УДК 514.765

Ю.Я.Романовский

ГЕОМЕТРИЯ СОБСТВЕННОЙ ГРУППЫ ПУАНКАРЕ

Для собственной группы Пуанкаре построена глобальная пара и выделены специальные классы однородных пространств, порожденных ею. На них определены инвариантные структуры и указаны их свойства.

Для данной группы Ли можно ставить вопрос изучения геометрии, которая ею порождается. При этом под изучением геометрии понимают исследование однородных пространств, порождаемых данной группой. Содержательно изучать геометрию группы можно в общем случае, выделив специальные классы однородных G-пространств и построив морфизмы этих пространств. Одним из способов решения поставленной задачи является теория глобальных пар, развитая в работах С.В.Ведерникова [1, 2].

Пожалуй, наиболее применяемыми являются классические группы Ли. Поэтому построение геометрии на основе теории глобальных пар естественно начать именно с них. В данном направлении выполнен ряд работ. Так, вопросам геометрии ортогональной группы посвящена работа С.И.Ковалевича [3], Э.Ш.Зарипов исследовал геометрию унитарной группы [4]. Геометрию аффинно-симплектической группы изучал В.В.Суворов [5].

В данной работе проводится исследование геометрии собственной группы Пуанкаре. Интерес к изучению данной группы вызван ее приложениями в теоретической физике. Собственная группа Пуанкаре широко используется в работах по квантовой теории поля [6]. Изучение ее геометрии на основе теории глобальных пар может найти применение в квантовой физике.

Рассмотрим координатное пространство Минковского R_4^1, на котором действует собственная группа Пуанкаре $B_+^\uparrow$ [6], или, другими словами, G-пространство $(R_4^1, B_+^\uparrow)$. Универсальной накрывающей группой собственной группы Пуанкаре $B_+^\uparrow$ является группа Ли $G=\left\{\begin{pmatrix}\phi(a) & 0\\ z\phi(a) & a\end{pmatrix}\middle| z\in H(2), a\in SL(2,C)\right\}$, где $H(2)$ – группа эрмитовых матриц второго порядка, $SL(2,C)$ – специальная линейная группа, $\phi: Mat(2,C)\to Mat(2,C), a\mapsto \varepsilon\bar{a}\varepsilon^{-1}$ – автоморфизм для $\varepsilon=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$ (здесь и далее черта обозначает комплексное сопряжение).

Отметим, что группа Ли $K=\left\{\begin{pmatrix}E_2 & 0\\ z & E_2\end{pmatrix}\middle| z\in H(2)\right\}$ – группа параллельных переносов пространства Минковского, а $H=\left\{\begin{pmatrix}\phi(a) & 0\\ 0 & a\end{pmatrix}\middle| a\in SL(2,C)\right\}$ – группа вращений пространства Минковского (собственная группа Лоренца). В этих обозначениях собственная группа Пуанкаре G, является полупрямым произведением групп K и H, т. е. $G=K*H$.

Теорема 1. Пара (G,Γ) – полная глобальная пара, где Γ – полугруппа эндоморфизмов группы Ли G, порожденная эндоморфизмами: $\Psi: G\to G: \begin{pmatrix}\phi(a) & 0\\ z\phi(a) & a\end{pmatrix}\to diag[\phi(a),a]$, $\Phi_1: G\to G: g\to \tilde{\mu}\Psi(g)\tilde{\mu}^{-1}$, $\Phi_2: G\to G: g\to\Psi(\bar{g})$, $\Phi_3: G\to G: g\to\tilde{\varepsilon}\Psi(g)\tilde{\varepsilon}^{-1}$, $\tilde{\varepsilon}=diag[\varepsilon,\varepsilon]$, $\tilde{\mu}=diag[\mu,\mu]$, $\mu=diag[1,-1]$.

Доказательство. Непосредственно следует из определения полной глобальной пары [1] и конечности группы $G^\Gamma=\{h\in G\mid \Psi(h)=h, \Phi_i(h)=h, i=1,2,3\}$.

В работе [7] определен специальный класс однородных пространств (элементарных пространств типа Q) $Q(\Phi_i)=\{g\Phi_i(g^{-1})|g\in G\}, i=1,2,3$, порожденных парой (G,Γ) и парами ассоциированными с ней. Там же дана их геометрическая интерпретация как фигур в пространстве Минковского.

Для общности дальнейших рассуждений рассмотрим отображения: $f_1 : Q(\Phi_1) \to f_1(Q(\Phi_1)) = S(\Phi_1) : x_1 \to y_1 = x_1\widetilde{\mu}$, $f_2 : Q(\Phi_2) \to f_2(Q(\Phi_2)) = S(\Phi_2) : x_2 \to y_2 = x_2$, $f_3 : Q(\Phi_3) \to f_3(Q(\Phi_3)) = S(\Phi_3) : x_3 \to y_3 = x_3\widetilde{\varepsilon}$, которые являются диффеоморфизмами, задающими структуру G-пространства на пространствах $S(\Phi_i), i = 1,2,3$, изоморфных соответствующим пространствам $Q(\Phi_i)$. Переход к пространствам $S(\Phi_i)$ продиктован желанием упростить вычисления, связанные с нахождением инвариантных структур.

Утверждение 1. Пространства $S(\Phi_i), i = 1,2,3$, – редуктивные однородные пространства.

Доказательство. Следует из того, что $\Phi_i^3 = \Phi_i$ [8].

Для изучения инвариантных дифференциально-геометрических структур на элементарных пространствах типа Q воспользуемся полиномиальными морфизмами.

Используя специальную технику полимиальных морфизмов [9] для пространств $S(\Phi_i), i = 1,2,3$, построены инвариантные метрические структуры.

Пусть $TS(\Phi_i)$ касательное расслоение пространства $S(\Phi_i), i = 1,2,3$, тогда имеют место

Теорема 2. [9] Симметрические билинейные формы:

$$g^1 : TS(\Phi_1) \oplus TS(\Phi_1) \to R : (y_1 \in S(\Phi_1), a \in TS_{y_1}(\Phi_1), b \in TS_{y_1}(\Phi_1)) \to tr(a\Psi(b)) = g^1_{y_1}(a,b),$$

$$g^i : TS(\Phi_i) \oplus TS(\Phi_i) \to R : (y_i \in S(\Phi_i), a \in TS_{y_i}(\Phi_i), b \in TS_{y_i}(\Phi_i)) \to tr(a\Psi(\bar{b})) = g^i_{y_i}(a,b),\ i = 2,3,$$

определяют инвариантные вырожденные римановы метрики на пространствах $S(\Phi_i), i = 1,2,3$.

Теорема 3. [9] Кососимметрические билинейные формы:

$$h^1 : TS(\Phi_1) \oplus TS(\Phi_1) \to R : (y_1 \in S(\Phi_1), a \in TS_{y_1}(\Phi_1), b \in TS_{y_1}(\Phi_1)) \to$$

$$\to \sqrt{-1}(tr(y_1\Psi(a)\Psi(b) - tr(y_1\Psi(b)\Psi(a)) = h^1_{y_1}(a,b),$$

$$h^3 : TS(\Phi_3) \oplus TS(\Phi_3) \to R : (y_3 \in S(\Phi_3), a \in TS_{y_3}(\Phi_3), b \in TS_{y_3}(\Phi_3)) \to tr(y_3\Psi(a)\Psi(b)) = h^3_{y_3}(a,b),$$

определяют инвариантные вырожденные симплектические структуры на пространствах $S(\Phi_i), i = 1,3$.

Для многообразий с вырожденной римановой метрикой в отличие от невырожденного случая не всегда существует метрическая связность с нулевым кручением (g-связность), а если существует, то не всегда единственная. Для пространств $S(\Phi_i), i = 1,2,3$, такие связности существуют и описываются следующей теоремой.

Теорема 4. [10] Отображения $\nabla^i : \mathrm{X} \times \mathrm{X} \to \mathrm{X} : (X,Y) \to \nabla^i_X Y = \widetilde{\nabla}^i_X Y - \frac{1}{2}\widetilde{T}^i(X,Y), i = 1,2,3$, где $\widetilde{\nabla}^i, \widetilde{T}^i$ – каноническая связность редуктивного пространства [11] и ее тензор кручения, задают на соответствующих пространствах $S(\Phi_i)$ g^i-связность.

Симплектические структуры $h^i, i = 1,3$ обладают свойством

Теорема 5. Симплектические структуры $h^i, i = 1,3$ параллельны в соответствующих связностях ∇^i, построенных в теореме 4.

Доказательство. Так как $\ker g^1 = \ker h^1$ и $\ker g^3 \subset \ker h^3$, то $\widetilde{T}^i(a,b) \in \ker h^i, \forall a,b \in \mathfrak{m}^i, i = 1,3$, где $\mathfrak{m}^i$ – каноническое редуктивное дополнение алгебры Ли группы Ли G для пространства $S(\Phi_i)$. В силу того, что любое инвариантное тензорное поле параллельно в канонической связности [11] имеем $\forall X,Y,Z \in \mathrm{X}(S(\Phi_i)), i = 1,3$ выполняется $h^i(\nabla^i_X Y, Z) + h^i(Y, \nabla^i_X Z) = h^i(\widetilde{\nabla}^i_X Y, Z) - \frac{1}{2}h^i(\widetilde{T}^i(X,Y),Z) + h^i(Y, \widetilde{\nabla}^i_X Z) - \frac{1}{2}h^i(Y, \widetilde{T}^i(X,Z)) = h^i(\widetilde{\nabla}^i_X Y, Z) + h^i(Y, \widetilde{\nabla}^i_X Z) = Xh^i(Y,Z)$, что и требовалось доказать.

Теорема 6. На $S(\Phi_1)$ существует интегрируемая структура почти произведения.

Доказательство. Введем в рассмотрение $\Pi(\Phi_1)=\left\{ p=gp_0\Phi_1(g^{-1}) \middle| g\in G, p_0=\frac{1}{2}(y_1+({}^0y_1)) \right\}$. Отображение $f:S(\Phi_1)\to \Pi(\Phi_1):y_1\to\frac{1}{2}(y_1+({}^0y_1))$ является изоморфизмом пространств, с помощью которого структуры на $\Pi(\Phi_1)$ переносятся на $S(\Phi_1)$. Прямыми вычислениями показывается, что касательное пространство $T_p\Pi(\Phi_1)$ инвариантно относительно эндоморфизма $J_p:\Pi(\Phi_1)\to\Pi(\Phi_1):a\to a\Psi(p),\ p\in\Pi(\Phi_1)$, при этом $J_p^2=J_p, \forall p\in\Pi(\Phi_1)$. Поле эндоморфизма $J:p\to J_p$ на $\Pi(\Phi_1)$ является инвариантным в силу способа задания. Следовательно, распределения $\Delta_1:p\to\ker J_p$ и $\Delta_2:p\to \operatorname{im} J_p$ также инвариантны. Тогда структура почти произведения на $\Pi(\Phi_1)$ определяется парой (Δ_1,Δ_2). Аффинор, задающий данную структуру почти произведения, имеет вид $C_p(a)=a-2J_p(a)$. Прямыми вычислениями показывается, что тензор Нейенхёйса [11] равен нулю: $2N(a,b)=[C_p(a),C_p(b)]+C_p([a,b])-C_p([a,C_p(b)])-C_p([C_p(a),b])=0$, т. е. структура почти произведения интегрируема.

Утверждение 2. Отображения $l_1:y_2\to l_1(y_2)=\left\{a-({}^0a)\middle| a\in T_{y_2}(S(\Phi_2))\right\}$, $l_2:y_2\to l_2(y_2)=\left\{({}^0a)\middle| a\in T_{y_2}(S(\Phi_2))\right\}$ задают на $S(\Phi_2)$ взаимно дополняющие инвариантные распределения.

Доказательство. Следует из способа задания и того, что $l_2(y_2)=\ker g^2_{y_2}$.

Отметим, что пара (l_1,l_2) определяет структуру почти произведения на $S(\Phi_2)$.

Эндоморфизм $C_{y_3}:T_{y_3}S(\Phi_3)\to T_{y_3}S(\Phi_3):a\to a\Psi(\overline{y_3})$ задает инвариантное распределение $C:y_3\to C_{y_3}$. Для C_{y_3} имеет место равенство $C^4_{y_3}=\mathrm{id}$, истинность которого достаточно проверить для $y_3=\tilde{\varepsilon}$ в силу инвариантности задания: $C^4_{\tilde{\varepsilon}}a=a\Psi(\tilde{\varepsilon}^4)=a$. Тем самым доказана

Теорема 7. Аффинор $C^2_{y_3}$ определяет на $S(\Phi_3)$ структуру почти произведения.

Теорема 8. Для $\forall a,b\in T_{y_3}S(\Phi_3)$ имеют место равенства

$$1)\ g^3_{y_3}(a,C_{y_3}b)=h^3_{y_3}(\bar{a},\bar{b})=-g^3_{y_3}(C_{y_3}\bar{a},\bar{b});$$

$$2)\ h^3_{y_3}(a,C_{y_3}b)=-g^3_{y_3}(\bar{a},\bar{b})=-h^3_{y_3}(C_{y_3}a,b);$$

$$3)\ g^3_{y_3}(C_{y_3}a,C_{y_3}b)=-g^3_{y_3}(\bar{a},\bar{b});$$

$$4)\ h^3_{y_3}(C_{y_3}a,C_{y_3}b)=h^3_{y_3}(a,b).$$

Доказательство. В силу инвариантности g^3,h^3 и C доказательство равенств, сводится к случаю $y_3=\tilde{\varepsilon}$. Пусть $a,b\in T_{\tilde{\varepsilon}}S(\Phi_3)$, тогда

$$1)\ g^3_{\tilde{\varepsilon}}(a,C_{\tilde{\varepsilon}}b)=tr(a\Psi(\overline{b\Psi(\tilde{\varepsilon})}))=tr(a\Psi(\bar{b})\tilde{\varepsilon})=tr(\tilde{\varepsilon}a\Psi(\bar{b})\tilde{\varepsilon}\tilde{\varepsilon}^{-1})=tr(\tilde{\varepsilon}a\Psi(\bar{b}))=h^3_{\tilde{\varepsilon}}(\bar{a},\bar{b})=$$
$$=-h^3_{\tilde{\varepsilon}}(\bar{b},\bar{a})=-g^3_{\tilde{\varepsilon}}(C_{\tilde{\varepsilon}}\bar{a},\bar{b});$$

$$2)\ h^3_{\tilde{\varepsilon}}(a,C_{\tilde{\varepsilon}}b)=tr(\tilde{\varepsilon}\Psi(\bar{a})\Psi(b\Psi(\tilde{\varepsilon})))=tr(\tilde{\varepsilon}\Psi(\bar{a})\Psi(b)\tilde{\varepsilon})=tr(\tilde{\varepsilon}\tilde{\varepsilon}\Psi(\bar{a})\Psi(b)\tilde{\varepsilon}\tilde{\varepsilon}^{-1})=$$
$$=-tr(\Psi(\bar{a})\Psi(b))=-tr(\bar{a}\Psi(b))=-g^3_{\tilde{\varepsilon}}(\bar{a},\bar{b})=-g^3_{\tilde{\varepsilon}}(\bar{b},\bar{a})=-h^3_{\tilde{\varepsilon}}(C_{\tilde{\varepsilon}}a,b);$$

3) $g_{\tilde{\varepsilon}}^3(C_{\tilde{\varepsilon}}a, C_{\tilde{\varepsilon}}b) = g_{\tilde{\varepsilon}}^3(C_{\tilde{\varepsilon}}^2\overline{a}, \overline{b}) = -g_{\tilde{\varepsilon}}^3(\overline{a}, \overline{b})$;

4) $h_{\tilde{\varepsilon}}^3(C_{\tilde{\varepsilon}}a, C_{\tilde{\varepsilon}}b) = -h_{\tilde{\varepsilon}}^3(C_{\tilde{\varepsilon}}^2a, b) = h_{\tilde{\varepsilon}}^3(a, b)$.

Условия 1) и 2) теоремы 8 говорят о том, что форма g^3 (соответственно h^3) определяются парой (h^3, C) (соответственно парой (g^3, C)). Условия 3) и 4) означают, что C_{y_3} является изометрией для форм $g_{y_3}^3$ и $h_{y_3}^3$.

Литература

1. *Ведерников С.В.* Однородные пространства, порожденные группой автоморфизмов группы Ли // Проблемы геометрии (Итоги науки и техники ВИНИТИ АН СССР). – 1983. – Т. 15. – С. 165–185.

2. *Ведерников В.И., Ведерников С.В.* Геометрия однородных пространств, порожденная морфизмами G-пространств // Проблемы геометрии (Итоги науки и техники ВИНИТИ АН СССР). –1987. – Т. 19. – С. 155–185.

3. *Ковалевич С.И.* Геометрия группы движений E^n. – Минск, 1987. – 18 с.– Деп. в ВИНИТИ 12.03.87. – № 1817-В 87.

4. *Зарипов Э.Ш.* Геометрия однородных пространств, порожденных группой унитарных движений и ее автоморфизмами. – Душанбе, 1988. – 32 с. – Деп. в ВИНИТИ 30.08.88. – № 2453-В 88.

5. *Суворов В.В.* Геометрия аффинно-симплектической группы // Известия вузов. Математика. – 1994. – № 2. – С. 55–59.

6. *Боголюбов Н.Н., Логунов А.А., Тодоров И.Т.* Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля. – М.: Наука, 1969. – 424 с.

7. *Романовский Ю.Я.* Пространства, порожденные собственной группой Пуанкаре // Вестник БГУ. Сер. 1. – 2002. – № 3. – С. 90–94.

8. *Степанов Н.А.* О редуктивности фактор пространств, порожденных эндоморфизмами групп Ли // Известия вузов. Математика. – 1967. – № 2. – С. 74–79.

9. *Романовский Ю.Я.* Инвариантные метрические структуры на однородных пространствах, порожденных собственной группой Пуанкаре // Вести НАН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. – 2003. – № 2. – С. 17–21.

10. *Романовский Ю.Я.* Связности на однородных пространствах, порожденных собственной группой Пуанкаре // Труды XXIV Конференции молодых ученых механико-математического факультета МГУ / Под ред. Д.В.Георгиевского и А.Н.Якивчика. – М., 2002. – С. 154–157.

11. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. – М.: Наука, 1981. – Т. 2. – 416 с.

Поступила в редакцию 22.02.2005.

Романовский Юрий Яцентович, преподаватель кафедры алгебры, геометрии и методики преподавания математики ГрГУ им. Янки Купалы.

For the proper Poincare group the global par has been constructed and special class homogeneous spaces, generated by the group, have been branched. In these homogeneous spaces invariant structures constructed and there properties have been mentioned.