

УДК 532.517;532.526

*З. П. Шульман, В. И. Коробко, В. К. Шашмин***ТЕПЛО- И МАССОБМЕН В ЗАТОПЛЕННОЙ
ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ НЕАВТОМОДЕЛЬНОЙ СТРУЕ**

Постановка и первое решение задачи о развитии ламинарной затопленной осесимметричной струи вязкой несжимаемой жидкости принадлежит Л. Г. Лойцянскому [1]. Задача решалась на основе уравнений ламинарного пограничного слоя методом асимптотических разложений. Л. Г. Лойцянским найдены в конечном виде первые и вторые члены разложений составляющих скорости. Третьи и четвертые члены скорости разложений определены соответственно в [2, 3]. Решение позволяет учесть влияние формы начального профиля скорости истечения на распределение скоростей в струе. В [4] рассмотрен теплообмен в осесимметричной неавтомоделльной струе при $Pr = 1$.

В настоящей работе получено распределение избыточных температур в затопленных осесимметричных струях для любых значений числа Прандтля и выяснены некоторые особенности асимптотических разложений скоростей и температуры в рамках теории Л. Г. Лойцянского. Приведены результаты экспериментальных исследований распределения концентрации газовой примеси в осесимметричной турбулентной струе воздуха с начальной неравномерностью скорости истечения, которые сопоставлены с полученным решением.

1. **Ламинарная струя.** Уравнение переноса тепла в ламинарном пограничном слое вязкой несжимаемой жидкости в случае осесимметричного движения в цилиндрической системе координат имеет вид

$$u \frac{\partial \Delta T}{\partial X} + v \frac{\partial \Delta T}{\partial r} = a \left(\frac{\partial^2 \Delta T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Delta T}{\partial r} \right). \quad (1)$$

Здесь X — продольное расстояние от источника струи, r — расстояние от оси струи.

Интегральным инвариантом задачи, кроме условий сохранения количества движения K_0 [1], является условие сохранения избыточного теплосодержания в струе [5]

$$Q_0 = 2\pi r c_p \int_0^{\infty} u \Delta T r dr = \text{const}. \quad (2)$$

Вводим новые независимые переменные [1]

$$x = X, \quad \eta = r(Xv)^{-1/4} \quad (3)$$

и к асимптотическим разложениям составляющих скорости и давления «динамической» задачи

$$u = \frac{\bar{a}'}{\eta} \frac{1}{x} + \frac{a_0'}{\eta} \frac{1}{x^2} + \frac{a_1'}{\eta} \frac{1}{x^3} + \frac{a_2'}{\eta} \frac{1}{x^4} + \dots,$$

$$v = \frac{\sqrt{v}}{x} \left\{ \bar{a}' - \frac{\bar{a}}{\eta} + a_0' \frac{1}{x} + \left(a_1' + \frac{a_1}{\eta} \right) \frac{1}{x^2} + \dots \right\}$$

присоединим разложение

$$\Delta T = \frac{d_1}{x} + \frac{d_2}{x^2} + \frac{d_3}{x^3} + \dots \quad (4)$$

Здесь \bar{a} , a_0 , a_1 , a_2 — функции, определенные в упомянутых работах, d_i ($i=1, 2, \dots$) — неизвестные функции η . В результате подстановки разложений в (1) и сравнения коэффициентов при членах, содержащих одинаковые степени x , получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений для определения неизвестных функций d_1, d_2, d_3, \dots :

$$d_1'' + \frac{1 + \text{Pr} \bar{a}}{\eta} d_1' + \text{Pr} \frac{\bar{a}'}{\eta} d_1 = 0,$$

$$d_2'' + \frac{1 + \text{Pr} \bar{a}}{\eta} d_2' + 2\text{Pr} \frac{\bar{a}'}{\eta} d_2 = -\text{Pr} \frac{a_0'}{\eta} d_1,$$

$$d_3'' + \frac{1 + \text{Pr} \bar{a}}{\eta} d_3' + 3\text{Pr} \frac{\bar{a}'}{\eta} d_3 = -2\text{Pr} \frac{a_0'}{\eta} d_2 -$$

$$-\text{Pr} \frac{a_1'}{\eta} d_1 + \text{Pr} \frac{a_1}{\eta} d_1', \dots \quad (5)$$

Аналогично из (2) имеем интегральные условия

$$\int_0^{\infty} \bar{a} d_1 d\eta = \frac{Q_0}{2\pi\mu c P}, \quad \int_0^{\infty} (\bar{a}' d_2 + a_0' d_1) d\eta = 0,$$

$$\int_0^{\infty} (\bar{a}' d_3 + a_0' d_2 + a_1' d_1) d\eta = 0, \dots \quad (6)$$

Согласно граничным условиям задачи [5]:

$$d_i(0) < M \text{ (ограничены)}, \quad d_i(\infty) = 0 \quad (i=1, 2, \dots). \quad (7)$$

В новой переменной ζ [1]

$$\zeta = \frac{1}{4} \alpha^2 \eta^2 \left(1 + \frac{1}{4} \alpha^2 \eta^2 \right)^{-1}, \quad \alpha = \sqrt{\frac{3K_0}{16\pi\mu}} \quad (8)$$

первое уравнение (5) является гипергеометрическим

$$\zeta(1-\zeta) d_1'' + [1 - 2(1 - \text{Pr})\zeta] d_1' + 2\text{Pr} d_1 = 0,$$

решение которого, удовлетворяющее граничным (7) и первому интегральному условию (6), имеет вид

$$\bar{d}_1(\zeta) = \bar{\alpha}^2 F(-2\text{Pr}, 1, 1, \zeta) = 2\bar{\alpha}^2 (1-\zeta)^{2\text{Pr}}. \quad (9)$$

Здесь

$$\bar{\alpha} = \sqrt{\frac{Q_0(1+2Pr)}{16\pi\mu c_p}}. \quad (10)$$

Второе и третье уравнения (5):

$$\begin{aligned} \zeta(1-\zeta)d_2'' + [1-2(1-Pr)\zeta]d_2' + 4Prd_2 &= \frac{\bar{\alpha}^2}{2} Pr(1-\zeta)^{2Pr}(1-4\zeta), \\ \zeta(1-\zeta)d_3'' + [1-2(1-Pr)\zeta]d_3' + 6Prd_3 &= -\frac{\beta^2\bar{\alpha}^2}{2} Pr \left[\frac{3}{2} - \right. \\ &\left. - (3Pr+9)\zeta + (12Pr+6)\zeta^2 \right]. \end{aligned} \quad (11)$$

Однородные уравнения, соответствующие (11), являются гипергеометрическими

$$\zeta(1-\zeta)d_k'' + [1-2(1-Pr)\zeta]d_k' + 2kPrd_k = 0, \quad k=1, 2$$

и имеют решения [6]

$$\begin{aligned} d_k &= c_1 F(a_k, b_k, 1, \zeta) + c_2 \left\{ F(a_k, b_k, 1, \zeta) \ln \zeta + \right. \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \zeta^n \frac{(a_k)_n (b_k)_n}{(n!)^2} [\psi(a_k+n) - \psi(a_k) + \psi(b_k+n) - \\ &\left. - 2\psi(n+1) + 2\psi(n)] \right\}, \quad k=2, 3. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь

$$a_k = \frac{1}{2} - Pr + \frac{1}{2} [1 + 4(2k-1)Pr + 4Pr^2]^{1/2},$$

$b_k = \frac{1}{2} - Pr - \frac{1}{2} [1 + 4(2k-1)Pr + 4Pr^2]^{1/2}$; ψ с соответствующим аргументом — пси-функция Эйлера; c_1 и c_2 — постоянные интегрирования. Частными интегралами неоднородных дифференциальных уравнений (11) являются

$$\begin{aligned} d_2(\zeta) &= -\frac{\bar{\alpha}^2}{2} (1-Pr)^{2Pr} (1-4Pr\zeta), \\ d_3(\zeta) &= \frac{\beta^2\bar{\alpha}^2}{2} (1-Pr)^{2Pr} \left[Pr(2Pr+1)\zeta^2 - \frac{5}{2}Pr\zeta + \frac{1}{4} \right]. \end{aligned} \quad (13)$$

Согласно граничным условиям (7), постоянные интегрирования $c_1 = c_2 = 0$ и решениями уравнений (11) являются только лишь частные интегралы (13).

Разложение (4) в переменной η , согласно (8), имеет вид

$$\Delta T = \frac{2\bar{\alpha}^2}{\left(1 + \frac{1}{4}\alpha^2\eta^2\right)^{2Pr}} \frac{1}{x} \left[1 - \frac{\beta}{4} \frac{1 + \left(\frac{1}{4} - Pr\right)\alpha^2\eta^2}{1 + \frac{1}{4}\alpha^2\eta^2} \frac{1}{x} + \right. \quad (14)$$

$$+ \frac{\beta^2}{16} \frac{1 + \frac{1}{2}(1 - 5Pr) \alpha^2 \eta^2 + \left(\frac{1}{2} Pr^2 - \frac{3}{8} Pr + \frac{1}{16} \right) \alpha^4 \eta^4}{\left(1 + \frac{1}{4} \alpha^2 \eta^2 \right)^2} \frac{1}{x^2} \Bigg].$$

При значении $Pr = 1$ изменение ΔT выражает подобие температурного и скоростного полей в затопленной струе жидкости, что соответствует ранее полученным результатам [4].

2. Турбулентная струя. Осесимметричную турбулентную затопленную струю вязкой несжимаемой жидкости, следуя гипотезе Л. Г. Лойцянского [1], можно рассматривать как ламинарную, но с молярной вязкостью. Следовательно, полученные результаты для ламинарной струи полагаем верными и для турбулентного течения в предположении, что величины скоростей являются осредненными во времени, а

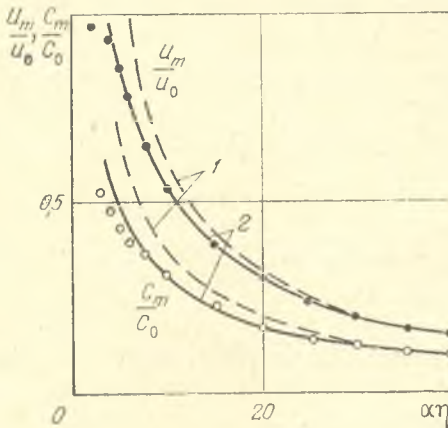


Рис. 1. Изменение максимальных скоростей u_m/u_0 и концентрации газовой примеси C_m/C_0 вдоль оси \bar{x} осесимметричной турбулентной струи: 1 — автоматическое решение; 2 — неавтоматическое; точки — результаты измерений

вместо коэффициента молекулярной вязкости μ и кинематической вязкости ν принимаем коэффициенты молярной вязкости A и кинематической турбулентной вязкости ε . В соответствии с этим число Прандтля ламинарного течения заменяем на «турбулентное» число Прандтля Pr_t . Об интенсивности массообмена в осесимметричных турбулентных затопленных струях можно судить по распределению концентрации газовой примеси в них. Поскольку процесс переноса вещества в струях вязкой несжимаемой жидкости эквивалентен процессу переноса тепла [5, 7], то эти процессы описываются одинаковыми уравнениями с соответствующей заменой в них температуры ΔT выражением концентрации C , а коэффициента температуропроводности на коэффициент диффузии, т. е. Pr_t на Sc . Следовательно, распределение концентрации газовой примеси в турбулентных осесимметричных затопленных струях описывается выражением (14) с учетом сделанных замечаний.

Были проведены экспериментальные исследования распределения концентрации газовой примеси в осесимметричной турбулентной струе воздуха, истекающей из сопла $\varnothing 10,5$ мм ($u_0 = 77$ м/с, $Re = 4,9 \cdot 10^4$). В трубопровод, питающий сопло воздухом, добавлялась газовая примесь, в качестве которой использовался метан, в количестве 1% по отношению к расходу воздуха через сопло. Полученная газоздушная струя развивалась в цилиндрической трубе диаметром 800 мм, которая соединена с дымососом, причем соотношение расходов воздуха через сопло и трубу составляло 1 : 10. Отношение диаметров сопла цилиндрической трубы таково, что участок струи от среза сопла до сечения, отстоящего от него на расстоянии 40 калибров, можно считать затопленной струей. Для устранения влияния стенок на развитие струи через трубу непрерывно отсасывался воздух вентилятором со скоростью

0,5 м/с. В качестве первичного измерительного прибора применялась трубка Пито — Прандтля, которая после измерения скорости использовалась как газоотборная. Вторичными измерительными приборами являлись микроанометр ММН-250 и газовый хроматограф «Цвет» с регистрирующим потенциометром КСП-4. Точность измерения концентрации метана в смеси составляла 3%.

Интегральные постоянные исследованной струи α и α определены согласно (8) и (10) ($\alpha=49,7$; $\alpha=15,8$; в последней формуле вместо Pr принято $\text{Sc}=0,7$ [7]). Характеристическая постоянная β , учитывающая

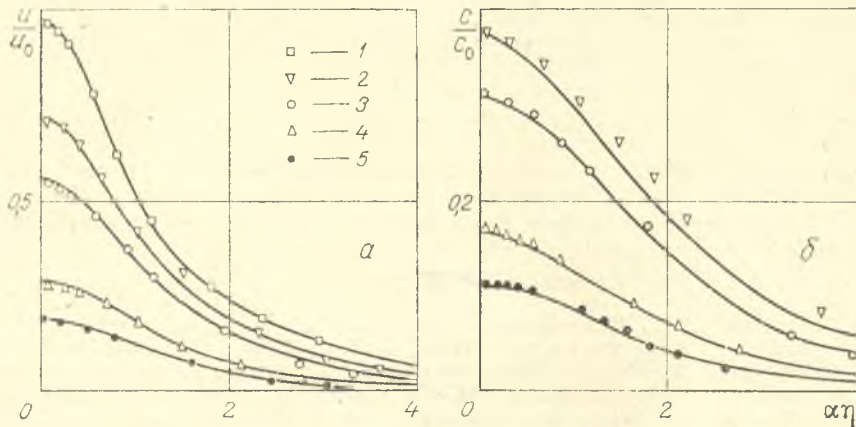


Рис. 2. Распределение скоростей u/u_0 (а) и концентрации C/C_0 (б) по сечениям $\alpha\eta$ осесимметричной турбулентной струи: 1 — $x/d=6$; 2—8; 3—10; 4—20; 5—30

влияние начального профиля скорости (на срезе сопла), определена полуэмпирическим методом [3] ($\beta=63$).

На рис. 1 представлено изменение максимальных скоростей u_m/u_0 и концентрации C_m/C_0 вдоль оси струи $\bar{x}=x/d$. Кривая 1 соответствует автомодельному решению (в разложении скорости и концентрации (14) взят первый член при $\alpha\eta=0$), 2 получена по соответствующим формулам неавтомодельного решения (с учетом трех членов разложения). Из рисунка видно, что границей переходного и основного (автомодельного) участков струи можно считать сечение, в котором кривые 1 и 2 практически сливаются. Для исследованной струи это сечение отстоит от среза сопла на расстоянии, соответствующем $\bar{x}=20$.

На рис. 2, а, б представлены результаты вычислений распределения скоростей u/u_0 (по формулам [1, 2]) и концентрации C/C_0 (формула (14)) по сечениям $\alpha\eta$ переходного ($\bar{x}=8,1$) и основного ($\bar{x}=20,3$) участков исследованной струи, причем переменная связана с радиусом струи по формуле [3]: $\eta=K_\eta r_0/\bar{x}$ (для исследованной струи $k_\eta=1,5$). Точками представлены результаты измерений.

Обозначения

x, r — продольная и поперечная координаты; u, v — осевая и радиальная составляющие вектора скорости; ΔT — избыточная над окружающей средой температура; a — коэффициент температуропроводности; K_0 — количество движения; Q_0 — тепловой поток; c_p — теплоемкость при постоянном давлении; C — значение концентрации примеси; ρ — плотность; F — символ гипергеометрической функции; Pr — число Прандтля; Re — число Рейнольдса; Sc — число Шмидта; u_0 — значение среднерасходовой скорости; C_0 — значение начальной концентрации примеси метана.

Nomenclature

x, r , longitudinal and transverse coordinates; u, v , axial and radial velocity vector components; ΔT , excess temperature (over the ambient temperature); a , thermal diffusivity; K_0 , momentum; Q_0 , heat flux; c_p , isobaric heat capacity; C , admixture concentration value; ρ , density; F , hypergeometric function symbol; Pr, Prandtl number; Re, Reynolds number; Sc, Schmidt number; u_0 , mean flow rate; C_0 , initial concentration of methane admixture.

Figure Captions

Fig. 1. Variation of maximum velocities u_m/u_0 and concentrations C_m/C_0 of the gas admixture along the axis x of an axisymmetric turbulent jet (1, similarity solution; 2, nonsimilarity solution; points, measurements).

Fig. 2. Velocity u/u_0 (a) and concentration C/C_0 (b) distributions over cross-sections $a\eta$ of an axisymmetric turbulent jet.

Summary

Temperature distribution in submerged axisymmetrical nonsimilar jets is found for any Prandtl number values. The results of theoretical and experimental studies of gas admixture concentration distribution in an axisymmetrical turbulent air jet are given.

Литература

1. Лойцянский Л. Г. Распределение закрученной струи в безграничном пространстве, затопленном той же жидкостью.— ПММ, 1953, т. 17, вып. 1, с. 3—16.
2. Фалькович С. В. Распространение закрученной струи в безграничном пространстве, затопленном той же жидкостью.— ПММ, 1967, т. 32, вып. 1, с. 282—288.
3. Коробко В. И. Теория неавтомоделных струй вязкой жидкости.— Саратов: Изд-во Саратовского госуниверситета, 1977.— 220 с.
4. Фалькович С. В., Коробко В. И. Аэродинамика и теплообмен закрученной струи, распространяющейся в безграничном пространстве, затопленном той же жидкостью.— Изв. вузов. Математика, 1969, № 7, с. 87—95.
5. Вулис Л. А., Кашкаров В. П. Теория струй вязкой жидкости.— М.: Наука, 1965.— 431 с.
6. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра.— М.: Наука, 1965.— 294 с.
7. Абрамович Г. Н., Крашенинников С. Ю., Секундов А. И., Смирнов И. П. Турбулентное смешение газовых струй.— М.: Наука, 1974.— 272 с.

Институт тепло- и массообмена
им. А. В. Лыкова АН БССР,
г. Минск,

09.07.80.

Новополоцкий политехнический институт