УДК 621.37.037

МЕТОДЫ СВЕРХРАЗРЕШЕНИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ НА ОСНОВЕ МАКСИМАЛЬНОГО ПРАВДОПОДОБИЯ

М.С. АЛЕКСЕЕВ
(Представлено: канд. техн. наук, доц. В.Ф. ЯНУШКЕВИЧ)

Представлены результаты теоретического анализа сверхразрешения источников излучения с помощью антенной решетки с использованием метода «максимального правдоподобия с одним источникам сигнала». Приведены результаты исследования для одного источника. Проанализированы функции углового разрешения объекта. Результаты исследования могут быть использованы в радиопеленгации и радиолокации.

Ключевые слова: *антенная решетка, источники, отношение средней мощности*

Рассмотрим простейший случая одного источника, угловое положение которого задается углом φ, а амплитуда падающей плоской волны равна *a*. Мы ставим задачу определить направление прихода сигнала и его амплитуду с помощью антенной решетки(АР). Предположим, что имеется линейная АР из N элементов, расположенных произвольным образом вдоль оси x, как показано на рисунке 1.

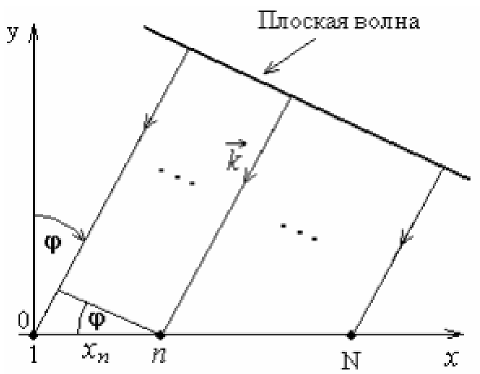

Рисунок 1. – Линейная АР в выбраной системе координат

Смесь полезного сигнала и шума в векторной форме запишем в виде:

$$Z = aS(\varphi) + X \tag{1}$$

Где вектор сигнала S имеет компоненты:

$$S_n(\varphi) = \exp\left[j\frac{2\pi}{\lambda}x_n sin\varphi\right]; n = (1 \div N) \tag{2}$$

Будем считать, что сигнал является регулярным и регистрируется решеткой на фоне собственного шума с корреляционной матрицы(КМ) $M=\sigma^2 E$.

Многомерную функцию плотности вероятности собственного шума запишем в виде:

$$p(X) = \frac{1}{\pi^N \sigma^{2N}} \exp\left(-\frac{|X|^2}{\sigma^2}\right). \tag{3}$$

Вектор *Z* смеси полезного сигнала и шума является случайным. Его функцию плотности вероятности найдем из (1) и (3). В результате будем иметь, что

$$p(Z,\varphi,a) = \frac{1}{\pi^N \sigma^{2N}} \exp\left(-\frac{|Z - aS(\varphi)|^2}{\sigma^2}\right). \tag{4}$$

Допустим, в результате приема сигналы получена некоторая реализация вектора *Z*. Тогда, подставляя *Z* в формулу (4), получим функцию, которая зависит от угла φ и амплитуды a. Эту функцию называют функцией правдоподобия. Исследуя функцию правдоподобия в зависимости от φ и a, найдем такие значения этих переменных, при которых функция правдоподобия достигает своего максимального значения. Полученные значения переменных называются оценками максимального правдоподобия. Нетрудно видеть, что функция правдоподобия (4) достигает максимума, когда функция

$$g(\varphi, a) = |Z - aS(\varphi)|^2 \tag{5}$$

имеет минимальное значение.

Метод оценивания параметров путем минимизации (5), называется методом наименьших квадратов. В данном случае метод наименьших квадратов и метод максимального правдоподобия дают один и тот же результат. Векторы Z и S являются векторами N– мерного пространства. Вектор Z фиксирован и не меняет своего положения. Наоборот, вектор S изменяет свое положение, когда мы подставляем различные значения неизвестного угла φ. На рисунке 2 показаны векторы Z и S. Кроме того, там представлены компоненты вектора Z, одна из которых параллельна вектору S, а другая ортогональна ему.

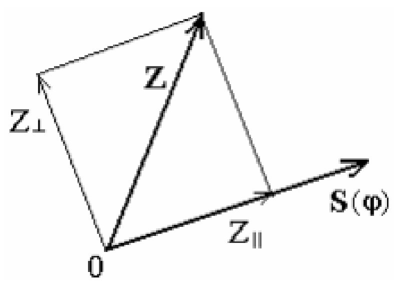

Рисунок 2. – Пример расположения векторов *Z* и *S* в *N*-мерном пространстве.

Теперь формулу (5) можно записать по-другому, а именно:

$$g(\varphi, a) = |Z_{11} - aS(\varphi)|^2 + |Z_{\perp}|^2. \tag{6}$$

Первое слагаемое всегда можно свести к нулю, выбирая подходящим образом амплитуду a. Второе слагаемое минимизируется только за счет выбора угла φ. Поэтому сначала следует минимизировать второе слагаемое, найти оценку угла φ, а затем, приравнивая к нулю первое слагаемое, можно найти оценку амплитуды a.

Введем в рассмотрение матрицы проектирования. Пусть в пространстве размерности N заданы два произвольных вектора Z и S. Тогда матрицы проектирования имеют следующий вид:

$$\Pi = \frac{SS^H}{S^H S}; E - \Pi = E - \frac{SS^H}{S^H S}. \tag{7}$$

Матрица П проектирует любой вектор Z N-мерного пространства на вектор S. Вторая матрица порождает компонент вектора Z, ортогональный вектору S. Матрицы проектирования обладают следующими свойствами:

$$\Pi^2 = \Pi; (E - \Pi)^2 = (E - \Pi); \Pi(E - \Pi) = [0]. \tag{8}$$

Применяя матрицы проектирования к вектору Z, получим компоненты этого вектора в виде:

$$Z_{11} = \Pi Z = \frac{S^H Z}{S^H S} S; Z_{\perp} = (E - \Pi)Z = Z - Z_{11}. \tag{9}$$

Теперь, используя формулы (8) и (9), легко выразить каждое из слагаемых, входящих в (6), следующим образом:

$$|Z_{11} - aS(\varphi)|^2 = \left| \frac{S^H(\varphi)Z}{S^H(\varphi)S(\varphi)} - a \right|^2 |S(\varphi)|^2, \tag{10}$$

$$\left|Z_{\perp}\right|^2 = |Z|^2 - \left|Z_{11}\right|^2 = |Z|^2 - \frac{\left|S^H(\varphi)Z\right|^2}{S^H(\varphi)S(\varphi)}. \tag{11}$$

Выражение (11) имеет минимум тогда, когда второе слагаемое имеет максимум, так как первое слагаемое фиксировано. Для дальнейшего анализа удобно ввести нормированный весовой вектор. Тогда второе слагаемое в (11) будет иметь вид:

$$\frac{\left|S^H(\varphi)Z\right|^2}{S^H(\varphi)S(\varphi)} = \left|W^H(\varphi)Z\right|^2. \tag{12}$$

Обработка сигнала (12) с весовым вектором обеспечивает максимальное отношение средней мощности(ОСШ) на выходе, если параметры сигнала и весового вектора совпадают. В данном случае обработка является согласованной с плоской волной сигнала.

Допустим, что истинные значения искомых параметров будут: $\varphi=\varphi_0$ и $a=a_0$. Тогда вектор принятого сигнала (1) равен

$$Z = a_0 S\left(\varphi_0\right) + X. \tag{13}$$

Если пренебречь влиянием шума и учесть, что $S^H(\varphi)S(\varphi) = \left|S(\varphi)\right|^2 = N$, то из (13) и (12) получим следующий результат

$$\frac{\left|S^H(\varphi)Z\right|^2}{S^H(\varphi)S(\varphi)} = \frac{\left|a_0\right|^2}{N}\left|S^H(\varphi)S(\varphi)\right|^2 = \frac{\left|a_0\right|^2}{N}\left|\sum_{n=1}^{N}\exp\left[j\frac{2\pi}{\lambda}x_n\left(\sin\varphi_0 - \sin\varphi\right)\right]\right|^2. \tag{14}$$

Нетрудно видеть, что выражение (14) достигает максимума при $\varphi=\varphi_0$. Если АР эквидистантная, то $x_n = d(n-1)$, и формула (14) может быть преобразована, в результате получим, что

$$\frac{\left|S^H(\varphi)Z\right|^2}{S^H(\varphi)S(\varphi)} = \left|a_0\right|^2\left|F\left(\varphi,\varphi_0\right)\right|^2. \tag{15}$$

Функция $\left|F\left(\varphi,\varphi_0\right)\right|^2$ представляет собой отклик нашего “прибора” (антенной решетки) на плоскую волну единичной амплитуды. Ее можно назвать аппаратной функцией. Функция $\left|F\left(\varphi,\varphi_0\right)\right|^2$ совпадает с ДН АР по мощности. Иногда метод оценивания угла прихода (12) называют методом сканирования лучом антенны.

Если сигнал отсутствует и вместо смеси *Z* в (12) входит только шум *X*, то средняя мощность шума на выходе равна σ^2.

Теперь будем полагать, что сигнал принимается на фоне шума. Тогда выход измерительной системы (12) представляет собой случайную функцию угловой переменной φ. Найдем среднее и среднеквадратическое отклонение этой функции. Для этого (13) подставим в (12) и найдем статистическое среднее. В результате получим, что

$$<\left|W^H(\varphi)Z\right|^2> = \left|a_0\right|^2\left|F\left(\varphi,\varphi_0\right)\right|^2 + \sigma^2. \tag{16}$$

Функция, рассчитанная для эквидистантной АР по формуле (16), представлена на рисунке 3 ($\varphi_0=0$) при ОСШ = 10. Параметры N=16, d/λ=0.5. Мы наблюдаем, что максимум отклика совпадает с направлением на источник сигнала.

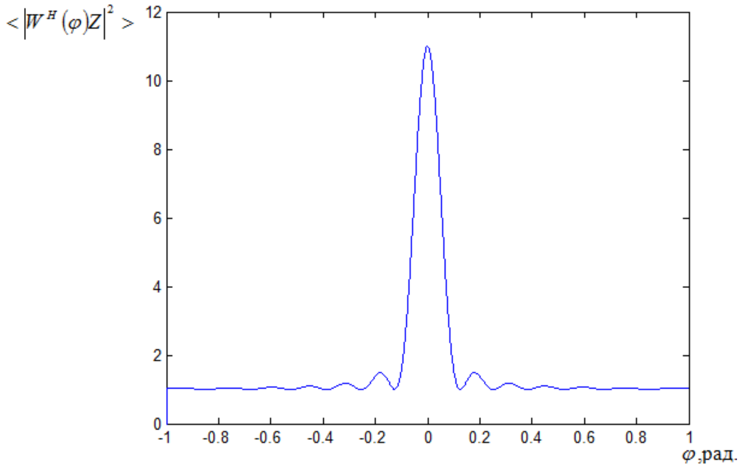

Рисунок 3. – Зависимость $<\left|W^H(\varphi)Z\right|^2>=\psi(\varphi)$ **при ОСШ=10**

Приведен анализ метода максимального правдоподобия для получения сверхразрешения. Результаты исследования показали максимум отклика совпадает с направлением источника сигнала, что может быть использована в радиопеленгации и радиолокации для построения методов цифровой обработки и получения высокого качества радиолокационных сигналов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. - М. : Радио и связь, 1989. – 656 с.
2. Воеводин В.В. Линейная алгебра. М.: Наука, 1980. 400 с.
3. Журавлев А.К., Лукошкин А.П., Поддубный С.С. Обработка сигналов в адаптивных антенных решетках. – Л. : Изд-во Лен. универ., 1983. – 240 с.
4. Караваев В.В., Сазонов В.В. Статистическая теория пассивной локации. М.: Радио и связь, 1987. 240 с.
5. Ширман Я.Д., Манжос В.Н. Теория и техника обработки радиолокационной информации на фоне помех. – М. : Радио и связь, 1981. – 416 с.
6. Монзинго Р.А., Миллер Т.У. Адаптивные антенные решетки: Введение в теорию. Пер. с англ. – М. : Радио и связь, 1986. – 448 с.
7. Уидроу Б., Стирнз С. Адаптивная обработка сигналов. Пер. с англ. – М. : Радио и связь, 1989. – 440 с.