

УДК 532.516

*В. И. Коробко, Э. М. Малая, В. К. Шашмин***АЭРОДИНАМИКА ПОТОКА В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ  
С ВНЕЗАПНЫМ РАСШИРЕНИЕМ**

*Численно решены уравнения Навье—Стокса для ламинарного течения вязкой несжимаемой жидкости в плоском канале с внезапным расширением. Решение сопоставлено с экспериментом.*

При течении вязкой несжимаемой жидкости в плоском канале с внезапным расширением происходит отрыв потока от стенок канала и образование зон возвратных течений. Каналы с внезапным расширением являются одним из методов стабилизации пламени и повышения эффективности теплообмена. Исследование аэродинамики таких течений развивается в трех основных направлениях:

а) создание упрощенных моделей течения с зонами отрыва на основе результатов экспериментальных исследований для чисел Рейнольдса  $Re \approx 10^4 \div 10^5$  [1—11];

б) получение точных асимптотических решений уравнений Навье — Стокса только для больших (или только для малых) чисел Рейнольдса. Этот метод применяется для исследования сверхзвуковых течений с ламинарными и турбулентными срывными зонами больших размеров по сравнению с толщиной пограничного слоя в точке отрыва [12—17];

в) разработка численных методов решений краевой задачи для уравнений Навье — Стокса. Обзор численного интегрирования уравнений Навье — Стокса с использованием различных разностных схем и обширная библиография изложены в работах [18—21].

Л. М. Симуни [22] рассмотрел течение вязкой несжимаемой жидкости в канале с внезапным расширением и сужением при движении одной из его стенок до чисел  $Re = 1000$ . Неустойчивость схемы в работе [22] связана с симметричной аппроксимацией конвективных членов. В [23] выполнено численное интегрирование уравнений Навье — Стокса для задачи о развитии потока вязкой несжимаемой жидкости в осесимметричной трубе с внезапным расширением.

Система уравнений Навье—Стокса, описывающая плоское течение вязкой несжимаемой жидкости, в безразмерном виде запишется следующим образом [24]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= - \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right), \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

С помощью функции тока  $\psi$  и завихренности  $\xi$

$$u = \partial\psi/\partial y, \quad v = -\partial\psi/\partial x; \quad \xi = \nabla^2\psi \quad (2)$$

перейдем к системе двух уравнений  $(\psi, \xi)$ , которую запишем в дивергентном виде [25]:

$$\frac{\partial\xi}{\partial t} = \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2\xi - \frac{\partial}{\partial x} (\xi u) - \frac{\partial}{\partial y} (\xi v), \quad \nabla^2\psi = \xi. \quad (3)$$

Тогда теорема Гаусса о дивергенции в нашем случае удовлетворяется

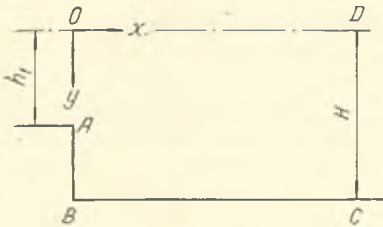


Рис. 1. Схема течения

тождественно уравнениями в конечно-разностной форме независимо от точности решения [26].

При решении  $(\psi, \xi)$  системы (3) возникает необходимость постановки граничных условий для  $\xi$ . Эти условия могут быть получены приближенно с помощью уже найденных значений  $\psi$ . В работе [27] обсуждаются различные способы вывода граничных условий для  $\xi$ .

В настоящей работе рассматривается явная двухслойная разностная схема второго порядка точности с односторонней аппроксимацией конвективных членов. Диффузионные члены представим с помощью обычных центральных разностей [18], конвективные — с использованием метода составления разностей в направлении вверх по потоку по трем точкам, так как аппроксимируем с точностью  $O(h^2)$ . По смыслу конвективного переноса информация передается в ячейку только от ячеек, расположенных от нее выше по потоку. Когда знак скорости меняется вблизи угловой точки, необходимо видоизменять основную схему составления разностей в направлении вверх по потоку [28]. На расстоянии одного пространственного шага от границы области для конвективных членов используется аппроксимация центральными разностями. Таким образом, конечно-разностная система аппроксимирует систему  $(\psi, \xi)$  с погрешностью  $O(h^2 + \Delta t)$ .

Анализ устойчивости рассмотренной конечно-разностной  $(\psi, \xi)$  системы проводился методом локальной линейаризации Неймана [19]. Достаточное условие устойчивости, включающее влияние границ, может быть иногда получено из энергетического исследования [19], но это затруднительно даже для простых дифференциальных уравнений. Условие устойчивости для рассмотренной выше схемы бралось в виде  $\Delta t \leq ah^2$ , где  $a$  — некоторая константа порядка  $1/2$ .

Рассмотрим начальные и граничные условия для течения во внезапно расширяющемся плоском канале (рис. 1):

$$\psi = 1, \quad \frac{\partial\psi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial x} = 0 \quad \text{на } ABC,$$

$$\psi = 0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = 0 \quad \text{на } OD,$$

$$\psi = \int_0^y f(y) dy \quad \text{на } OA, \quad (4)$$

$$\xi = 0 \quad \text{на } OD; \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \xi}{\partial x} = 0 \quad \text{на } DC,$$

$$\tau = \frac{8\psi_{w+1} - \psi_{w+2} - 7\psi_w}{2h^2} \quad \text{на } ABC,$$

$$\tau = \frac{2(\psi_{w+1} - \psi_w)}{h^2} + f'(y) \quad \text{на } OA,$$

где  $w$  — граничная точка, а  $w+1$ ,  $w+2$  — ближайшие к ней внутренние граничные точки;  $f(y)$  — заданное распределение скорости на входе, полученное из эксперимента. Заметим, что условия на линии  $DC$  (4) соответствуют условию выравнивания линий тока далеко вниз по потоку. При счете линия  $DC$  расположена на конечном расстоянии от начального сечения. Для удовлетворения условий на  $DC$  используют неравномерную сетку по  $x$ , чтобы не увеличивать число узловых точек и «снести» граничные условия далеко вниз по потоку [30]. В работах [31, 32] уравнения Навье — Стокса замыкались вниз по потоку с помощью уравнений типа пограничного слоя. В работе [25] на линии  $DC$  использовалась линейная интерполяция функции тока и завихренности внутри области течения.

Решение полученной конечно-разностной системы уравнений проводилось следующим образом. Пусть в некоторый момент времени известны сеточные функции  $\psi_{i,j}^n$ ,  $\xi_{i,j}^n$ . Из разностного аналога первого уравнения системы (3) находим  $\xi_{i,j}^{n+1}$  во внутренних точках сеточной области. Решая итерационным методом Зейделя разностный аналог второго уравнения системы (3) при известных граничных значениях  $\psi_{i,j}^n$  (4), находим  $\psi_{i,j}^{n+1}$  внутри области [29]. По значению  $\psi_{i,j}^{n+1}$  определяем вихрь  $\xi_{i,j}^{n+1}$  на границе. Счет проводился на ЭВМ М-220М. Максимальное количество узлов расчетной сетки 1500. Шаг по сетке  $\Delta x = \Delta y = h = 0,1$ . Выходные данные программы при некотором значении времени следующие: профили скорости  $u$ ,  $v$  в сечениях канала; значения координаты  $y$  линий тока  $\psi = \psi_i = \text{const}$  при  $x = x_i$ . В конце счета выдавалось на печать поле функции тока  $\psi$  и завихренности  $\xi$ .

Для подтверждения правильности полученных численных результатов были проведены экспериментальные исследования ламинарного течения вязкой несжимаемой жидкости в плоском канале с внезапным расширением. Измерения скоростей в плоском канале с внезапным расширением проводились термоанемометрической аппаратурой фирмы «Диза-электроник», состоящей из двух термоанемометров постоянной температуры типа 55A01 и коррелятора 55A06 (диаметр проволоки датчика 5 мк, точность при малых скоростях (до 4 м/с) 0,2%). Поля скоростей измерялись по сечениям канала при степени расширения  $H/h_1 = 3,0; 5,0; 6,0; 7,0$  (рис. 2). Результаты показали, что поле скоростей на выходе из щели можно описать по формуле для ламинарного течения в плоском канале

$$\frac{u}{u_m} = 1 - 4 \frac{y^2}{h_1^2} \quad (5)$$

( $u_m = 1,62$  м/с,  $h_1 = 1,5$  мм,  $Re = u_m h_1 / \nu = 162$ ). Распределение скорости на выходе из щели, полученное экспериментально, отличается от профиля скорости, рассчитанного по формуле (5), не более чем на 1%.



На рис. 2 расчетные распределения скорости потока в канале сравниваются с экспериментальными данными. Анализ распределения скоростей при различных степенях расширения показал, что длина рециркуляционной зоны и скорости в ней сильно зависят от степени расширения; например, при  $H/h_1=3,0$  максимальная скорость в рециркуляционной зоне составила около 10%  $u_m$ , а при  $H/h_1=6,0$ —уже 20%  $u_m$ . Численный расчет показал более быстрое затухание осевой скорости, чем замерен-

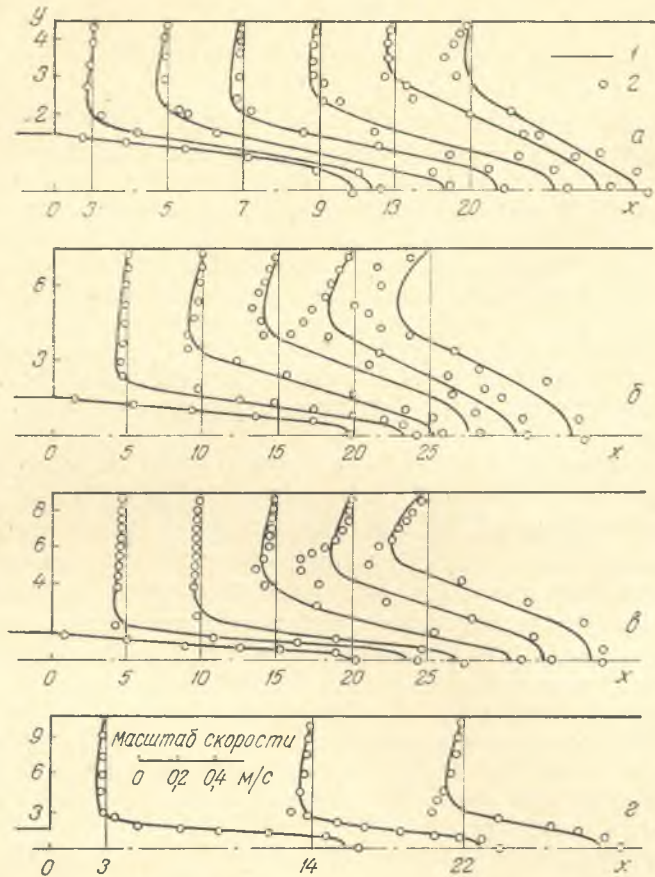


Рис. 2. Профили скорости в плоском канале с внезапным расширением: 1—расчет по рассматриваемой схеме; 2—экспериментальные данные; а— $H/h_1=3$ ; б—5; в—6; г—7

ное в эксперименте (рис. 2). Так как мы носили условия на бесконечности на конечное расстояние от уступа, то условия, заданные на правой границе, были очень «жесткие». Таким образом, наблюдалось более быстрое затухание осевой скорости. В целом сравнение результатов численного расчета с результатами эксперимента показало, что данный численный метод обеспечивает получение достаточно точных результатов при счете подобных течений.

#### Обозначения

$x, y$  — безразмерные координаты, отнесенные к характерной длине канала  $L$  (рис. 1);  $u, v$  — составляющие скорости по осям  $x, y$ , отнесенные к характерной скорости  $u_0$ ;  $P$  — безразмерное давление;  $Re = u_0 L / \nu$  — число Рейнольдса, отнесенное к характерной скорости  $u_0$ , характерной длине  $L$  и кинематической вязкости  $\nu$ ;  $i, j$  — индексы узлов сетки по осям  $x, y$ ;  $n$  — итерационный индекс;  $\Delta x, \Delta y$  — шаг по сетке вдоль оси  $x, y$ ;  $\Delta t$  — шаг по времени;  $u_m$  — максимальная скорость на оси канала у входа;  $h_1, H$  — полуширина канала на входе и выходе (рис. 1);  $\nabla^2$  — оператор Лапласа.

## Nomenclature

$x, y$ , dimensionless coordinates referred to characteristic channel length  $L$  (Fig. 1);  $u, v$ , velocities in the  $x$ -,  $y$ -direction referred to characteristic velocity  $u_0$ ;  $P$ , dimensionless pressure;  $Re$ , Reynolds number referred to characteristic velocity  $u_0$ , characteristic length  $L$  and kinematic viscosity  $\nu$ ;  $i, j$ , indices of network nodes in the  $x$ -,  $y$ -direction;  $n$ , iteration index;  $\Delta x, \Delta y$ , network step along  $x, y$ ;  $\Delta t$ , time step;  $u_m$ , maximum velocity on a channel axis at inlet;  $h_1, H$ , channel half-width at inlet and outlet, respectively (Fig. 1);  $\nabla^2$ , Laplace operator.

## Figure Captions

Fig. 1. The flow diagram.

Fig. 2. Velocity profiles in a plane channel with sudden expansion: 1, calculation according to the proposed diagram; 2, experimental data.

## Summary

The problem is solved numerically on viscous incompressible fluid flow development in a stepwise expanding channel for small Reynolds numbers. The numerical results are compared with experimental data.

## Литература

1. Воронин В. Н. Основы рудничной аэрогазодинамики. Углетехиздат, 1951.
2. Абрамович Г. Н. Турбулентные течения с обратными токами жидкости. Оборонгиз, 1958.
3. Воронин В. Н., Первов Ю. М. Проблемы рудничной аэрологии. Углетехиздат, 1958.
4. Curtet R. Sur l'écoulement d'un jet entre parois. Publ. Scient. et Techn. du Ministère de l'Air, Paris, № 359, 1960.
5. Левин А. М., Баум В. А. Размеры рециркуляционной зоны при внезапном расширении потока. ДАН УССР, № 10, 1958.
6. Миткалинский В. И. Струйное движение газов в печах. Metallurgizdat, 1961.
7. Вулис Л. А., Кашкаров В. П. Теория струй вязкой жидкости. М., «Наука», 1965.
8. Шепелев И. А., Тарнопольский М. Д. Исследование тепло- и массообмена в технологических процессах и аппаратах. Минск, «Наука и техника», 1966.
9. Канторович Б. В. Смещение струй, ограниченное стенками. В сб.: Новые методы сжигания топлив и вопросы теории горения. М., «Наука», 1965.
10. Гольдштик М. А., Силантьев Б. А. О влиянии загромождения канала на движение жидкости в зоне отрыва за плохообтекаемым телом. ПМТФ, № 1, 1967.
11. Байрашевский Б. А. Приближенный расчет аэродинамических характеристик ограниченных струй при различной степени расширения. Изв. АН БССР, сер. физ.-матем. наук, № 4, 1970.
12. Нейланд В. Я. К теории отрыва ламинарного пограничного слоя. Изв. АН СССР, МЖТ, № 4, 1969.
13. Stewartson K., Williams P. G. Selfinduced separation. Proc. Roy. Soc. London, A312, 1969.
14. Messiter A. F. Boundary-layer flow near the trailing edge of a flat plate. SIAM J. Appl. Math., 18, № 1, 1970.
15. Боголепов В. В., Нейланд В. Я. Обтекание малых неровностей на поверхности тела сверхзвуковым потоком вязкого газа. Труды Центр. аэрогидродинамического ин-та, вып. 1363, 1971.
16. Stewartson K. Fluid dynamics transactions, 3, Warszawa, 1967.
17. Гошин Л. В., Нейланд В. Я., Степанов Г. Ю. Теория двумерных отрывных течений. В сб.: Гидромеханика, т. 8. Изд. АН СССР, ВИНТИ, Итоги науки и техники. Серия «Гидромеханика», 1975.
18. Браиловская И. Ю., Кускова Т. В., Чудов Л. А. Разностные методы решения уравнений Навье—Стокса. В сб.: Вычислительные методы и программирование, вып. XI. Изд. МГУ, 1968.
19. Рихтмайер Р., Мортон К. Разностные методы решения краевых задач. М., «Мир», 1972.
20. Mueller Thomas J. Numerical and physical experiments in viscous separated flow. Lect Notes Phys., 41, pp. 375—409, 1975.
21. Cheng Sin-I. A critical review of numerical solution of Navier-Stokes equations. Lect. Notes Phys., 41, pp. 78—225, 1975.

22. Симуни Л. М. Численное решение некоторых задач движения вязкой жидкости. Инж. журнал, т. IV, вып. 3, 1964.
23. Macagno E. O., Hung T. K. Computational and Experimental Study of a Captive Annular Eddy. J. Fluid Mech., 28, pp. 43—64, 1967.
24. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М., «Наука», 1970.
25. Roache P. J., Mueller T. J. Numerical Solutions of Laminar Separated Flows. AIAA J., 8, pp. 530—538, 1970.
26. Lax P. D. Weak Solutions of Nonlinear Hyperbolic Equations and Their Numerical Computations. Communications in Pure and Applied Math., 7, pp. 159—193, 1954.
27. Кускова Т. В., Чудов Л. А. О приближенных граничных условиях для вихря при расчете течений вязкой несжимаемой жидкости. В сб.: Вычислительные методы и программирование, вып. XI, Изд. МГУ, 1968.
28. Courant R., Isaacson E., Rees M. On the Solution of Nonlinear Hyperbolic Differential Equations by Finite Difference. Communications in Pure and Applied Math., 5, № 243, 1952.
29. Федоренко Р. П. Итерационные методы решения разностных эллиптических уравнений. УМН, т. XXVIII, вып. 2 (170), 1973.
30. Булеев Н. И., Петрищев В. С. Численный метод решения уравнений гидродинамики для плоского потока. ДАН СССР, 169, № 6, 1966.
31. Браиловская И. Ю. Метод решения задач с сильным вязким взаимодействием. ДАН СССР, 162, № 1, 1965.
32. Варапаев В. Н. Численное исследование периодического струйного течения вязкой несжимаемой жидкости. Изв. АН СССР, МЖГ, № 3, 1968.

[I.VIII 1977 г.]