ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
2001 г. МАРТ–АПРЕЛЬ ТОМ 74, № 2

УДК 536.25

В. Н. Коровкин, А. П. Андриевский

К РАСЧЕТУ СВОБОДНО-КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛООБМЕНА НА ВЕРТИКАЛЬНОЙ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНЕ

На основе уравнений ламинарного пограничного слоя в приближении Буссинеска методом внутренних и внешних разложений решены автомодельные задачи свободно-конвективного теплообмена на вертикальной плоской полубесконечной пластине при больших значениях чисел Прандтля и трех типах тепловых граничных условий: адиабатическая поверхность, постоянная температура и постоянный тепловой поток на поверхности. Найдены асимптотические зависимости для основных характеристик. Проведено сопоставление полученных результатов с данными других авторов.

Процессам свободно-конвективного теплообмена на вертикальной поверхности при различных граничных условиях, в частности ламинарному режиму движения жидкости или газа, в технической литературе посвящено большое количество исследований [1–4]. Однако при этом следует заметить, что, несмотря на теоретическое и прикладное значение полученных результатов и значительное число рассмотренных вопросов (влияние на теплообмен числа Прандтля, переменной силы тяжести, диссипации энергии, стратификации окружающей среды, сжимаемости потока и т. д.), ряд весьма существенных и актуальных инженерных задач, связанных в первую очередь с получением надежных расчетных формул, что позволяли бы прогнозировать динамику протекания изучаемого процесса в зависимости от основных параметров, до сих пор остаются до конца нерешенными. Применение же эмпирических зависимостей [4], для которых характерна относительно высокая погрешность, в большинстве случаев не достигает цели, и полученные на их основе результаты следует рассматривать как оценочные. Такое положение обусловлено тем, что математические модели свободно-конвективного теплообмена представляют собой совокупность нелинейных взаимосвязанных дифференциальных уравнений в частных производных, общие аналитические методы интегрирования которых в настоящее время отсутствуют. Поэтому решение этих задач осуществляется с помощью численных схем, базирующихся на явных и неявных конечно-разностных алгоритмах расчета [5–8]. В этих условиях исследования, связанные с совершенствованием приближенных аналитических методов, представляют несомненный научный и технический интерес.

Ниже излагаются результаты комплексного изучения полностью развитых свободно-конвективных течений на плоской непроницаемой вертикальной полубесконечной пластине при трех типах тепловых граничных условий: адиабатическая поверхность, постоянная температура и постоянный тепловой поток на поверхности. Анализ основан на уравнениях стационарного ламинарного пограничного слоя в приближении Буссинеска

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0\ ,\quad u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+g\beta\Delta T\ ,\quad u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}=\frac{\nu}{\Pr}\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \tag{1}$$

при соответствующих граничных условиях для скоростного и температурного полей. Построение приближенных решений краевых задач, отвечающих конкретному процессу свободно-конвективного теплообмена на вертикальной поверхности с переменными функциями $u(x, y)$, $v(x, y)$ и $T(x, y)$, осуществляется методом сращиваемых асимптотических разложений [9].

Изотермическая поверхность. В этом случае граничными условиями для уравнений (1) будут

$$y=0:\quad v=u=0\ ,\quad T=T_w\ ;\quad y\to\infty:\quad u\to 0\ ,\quad T\to T_\infty\ . \tag{2}$$

В результате подстановки выражений вида

$$\begin{gathered}\psi=(g\beta\Delta T_w\nu^2)^{1/4}\,F(\eta)\,x^{3/4}\ ,\quad \eta=\left(\frac{g\beta\Delta T_w}{\nu^2}\right)^{1/4}x^{-1/4}\,y\ ,\\ u=(g\beta\Delta T_w)^{1/2}\,F'(\eta)\,x^{1/2}\ ,\quad \Delta T=\Delta T_w\,H(\eta)\end{gathered} \tag{3}$$

в систему (1)–(2) получим

$$\begin{gathered}F'''+\frac{3}{4}FF''-\frac{1}{2}F'^2+H=0\ ,\quad H''+\frac{3}{4}\Pr FH'=0\ ,\\ F(0)=0\ ,\quad F'(0)=0\ ,\quad F'(\infty)=0\ ,\quad H(0)=1\ ,\quad H(\infty)=0\ .\end{gathered} \tag{4}$$

Следующий шаг состоит в дальнейшем упрощении анализа задачи путем "расщепления" математической модели на подмодели, т. е. уравнения и условия (4), формулирующие закономерности изучаемого процесса, "расщепляются" на две системы уравнений. При этом процедура "расщепления" связана с физическими

Полоцкий государственный университет, Белоруссия. Э-почта: aland@psu.unibel.by. Поступила 30.08.2000.

особенностями свободно-конвективного теплообмена на вертикальной изотермической поверхности: при $\mathrm{Pr} > 1$ теплоотдача имеет место в тонком тепловом пограничном слое толщиной $\delta_т \sim \mathrm{Pr}^{-1/4}$. Вне теплового пограничного слоя существует вязкий пограничный слой толщиной $\delta_в \sim \mathrm{Pr}^{1/4}$ ($\delta_в/\delta_т = \mathrm{Pr}^{1/2}$), течение в котором не зависит от подъемных сил ($H = 0$) и происходит за счет увлечения жидкости из окружающей среды трением. Следуя [10–12], введем внутренние и внешние переменные

$$F(\eta) = \mathrm{Pr}^{-3/4} f(\zeta)\,, \quad \zeta = \mathrm{Pr}^{1/4}\eta\,, \quad H(\eta) = h(\zeta)\,;$$
$$F(\eta) = \gamma \mathrm{Pr}^{-1/4} G(z)\,, \quad z = \gamma \mathrm{Pr}^{-1/4}\eta\,, \quad H(\eta) = 0\,, \tag{5}$$

а функции $f(\zeta)$, $h(\zeta)$, $G(z)$ представим в виде бесконечных рядов по степеням малого параметра $\varepsilon = \mathrm{Pr}^{-1/2}$. Подставляя (5) в систему уравнений (4) и собирая слагаемые с одинаковыми степенями ε, получим уравнения для определения неизвестных функций f_i, h_i и G_i:

внутренняя задача

$$f_0''' + h_0 = 0\,, \quad h_0'' + \frac{3}{4} f_0 h_0' = 0\,, \quad f_0(0) = 0\,, \quad f_0'(0) = 0\,, \quad h_0(0) = 1\,,$$
$$f_i''' + h_i = -\frac{3}{4}\sum_{j=1}^{i-1} f_{j-1} f_{i-j-1}'' + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{i-1} f_{j-1}' f_{i-j-1}'\,, \tag{6}$$
$$h_i'' + \frac{3}{4} f_0 h_i' = -\frac{3}{4}\sum_{j=1}^{i} f_j h_{i-j}'\,, \quad f_i(0) = 0\,, \quad f_i'(0) = 0\,, \quad h_i(0) = 0\,;$$

внешняя задача

$$G_0''' + \frac{3}{4} G_0 G_0'' - \frac{1}{2} G_0'^2 = 0\,,$$
$$G_i''' + \frac{3}{4} G_0 G_i'' - G_0' G_i' + \frac{3}{4} G_0'' G_i = -\frac{3}{4}\sum_{j=1}^{i-1} G_j G_{i-j}'' + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{i-1} G_j' G_{i-j}'\,, \quad G_i'(\infty) = 0\,, \tag{7}$$

где штрих обозначает дифференцирование по соответствующей переменной ζ или z. Граничные условия при $\zeta = \infty$ и $z = 0$ находятся из условия сращивания внутреннего и внешнего разложений

$$\lim_{\zeta\to\infty}\left(f_0 + \mathrm{Pr}^{-1/2} f_1 + \mathrm{Pr}^{-1} f_2 + \ldots\right) = \gamma \mathrm{Pr}^{1/2}\lim_{z\to 0}\left(G_0 + \mathrm{Pr}^{-1/2} G_1 + \mathrm{Pr}^{-1} G_2 + \ldots\right),$$
$$\lim_{\zeta\to\infty}\left(h_0 + \mathrm{Pr}^{-1/2} h_1 + \mathrm{Pr}^{-1} h_2 + \ldots\right) = 0\,. \tag{8}$$

Постоянный тепловой поток на поверхности. Решение системы (1) должно удовлетворять граничным условиям

$$y = 0: \quad u = v = 0\,, \quad -k\frac{\partial T}{\partial y} = q_w = \mathrm{const}\,; \quad y \to \infty: \quad u \to 0\,, \quad T \to T_\infty\,. \tag{9}$$

Учитывая (9), введем в рассмотрение новые переменные

$$\psi = \left(\frac{g\beta q_w \nu^3}{k}\right)^{1/5} F(\eta)\, x^{4/5}\,, \quad \eta = \left(\frac{g\beta q_w}{k\nu^2}\right)^{1/5} x^{-1/5} y\,,$$
$$u = \left(\frac{g\beta q_w \nu^{1/2}}{k}\right)^{2/5} F'(\eta)\, x^{3/5}\,, \quad \Delta T = \frac{q_w}{k}\left(\frac{k\nu^2}{g\beta q_w}\right)^{1/5} H(\eta)\, x^{1/5} \tag{10}$$

и перепишем систему уравнений (1), (9) в форме

$$F''' + \frac{4}{5} F F'' - \frac{3}{5} F'^2 + H = 0\,, \quad H'' + \mathrm{Pr}\left(\frac{4}{5} F H' - \frac{1}{5} F' H\right) = 0\,,$$
$$F(0) = 0\,, \quad F'(0) = 0\,, \quad F'(\infty) = 0\,, \quad H'(0) = -1\,, \quad H(\infty) = 0\,. \tag{11}$$

Далее, поскольку в случае граничных условий второго рода при больших значениях чисел Pr $\delta_т \sim \mathrm{Pr}^{-1/5}$, а $\delta_в \sim \mathrm{Pr}^{3/10}$, представим аналогично [13, 14] искомые функции $F(\eta)$ и $H(\eta)$ соответственно для внутреннего и внешнего слоев в виде

$$F(\eta) = \mathrm{Pr}^{-4/5} f(\zeta)\,, \quad \zeta = \mathrm{Pr}^{1/5}\eta\,, \quad H(\eta) = \mathrm{Pr}^{-1/5} h(\zeta)\,;$$
$$F(\eta) = \gamma \mathrm{Pr}^{-3/10} G(z)\,, \quad z = \gamma \mathrm{Pr}^{-3/10}\eta\,, \quad H(\eta) = 0\,. \tag{12}$$

В результате приходим к необходимости интегрирования следующей цепочки взаимосвязанных обыкновенных дифференциальных уравнений:

внутренняя задача

$$f_0''' + h_0 = 0\,, \quad h_0'' + \frac{4}{5} f_0 h_0' - \frac{1}{5} f_0' h_0 = 0\,, \quad f_0(0) = 0\,, \quad f_0'(0) = 0\,, \quad h_0'(0) = -1\,,$$

$$f_i''' + h_i = -\frac{4}{5}\sum_{j=1}^{i-1} f_{j-1} f''_{i-j-1} + \frac{3}{5}\sum_{j=1}^{i-1} f'_{j-1} f'_{i-j-1}\,,$$
$$h''_i + \frac{4}{5} f_0 h'_i - \frac{1}{5} f'_0 h_i = -\frac{4}{5}\sum_{j=1}^{i} f_j h'_{i-j} + \frac{1}{5}\sum_{j=1}^{i} f'_j h_{i-j}\,, \quad f_i(0) = 0\,, \quad f'_i(0) = 0\,, \quad h'_i(0) = 0\,; \tag{13}$$

внешняя задача

$$G'''_0 + \frac{4}{5} G_0 G''_0 - \frac{3}{5} G_0'^2 = 0\,, \quad G'''_i + \frac{4}{5} G_0 G''_i - \frac{6}{5} G'_0 G'_i + \frac{4}{5} G''_0 G_i = -\frac{4}{5}\sum_{j=1}^{i-1} G_j G''_{i-j} + \frac{3}{5}\sum_{j=1}^{i-1} G'_j G'_{i-j}\,, \tag{14}$$
$$G'_i(\infty) = 0\,.$$

При этом решения каждой предыдущей системы уравнений в силу (8) будут являться граничными условиями для последующей системы. Таким образом, используя в качестве граничных соотношений при $\zeta = \infty$ и $z = 0$ поле искомых функций, полученных при интегрировании предыдущих уравнений, мы производим поэтапное "сшивание" решений. Специфика уравнений (13), (14) в отличие от (11) состоит в том, что они не содержат параметр Pr и поэтому функции $f_i(\zeta)$, $h_i(\zeta)$ и $G_i(z)$ не будут зависеть от Pr.

Адиабатическая поверхность. В этом случае граничные условия записываются так:

$$y = 0: \quad u = v = 0\,, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0\,; \quad y \to \infty: \quad u \to 0\,, \quad T \to T_\infty\,. \tag{15}$$

Если перейти к автомодельным переменным

$$\psi = \left(\frac{g\beta Q_0 \nu^2}{\rho C_p}\right)^{1/5} F(\eta)\, x^{3/5}\,, \quad \eta = \left(\frac{g\beta Q_0}{\rho C_p \nu^3}\right)^{1/5} x^{-2/5}\, y\,,$$
$$u = \left(\frac{g\beta Q_0}{\rho C_p \nu^{1/2}}\right)^{2/5} F'(\eta)\, x^{1/5}\,, \quad \Delta T = \left(\frac{Q_0}{(g\beta)^{1/4}\, \rho C_p \nu^{1/2}}\right)^{4/5} H(\eta)\, x^{-3/5}\,, \tag{16}$$

где

$$Q_0 = \rho C_p \int_0^\infty u \Delta T dy = \text{const}\,,$$

то нахождение неизвестных функций $F(\eta)$ и $H(\eta)$ сводится к решению следующей краевой задачи:

$$F''' + \frac{3}{5} F F'' - \frac{1}{5} F'^2 + H = 0\,, \quad H'' + \Pr\left(\frac{3}{5} F H' + \frac{3}{5} F' H\right) = 0\,,$$
$$F(0) = 0\,, \quad F'(0) = 0\,, \quad F'(\infty) = 0\,, \quad H'(0) = 0\,, \quad H(\infty) = 0\,, \quad \int_0^\infty F' H\, d\eta = 1\,. \tag{17}$$

При больших значениях чисел Pr пограничный слой на вертикальной адиабатической поверхности можно разбить на две области: одну толщиной $\delta_т \sim \Pr^{-2/5}$, в которой разность температур стремится к нулю, а другую толщиной $\delta_в \sim \Pr^{1/10}$, в которой скорость $u \to 0$. Исходя из этого, введем следующие переменные и функции [15] соответственно для внутреннего и внешнего слоев:

$$F(\eta) = \Pr^{-3/5} f(\zeta)\,, \quad \zeta = \Pr^{2/5}\eta\,, \quad H(\eta) = \Pr^{3/5} h(\zeta)\,;$$
$$F(\eta) = \gamma \Pr^{-1/10} G(z)\,, \quad z = \gamma \Pr^{-1/10}\eta\,, \quad H(\eta) = 0\,. \tag{18}$$

В силу выражений (18) и представления функций $f(\zeta)$, $h(\zeta)$, $G(z)$ разложениями в степенные ряды по ε система уравнений (17) перепишется так:

внутренняя задача

$$f'''_0 + h_0 = 0\,, \quad h''_0 + \frac{3}{5} f_0 h'_0 + \frac{3}{5} f'_0 h_0 = 0\,, \quad \int_0^\infty f'_0 h_0\, d\zeta = 1\,, \quad f_0(0) = 0\,, \quad f'_0(0) = 0\,, \quad h'_0(0) = 0\,,$$

$$f'''_i + h_i = -\frac{3}{5}\sum_{j=1}^{i-1} f_{j-1} f''_{i-j-1} + \frac{1}{5}\sum_{j=1}^{i-1} f'_{j-1} f'_{i-j-1}\,, \quad h''_i + \frac{3}{5} f_0 h'_i + \frac{3}{5} f'_0 h_i = -\frac{3}{5}\sum_{j=1}^{i} f_j h'_{i-j} - \frac{3}{5}\sum_{j=1}^{i} f'_j h_{i-j}\,, \tag{19}$$
$$\int_0^\infty \left(f'_0 h_i + \sum_{j=1}^{i} f'_j h_{i-j}\right) d\zeta = 0\,, \quad f_i(0) = 0\,, \quad f'_i(0) = 0\,, \quad h'_i(0) = 0\,;$$

внешняя задача

$$G_0''' + \frac{3}{5}\, G_0 G_0'' - \frac{1}{5}\, G_0'^2 = 0\ , \tag{20}$$

$$G_i''' + \frac{3}{5}\, G_0 G_i'' - \frac{2}{5}\, G_0' G_i' + \frac{3}{5}\, G_0'' G_i = -\frac{3}{5} \sum_{j=1}^{i-1} G_j G_{i-j}'' + \frac{1}{5} \sum_{j=1}^{i-1} G_j' G_{i-j}'\ , \quad G_i'(\infty) = 0\ .$$

Результаты расчетов и их анализ. Чтобы завершить постановку задач, необходимо записать условия сращивания внешнего и внутреннего асимптотических разложений. Для нулевого приближения в соответствии с (8) запишем

$$f_0''(\infty) = 0\ , \quad h_0(\infty) = 0\ , \quad G_0(0) = 0\ , \quad G_0'(0) = \frac{f_0'(\infty)}{\gamma^2} = 1 \quad (\gamma^2 = f_0'(\infty))\ . \tag{21}$$

Аналогично могут быть найдены дополнительные соотношения для более высоких приближений. Таким образом, определив функции $f_i(\zeta)$, $h_i(\zeta)$, $G_i(z)$, можно расчетным путем построить профили скорости (температуры) при различных числах Pr, а также вычислить локальные числа Нуссельта, напряжение трения на пластине и секундный массовый расход жидкости в пограничном слое:

изотермическая поверхность ($\mathrm{Gr}_x = g\beta\Delta T_w x^3/\nu^2$)

$$\mathrm{Nu}_x\,\mathrm{Gr}_x^{-1/4} = -\,\mathrm{Pr}^{1/4} \sum_{i=0}^{\infty} h_i'(0)\,\varepsilon^i\ , \quad \frac{\tau_w x^2}{\rho\nu^2}\,\mathrm{Gr}_x^{-3/4} = \mathrm{Pr}^{-1/4} \sum_{i=0}^{\infty} f_i''(0)\,\varepsilon^i\ , \quad \frac{m}{\mu}\,\mathrm{Gr}_x^{-1/4} = \mathrm{Pr}^{-1/4}\gamma \sum_{i=0}^{\infty} G_i(\infty)\,\varepsilon^i\ ;$$

на поверхности задан постоянный поток тепла $\mathrm{Gr}_x^* = g\beta q_w x^4/(k\nu^2)$

$$\mathrm{Nu}_x\,(\mathrm{Gr}_x^*)^{-1/5} = \frac{\mathrm{Pr}^{1/5}}{\sum_{i=0}^{\infty} h_i(0)\,\varepsilon^i}\ , \quad \frac{\tau_w x^2}{\rho\nu^2}\,(\mathrm{Gr}_x^*)^{-3/5} = \mathrm{Pr}^{-2/5} \sum_{i=0}^{\infty} f_i''(0)\,\varepsilon^i\ , \quad \frac{m}{\mu}\,(\mathrm{Gr}_x^*)^{-1/5} = \mathrm{Pr}^{-3/10}\gamma \sum_{i=0}^{\infty} G_i(\infty)\,\varepsilon^i\ ; \tag{22}$$

адиабатическая поверхность ($\mathrm{Gr}_x = g\beta Q_0 x^3/(\rho C_p \nu^3)$)

$$\frac{\Delta T_w\,\mu C_p}{Q_0}\,\mathrm{Gr}_x^{1/5} = \mathrm{Pr}^{3/5} \sum_{i=0}^{\infty} h_i(0)\,\varepsilon^i\ , \quad \frac{\tau_w x^2}{\rho\nu^2}\,\mathrm{Gr}_x^{-3/5} = \mathrm{Pr}^{1/5} \sum_{i=0}^{\infty} f_i''(0)\,\varepsilon^i\ , \quad \frac{m}{\mu}\,\mathrm{Gr}_x^{-1/5} = \mathrm{Pr}^{-1/10}\gamma \sum_{i=0}^{\infty} G_i(\infty)\,\varepsilon^i\ .$$

Функции f_0, h_0 и G_0 были найдены численно методом Рунге–Кутта–Мерсона путем сведения (6)–(7), (13)–(14), (19)–(20) к соответствующим задачам Коши. Как показали исследования [17], при численном интегрировании такого рода уравнений возникают определенные трудности, связанные с сильной зависимостью поведения искомых функций от недостающих граничных условий при $\zeta = 0$: сходящиеся решения существуют в очень узком диапазоне произвольно задаваемых величин. Такое поведение системы уравнений известно в вычислительной математике под названием "жесткой задачи". Поэтому в процессе численного счета желательно иметь методику, позволяющую преодолевать указанные трудности. В данной работе это осуществлено с помощью предварительного отыскания начальных параметров. Идея подхода заключается в разбиении функций f_0, h_0 на n слагаемых, причем в качестве первого приближения принимается решение, соответствующее случаю, когда $f_0''' = 0$. Далее строятся два (три) члена ряда, с помощью которых и находятся формулы для определения оценочных значений величин $f_0''(0)$, $h_0(0)$ (или $h_0'(0)$). Последняя процедура соответствует суммированию некоторой бесконечной числовой подпоследовательности, входящей в основной ряд. Аналогичным путем можно выписать в явном виде выражение для $\gamma G_0(\infty)$. Отметим, что данная методика была апробирована при решении прикладных задач струйной гидродинамики и доказала свою надежность и эффективность [18].

В результате получены следующие значения (I – для изотермической поверхности, II – когда на поверхности задан постоянный поток тепла, III – для адиабатической поверхности):

$$\begin{aligned}
&\text{I.}\quad f_0''(0) = \left(\frac{10181}{558\pi^2}\right)^{1/4}, \quad -h_0'(0) = \left(\frac{186}{295\pi^2}\right)^{1/4}, \quad \gamma G_0(\infty) = \left(\frac{2701}{126\pi^2}\right)^{1/4};\\
&\text{II.}\quad f_0''(0) = \left(\frac{11105}{72\pi^2\sqrt{\pi}}\right)^{1/5}, \quad h_0(0) = \left(\frac{16528}{95\pi^2\sqrt{\pi}}\right)^{1/5}, \quad \gamma G_0(\infty) = \left(\frac{18853}{2000\pi^{4/3}}\right)^{3/10};\\
&\text{III.}\quad f_0''(0) = \left(\frac{1002}{25\pi^2\sqrt{\pi}}\right)^{1/5}, \quad h_0(0) = \left(\frac{93}{80\pi^2\sqrt{\pi}}\right)^{1/5}, \quad \gamma G_0(\infty) = \left(\frac{618}{25\pi^{4/3}}\right)^{3/10}.
\end{aligned} \tag{23}$$

Данные численного интегрирования представлены в таблице. Там же приведены результаты, найденные ранее [10, 12–16]. Оказалось, что величины, рассчитанные с использованием численной схемы и соотношений (23), практически совпадают: максимальная абсолютная погрешность при расчете по формулам (23) составляет $\sim 4\cdot 10^{-7}$. Это говорит о том, что возможности аналитических подходов к исследованию задач

Асимптотические характеристики свободно-конвективного теплообмена на вертикальной непроницаемой полубесконечной плоской поверхности

Тепловые граничные условия	$-h_0'(0)$	$h_0(0)$	$f_0''(0)$	$\gamma G_0(\infty)$	Лит. источник
Изотермическая поверхность	0.5027451	1	1.1660423	–	[10]
	0.50274	1	1.16597	–	[12]
	0.5027454	1	1.1660422	1.2139858	Наши данные
Постоянный тепловой поток на поверхности	1	1.58320	1.59505	–	[13]
	1	1.583329	1.544903	–	[14]
	1	1.5840	–	–	[16]
	1	1.5831587	1.5454761	1.2400671	Наши данные
Адиабатическая поверхность	0	1.58145	1.18035	1.65591	[15]
	0	0.5814385	1.1803498	1.6559780	Наши данные

свободно-конвективного теплообмена, несмотря на постоянно прогрессирующее развитие вычислительной техники и вычислительной математики, далеко не исчерпаны.

Что касается точности построенных асимптотических решений, то, если принять в качестве критерия 5%-ное различие в результатах расчета, например, секундного массового расхода жидкости в пограничном слое, можно сказать, что согласование с данными численного решения уравнений (4), (11), (17) [1, 4, 19] начинается при $\mathrm{Pr} \approx 10$ для граничных условий (9), (15) и при $\mathrm{Pr} \approx 5$ для соотношений (2). Последнее свидетельствует, что для рассмотренных в настоящей работе задач получение на основе теории сращиваемых асимптотических разложений двух (трех) приближений, что эквивалентно удержанию в (22) двух (трех) первых членов ряда, дает возможность разработать несложный и практически удобный математический аппарат исследования особенностей и закономерностей свободно-конвективного теплообмена. Результаты, найденные в рамках асимптотических моделей, следует рассматривать как существенное дополнение к информации, полученной на основе численного интегрирования. Причем метод сращиваемых асимптотических разложений имеет ряд преимуществ перед численными методиками решения краевых задач (4), (11) и (17). Во-первых, метод лучше "справляется" с описанием гидродинамики и теплообмена при больших числах Pr, а во-вторых, алгоритмическая структура метода существенно проще соответствующих структур численных схем, что приводит к значительной экономии времени для получения искомой информации. И наконец, принципиальная возможность предварительного достаточно правильного определения характера поведения решений исследуемой задачи при изменении режимных параметров позволяет выработать стратегию численного анализа, обеспечивающую существенное снижение суммарного числа итерационных решений.

Обозначения

u, v – продольная и поперечная составляющие скорости; x, y – продольная и поперечная координаты; T – температура; T_w, T_∞ – температура стенки и окружающей среды; q – тепловой поток; k – коэффициент теплопроводности; ν – коэффициент кинематической вязкости; μ – коэффициент динамической вязкости; $\Delta T = T - T_\infty$ – избыточная температура; ρ – плотность; C_p – теплоемкость при постоянном давлении; g – ускорение свободного падения; β – коэффициент объемного теплового расширения; m – секундный массовый расход; τ_w – напряжение трения на стенке; $\delta_т$, $\delta_в$ – толщина теплового и вязкого пограничных слоев; γ – нормировочный коэффициент; Gr_x, Nu_x – локальные числа Грасгофа и Нуссельта; Pr – число Прандтля; ψ – функция тока. Индексы: w – стенка; т – тепловой; в – вязкий.

Литература

1. **Мартыненко О. Г., Соковишин Ю. А.** Свободно-конвективный теплообмен на вертикальной поверхности (граничные условия II рода). Минск, 1977.
2. **Соковишин Ю. А., Мартыненко О. Г.** Введение в теорию свободно-конвективного теплообмена. Л., 1982.
3. **Джалурия Й.** Естественная конвекция. М., 1983.
4. **Gebhart B., Jaluria Y., Mahajan R. L., Sammakia B.** Buoyancy-induced flows and transport. Washington, 1988.
5. **Патанкар С. В., Сполдинг Д. Б.** Тепло- и массообмен в пограничных слоях. М., 1971.
6. **Пасконов В. М., Полежаев В. И., Чудов Л. А.** Численное моделирование процессов тепломассообмена. М., 1984.
7. **Shih T. M.** Numerical heat transfer. Washington, 1984.
8. **Себиси Т., Брэдшоу П.** Конвективный теплообмен. Физические основы и вычислительные методы. М., 1987.
9. **Мартыненко О. Г., Березовский А. А., Соковишин Ю. А.** Асимптотические методы в теории свободно-конвективного теплообмена. Минск, 1979.
10. **Le Ferve E. J.**//Proc. Int. Congr. of Appl. Mech. 1956. Vol. 4. P. 168–173.
11. **Kuiken H. K.**//J. Eng. Math. 1968. Vol. 2. P. 355–371.
12. **Roy S.**//Int. J. Heat Mass Transfer. 1969. Vol. 12. P. 239–241.
13. **Селман, Ньюман**//Теплопередача. 1971. № 4. С. 143–144.
14. **Рой**//Теплопередача. 1973. № 1. С. 135–137.
15. **Joshi Y.**//Int. J. Heat Mass Transfer. 1987. Vol. 30. P. 2686–2690.
16. **Fujii T., Fujii M.**//Int. J. Heat Mass Transfer. 1976. Vol. 19. P. 121–122.
17. **Коровкин В. Н., Андриевский А. П.**//ИФЖ. 2000. Т. 73, № 2. С. 381–386.
18. **Мартыненко О. Г., Коровкин В. Н., Соковишин Ю. А.** Теория плавучих струй и следов. Минск, 1991.
19. **Коровкин В. Н., Андриевский А. П.**//ИФЖ. 1997. Т. 70, № 1. С. 142–145.