ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

2001 г. СЕНТЯБРЬ–ОКТЯБРЬ ТОМ 74, № 5

УДК 532.526

В. Н. Коровкин, А. П. Андриевский

ИССЛЕДОВАНИЕ ЛАМИНАРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ НА ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ НЕПРЕРЫВНО ДВИЖУЩЕЙСЯ ПЛОСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПРИ НАЛИЧИИ СПУТНОГО ПОТОКА

На основе уравнений стационарного ламинарного пограничного слоя проведен анализ влияния внешнего течения на характеристики пограничного слоя непрерывно движущейся плоской пластины. Получены численное и приближенное аналитическое решения задачи для различных значений параметра ε, характеризующего отношение скорости движения пластины к скорости спутного потока. Построены корреляционные зависимости для определения толщины пограничного слоя и напряжения трения на поверхности тела.

Одной из наиболее последовательно изучаемых задач в механике жидкости и газа является моделирование течения около плоской пластины, установленной параллельно направлению набегающего свободного потока. Однако, несмотря на большие успехи в решении этой задачи для ламинарного режима движения [1–4], имеется ряд недостаточно изученных особенностей структуры поля течения. Например, механизму взаимодействия спутного потока с пограничным слоем непрерывно движущейся плоской поверхности, который играет очень важную роль в различных технических и газодинамических проблемах, уделено сравнительно мало внимания [5–9].

Ниже представлены результаты комплексного математического моделирования ламинарного режима обтекания плоской горизонтальной непрерывно движущейся поверхности безграничным спутным однородным потоком во всем диапазоне изменения ε от нуля до бесконечности.

Исходными являются уравнения пограничного слоя, имеющие для двумерного стационарного движения жидкости вид

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0\ ,\quad u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\ . \tag{1}$$

Им соответствуют граничные условия

$$y=0:\ v=0\ ,\quad u=u_{\rm w}\ ;\quad y\to\infty:\ u\to u_\infty\ . \tag{2}$$

Вводим автомодельные переменные

$$\psi=(\nu u_\infty x)^{1/2}F(\zeta)\ ,\quad \zeta=\left(\frac{u_\infty}{\nu x}\right)^{1/2}y\ . \tag{3}$$

В результате преобразований из (1)–(2) получим

$$F'''+\frac{1}{2}FF''=0\ ,\quad F(0)=0\ ,\quad F'(0)=\varepsilon\ ,\quad F'(\infty)=1\ , \tag{4}$$

где штрих означает производную по ζ.

Отметим, что параметр $\varepsilon=u_{\rm w}/u_\infty$ является мерой величины эффекта, вызываемого действием спутного потока на пограничный слой: при $\varepsilon=0$ имеем режим обтекания неподвижной поверхности [10], а случай $\varepsilon=\infty$ отвечает движению пластины со скоростью $u=u_{\rm w}$ через неподвижную жидкость [11]. Двухточечная краевая задача (4) была решена численно с использованием схемы интегрирования Хеминга, имеющей четвертый порядок точности, путем сведения системы (4) к соответствующей задаче Коши. Недостающее граничное условие $F''(0)$ подбиралось методом Ньютона–Рафсона таким образом, чтобы асимптотическое условие $F'(\infty)=1$ удовлетворялось на внешней границе пограничного слоя с точностью $\sim 10^{-11}$. Данные расчетов при изменении ε от 0 до 0.9 приводятся в табл. 1. К физическим величинам, представляющим интерес, относятся распределение скорости u и локальный коэффициент трения c_f, которые могут быть найдены по формулам ($\mathrm{Re}_x=u_\infty x/\nu$)

$$\frac{u}{u_\infty}=F'(\zeta)\ ,\quad c_f\,\mathrm{Re}_x^{1/2}=2F''(0)\ . \tag{5}$$

Как видно из таблицы, с увеличением ε коэффициент поверхностного трения c_f, толщина вытеснения δ^* и формпараметр пограничного слоя H монотонно уменьшаются. Причем наибольший темп падения характерен для величины δ^*.

Полоцкий государственный университет, г. Новополоцк; э-почта: aland@psu.unibel.by. Поступила 24.10.2000.

Т а б л и ц а 1. **Результаты численного расчета пограничного слоя при $0 \le \varepsilon < 1$**

ε	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$F''(0)$	0.332057	0.327046	0.313358	0.292432	0.265232	0.232455	0.194626	0.152159	0.105389	0.054591
$(\delta^*/x)\,\mathrm{Re}_x^{1/2}$	1.720788	1.446399	1.213270	1.009272	0.827060	0.661826	0.510233	0.369866	0.238918	0.115994
δ^*/δ^{**}	2.59110	2.21131	1.93592	1.72565	1.55912	1.42356	1.31080	1.21539	1.13351	1.06239

Рассмотрим далее поведение решения уравнений (1)–(2) при $\varepsilon > 1$. Заметим, что в случае $\varepsilon = 1$ задача (4) допускает интегрирование в квадратурах: $F = \zeta$, $F' = 1$. При исследовании режима, в котором $\varepsilon > 1$, целесообразно представить искомые функции в другом виде, чтобы можно было располагать всем комплексом значений ε в диапазоне изменения от 1 до бесконечности. Это достигается введением новых переменных (штрих – производная по η)

$$\frac{u_w - u}{u_w - u_\infty} = f'(\eta)\,, \quad v = \sqrt{(u_w - u_\infty)\,\nu}\left(\frac{1}{2}f - \frac{1}{2}f'\eta\right)x^{-1/2}\,, \quad \eta = \left(\frac{u_w - u_\infty}{\nu}\right)^{1/2} x^{-1/2}\,y\,. \tag{6}$$

В соответствии с преобразованиями (6) уравнения (1)–(2) перепишутся так:

$$f''' + \frac{1}{2}f''\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1}\eta - f\right) = 0\,, \quad f(0) = 0\,, \quad f'(0) = 0\,, \quad f'(\infty) = 1\,. \tag{7}$$

Краевую двухточечную задачу (7) можно решить методом последовательных приближений. Идея подхода заключается в разбиении $f(\eta)$ на n функций: $f = f_0 + f_1 + f_2 + \ldots$, где в качестве нулевого приближения принимается решение, соответствующее случаю, когда граничные условия имеют вид: $f_0(0) = 0$, $f_0'(0) = 1$, $f_0'(\infty) = 1$. В результате получим бесконечную последовательность задач:

нулевое приближение

$$f_0''' + \frac{1}{2}f_0''\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1}\eta - f_0\right) = 0\,, \quad f_0(0) = 0\,, \quad f_0'(0) = 1\,, \quad f_0'(\infty) = 1\,;$$

первое приближение

$$f_1''' + \frac{1}{2}f_1''\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1}\eta - f_0\right) - \frac{1}{2}f_0''f_1 = 0\,, \quad f_1(0) = 0\,, \quad f_1'(0) = -1\,, \quad f_1'(\infty) = 0\,; \tag{8}$$

второе приближение

$$f_2''' + \frac{1}{2}f_2''\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1}\eta - f_0\right) - \frac{1}{2}f_0''f_2 = \frac{1}{2}f_1f_1''\,, \quad f_2(0) = 0\,, \quad f_2'(0) = 0\,, \quad f_2'(\infty) = 0\,;$$

i-е приближение ($i = \overline{3, n}$)

$$f_i''' + \frac{1}{2}f_i''\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1}\eta - f_0\right) - \frac{1}{2}f_0''f_i = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{i-1} f_jf_{i-j}''\,, \quad f_i(0) = 0\,, \quad f_i'(0) = 0\,, \quad f_i'(\infty) = 0\,.$$

Легко убедиться, что $f_0 = \eta$, $f_0' = 1$. Это решение описывает однородный поток, параллельный поверхности пластины. Зная f_0, непосредственным интегрированием (8) находим функции f_1 и f_1':

$$f_1 = \eta\left(\mathrm{erf}\left(\frac{\eta}{2\sqrt{\varepsilon - 1}}\right) - 1\right) + \sqrt{\frac{\varepsilon - 1}{\pi}}\left(2\exp\left(-\frac{\eta^2}{4(\varepsilon - 1)}\right) - 2\right), \quad f_1' = \mathrm{erf}\left(\frac{\eta}{2\sqrt{\varepsilon - 1}}\right) - 1\,. \tag{9}$$

И наконец, учитывая соотношения (9), после несложных, но громоздких выкладок выписываем в конечном виде выражение для f_2':

$$\begin{aligned} f_2' = \frac{\varepsilon - 1}{\pi}&\left[\frac{2 - \pi}{2}\,\mathrm{erf}\left(\frac{\eta}{2\sqrt{\varepsilon - 1}}\right) + 2\exp\left(-\frac{\eta^2}{4(\varepsilon - 1)}\right) - 1 - \exp\left(-\frac{\eta^2}{2(\varepsilon - 1)}\right)\right] + \\ &+ \sqrt{\frac{\varepsilon - 1}{\pi}}\left[\int_0^\eta \exp\left(-\frac{\eta^2}{4(\varepsilon - 1)}\right)\mathrm{erf}\left(\frac{\eta}{2\sqrt{\varepsilon - 1}}\right)d\eta + \right. \\ &\left. + \frac{1}{2}\eta\exp\left(-\frac{\eta^2}{4(\varepsilon - 1)}\right) - \frac{1}{2}\eta\exp\left(-\frac{\eta^2}{4(\varepsilon - 1)}\right)\mathrm{erf}\left(\frac{\eta}{2\sqrt{\varepsilon - 1}}\right)\right]. \end{aligned} \tag{10}$$

Таким образом, в аналитической форме найдены три первых члена ряда, которые позволяют строить профили скорости $(u_w - u)/(u_w - u_\infty)$ при различных значениях ε, а также вычислять напряжение трения

Таблица 2. **Результаты численного расчета пограничного слоя при $1 < \varepsilon \le \infty$**

ε	$f''(0)$	η_u	ε	$f''(0)$	η_u
1.25	1.214624	1.7377	20	0.462985	5.8256
2	0.720585	3.0993	30	0.456468	5.9926
3	0.599331	3.9029	50	0.451332	6.1352
4	0.552800	4.3614	100	0.447524	6.2478
5	0.527900	4.6664	200	0.445633	6.3014
6	0.512328	4.8869	500	0.444501	6.3426
8	0.493865	5.1870	1000	0.444125	6.3546
10	0.483263	5.3832	∞	0.443748	6.3674

на пластине $\frac{\tau_w}{\rho u_\infty^2}\mathrm{Re}_x^{1/2} = -(\varepsilon-1)^{3/2}f''(0)$ (знак "минус" означает, что плоская поверхность обладает тягой) и толщину пограничного слоя $\delta_u = \eta_u\left(\frac{\nu x}{u_w - u_\infty}\right)^{1/2}$, определяемую как расстояние от стенки до точки, в которой $f' = 0.99$. В силу (9)–(10) имеем

$$f''(0) = \frac{1}{\sqrt{\pi(\varepsilon-1)}}\left(1 + \frac{1}{\pi}(\varepsilon-1) + \ldots\right), \quad \eta_u = 3.6427\sqrt{\varepsilon-1}\,[1 - 0.2005\,(\varepsilon-1) + \ldots]\,. \tag{11}$$

Проведенные по полученным выше формулам расчеты показали, что при возрастании ε происходит увеличение η_u и уменьшение $f''(0)$. Естественно, расчетные зависимости аппроксимируют точное решение только в интервале $1 < \varepsilon < \varepsilon^*$. Причем результат (11) можно использовать для определения параметрической области применения приближенного решения. Привлекая условие, что в формулах (11) второе слагаемое никогда не должно превосходить по величине единицу, находим верхнюю границу для ε: $\varepsilon^* \approx 4$.

Однако этот недостаток можно преодолеть, если воспользоваться методикой восстановления основных свойств точного решения, исходя из нескольких первых членов ряда [12]. Подобная процедура соответствует суммированию бесконечной числовой подпоследовательности, входящей в основной ряд:

$$f''(0) = \frac{1}{\sqrt{\pi\,(\varepsilon-1)}}\left(1 + \frac{155}{121}(\varepsilon-1) + \frac{199}{520}(\varepsilon-1)^2\right)^{1/4}, \quad \eta_u = \frac{3.6427\sqrt{\varepsilon-1}}{(1 + 0.8068\,(\varepsilon-1) + 0.1071\,(\varepsilon-1)^2)^{1/4}}\,. \tag{12}$$

Как видно из соотношений (12), расчет пограничного слоя в переменных (6) имеет следующую особенность: при $\varepsilon \to \infty$ (и, следовательно, $u_\infty \to 0$) величина $f''(0)$ (η_u) стремится не к нулю (бесконечности), а к определенному пределу:

$$\varepsilon \to \infty: \; f''(0) = \left(\frac{199}{520\pi^2}\right)^{1/4}, \quad \eta_u = 6.3676\,.$$

Это обстоятельство обусловлено тем, что уравнения (7) включают режим $\varepsilon = \infty$ как частный случай. Интересно отметить, что при $\varepsilon \ge 30$ параметр ε оказывает несущественное влияние на искомые характеристики (не более 3% для $f''(0)$ и 6% для η_u). Физически это означает, что при $\varepsilon > 30$ структура пограничного слоя незначительно отличается от структуры пограничного слоя при $\varepsilon = \infty$ и поэтому влиянием спутного потока на течение в области $30 < \varepsilon \le \infty$ можно пренебречь. Следовательно, результаты, полученные при исследовании пограничного слоя на непрерывно перемещающейся с постоянной скоростью в покоящейся жидкости плоской поверхности [13], могут быть использованы для анализа течения при наличии спутного потока ($\varepsilon > 30$).

Чтобы установить, в какой степени формулы (12) описывают действительные распределения искомых характеристик, было выполнено также численное интегрирование задачи (7). Из сравнения следует, что зависимости, рассчитанные по аналитическим уравнениям (12) и с использованием численной процедуры (табл. 2), практически совпадают: различие значений не превышает 0.04% для величины $f''(0)$ и 0.09% для η_u. Если численные данные режимов $\varepsilon > 1$ представить в виде отношения $|\tau_w|/\tau_{w0}$, где τ_{w0} – напряжение трения на пластине при $\varepsilon = 0$, то график функции $|\tau_w|/\tau_{w0}$ имеет монотонный характер: начинается от нуля, достигает единицы при $\varepsilon = 1.51150$ и далее с увеличением параметра ε возрастает. Поэтому при прочих равных условиях касательные напряжения на стенке для течения, в котором $u_w > 1.51150u_\infty$, выше, чем для пограничного слоя, образующегося при обтекании неподвижной пластины.

Аналогичным путем можно построить приближенное аналитическое решение задачи (4). Формулы, определяющие зависимости величин $F''(0)$ и $\frac{\delta^*}{x}\mathrm{Re}_x^{1/2}$от ε, в данном случае будут иметь вид

$$F''(0) = \frac{1}{2}\left(\frac{11}{18\pi}\right)^{1/4}(1-\varepsilon)\left(1 + \frac{109}{27}\varepsilon + \frac{89}{27}\varepsilon^2\right)^{1/4}, \quad \frac{\delta^*}{x}\mathrm{Re}_x^{1/2} = 5\left(\frac{9}{65\pi^2}\right)^{1/4}\frac{(1-\varepsilon)}{\left(1 + \frac{1255}{416}\varepsilon + \frac{579}{416}\varepsilon^2\right)^{1/4}}. \qquad (13)$$

Как показали расчеты, в интервале изменения ε от нуля до единицы уравнения (13) дают погрешность, не превышающую 0.04%. Далее из соотношений (13), полагая $\varepsilon = 0$, получим

$$F''(0) = \frac{1}{2}\left(\frac{11}{18\pi}\right)^{1/4}, \quad \frac{\delta^*}{x}\mathrm{Re}_x^{1/2} = 5\left(\frac{9}{65\pi^2}\right)^{1/4}$$

Эти результаты практически совпадают с численными значениями: абсолютная погрешность составляет $\sim 4 \cdot 10^{-7}$. И в заключение найдем толщину потери импульса δ^{**}. Поскольку

$$\frac{\delta^{**}}{x}\mathrm{Re}_x^{1/2} = \int_0^\infty (F' - F'^2)\, d\zeta,$$

интегрируя уравнение (4) от 0 до ∞, приходим к условию

$$\int_0^\infty (F' - F'^2)\, d\zeta = 2F''(0) - F(0)(1 - F'(0)).$$

Следовательно, в случае непроницаемой плоской поверхности значение безразмерной толщины потери импульса равно $2F''(0)$.

Таким образом, в погранслойном приближении решена задача о ламинарном режиме обтекания безграничным спутным однородным потоком непрерывно движущейся с постоянной скоростью бесконечно тонкой плоской горизонтальной пластины. При этом исследована вся область изменения параметра $\varepsilon = u_w/u_\infty$ – от нуля ($u_w = 0$) до бесконечности ($u_\infty = 0$). Приведены численные данные о коэффициенте поверхностного трения, толщине вытеснения, формпараметре и толщине пограничного слоя в интервалах $0 \le \varepsilon < 1$ и $1 < \varepsilon \le \infty$. Построено приближенное аналитическое решение для скоростного поля, которое позволило выписать в явном виде корреляционные зависимости для расчета различных характеристик пограничного слоя. Установлено, что касательные напряжения на стенке при $\varepsilon > 1.5115$ выше своих значений для случая обтекания неподвижной поверхности.

Обозначения

u, v – продольная и поперечная составляющие скорости; x, y – продольная и поперечная координаты; u_w, u_∞ – скорость движения пластины и набегающего потока; ψ – функция тока; ν – коэффициент кинематической вязкости; Re_x – число Рейнольдса; τ_w – напряжение трения на стенке; ρ – плотность; $c_f = \tau_w / \frac{\rho u_\infty^2}{2}$ – локальный коэффициент трения; δ_u – толщина пограничного слоя; $\delta^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{u_\infty}\right) dy$ – толщина вытеснения; $\mathrm{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z \exp(-t^2)\, dt$ – интеграл вероятностей; $\delta^{**} = \int_0^\infty \frac{u}{u_\infty}\left(1 - \frac{u}{u_\infty}\right) dy$ – толщина потери импульса; $H = \delta^*/\delta^{**}$ – формпараметр пограничного слоя.

Литература

1. **Лойцянский Л. Г.** Ламинарный пограничный слой. М., 1962.
2. **Rosenhead L.** Laminar Boundary Layers. London, 1963.
3. **Stewartson K.** The Theory of Laminar Boundary Layers in Compressible Fluids. London, 1964.
4. **Шлихтинг Г.** Теория пограничного слоя. М., 1969.
5. **Mirels H.**//Phys. Fluids. 1966. Vol. 9, No. 7. P. 1265–1272.
6. **Робиллард Л.**//Прикладная механика. 1971. № 2. С. 252–254.
7. **Swean T. F., Inger G. R.** AIAA Rep. No. 676, 1974.
8. **Гречанный О. А., Дорфман А. Ш.**//Теплофизика и теплотехника. Киев, 1977. Вып. 33. С. 30–33.
9. **Merkin J. H., Ingham D. B.**//ZAMP. 1987. Vol. 38, No. 1. P. 102–116.
10. **Blasius H.**//ZAMP. 1908. Vol. 56, No. 1. P. 1–37.
11. **Sakiadis B. C.**//AIChE J. 1961. Vol. 7, No. 2. P. 221–225.
12. **Мартыненко О. Г., Коровкин В. Н., Соковишин Ю. А.** Теория плавучих струй и следов. Минск, 1991.
13. **Коровкин В. Н., Прасвет С. Н.**//ИФЖ. 1996. Т. 69, № 5. С. 821–825.