$0!=1$, $\begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix}=1$, а число $\delta(n,\ r,\ l)$ определяется по формуле (1).

1. Кравцов М.К., Лукшин Е.В. // Изв. вузов. Математика. 1999. № 12. С. 65.
2. Кравцов М.К., Лукшин Е.В. // Вести. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2000. № 3. С. 67.
3. Кравцов М.К., Кравцов В.М., Лукшин Е.В. // Изв. вузов. Математика. 2000. № 12. С. 89.
4. Кравцов М.К., Кравцов В.М., Лукшин Е.В. // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2000. № 4. С. 59.
5. Кравцов М.К., Кравцов В.М., Лукшин Е.В. // Дискрет. материалы. 2001. Т. 13. Вып. 2. С. 120.
6. Емеличев В.А., Кравцов М.К. // Дискрет. материалы. 1991. Т. 3. Вып. 2. С. 3.
7. Емеличев В.А., Ковалев М.М., Кравцов М.К. Многогранники, графы, оптимизация. М., 1981.

Поступила в редакцию 26.05.2001.

Виктор Михайлович Кравцов – студент 4-го курса факультета прикладной математики и информатики.

УДК 514.765

Ю.Я. РОМАНОВСКИЙ

ПРОСТРАНСТВА, ПОРОЖДЕННЫЕ СОБСТВЕННОЙ ГРУППОЙ ПУАНКАРЕ

The geometrical interpretation of homogeneous space generated by an own Poincaré group is given.

Пусть M – ориентированное пространство Минковского, в котором задана инерциальная система координат [1]. Любому вектору $\mathbf{z}\in M$ можно поставить в соответствие эрмитову матрицу следующим образом:

$$\mathbf{z} \to z_0\sigma_0 + z_1\sigma_1 + z_2\sigma_2 + z_3\sigma_3 = \begin{pmatrix} z_0+z_3 & z_1-iz_2 \\ z_1+iz_2 & z_0-z_3 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где z_0, z_1, z_2, z_3 – координаты вектора $\mathbf{z}$, σ_0, σ_1, σ_2, σ_3 – матрицы Паули [2].

Если на векторном пространстве эрмитовых матриц $He(2)$ задать скалярное произведение $<z, u>=(Tr(z)Tr(u)-Tr(zu))/2$, то соответствие (1) является изоморфизмом ориентированных пространств Минковского.

Рассмотрим аффинное пространство

$$K=\left\{\begin{pmatrix} E & 0 \\ z & E \end{pmatrix}\middle| z\in He(2)\right\}$$

над векторным пространством

$$\underline{K}=\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ z & 0 \end{pmatrix}\middle| z\in He(2)\right\}.$$

С помощью отображения

$$\rho: He(2)\to \underline{K}: z\to Z=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ z & 0 \end{pmatrix},$$

которое является биекцией, задаем структуру ориентированного пространства Минковского на $\underline{K}$ со скалярным произведением $<Z, U>=<\rho^{-1}(Z), \rho^{-1}(U)>$.

Аффинное пространство K над ориентированным пространством Минковского будем обозначать A^4M.

Пусть $\phi: SL(2,\ C) \to SL(2,\ C): b \to \varepsilon \bar{b}\, \varepsilon^{-1}$, где $\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ – эндоморфизм группы $SL(2,\ C)$ (здесь и дальше черта обозначает комплексное сопряжение), $H = \left\{ \begin{pmatrix} \phi(a) & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \middle| a \in SL(2,\ C) \right\}$ – группа вращений A^4M (собственная группа Лоренца), тогда группа G собственных преобразований A^4M (собственная группа Пуанкаре) представляется в виде полупрямого произведения мультипликативных групп K и H:

$$G = K * H = \{ g = kh \,|\, k \in K,\ h \in H \} =$$

$$= \left\{ g = \begin{pmatrix} \phi(a) & 0 \\ z\phi(a) & a \end{pmatrix} \middle| z \in He(2),\ a \in SL(2,\ C) \right\}.$$

При этом групповая операция в G есть обычное умножение матриц.

Обозначим:

$$\tilde{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix},\ \text{где } \varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mu} = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix},\ \text{где } \mu = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Пусть Γ – полугруппа, порождаемая эндоморфизмами:

$$\Psi: G \to G: \begin{pmatrix} \phi(a) & 0 \\ z\phi(a) & a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \phi(a) & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix};$$

$$\Phi_1: G \to G: g \to \tilde{\mu}\Psi(g)\tilde{\mu}^{-1};$$

$$\Phi_2: G \to G: g \to \Psi(\bar{g});$$

$$\Phi_3: G \to G: g \to \tilde{\varepsilon}\Psi(\bar{g})\tilde{\varepsilon}^{-1}.$$

Рассмотрим глобальную пару [3] (G, Γ).

Предложение. Глобальная пара (G, Γ) является полной глобальной парой.

Доказательство. Достаточно показать [3], что $H^{\Gamma} = \{h \in G \,|\, F_G(h) = h,\ \forall F_G \in \Gamma\}$ – конечная подполугруппа в G.

В нашем случае имеем

$$H^{\Gamma} = \{ h \in G \,|\, \Psi(h) = h,\ \Phi_1(h) = h,\ \Phi_2(h) = h,\ \Phi_3(h) = h \} =$$

$$= \left\{ h \in G \,\middle|\, h = \begin{pmatrix} \phi(a) & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix},\ \Phi_1(h) = h,\ \Phi_2(h) = h,\ \Phi_3(h) = h \right\} =$$

$$= \left\{ h \in G \,\middle|\, h = \begin{pmatrix} \phi(a) & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix},\ a = \mathrm{diag}[\pm 1,\ \pm 1] \right\} =$$

$$= \left\{ h = \begin{pmatrix} \phi(a) & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \middle| a = \mathrm{diag}[\pm 1,\ \pm 1] \right\}.$$

Глобальная пара (G, Γ) порождает [3] серию однородных пространств

$$Q(F_G) = \{ x \in G \,|\, x = gF_G(g^{-1}), g \in G \}, F_G \in \Gamma,$$

на которых действие группы G задается отображением

$$\eta : G \times Q(F_G) \to Q(F_G) : (g, x) \to g x F_G (g^{-1}).$$

С глобальной парой (G, Γ) ассоциируется [4] глобальная пара (H, Γ_H), где $\Gamma_H = \Gamma|_H$, которая также порождает однородные пространства

$$Q(F_H) = \left\{ x \in H \,\middle|\, x = g F_H (g^{-1}), g \in H \right\}, F_H \in \Gamma_H .$$

Рассмотрим пространства $Q(F_G)$ и $Q(F_H)$, определяемые системами образующих полугрупп Γ и Γ_H соответственно:

$$M_0 = Q(\Psi) = \left\{ x_0 = g\Psi(g^{-1}) \middle| g \in G \right\} = \left\{ x_0 = \begin{pmatrix} E & 0 \\ z & E \end{pmatrix} \middle| z \in He(2) \right\},$$

$$M_1 = Q(\Phi_1) = \left\{ x_1 = g\Phi_1(g^{-1}) \middle| g \in G \right\} =$$

$$= \left\{ x_1 = \begin{pmatrix} \phi(a\mu a^{-1}\mu^{-1}) & 0 \\ z\phi(a\mu a^{-1}\mu^{-1}) & a\mu a^{-1}\mu^{-1} \end{pmatrix} \middle| z \in He(2),\ a \in SL(2,\ C) \right\},$$

$$M_2 = Q(\Phi_2) = \left\{ x_2 = g\Phi_2(g^{-1}) \middle| g \in G \right\} =$$

$$= \left\{ x_2 = \begin{pmatrix} \phi(a\bar{a}^{-1}) & 0 \\ z\phi(a\bar{a}^{-1}) & a\bar{a}^{-1} \end{pmatrix} \middle| z \in He(2),\ a \in SL(2,\ C) \right\},$$

$$M_3 = Q(\Phi_3) = \left\{ x_3 = g\Phi_3(g^{-1}) \middle| g \in G \right\} =$$

$$= \left\{ x_3 = \begin{pmatrix} \phi(a\varepsilon\bar{a}^{-1}\varepsilon^{-1}) & 0 \\ z\phi(a\varepsilon\bar{a}^{-1}\varepsilon^{-1}) & a\varepsilon\bar{a}^{-1}\varepsilon^{-1} \end{pmatrix} \middle| z \in He(2),\ a \in SL(2,\ C) \right\}.$$

$$N_1 = Q(\Phi_1|_H) = \left\{ y_1 = g\Phi_1(g^{-1}) \middle| g \in H \right\} =$$

$$= \left\{ y_1 = \begin{pmatrix} \phi(a\mu a^{-1}\mu^{-1}) & 0 \\ 0 & a\mu a^{-1}\mu^{-1} \end{pmatrix} \middle| a \in SL(2,\ C) \right\},$$

$$N_2 = Q(\Phi_2|_H) = \left\{ y_2 = g\Phi_2(g^{-1}) \middle| g \in H \right\} =$$

$$= \left\{ y_2 = \begin{pmatrix} \phi(a\bar{a}^{-1}) & 0 \\ 0 & a\bar{a}^{-1} \end{pmatrix} \middle| a \in SL(2,\ C) \right\},$$

$$N_3 = Q(\Phi_3|_H) = \left\{ y_3 = g\Phi_3(g^{-1}) \middle| g \in G \right\} =$$

$$= \left\{ y_3 = \begin{pmatrix} \phi(a\varepsilon\bar{a}^{-1}\varepsilon^{-1}) & 0 \\ 0 & a\varepsilon\bar{a}^{-1}\varepsilon^{-1} \end{pmatrix} \middle| a \in SL(2,\ C) \right\}.$$

Выясним геометрический смысл пространств, названных пространствами типа $Q(F)$. Прямыми вычислениями показывается, что однородное G-пространство $M_0 = \left\{ x_0 = \begin{pmatrix} E & 0 \\ z & E \end{pmatrix} \middle| z \in He(2) \right\}$ изоморфно A^4M.

Заметим, что M_0 как пространство с действующей группой H изоморфно M и разбивается на две H-орбиты: $\{0\}$ и $M_H = \left\{ \begin{pmatrix} E & 0 \\ z & E \end{pmatrix} \middle| z \in He(2),\ z \neq 0 \right\}$. H действует на M_H сопряжениями.

Для удобства проведения вычислений будем рассматривать изоморфные модели

$$\tilde{N}_1 = \{\tilde{y}_1 = y_1\tilde{\mu} | y_1 \in N_1\} = \left\{ \tilde{y}_1 = \begin{pmatrix} \phi(a\mu a^{-1}) & 0 \\ 0 & a\mu a^{-1} \end{pmatrix} \middle| a \in SL(2,\ C) \right\},$$

$$\tilde{N}_3 = \{\tilde{y}_2 = y_2\tilde{\varepsilon} | y_2 \in N_2\} = \left\{ \tilde{y}_2 = \begin{pmatrix} \phi(a\varepsilon \bar{a}^{-1}) & 0 \\ 0 & a\varepsilon \bar{a}^{-1} \end{pmatrix} \middle| a \in SL(2,\ C) \right\}$$

пространств N_1, N_3 соответственно. Чтобы придерживаться единых обозначений, примем, что $\tilde{N}_2 = N_2$.

Действие группы H на $\tilde{N}_1$ задается отображением

$$\eta_1 : H \times \tilde{N}_1 \to \tilde{N}_1 : (h,\ a) \to hah^{-1},$$

а на N_2 и N_3 – отображением

$$\eta_2 : H \times \tilde{N}_i \to \tilde{N}_i : (h,\ a) \to ha\bar{h}^{-1},\ i = 2,\ 3.$$

Введем морфизмы

$$f_i : M_H \times \tilde{N}_i \to P : (x, \tilde{y}_i) \to x^{-1}\tilde{y}_i,$$

где P – пространство матриц над полем комплексных чисел размера 4×4. Отметим, что при $i=1$ действие группы H на P задается отображением η_1, а при $i=2$ и $i=3$ – отображением η_2.

Пусть P_1 и P_2 – инвариантные части в P, тогда определяются морфизмы σ [5]:

$$\sigma_i : \tilde{N}_i \to 2^{M_H} \times 2^{M_H} : \tilde{y}_i \to (K_i, L_i),$$

где $K_i = \{x \in M_H | f_i(x,\ \tilde{y}_i) \in P_1\}$, $L_i = \{x \in M_H | f_i(x,\ \tilde{y}_i) \in P_2\}$.

Теорема 1. Пространство N_1 изоморфно H-пространству пар ортогональных фигур (K_1, L_1), проходящих через начало координат, где K_1 – двумерная ориентированная евклидова плоскость, L_1 – двумерная ориентированная плоскость индекса 1.

Доказательство. Положим

$$P_1 = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & C \end{pmatrix} \middle| A = A^{-1},\ C = C^{-1},\ B \in He(2) \right\},$$

$$P_2 = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & C \end{pmatrix} \middle| A = A^{-1},\ C = C^{-1},\ B \text{ – косоэрмитова матрица} \right\} \text{ и } \tilde{y}_1 = y_0 = \tilde{\mu},$$

тогда $\sigma_1(y_0)$ – пара ортогональных фигур (K_1, L_1), где K_1 – двумерная ориентированная евклидова плоскость, L_1 – двумерная ориентированная плоскость индекса 1. H-пространство таких пар однородно.

Прямыми вычислениями показывается, что стационарные группы при действии группы H на точку y_0 и пару $\sigma_1(y_0)$ совпадают:

$$H_{y_0} = \{h \in H | hy_0h^{-1} = y_0\} = \left\{ h = \begin{pmatrix} \phi(a) & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \middle| a = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix},\ \alpha \in C \right\} \text{ и}$$

$$H_{\sigma_1(y_0)} = H_{K_1} \cap H_{L_1} = \left\{ h = \begin{pmatrix} \phi(a) & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \middle| a = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix}, \alpha \in C \right\}.$$

Теорема 2. Пространство N_2 изоморфно H-пространству пар ортогональных фигур (K_2, L_2), пересекающихся в начале координат, где K_2 – ориентированная гиперплоскость индекса 1, L_2 – ориентированная пространственноподобная прямая.

Доказательство. Положим

$$P_1 = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & C \end{pmatrix} \middle| A,\ C \in SL(2,\ C),\ B = B^T \right\},$$

$$P_2 = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & C \end{pmatrix} \middle| A,\ C \in SL(2,\ C),\ B = -B^T \right\} \text{ и } \bar{y}_2 = y_0 = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix},$$

тогда $\sigma_2(y_0)$ – пара ортогональных фигур (K_2, L_2), пересекающихся в начале координат, где K_2 – ориентированная гиперплоскость индекса 1, L_2 – ориентированная пространственноподобная прямая. H-пространство таких пар однородно. Прямыя вычисления дают совпадения стационарных групп при действии группы H на точку y_0 и пару $\sigma_2(y_0)$.

Теорема 3. Пространство N_3 изоморфно H-пространству пар ортогональных фигур (K_3, L_3), пересекающихся в начале координат, где K_3 – ориентированная евклидова гиперплоскость, L_3 – ориентированная времениподобная прямая.

Доказательство. Положим

$$P_1 = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & C \end{pmatrix} \middle| A,\ C \in SL(2,\ C),\ B = B^T \right\},$$

$$P_2 = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & C \end{pmatrix} \middle| A,\ C \in SL(2,\ C),\ B = -B^T \right\} \text{ и } \bar{y}_3 = y_0 = \varepsilon,$$

тогда $\sigma_3(y_0)$ – пара ортогональных фигур (K_3, L_3), пересекающихся в начале координат, где K_3 – ориентированная евклидова гиперплоскость, L_3 – ориентированная времениподобная прямая. H-пространство таких пар однородно. В силу совпадения стационарных групп точки y_0 и пары $\sigma_3(y_0)$ при действии группы H утверждение теоремы верно.

Теорема 4. Для каждого i=1, 2, 3 пространство M_i изоморфно G-пространству $\{T_z N_i\}_{z \in M}$, где N_i – соответствующее H-пространство, а T_z – параллельный перенос в A^4M на вектор **z**.

Доказательство. Непосредственно следует из специфики действия группы G на пространствах M_i.

1. Кострикин А.И., Манин Ю.И. Линейная алгебра и геометрия. М., 1986.
2. Боголюбов Н.Н., Логунов А.А., Тодоров И.Т. Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля. М., 1969.
3. Ведерников В.И., Ведерников С.В. // Проблемы геометрии (Итоги науки и техники ВИНИТИ АН СССР). 1987. Т. 19. С. 155.
4. Ведерников С.В. // Там же. 1983. Т. 15. С. 165.
5. Ведерников С.В. // Там же. 1975. Т. 7. С. 49.

Поступила в редакцию 03.10.2001.

Юрий Яцентович Романовский – аспирант кафедры геометрии, топологии и методики преподавания математики. Научный руководитель – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры геометрии, топологии и методики преподавания математики В.В. Суворов.