r} < \infty$, где

$$\|f\|_{v,r} = \left(\int_0^\infty \left| t^v f(t) \right|^r \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{r}} \quad (1 \leq r < \infty, v \in R), \quad \|f\|_{v,\infty} = \text{ess sup}_{t>0} \left[t^v |f(x)| \right] \quad (r = \infty). \tag{2.1}$$

Для функции $f \in \mathcal{L}_{\nu,r}$ ($1 \leq r \leq 2$) преобразование Меллина $\mathfrak{M}f$ определяется равенством [2–4]:

$$(\mathfrak{M}f)(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(e^{\tau}) e^{s\tau} d\tau \quad (s = \nu + it; \nu, t \in \mathbb{R}). \quad (2.2)$$

Если $f \in \mathcal{L}_{\nu,r} \cap \mathcal{L}_{\nu,1}$, $\operatorname{Re}(s) = \nu$, то (2.2) совпадает с обычным преобразованием Меллина:

$$(\mathfrak{M}f)(s) = f^*(s) = \int_0^{+\infty} f(t) t^{s-1} dt. \quad (2.3)$$

G -преобразованием называют интегральное преобразование [2]:

$$(Gf)(x) = \int_0^{\infty} G_{p,q}^{m,n} \left[xt \begin{matrix} (a_i)_{1,p} \\ (b_j)_{1,q} \end{matrix} \right] f(t) dt, \quad (2.4)$$

содержащее G -функцию Мейера (1.2) в ядре.

Преобразование Меллина от G -функции Мейера (1.2) для достаточно хороших функций f дается формулой [2]:

$$(\mathfrak{M}Gf)(s) = \mathcal{G}_{p,q}^{m,n} \left[\begin{matrix} (a_i)_{1,p} \\ (b_j)_{1,q} \end{matrix} \middle| s \right] (\mathfrak{M}f)(1-s), \quad (2.5)$$

где

$$\mathcal{G}_{p,q}^{m,n} \left[\begin{matrix} (a_i)_{1,p} \\ (b_j)_{1,q} \end{matrix} \middle| s \right] = \mathcal{G}_{p,q}^{m,n} \left[\begin{matrix} (a)_p \\ (b)_q \end{matrix} \middle| s \right] = \mathcal{G}_{p,q}^{m,n} \left[\begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \middle| s \right] = \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j + s) \prod_{i=1}^n \Gamma(1 - a_i - s)}{\prod_{i=n+1}^p \Gamma(a_i + s) \prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 - b_j - s)}. \quad (2.6)$$

Нам потребуется модифицированное G -преобразование вида [2, (6.2.4)]

$$\left(G_{\eta,\gamma}^1 f \right)(x) = x^{\eta} \int_0^x G_{p,q}^{m,n} \left[\frac{x}{t} \begin{matrix} (a_i)_{1,p} \\ (b_j)_{1,q} \end{matrix} \right] t^{\gamma} f(t) \frac{dt}{t} \quad (x > 0) \quad (2.7)$$

с G -функцией (1.2) $G_{p,q}^{m,n} [z]$ в ядре.

Формула преобразования Меллина от $G_{\eta,\gamma}^1$ - преобразования (2.7) имеет вид [2, (6.2.14)]

$$(\mathfrak{M} G_{\sigma,\kappa}^1 f)(s) = \mathcal{G}_{p,q}^{m,n} \left[\begin{matrix} (a_i)_{1,p} \\ (b_j)_{1,q} \end{matrix} \middle| s + \sigma \right] (\mathfrak{M}f)(s + \sigma + \kappa), \quad (2.8)$$

где $\mathcal{G}_{p,q}^{m,n}(s)$ определяется формулой (2.6).

Нам потребуются дробные интегралы типа Эрдейи – Кобера $I_{0+;\sigma,\eta}^{\alpha}$ и $I_{-;\sigma,\eta}^{\alpha}$, определяемые при $x \in R_+$ следующими формулами [1, § 18.1]:

$$\left(I_{0+;\sigma,\eta}^{\alpha} f \right)(x) = \frac{\sigma x^{-\sigma(\alpha+\eta)}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x^{\sigma} - t^{\sigma})^{\alpha-1} t^{\sigma\eta+\sigma-1} f(t) dt, \quad (2.9)$$

$$\left(I_{-;\sigma,\eta}^{\alpha} f \right)(x) = \frac{\sigma x^{\sigma\eta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (t^{\sigma} - x^{\sigma})^{\alpha-1} t^{\sigma(1-\alpha-\eta)-1} f(t) dt, \quad (2.10)$$

где $\operatorname{Re}(\alpha) > 0; \sigma > 0, \eta \in C$.

Для формулировки утверждений, представляющих $\mathfrak{L}_{v,2}$ -теорию и формулы обращения модифицированного G -преобразования (1.1) нам понадобятся следующие постоянные, определяемые через параметры G -функции (1.2) [2, (6.1.5) - (6.1.11)]:

$$\alpha = \begin{cases} -\min_{1 \leq j \leq m} [\operatorname{Re}(b_j)], & m > 0, \\ -\infty, & m = 0, \end{cases} \quad \beta = \begin{cases} 1 - \max_{1 \leq i \leq n} [\operatorname{Re}(a_i)], & n > 0 \\ \infty, & n = 0 \end{cases} \quad (2.11)$$

$$a^* = 2(m+n) - p - q \quad (2.12)$$

$$\Delta = q - p \quad (2.13)$$

$$\mu = \sum_{j=1}^q b_j - \sum_{i=1}^p a_i + \frac{p-q}{2}, \quad (2.14)$$

$$\alpha_0 = \begin{cases} \max_{m+1 \leq j \leq q} [\operatorname{Re}(b_j)], & q > m; \\ -\infty, & q = m; \end{cases} \quad (2.15)$$

$$\beta_0 = \begin{cases} \min_{n+1 \leq i \leq p} [\operatorname{Re}(a_i)] + 1, & p > n; \\ \infty, & p = n. \end{cases} \quad (2.16)$$

Назовем исключительным множеством \mathcal{E}_G для функции $\mathcal{G}(s)$, определенной в (2.6), множество вещественных чисел v таких, что $\alpha < 1 - v < \beta$ и $\mathcal{G}(s)$ имеет нули на прямой $\operatorname{Re}(s) = 1 - v$.

Для функции f определим почти всюду в R_+ элементарные операторы M_ξ, N_a :

$$(M_\xi f)(x) = x^\xi f(x) \quad (\xi \in C), \quad (N_a f)(x) = f(x^a) \quad (a \in R, a \neq 0). \quad (2.17)$$

Нам понадобятся следующие свойства операторов M_ξ, N_a [2 - 4].

Лемма 1. Для $v \in R$ и $1 \leq r < \infty$ верны следующие утверждения:

(а) M_ξ является изометрическим изоморфизмом $\mathfrak{L}_{v,r}$ на $\mathfrak{L}_{v-\operatorname{Re}(\xi),r}$; если $f \in \mathfrak{L}_{v,r}$ ($1 \leq r \leq 2$),

то $(\mathfrak{M} M_\xi f)(s) = (\mathfrak{M} f)(s + \xi) \quad (\operatorname{Re}(s) = v - \operatorname{Re}(\xi))$;

M_ξ^{-1} является изометрическим изоморфизмом $\mathfrak{L}_{v,r}$ на $\mathfrak{L}_{v+\operatorname{Re}(\xi),r}$, и $M_\xi^{-1} = M_{-\xi}$;

(б) N_a является ограниченным изоморфизмом $\mathfrak{L}_{v,r}$ на $\mathfrak{L}_{av,r}$; если $f \in \mathfrak{L}_{v,r}$ ($1 \leq r \leq 2$),

то $(\mathfrak{M} N_a f)(s) = \frac{1}{|a|} (\mathfrak{M} f)\left(\frac{s}{a}\right) \quad (\operatorname{Re}(s) = av)$;

N_a^{-1} является ограниченным изоморфизмом $\mathfrak{L}_{v,r}$ на $\mathfrak{L}_{v/a,r}$, и $N_a^{-1} = N_{1/a}$.

3. $\mathfrak{L}_{v,2}$ -теория и формулы обращения многомерного $G^1_{\eta,\gamma;\delta} f$ -преобразования (1.1)

$G^1_{\eta,\gamma;\delta} f$ -преобразование (1.1) представим как композицию $G^1_{\eta/\delta,\gamma/\delta}$ -преобразования вида (2.7) и элементарных операторов N_a (2.17). Действительно, заменяя в (1.1) x^δ на $x^{1/\delta}$ и совершая замену переменных $t^\delta = y$, имеем:

$$\begin{aligned} (G^1_{\eta,\gamma;\delta} f)(x^{1/\delta}) &= x^{\eta/\delta} \int_0^x G_{p,q}^{m,n} \left[\frac{x}{t^\delta} \begin{matrix} (a_i)_{1,p} \\ (b_j)_{1,q} \end{matrix} \right] t^\gamma f(t) \frac{dt}{t} = \\ &= \frac{1}{\delta} x^{\eta/\delta} \int_0^x G_{p,q}^{m,n} \left[\frac{x}{y} \begin{matrix} (a_i)_{1,p} \\ (b_j)_{1,q} \end{matrix} \right] y^{\gamma/\delta} f(y^{1/\delta}) \frac{dy}{y} = \frac{1}{\delta} (G^1_{\eta,\gamma} N_{1/\delta} f)(x^{1/\delta}). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Применяем к последнему равенству оператор N_δ , получаем следующее представление для преобразования $G_{\eta,\gamma;\delta}^1 f$ (1.1):

$$(G_{\eta,\gamma;\delta}^1 f)(x) = \frac{1}{\delta} (N_\delta G_{\eta/\delta,\gamma/\delta}^1 N_{1/\delta} f)(x). \quad (3.2)$$

Применим преобразование Меллина к (3.2), учитывая равенство (3.1), лемму (2.1), имеем:

$$\begin{aligned} (\mathfrak{M} G_{\eta,\gamma;\delta}^1 f)(s) &= \left(\mathfrak{M} \left(\frac{1}{\delta} N_\delta G_{\eta/\delta,\gamma/\delta}^1 N_{1/\delta} f \right) \right)(s) = \frac{1}{\delta^2} \left(\mathfrak{M} \left(G_{\eta/\delta,\gamma/\delta}^1 N_{1/\delta} f \right) \right) \left(\frac{s}{\delta} \right) = \\ &= \frac{1}{\delta^2} \left(\mathfrak{M} \left(G_{\eta/\delta,\gamma/\delta}^1 N_{1/\delta} f \right) \right) \left(\frac{s}{\delta} \right) = \frac{1}{\delta^2} \mathcal{G}_{p,q}^{m,n} \left[\begin{matrix} (a_i)_{1,p} \\ (b_j)_{1,q} \end{matrix} \middle| \frac{s+\eta}{\delta} \right] (\mathfrak{M} N_{1/\delta} f) \left(\frac{s+\eta+\gamma}{\delta} \right) = \\ &= \frac{1}{\delta} \mathcal{G}_{p,q}^{m,n} \left[\begin{matrix} (a_i)_{1,p} \\ (b_j)_{1,q} \end{matrix} \middle| \frac{s+\eta}{\delta} \right] (\mathfrak{M} f)(s+\eta+\gamma). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$(\mathfrak{M} G_{\eta,\gamma;\delta}^1 f)(s) = \frac{1}{\delta} \mathcal{G}_{p,q}^{m,n} \left[\begin{matrix} (a_i)_{1,p} \\ (b_j)_{1,q} \end{matrix} \middle| \frac{s+\eta}{\delta} \right] (\mathfrak{M} f)(s+\eta+\gamma). \quad (3.3)$$

Следующая теорема дает $\mathfrak{L}_{v,2}$ -теорию преобразования (1.1), которая следует из соответствующих утверждений для преобразования $G_{\eta,\gamma}^1 f$ [2, теорема 6.50], леммы 1, представлений (3.1) – (3.2).

Теорема 3.1. Пусть

$$\alpha < \frac{v - \operatorname{Re}(\gamma)}{\delta} < \beta, \quad a^* = 0; \quad \Delta[v - \operatorname{Re}(\gamma)] / \delta + \operatorname{Re}(\mu) \leq 0. \quad (3.4)$$

Тогда верны следующие утверждения:

a) Существует взаимно однозначное преобразование $G_{\eta,\gamma;\delta}^1 \in [\mathfrak{L}_{v,2}, \mathfrak{L}_{v-\operatorname{Re}(\gamma+\eta),2}]$ такое, что равенство (3.3) выполняется для $f \in \mathfrak{L}_{v,2}$ и $\operatorname{Re}(s) = v - \operatorname{Re}(\gamma + \eta)$.

Если $a^* = 0$, $\Delta[v - \operatorname{Re}(\gamma)] / \delta + \operatorname{Re}(\mu) = 0$ и $1 - \frac{v + \operatorname{Re}(\gamma)}{\delta} \notin \mathcal{E}_G$, то $G_{\eta,\gamma;\delta}^1$ -преобразование биективно отображает $\mathfrak{L}_{v,2}$ на $\mathfrak{L}_{v-\operatorname{Re}(\gamma+\eta),2}$.

b) Преобразование $G_{\eta,\gamma;\delta}^1 f$ не зависит от v в том смысле что, если v и \tilde{v} удовлетворяют условиям (3.4) и если преобразования $G_{\eta,\gamma;\delta}^1 f$ и $\tilde{G}_{\eta,\gamma;\delta}^1 f$ определены в пространствах $\mathfrak{L}_{v,2}$ и $\mathfrak{L}_{\tilde{v},2}$ равенством (3.3), то $G_{\eta,\gamma;\delta}^1 f = \tilde{G}_{\eta,\gamma;\delta}^1 f$ для $f \in \mathfrak{L}_{\tilde{v},2} \cap \mathfrak{L}_{v,2}$.

c) Если $a^* = 0$, $\Delta[v - \operatorname{Re}(\gamma)] / \delta + \operatorname{Re}(\mu) < 0$, то для $f \in \mathfrak{L}_{v,2}$ $G_{\eta,\gamma;\delta}^1 f$ дается формулой (1.1).

d) Пусть $\lambda \in C$ и $f \in \mathfrak{L}_{v,2}$. Если $\operatorname{Re}(\lambda) > (v - \operatorname{Re}(\gamma)) / \delta - 1$, то преобразование $G_{\eta,\gamma;\delta}^1 f$ представимо в виде

$$(G_{\eta,\gamma;\delta}^1 f)(x) = \frac{1}{\delta} x^{\eta+1-\delta(\lambda+1)} \frac{d}{dx} x^{\delta(\lambda+1)} \int_0^x G_{p+1,q+1}^{m,n+1} \left[\begin{matrix} x^\delta \\ t^\delta \end{matrix} \middle| \begin{matrix} -\lambda, a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q, -\lambda-1 \end{matrix} \right] t^{\gamma-1} f(t) dt, \quad (3.5)$$

а при $\operatorname{Re}(\lambda) < (v - \operatorname{Re}(\gamma)) / \delta - 1$ дается формулой

$$(G_{\eta,\gamma;\delta}^1 f)(x) = -\frac{1}{\delta} x^{\eta+1-\delta(\lambda+1)} \frac{d}{dx} x^{\delta(\lambda+1)} \int_0^x G_{p+1,q+1}^{m+1,n} \left[\begin{matrix} x^\delta \\ t^\delta \end{matrix} \middle| \begin{matrix} a_1, \dots, a_p, -\lambda \\ -\lambda-1, b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right] t^{\gamma-1} f(t) dt. \quad (3.6)$$

е) Если $f \in \mathcal{L}_{\nu,2}$ и $g \in \mathcal{L}_{1-\nu+\text{Re}(\gamma+\eta),2}$, то имеет место формула:

$$\int_0^x f(x) \left(G_{\eta,\gamma;\delta}^1 g \right) (x) dx = \int_0^x \left(G_{\gamma,\eta;\delta}^2 f \right) (x) g(x) dx, \tag{3.7}$$

где

$$\left(G_{\gamma,\eta;\delta}^2 \right) (x) = x^\gamma \int_0^x G_{p,q}^{m,n} \left[\begin{matrix} t^\delta \\ x^\delta \end{matrix} \left| \begin{matrix} (a_i)_{1,p} \\ (b_j)_{1,q} \end{matrix} \right. \right] t^\eta f(t) \frac{dt}{x}. \tag{3.8}$$

Получены формулы обращения для преобразования $G_{\eta,\gamma;\delta}^1 f$:

$$f(x) = \delta x^{\delta-(\gamma-1)-\delta(\lambda+1)} \frac{d}{dx} x^{-\delta(\lambda+1)} \times \\ \times \int_0^\infty G_{p+1,q+1}^{q-m,p-n+1} \left[\begin{matrix} t^\delta \\ x^\delta \end{matrix} \left| \begin{matrix} -\lambda, -a_{n+1}, \dots, -a_p, -a_1, \dots, -a_n \\ -b_{m+1}, \dots, -b_q, -b_1, \dots, -b_m, -\lambda - 1 \end{matrix} \right. \right] t^{\delta-\eta-1} (G_{\eta,\gamma;\delta}^1 f)(t) dt \tag{3.9}$$

или

$$f(x) = -\delta x^{\delta-(\gamma-1)-\delta(\lambda+1)} \frac{d}{dx} x^{-\delta(\lambda+1)} \times \\ \times \int_0^\infty G_{p+1,q+1}^{q-m+1,p-n} \left[\begin{matrix} t^\delta \\ x^\delta \end{matrix} \left| \begin{matrix} -a_{n+1}, \dots, -a_p, -a_1, \dots, -a_n, -\lambda \\ -\lambda - 1, -b_{m+1}, \dots, -b_q, -b_1, \dots, -b_m \end{matrix} \right. \right] t^{\delta-\eta-1} (G_{\eta,\gamma;\delta}^1 f)(t) dt. \tag{3.10}$$

Условия справедливости этих формул дает следующее утверждение, которое следует из утверждения в [2, теорема 6.60].

Теорема 4.2 Пусть

$$a^* = 0, \alpha < (\nu - \text{Re}(\gamma)) / \delta < \beta, \alpha_0 < 1 - (\nu - \text{Re}(\gamma)) / \delta < \beta_0, \text{ и пусть } \lambda \in C.$$

Если $\Delta[\nu - \text{Re}(\gamma)] / \delta + \text{Re}(\mu) = 0$ и $f \in \mathcal{L}_{\nu,2}$, то формулы обращения (3.9) и (3.10) справедливы соответственно при $\text{Re}(\lambda) > (-\nu + \text{Re}(\gamma)) / \delta$ и $\text{Re}(\lambda) < (-\nu + \text{Re}(\gamma)) / \delta$.

Благодарности. Работа выполнена в рамках ГПНИ «Конвергенция – 2025», подпрограмма «Математические модели и методы», задание 1.2.01.

ЛИТЕРАТУРА

1. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Мн.: Наука и техника. – 1987.
2. Kilbas A. A., Saigo M. H – Transforms. Theory and Applications. - Chapman and Hall. – Boca Raton – London – New York – Washington: CRC Press. - 2004.
3. Rooney P. G.// Canad. J. Math. 1973. Vol. 25. P. 1090 – 1102.
4. Килбас А.А., Щетникович Е.К. Обобщенное Н – преобразование в весовых пространствах суммируемых функций // Весці НАН Беларусі, Серыя фіз.-мат. навук. - 2004. – № 2. – С.14–20.