

Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования  
«Полоцкий государственный университет имени Евфросинии Полоцкой»

СЕРИЯ «САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА СТУДЕНТОВ»



Л. С. Турищев

## **КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ**

Электронное пособие для организации самостоятельной работы  
студентов строительных специальностей всех форм обучения  
при изучении курса «Строительная механика»

*Текстовое электронное издание*

Новополоцк

Полоцкий государственный университет имени Евфросинии Полоцкой

2022

УДК 624.04(075.8)

Одобрено и рекомендовано к изданию методической комиссией инженерно-строительного факультета в качестве методического пособия (протокол № 4 от 30.05.2022)

Кафедра строительных конструкций

**РЕЦЕНЗЕНТЫ:**

канд. техн. наук, доц., зав. каф. строительного производства  
Л. М. ПАРФЕНОВА

канд. техн. наук, доц., доц. каф. строительных конструкций  
А. И. КОЛТУНОВ

Пособие предназначено для оказания помощи студентам при самостоятельном изучении модуля «Колебания систем с конечным числом степеней свободы» курса строительной механики. На основе структурно-логических схем приведены рекомендации по технологии формирования междисциплинарной системы знаний, связанных с базовыми теоретическими положениями и понятиями модуля. Содержатся указания по приобретению устойчивых умений и навыков, связанных с практическим применением сформированной системы знаний для решения типовых задач модуля. Имеется банк тестовых заданий для самоконтроля ключевых знаний и умений, связанных с изучаемым модулем. Приведен список рекомендуемой учебной литературы, Интернет-источников. Составлен глоссарий модуля.

Пособие предназначено для студентов специальности 1-70 02 01 «Промышленное и гражданское строительство» очной, заочной, дистанционной форм обучения. Может быть полезно начинающим преподавателям строительной и технической механики.

© Турищев Л. С., 2022

© Полоцкий государственный университет имени Евфросинии Полоцкой, 2022

Для создания текстового электронного издания «Колебания систем с конечным числом степеней свободы» использованы текстовый процессор Microsoft Word и программа Adobe Acrobat XI Pro для создания и просмотра электронных публикаций в формате PDF.

Леонид Степанович ТУРИЩЕВ

**КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМ  
С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ**

Электронное пособие для организации самостоятельной работы  
студентов строительных специальностей всех форм обучения  
при изучении курса «Строительная механика»

Редактор *А. А. Прадидова*

---

Подписано к использованию 15.09.2022.  
Объем издания: 1,13 Мб. Заказ 538.

---

Издатель и полиграфическое исполнение:  
учреждение образования «Полоцкий государственный университет  
имени Евфросинии Полоцкой».

Свидетельство о государственной регистрации  
издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий  
№ 1/305 от 22.04.2014.

ЛП № 02330/278 от 08.05.2014.

211440, ул. Блохина, 29,  
г. Новополоцк,  
Тел. 8 (0214) 59-95-41, 59-95-44  
<http://www.psu.by>

## СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ .....	5
ВВЕДЕНИЕ .....	6
1. РЕКОМЕНДАЦИИ К ИЗУЧЕНИЮ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА МОДУЛЯ.....	7
2. УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ МОДУЛЯ .....	10
2.1 Динамический расчет строительной конструкции при действии гармонической нагрузки .....	10
2.2 Пример динамического расчета строительной конструкции при действии гармонической нагрузки .....	13
3. МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ И УМЕНИЙ.....	20
3.1 Тестовые задания первого уровня .....	20
3.2 Тестовые задания второго уровня .....	24
3.3 Ответы на тестовые задания первого и второго уровней.....	26
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....	27
Приложение 1. Краткие справочные сведения по математике, связанные с содержанием изучаемого модуля .....	29
Приложение 2. Краткие справочные сведения по физике, связанные с содержанием изучаемого модуля .....	31
Приложение 3. Краткие справочные сведения по теоретической механике, связанные с содержанием изучаемого модуля .....	33
Глоссарий модуля .....	35

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Уважаемые студенты! Данное пособие является очередным в ряду работ, содержащих материалы для эффективной организации Вашей вне-аудиторной самостоятельной работы при изучении курса строительной механики. Предлагаемые материалы включают в себя:

- рекомендации по осуществлению самостоятельной познавательной деятельности с целью формирования системы знаний, связанных с базовыми теоретическими положениями и понятиями изучаемого модуля курса и соответствующих дисциплин естественнонаучного и общепрофессионального циклов;

- указания по приобретению устойчивых умений и навыков, связанных с практическим применением сформированной системы знаний для решения задач модуля курса согласно стандартным алгоритмам;

- материалы для самоконтроля знаний, умений и навыков, связанных с изучаемым курсом.

При написании пособия использовались материалы, изложенные в соответствующих образовательных стандартах, учебных программах, учебниках, учебных пособиях, Интернет-источниках по строительной механике и связанным с ней соответствующим дисциплинам естественнонаучного и общепрофессионального циклов учебного плана. Список использованных источников приводится в конце пособия.

## ВВЕДЕНИЕ

Конструкция считается системой с конечным числом степеней свободы, если положение всех масс конструкции при колебаниях однозначно описывается некоторым определенным количеством независимых геометрических параметров.

Однако реальные конструкции зданий и сооружений обладают собственной распределенной массой и, кроме того, могут иметь некоторое число присоединенных масс, связанных с размещенным на них оборудованием. Поэтому с учетом собственной массы такие конструкции всегда являются системами с бесконечным числом степеней свободы.

С целью упрощения в приближенных динамических расчетах реальные конструкции часто заменяются системами с конечным числом степеней свободы. Кроме того, при динамическом расчете сложных конструкций такой подход может оказаться и единственно практически возможным. Замена реальных конструкций системами с конечным числом степеней свободы может осуществляться в следующих случаях.

Если присоединенные массы значительно превышают собственную массу конструкции, то ей пренебрегают, и конструкция рассматривается как система с конечным числом степеней свободы. Примерами таких конструкций служат балки перекрытий и покрытий с установленными на них мощными вентиляторами или другим оборудованием, собственный вес которых во много раз меньше веса установленного оборудования.

Если собственной массой конструкции пренебрегать нельзя, то для ее учета непрерывное распределение массы заменяют дискретным точечным распределением масс, и конструкция рассматривается как система с конечным числом степеней свободы. Примерами таких конструкций могут служить тяжелые фермы больших пролетов, масса которых сосредотачивается в узлах.

Таким образом, в обоих случаях строительные конструкции как системы с конечным числом степеней свободы состоят из упругого безмассового скелета конструкции и присоединенных к нему дискретных масс.

В настоящем пособии рассматриваются свободные и вынужденные колебания несущих стержневых конструкций зданий и сооружений как систем с конечным числом степеней свободы.

# 1. РЕКОМЕНДАЦИИ К ИЗУЧЕНИЮ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА МОДУЛЯ

Изучение теоретического материала модуля следует начинать с повторения рекомендаций по изучению курса в целом согласно [13]. Содержание изучаемого модуля связано с общими положениями и понятиями колебания системы с одной степенью свободы. Структурно-логическая схема ключевых понятий, принципов, терминов рассматриваемого модуля, которые подлежат пониманию и усвоению согласно [3], приведена на рисунке 1.

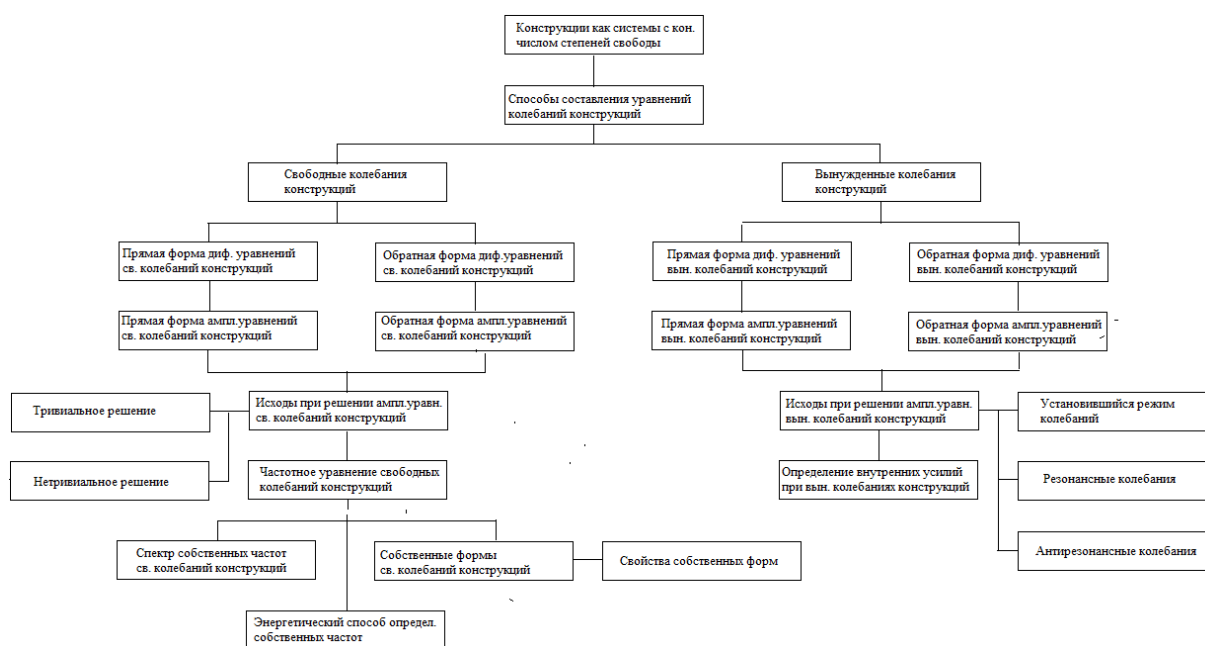


Рисунок 1. – Структурно-логическая схема ключевых понятий, принципов, терминов изучаемого модуля

Изучение материала модуля должно начинаться с ясного понимания, что собой представляет конструкция как **система с конечным числом степеней свободы**.

После этого следует разобраться, какие существуют способы составления колебаний систем с конечным числом степеней свободы. Затем важно:

- выяснить, какие колебания может совершать такая система и с какими перемещениями могут быть связаны ее степени свободы;
- усвоить, что любые колебания систем с конечным числом степеней свободы могут рассматриваться с учетом и без учета сил сопротивления колебаниям;
- понять, что лежит в основе способов получения уравнений, описывающих любые колебания системы с конечным числом степеней свободы, и какую они имеют математическую форму.

Изучение колебаний системы с конечным числом степеней свободы следует начинать со **свободных колебаний** без учета сил сопротивления таким колебаниям. Сначала важно понять:

- что собой представляют такие колебания;
- что является причиной их возникновения;
- что собой представляют прямая и обратная формы дифференциальных уравнений таких колебаний и как они получаются;
- что собой представляют прямая и обратная формы амплитудных уравнений таких колебаний и как они получаются;
- какие возможны исходы при решении амплитудных уравнений и что они собой описывают для конструкции, которая рассматривается как система с конечным числом степеней свободы;
- что собой представляет частотное уравнение, как оно получается и что является его решениями.

Затем, опираясь на полученные решения частотного уравнения, следует усвоить, что собой представляют **собственные частоты** свободных колебаний, что такое **спектр собственных частот** и какими бывают его формы, какие бывают разновидности спектра собственных частот реальных конструкций.

После этого необходимо разобраться, как решаются амплитудные уравнения свободных колебаний, что такое **собственные формы** свободных колебаний конструкции и какими свойствами они обладают.

И в завершение рассмотрения свободных колебаний следует изучить энергетический способ определения собственных частот свободных колебаний, понять, на чем основан этот метод и как приближенно определяется первая собственная частота таких колебаний.

После этого следует приступить к изучению установившегося режима **вынужденных колебаний** систем с конечным числом степеней свободы. И здесь прежде всего важно понять:

- что собой представляют такие колебания;
- что является причиной их возникновения;
- что собой представляют прямая и обратная формы дифференциальных уравнений таких колебаний и как они получаются;
- что собой представляют прямая и обратная формы амплитудных уравнений таких колебаний и как они получаются;

– какие возможны исходы при решении амплитудных уравнений и что они собой описывают для конструкции, которая рассматривается как система с конечным числом степеней свободы.

Анализируя полученные решения амплитудных уравнений, важно понять, что собой представляют явления **резонанса** и **антирезонанса** вынужденных колебаний конструкций.

Далее следует изучить, как определяются внутренние усилия для установившегося процесса вынужденных колебаний при динамических расчетах строительных конструкций прямым и обратным способами.

При изучении материала модуля рекомендуется использование следующей литературы: [4, с. 571–597; 5, с. 567–572; 7, с. 19–50; 12, с. 25–40].

Для осознанного понимания и усвоения материала рассматриваемого модуля курса прежде всего необходимо повторить:

– *изученное в математике* – понятия функции, производной функции, дифференциального уравнения, обыкновенного дифференциального уравнения, общего и частного решения дифференциального уравнения, интегральная кривая, начальные условия, задача Коши. Краткие справочные сведения, связанные с этими понятиями, приведены в приложении 1;

– *изученное в физике* – основные понятия и законы классической механики. Краткие справочные сведения, связанные с этими понятиями, приведены в приложении 2;

– *изученное в теоретической механике* – основные понятия и уравнения динамики. Краткие справочные сведения, связанные с этими понятиями, аксиомами и уравнениями, приведены в приложении 3;

– *изученное в модуле «Методы определения внутренних усилий от неподвижной нагрузки в плоских статически определимых стержневых системах»* – внутренние силы и их числовые характеристики, виды статически определимых конструкций и их свойства, статический метод определения внутренних усилий;

– *изученное в модуле «Колебания системы с 1 степенью свободы»* – деформация конструкции, жесткость и податливость конструкции, полные, частичные и единичные перемещения, закон Гука для конструкции, формулы для определения перемещений в статически определимых плоских стержневых конструкциях от нагрузки и осадки опор.

## **2. УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ МОДУЛЯ**

После завершения изучения теоретического материала модуля, его понимания и усвоения можно переходить к применению полученных знаний для решения типовых задач модуля. Согласно утвержденной учебной программе курса [3] Вы должны при изучении колебаний строительных конструкций как систем с конечным числом степеней свободы уметь выполнять их динамический расчет при действии гармонической нагрузки.

Для приобретения умений решения такой задачи рекомендуется сначала внимательно прочитать указания к решению задачи, разобраться с приведенным примером ее решения. После этого рекомендуется перейти к решению задач, приведенных в [9; 12; 16; 17; 18].

### **2.1 Динамический расчет строительной конструкции при действии гармонической нагрузки**

Динамический расчет строительной конструкции как системы с конечным числом степеней свободы включает в себя:

- получение спектра собственных частот свободных колебаний конструкции;
- построение собственных форм свободных колебаний конструкции;
- проверку конструкции на резонанс при действии динамической нагрузки;
- определение амплитуд динамических внутренних усилий и построение их эпюр;
- проверку прочности конструкции при совместном действии статической и динамической нагрузок.

Для осуществления двух первых частей динамического расчета рассматриваются свободные колебания строительной конструкции. Основными количественными характеристиками таких колебаний конструкций, рассматриваемых как системы с конечным числом степеней свободы, являются собственные частоты и собственные формы. Для отыскания указанных характеристик можно использовать прямой и обратный способы решения задачи о свободных колебаниях системы с конечным числом степеней свободы.





ренних усилий – изгибающих моментов, поперечных сил и продольных сил, в соответствии с принципом суперпозиции, используются следующие формулы:

$$M = m_1 I_1 + \dots + m_n I_n + M_{H_i},$$

$$Q = q_1 I_1 + \dots + q_n I_n + Q_{H_i},$$

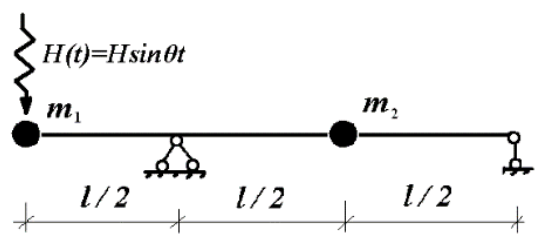
$$N = n_1 I_1 + \dots + n_n I_n + N_{H_i}.$$

В приведенных формулах первые  $n$  слагаемых дают доли амплитудных значений соответствующих внутренних усилий, порождаемых амплитудами сил инерции, а последние слагаемые являются долями соответствующих амплитудных значений внутренних усилий, приносимых амплитудой гармонической нагрузки.

Для осуществления заключительной части динамического расчета, связанной с проверкой прочности конструкции при совместном действии статической и динамической нагрузок, необходимо статические внутренние усилия, возникающие в наиболее опасном сечении конструкции, сложить с соответствующими амплитудными значениями динамических внутренних усилий и проверить для этого сечения выполнение условий первого предельного состояния.

## 2.2 Пример динамического расчета строительной конструкции при действии гармонической нагрузки

На конце консоли стальной балки, выполненной из двутавра № 33, расположен электродвигатель массой  $m_1 = 500$  кг



порождающий гармоническую нагрузку с амплитудным значением  $H = 2$  кН и круговой частотой  $\theta = 52,5$  сек<sup>-1</sup>. Посредине пролета балки расположено вспомогательное оборудование массой  $m_2 = 500$  кг. Параметры балки имеют следующие значения:

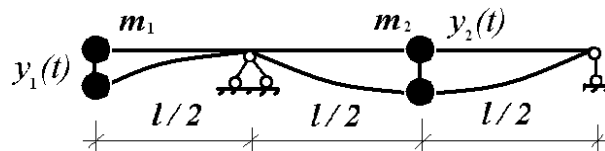
$$l = 4 \text{ м}, I_z = 9840 \text{ см}^4, W_z = 597 \text{ см}^3, E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}, R = 210 \text{ МПа}.$$

Требуется, используя обратный способ:

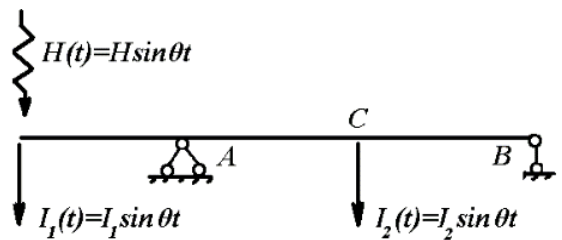
- определить собственные частоты свободных колебаний;
- построить собственные формы свободных колебаний;
- провести проверку конструкции на резонанс;
- определить амплитудные значения динамических внутренних усилий;
- провести проверку прочности конструкции.

### Определение собственных частот свободных колебаний

Заданная балочная конструкция, с учетом вводимых в расчет допущений, имеет две степени свободы, связанные с перемещениями присоединенных точечных масс.



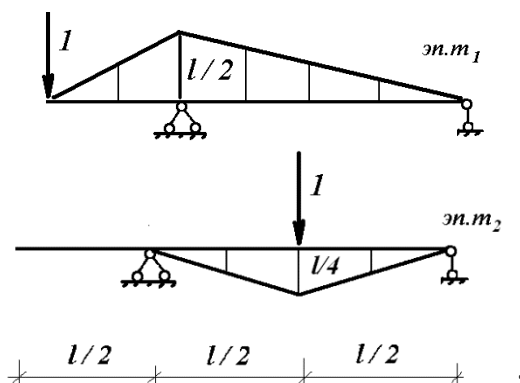
Тогда основная система обратного способа имеет вид



Амплитудные уравнения свободных колебаний при использовании обратного способа для заданной конструкции имеют вид

$$\begin{aligned} (\delta_{11}m_1\omega^2 - 1)a_1 + \delta_{12}m_2\omega^2a_2 &= 0; \\ \delta_{21}m_1\omega^2a_1 + (\delta_{22}m_2\omega^2 - 1)a_2 &= 0. \end{aligned}$$

Для определения входящих в уравнения коэффициентов  $\delta_{ik}$  ( $i, k = 1, 2$ ) рассмотрим два единичных состояния и построим единичные эпюры изгибающих моментов



Используя формулу Максвелла-Мора и вычисляя входящие в нее интегралы по правилу Верещагина, получим следующие значения коэффициентов:

$$\delta_{11} = \frac{l^3}{8EI_z}, \quad \delta_{22} = \frac{l^3}{48EI_z}, \quad \delta_{12} = \delta_{21} = -\frac{l^3}{32EI_z}.$$

Подставим в амплитудные уравнения полученные значения коэффициентов  $\delta_{ik}$  и введем частотный коэффициент обратного способа.

$$\mu = \frac{EI_z}{ml^3\omega^2}$$

Этот коэффициент связан с квадратом круговой частоты свободных колебаний обратной зависимостью.

Тогда амплитудные уравнения примут вид

$$\begin{aligned} (1,250 \cdot 10^{-3} - \mu)a_1 - 3,125 \cdot 10^{-4}a_2 &= 0; \\ -3,125 \cdot 10^{-4}a_1 + (2,083 \cdot 10^{-4} - \mu)a_2 &= 0. \end{aligned}$$

Для нахождения собственных частот свободных колебаний приравняем нулю определитель полученной системы и, раскрывая определитель, получим квадратное уравнение относительно частотного коэффициента  $\mu$

$$\mu^2 - 1,458 \cdot 10^{-3}\mu + 1,627 \cdot 10^{-3} = 0.$$

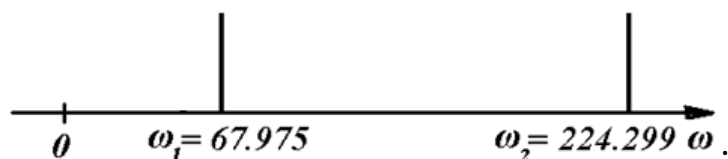
Решая полученное уравнение, вычислим его корни

$$\begin{aligned} \mu_1 &= 1,337 \cdot 10^{-3}; \\ \mu_2 &= 1,217 \cdot 10^{-4}. \end{aligned}$$

С учетом обратной зависимости между частотным коэффициентом и круговой частотой значения корней расположены в порядке убывания. Тогда собственные частоты свободных колебаний конструкции принимают значения

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \sqrt{\frac{EI_z}{ml^3\mu_1}} = 67,975 \text{ сек}^{-1}; \\ \omega_2 &= \sqrt{\frac{EI_z}{ml^3\mu_2}} = 224,299 \text{ сек}^{-1}. \end{aligned}$$

Графическое изображение полученного спектра собственных частот:



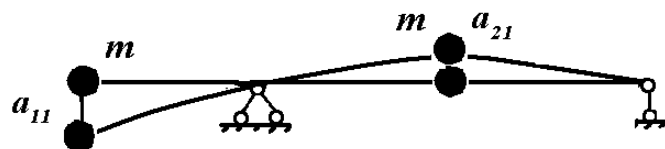
### Построение собственных форм свободных колебаний

Для построения собственных форм свободных колебаний последовательно подставим найденные значения частотного коэффициента  $\mu$  в систему амплитудных уравнений. Так как после этого система уравнений становится вырожденной, то для ее решения поступим следующим образом. Отбрасываем второе уравнение, полагаем первую амплитуду равной единице и находим относительное значение второй амплитуды в долях от первой амплитуды. Каждый полученный набор амплитуд будет характеризовать соответствующую собственную форму свободных колебаний нашей системы.

Амплитуды, соответствующие первой собственной форме, принимают значения

$$a_{11} = 1, \quad a_{21} = \frac{1,250 \cdot 10^{-3} - \mu_1}{3,125 \cdot 10^{-4}} = -0,277.$$

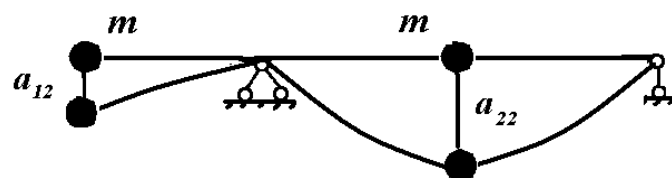
Соответствующее полученным значениям амплитуд очертание первой собственной формы свободных колебаний имеет вид



Амплитуды, соответствующие второй собственной форме, принимают значения

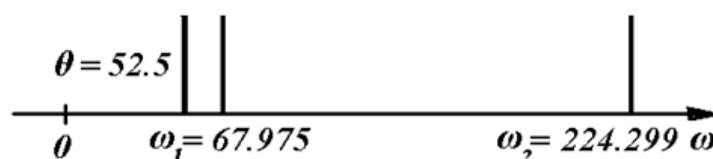
$$a_{12} = 1, \quad a_{22} = \frac{1,250 \cdot 10^{-3} - \mu_2}{3,125 \cdot 10^{-4}} = 3,610.$$

Соответствующее полученным значениям амплитуд очертание второй собственной формы свободных колебаний имеет вид



### Проверка конструкции на резонанс

Покажем на графическом изображении спектра собственных частот конструкции положение круговой частоты динамической нагрузки



и найдем ее соотношение с первой собственной частотой свободных колебаний конструкции

$$\frac{\theta}{\omega_1} = \frac{52,5}{67,975} = 0,772 < 0,8.$$

Из полученного соотношения следует, что резонанс в конструкции не возникает, а колебания конструкции происходят в дорезонансной зоне.

### Определение амплитудных значений динамических внутренних усилий

Запишем уравнения для определения амплитуд сил инерции

$$\delta_{11}^* I_1 + \delta_{12} I_2 + \Delta_{1H} = 0;$$

$$\delta_{21} I_1 + \delta_{22}^* I_2 + \Delta_{2H} = 0.$$

Главные коэффициенты уравнений имеют вид

$$\delta_{11}^* = \delta_{11} - \frac{1}{m_1 \theta^2}, \quad \delta_{22}^* = \delta_{22} - \frac{1}{m_2 \theta^2},$$

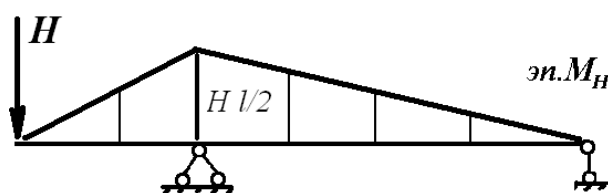
а аналитические выражения для остальных коэффициентов были получены при составлении амплитудных уравнений свободных колебаний конструкции. Рассчитаем численные значения коэффициентов рассматриваемой системы уравнений

$$\delta_{11}^* = \frac{l^3}{8EI_z} - \frac{1}{m_1 \theta^2} = -3,175 \cdot 10^{-7} \frac{\text{М}}{\text{Н}};$$

$$\delta_{22}^* = \frac{l^3}{48EI_z} - \frac{1}{m_2 \theta^2} = -6,576 \cdot 10^{-7} \frac{\text{М}}{\text{Н}};$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = -\frac{l^3}{32EI_z} = -1,020 \cdot 10^{-7} \frac{\text{М}}{\text{Н}}.$$

Для вычисления свободных членов, входящих в уравнения для определения амплитуд сил инерции, рассмотрим грузовое состояние и построим эпюру изгибающих моментов от действия амплитуды динамической нагрузки.



Используя формулу Максвелла-Мора и вычисляя входящие в нее интегралы по правилу Верещагина, получим следующие значения свободных членов:

$$\Delta_{1H} = \frac{Hl^3}{8EI_z} = 8,163 \cdot 10^{-4} \text{ м};$$

$$\Delta_{2H} = -\frac{Hl^3}{32EI_z} = -2,041 \cdot 10^{-4} \text{ м}.$$

Система уравнений для определения амплитуд сил инерции после подстановки найденных числовых значений коэффициентов и свободных членов примет вид

$$3,175I_1 + 1,02I_2 - 8163 = 0;$$

$$1,02I_1 + 6,576I_2 + 2041 = 0.$$

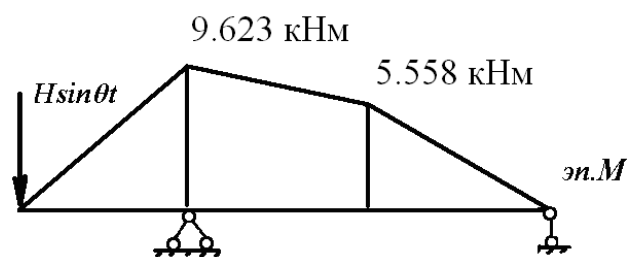
Решая полученную систему, найдем следующие амплитудные значения сил инерции:

$$I_1 = 2810,835 \text{ Н}, \quad I_2 = -746,472 \text{ Н}.$$

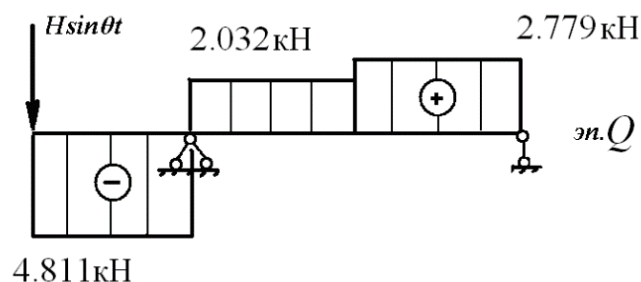
Тогда амплитудные значения динамических изгибающих моментов в соответствии с принципом суперпозиции определяются по формуле

$$M = m_1I_1 + m_2I_2 + M_H,$$

и их эпюра имеет вид



Построенная по эпюре изгибающих моментов эпюра амплитудных значений динамических поперечных сил имеет вид



### Проверка прочности конструкции

Наибольший статический изгибающий момент от расположенного на балке оборудования возникает в сечении на левой опоре и равняется

$$M_{ст} = 500 \cdot 9,807 \cdot 2 = 9,807 \text{ кНм.}$$

Определенный выше наибольший динамический изгибающий момент, возникающий в том же сечении, равняется

$$M_{дин} = 9,623 \text{ кНм.}$$

Следовательно, полный изгибающий момент, возникающий в опасном сечении при работающем электродвигателе, равняется

$$M_{полн} = M_{ст} + M_{дин} = 19,43 \text{ кНм.}$$

Тогда максимальное нормальное напряжение, возникающее в опасном сечении балки при работающем электродвигателе, равняется

$$\sigma_{max} = \frac{M_{полн}}{W} = 32,5 \text{ МПа} < R = 210 \text{ МПа,}$$

и, следовательно, прочность балки при работающем электродвигателе обеспечена.

### 3. МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ И УМЕНИЙ

При изучении строительной механики важную роль играет адекватная самостоятельная оценка приобретенных знаний и умений. Наиболее рационально это можно осуществлять с помощью самотестирования. Для его проведения в пособии содержатся:

- тестовые задания первого уровня, позволяющие проверить понимание и усвоение основных понятий, принципов, терминов изученного модуля;
- тестовые задания второго уровня, позволяющие проверить умение решать типовые задачи модуля.

В представленных тестовых заданиях первого уровня использованы следующие их виды:

- задания закрытой формы;
- задания на установление соответствия;
- задания на установление правильной последовательности;
- задания открытой формы.

В тестовых заданиях закрытой формы необходимо выбрать правильный ответ из представленных вариантов ответов. Возможны две разновидности таких заданий: с выбором одного правильного ответа, с выбором нескольких правильных ответов.

В тестовых заданиях на установление соответствия нужно указать связь между элементами двух столбцов – задающего столбца и столбца выбора. Элементы задающего столбца располагаются слева, а элементы столбца выбора – справа. Правый столбец содержит элементов больше, чем левый, и все его элементы являются истинными высказываниями.

В тестовых заданиях на установление последовательности нужно восстановить правильную последовательность некоторых действий, приведенных произвольным образом.

В тестовых заданиях открытой формы требуется дописать правильный ответ, связанный с определенным понятием, принципом или термином.

В тестовых заданиях второго уровня необходимо показать умение решать стандартные задачи, связанные с определением степени статической неопределимости плоских стержневых конструкций.

#### 3.1 Тестовые задания первого уровня

1.1. *Уравнения свободных колебаний без учета сил сопротивления системы с конечным числом степеней свободы, полученные прямым способом, – это:*

- 1) система линейных однородных алгебраических уравнений;

2) система обыкновенных линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка;

3) система обыкновенных линейных неоднородных дифференциальных уравнений первого порядка;

4) система обыкновенных линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка;

5) система обыкновенных линейных неоднородных дифференциальных уравнений второго порядка.

*1.2. Уравнения установившегося процесса вынужденных колебаний без учета сил сопротивления системы с конечным числом степеней свободы, полученные обратным способом, – это:*

1) система линейных однородных алгебраических уравнений;

2) система обыкновенных линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка;

3) система обыкновенных линейных неоднородных дифференциальных уравнений первого порядка;

4) система обыкновенных линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка;

5) система обыкновенных линейных неоднородных дифференциальных уравнений второго порядка.

*1.3. Амплитудные уравнения свободных колебаний без учета сил сопротивления системы с конечным числом степеней свободы, полученные прямым способом, – это:*

1) система линейных однородных алгебраических уравнений;

2) система обыкновенных линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка;

3) система обыкновенных линейных неоднородных дифференциальных уравнений первого порядка;

4) система обыкновенных линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка;

5) система обыкновенных линейных неоднородных дифференциальных уравнений второго порядка.

*1.4. Каким соотношениям должны удовлетворять определители в формулах Крамера, чтобы решения амплитудных уравнений описывали*

*обычный режим установившихся вынужденных колебаний системы с конечным числом степеней свободы?*

- 1)  $\Delta_i = 0, \Delta = 0$ ;
- 2)  $\Delta_i \neq 0, \Delta = 0$ ;
- 3)  $\Delta_i \neq 0, \Delta \neq 0$ ;
- 4)  $\Delta_i = 0, \Delta \neq 0$ ;
- 5)  $\Delta_i \leq 0, \Delta \geq 0$ .

*1.5. Каким соотношениям должны удовлетворять определители в формулах Крамера, чтобы решения амплитудных уравнений описывали резонансный режим установившихся вынужденных колебаний системы с конечным числом степеней свободы?*

- 1)  $\Delta_i = 0, \Delta = 0$ ;
- 2)  $\Delta_i \neq 0, \Delta = 0$ ;
- 3)  $\Delta_i \neq 0, \Delta \neq 0$ ;
- 4)  $\Delta_i = 0, \Delta \neq 0$ ;
- 5)  $\Delta_i \leq 0, \Delta \geq 0$ .

*1.6. Каким соотношениям должны удовлетворять определители в формулах Крамера, чтобы решения амплитудных уравнений описывали антирезонансный режим установившихся вынужденных колебаний системы с конечным числом степеней свободы?*

- 1)  $\Delta_i = 0, \Delta = 0$ ;
- 2)  $\Delta_i \neq 0, \Delta = 0$ ;
- 3)  $\Delta_i \neq 0, \Delta \neq 0$ ;
- 4)  $\Delta_i = 0, \Delta \neq 0$ ;
- 5)  $\Delta_i \leq 0, \Delta \geq 0$ .

*1.7. На основании чего получена формула для определения амплитуд изгибающих моментов установившегося процесса вынужденных колебаний без учета сил сопротивления системы с конечным числом степеней свободы, полученная прямым способом?*

- 1) принципа Сен-Венана;
- 2) гипотезы плоских сечений;
- 3) принципа возможных перемещений;
- 4) принципа начальных размеров;
- 5) принципа независимости действия сил.

1.8. На основании чего получена формула для определения амплитуд поперечных сил установившегося процесса вынужденных колебаний без учета сил сопротивления системы с конечным числом степеней свободы, полученная обратным способом?

- 1) принципа Сен-Венана;
- 2) гипотезы плоских сечений;
- 3) принципа возможных перемещений;
- 4) принципа начальных размеров;
- 5) принципа независимости действия сил.

1.9. На основании чего получена формула для определения амплитуд продольных сил установившегося процесса вынужденных колебаний без учета сил сопротивления системы с конечным числом степеней свободы, полученная прямым способом?

- 1) принципа Сен-Венана;
- 2) гипотезы плоских сечений;
- 3) принципа возможных перемещений;
- 4) принципа начальных размеров;
- 5) принципа независимости действия сил.

1.10. При каких условиях впервые возникает резонанс в конструкции как системе с конечным числом степеней свободы?

- 1) первая собственная частота свободных колебаний конструкции меньше круговой частоты изменения динамической нагрузки;
- 2) первая собственная частота свободных колебаний конструкции больше круговой частоты изменения динамической нагрузки;
- 3) первая собственная частота свободных колебаний конструкции равняется круговой частоте изменения динамической нагрузки.

1.11. При каких соотношениях круговой частоты изменения динамической нагрузки и первой собственной частоты свободных колебаний конструкции как системы с конечным числом степеней свободы реализуется дорезонансный режим установившегося процесса вынужденных колебаний?

- 1)  $0 < \frac{\theta}{\omega} < 0,8$ ;
- 2)  $0,8 \leq \frac{\theta}{\omega} \leq 1,2$ ;

3)  $1,2 < \frac{\theta}{\omega} < \infty$ ;

4)  $\theta = \omega$ .

1.12. При каких соотношениях круговой частоты изменения динамической нагрузки и первой собственной частоты свободных колебаний конструкции как системы с конечным числом степеней свободы реализуется околорезонансный режим установившегося процесса вынужденных колебаний?

1)  $0 < \frac{\theta}{\omega} < 0,8$ ;

2)  $0,8 \leq \frac{\theta}{\omega} \leq 1,2$ ;

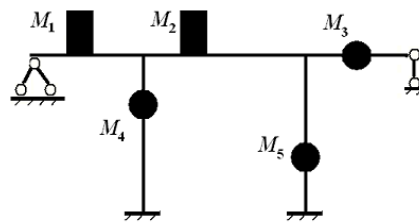
3)  $1,2 < \frac{\theta}{\omega} < \infty$ ;

4)  $\theta = \omega$ .

### 3.2 Тестовые задания второго уровня

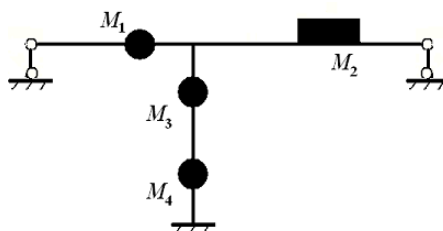
2.1. Определите полное и неполное число степеней свободы рамы как системы с конечным числом степеней свободы.

2.1.1



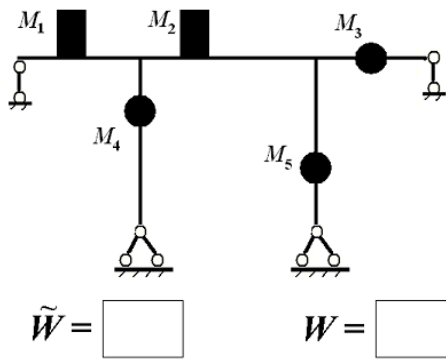
$\tilde{W} = \square$        $W = \square$

2.1.2

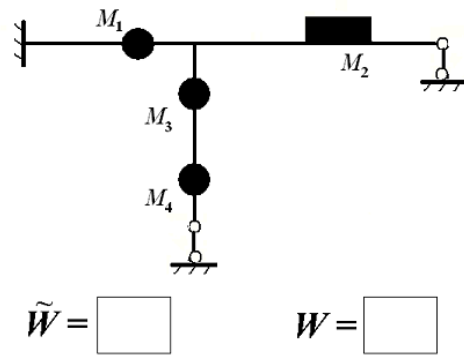


$\tilde{W} = \square$        $W = \square$

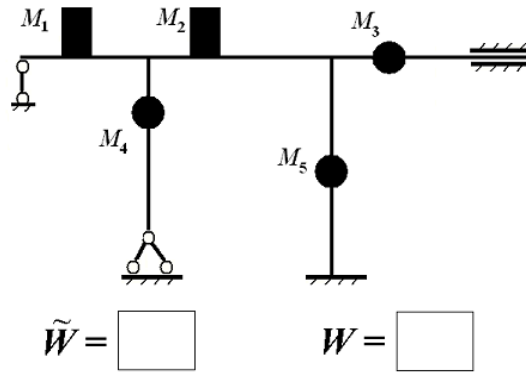
2.1.3



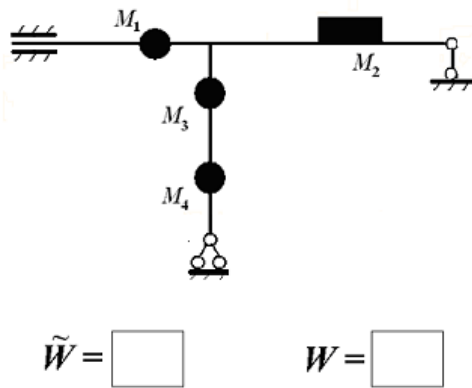
2.1.4



2.1.5



2.1.6



### 3.3 Ответы на тестовые задания первого и второго уровней

1.1 – 4; 1.2 – 5; 1.3 – 1; 1.4 – 3; 1.5 – 2; 1.6 – 4; 1.7 – 5; 1.8 – 5; 1.9 – 5;  
1.10 – 3; 1.11 – 1; 1.12 – 2.

$$2.1.1 - \tilde{w} = 12 \quad w = 7;$$

$$2.1.2 - \tilde{w} = 9 \quad w = 6;$$

$$2.1.3 - \tilde{w} = 12 \quad w = 8;$$

$$2.1.4 - \tilde{w} = 9 \quad w = 5;$$

$$2.1.5 - \tilde{w} = 12 \quad w = 8;$$

$$2.1.6 - \tilde{w} = 9 \quad w = 6.$$

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

### Учебно-нормативные документы

1. Образовательный стандарт высшего образования первой ступени специальности Промышленное и гражданское строительство ОСВО 1-70 02 01-2013 ; утв. 30.08.2013. – Минск, 2013.
2. Типовая учебная программа дисциплины «Строительная механика», регистрационный № ТД-Ј.066/тип ; утв. 30.06.2010. – Минск, 2010.
3. Учебная программа дисциплины «Строительная механика», регистрационный № 07/19/уч. ; утв. 28.06.2019.

### Учебная литература основная

4. Борисевич, А. А. Строительная механика : учеб. пособие для вузов / А. А. Борисевич, Е. М. Сидорович, В. И. Игнатюк. – Минск : БНТУ, 2009. – 756 с.
5. Дарков, А. В. Строительная механика : учеб. для вузов / А. В. Дарков, Н. Н. Шапошников. – СПб. : Лань, 2010. – 656 с.
6. Строительная механика. Стержневые системы : учеб. для вузов / А. Ф. Смирнов [и др.] ; под ред. А. Ф. Смирнова. – М. : Стройиздат, 1981. – 512 с.
7. Строительная механика. Динамика и устойчивость сооружений : учеб. для вузов / А. Ф. Смирнов [и др.] ; под ред. А. Ф. Смирнова. – М. : Стройиздат, 1984. – 416 с.
8. Клейн, Г. К. Руководство к практическим занятиям по курсу строительной механики / Г. К. Клейн, В. Г. Рекач, Г. И. Розенблат. – М. : Высш. шк., 1972. – 320 с.
9. Руководство к практическим занятиям по курсу строительной механики. Статика стержневых систем / Под ред. Г. К. Клейна. – М. : Высш. шк., 1980. – 384 с.
10. Турищев, Л. С. Строительная механика : учеб.-метод. комплекс : в 3 ч. / Л. С. Турищев. – Новополоцк : ПГУ, 2010. – Ч. 1 : Статически определимые системы. – 224 с.
11. Турищев, Л. С. Строительная механика : учеб.-метод. комплекс : в 3 ч. / Л. С. Турищев. – Новополоцк : ПГУ, 2009. – Ч. 2 : Статически неопределимые системы. – 200 с.
12. Турищев, Л. С. Строительная механика : учеб.-метод. комплекс : в 3 ч. / Л. С. Турищев. – Новополоцк : ПГУ, 2010. – Ч. 3 : Основы динамики и устойчивости сооружений. – 136 с.
13. Турищев, Л. С. Введение в строительную механику / Л. С. Турищев. – Новополоцк : ПГУ, 2016. – 56 с.

### Учебная литература дополнительная

14. Рабинович, И. М. Основы строительной механики стержневых систем / И. М. Рабинович. – М. : Госстройиздат, 1960. – 520 с.

15. Строительная механика. Основы теории с примерами расчетов : учеб. для вузов / А. Е. Саргсян [и др.] ; под ред. А. Е. Саргсяна. – М. : Высш. шк., 2000. – 416 с.

16. Безухов, Н. И. Устойчивость и динамика сооружений в примерах и задачах / Н. И. Безухов, О. В. Лужин, Н. В. Колкунов. – М. : Высш. шк., 1987. – 264 с.

17. Кузьмин В. А. Сборник задач по курсу строительной механики / В. А. Кузьмин, В. Г. Рекач, Г. И. Розенблат ; под ред. И. М. Рабиновича. – М. : Госстройиздат, 1963. – 331 с.

18. Строительная механика в примерах и задачах / Под ред. В. А. Киселева. – М. : Стройиздат, 1986. – 387 с.

### Интернет-ресурсы

19. Учебные курсы для студентов по сопротивлению материалов и строительной механике [Электронный ресурс]. – Режим доступа: [http://mysopro.mat.ru/uchebnye\\_kursy/](http://mysopro.mat.ru/uchebnye_kursy/).

20. Сайт кафедры строительной механики СПбГПУ с учебными материалами по строительной механике [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://smitu.ru/>.

21. Сайт кафедры строительной механики БелГУТ с учебными материалами по строительной механике [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://mechanika.bsut.by/>.

Краткие справочные сведения по математике,  
связанные с содержанием изучаемого модуля<sup>1</sup>

**Функция** – закон (правило), по которому значениям одних переменных величин (независимая переменная  $x$ ) соответствуют значения других переменных величин (зависимая переменная  $y$ ). Независимая переменная называется аргументом функции, а зависимая переменная – значением функции.

**Область определения функции** – совокупность значений независимой переменной  $x$ , при которых эта функция определена.

**Способы задания функции** – аналитический, табличный, графический, компьютерной программой.

**Производная функции** – предел отношения приращения функции к приращению аргумента, вычисленный в процессе, когда приращение аргумента стремится к нулю.

**Дифференциальное уравнение** – уравнение, связывающее аргумент (или аргументы), неизвестную функцию (или функции) и ее производные, описывающие определенный физический процесс.

**Обыкновенное дифференциальное уравнение** – дифференциальное уравнение, в котором искомая функция зависит от одного аргумента.

**Порядок дифференциального уравнения** – наивысший порядок производной от искомой функции, входящий в уравнение.

**Решение дифференциального уравнения** – функция, которая при подстановке в это уравнение обращает его в тождество. Дифференциальное уравнение имеет бесконечное количество решений.

**Общее решение обыкновенного дифференциального уравнения  $n$ -го порядка** – запись всего многообразия решений, содержащая  $n$  произвольных постоянных  $C_1, \dots, C_n$  и имеющая вид

$$y = y(x; C_1, \dots, C_n).$$

**Частные решения обыкновенного дифференциального уравнения  $n$ -го порядка** – решение, получаемое из общего решения при конкретных численных значениях каждой произвольной постоянной.

**Интегральная линия** – график каждого частного решения.

---

<sup>1</sup> Составлены с использованием: Мышкис, А. Д. Лекции по высшей математике : учеб. пособие / А. Д. Мышкис. – СПб. : Лань, 2007.

**Начальные условия** – математические величины, характеризующие начальное состояние изучаемого процесса. Позволяют выделить соответствующее ему частное решение.

**Задача Коши** – задача о нахождении частного решения обыкновенного дифференциального уравнения при заданных начальных условиях.

Краткие справочные сведения по физике,  
связанные с содержанием изучаемого модуля<sup>2</sup>

**Механическое движение** – процесс изменения взаимного расположения материальных тел или их частей в пространстве с течением времени.

**Механическое воздействие** – воздействие одного тела на другое, вызывающее деформацию тела или его ускорение при механическом движении или одновременно и то и другое.

**Сила (внешняя сила)** – векторная величина, которая является мерой механического воздействия на тело со стороны другого тела.

**Деформация тела** – изменение размеров и формы материального тела под действием внешних сил.

**Упругая деформация** – деформация тела, исчезающая после снятия внешних сил.

**Пластическая (остаточная) деформация** – деформация, сохраняющаяся в теле после прекращения действия внешних сил.

**Внутренние силы** – силы взаимодействия между атомами тела, возникающие при его деформации вследствие смещения атомов из равновесных положений в узлах кристаллической решетки. Эти силы носят дискретный характер (являются дискретными переменными величинами) и имеют электромагнитную природу.

**Силы упругости** – внутренние силы, возникающие в теле при его упругой деформации.

**Тело отсчета** – тело, по отношению к которому рассматривается механическое движение прочих тел.

**Система отсчета** – тело отсчета вместе со связанной с ним системой координат.

**Инерциальная система отсчета** – система отсчета, которая может покоиться или двигаться только равномерно и прямолинейно.

**Первый закон Ньютона (закон инерции<sup>3</sup>)** – существуют системы отсчета, в которых всякое материальное тело сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока при воздействии со стороны других тел это состояние не изменится.

<sup>2</sup> Составлены с использованием: Макаренко, Г. М. Курс общей физики : учеб. пособие / Г. М. Макаренко. – Минск : Дизайн ПРО, 2003.

<sup>3</sup>Впервые был сформулирован Галилеем.

**Инертность** – свойство материальных тел сохранять состояние покоя или равномерного прямолинейного движения.

**Второй закон Ньютона** – ускорение, которое материальное тело приобретает в инерциальной системе отсчета, пропорционально действующей на тело силе, обратно пропорционально массе тела и по направлению совпадает с силой.

**Масса** – физическая величина, характеризующая инерционные и гравитационные свойства материальных тел.

**Плотность** – физическая величина, характеризующая для однородного тела отношение массы тела к его объему.

**Третий закон Ньютона** – всякое действие материальных тел друг на друга носит характер взаимодействия; силы, с которыми действуют друг на друга материальные тела, всегда равны по модулю, противоположно направлены, действуют вдоль прямой, соединяющей точки их приложения, и приложены к разным телам.

**Сила тяжести** – сила, с которой материальное тело притягивается к Земле.

**Вес тела** – сила, с которой тело, притягиваясь к Земле, действует на горизонтальную опору или натягивает нить вертикального подвеса. Вес тела равен силе тяжести, когда ускорение тела относительно Земли равно нулю.

**Ускорение свободного падения** – ускорение, с которым все тела падают в определенном месте под действием силы притяжения к Земле. Оно не зависит от массы тела, но зависит от высоты тела над поверхностью Земли. Вблизи поверхности Земли ускорение свободного падения примерно одинаково и равно  $9,81 \text{ м/с}^2$ .

**Механические колебания** – механическое движение тела или системы тел, которое обладает повторяемостью во времени и происходит в окрестности положения равновесия.

**Амплитуда колебаний тела** – величина его наибольшего отклонения от положения равновесия.

**Период колебаний тела** – время одного полного колебания.

**Частота колебаний тела** – число полных колебаний, которые совершаются за одну секунду.

Краткие справочные сведения по теоретической механике,  
связанные с содержанием изучаемого модуля

**Абсолютно твердое тело**<sup>4</sup> – материальное тело, у которого под действием приложенных к нему сил не возникают деформации.

**Материальная точка** – частный случай тела, размеры которого малы или ими можно пренебречь по сравнению с размерами других тел или расстояниями между ними.

**Кинематические состояния тела** – два состояния тела: равновесие или движение определенного характера.

**Равновесие тела** – неподвижность (покой) тела относительно Земли.

**Свободное тело** – тело, которое может перемещаться в пространстве в любом направлении.

**Связи тела** – другие тела, с которыми соприкасается или на которые опирается рассматриваемое тело и которые ограничивают свободу его движения. Принято говорить, что связи наложены на тело.

**Несвободное тело** – тело, движение которого ограничено наложенными связями.

**Активные силы (внешние силы)** – все приложенные к телу силы, кроме сил, действующих со стороны связей.

**Реактивные силы (реакции связей)** – силы, с которыми связи действуют на тело. Направлены реакции всегда в сторону, противоположную той, куда связь не дает телу перемещаться.

**Принцип освобожденности тел от связей** – несвободное тело можно рассматривать как свободное, на которое, кроме задаваемых внешних сил, действуют реакции связей.

**Динамика** – раздел теоретической механики, в котором изучаются законы движения материальных тел в зависимости от действующих на них сил.

**Дифференциальные уравнения движения материальной точки в декартовых осях координат** – система обыкновенных неоднородных дифференциальных уравнений второго порядка. В декартовой системе координат такие уравнения имеют вид

$$\begin{cases} m\ddot{x} = \sum F_{ix}; \\ m\ddot{y} = \sum F_{iy}; \\ m\ddot{z} = \sum F_{iz}. \end{cases}$$

<sup>4</sup> В дальнейшем для краткости называемое просто телом.

**Первая задача динамики материальной точки** – зная массу материальной точки и уравнения ее движения, например, в декартовой системе координат

$$\begin{cases} x = f_1(t), \\ y = f_2(t), \\ z = f_3(t), \end{cases}$$

найти модуль и направление равнодействующей сил, приложенных к точке.

**Вторая задача динамики материальной точки** – зная силы, действующие на материальную точку, ее массу, а также начальное положение точки и ее начальную скорость, найти уравнения движения точки.

**Свободные колебания материальной точки** – колебания материальной точки, совершающиеся под действием восстанавливающей силы с учетом или без учета сил сопротивления движению.

**Вынужденные колебания материальной точки** – колебания материальной точки, совершающиеся под действием восстанавливающей силы и возмущающей силы с учетом или без учета сил сопротивления движению.

**Гармонические колебания материальной точки** – свободные колебания материальной точки, совершающиеся под действием линейной восстанавливающей силы.

**Механическая система материальных точек (тел)** – совокупность точек (тел), в которой положение или движение каждой точки (тела) зависят от положения и движения всех остальных.

**Свободная механическая система материальных точек (тел)** – система, в которой движение точек (тел) не ограничено никакими связями, а определяется лишь действующими на эти точки (тела) силами.

**Момент инерции механической системы относительно оси** – скалярная величина, равная сумме произведений масс всех точек системы на квадраты их расстояний до этой оси.

## Глоссарий модуля

**Система с конечным числом степеней свободы** – система, геометрическое положение которой в пространстве в любой момент времени однозначно определяется некоторым определенным количеством независимых параметров, а движение системы под действием приложенных сил – изменением этих параметров во времени.

**Матрица инерции конструкции** – диагональная матрица, характеризующая инерционные свойства масс конструкции, связанные с ее колебаниями.

**Матрица жесткости конструкции** – квадратная матрица, характеризующая способность конструкции сопротивляться возникновению перемещений.

**Матрица податливости конструкции** – квадратная матрица, характеризующая способность конструкции получать перемещения.

**Свободные колебания конструкции** – колебания конструкции, совершающиеся при отсутствии постоянного внешнего воздействия и вызванные некоторыми первоначальными возмущениями ее исходного состояния равновесия.

**Собственные частоты свободных колебаний** – круговые частоты, с которыми могут происходить свободные колебания конструкции.

**Спектр собственных частот свободных колебаний** – собственные частоты свободных колебаний конструкции, расположенные в порядке возрастания.

**Собственные формы свободных колебаний** – набор соотношений амплитуд колеблющихся масс конструкции, описывающих очертание формы свободных колебаний, происходящих с определенной собственной частотой.

**Вынужденные колебания конструкции** – колебания конструкции, вызываемые и поддерживаемые некоторыми возмущающими внешними силами.