

Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Полоцкий государственный университет
имени Евфросинии Полоцкой»



В. С. Вакульчик
А. П. Мателенок
Т. И. Завистовская

МАТЕМАТИКА

Методические указания
для организации самостоятельной работы
и подготовки к контрольным мероприятиям
для студентов специальностей 1-36 07 02
«Производство изделий на основе трехмерных технологий»,
1-44 01 02 «Организация дорожного движения»

В двух частях

Часть 2

**Введение в математический анализ.
Дифференциальное исчисление функции одной переменной**

Текстовое электронное издание

Новополоцк
Полоцкий государственный университет
имени Евфросинии Полоцкой
2022

Об издании – 1, 2

1 – дополнительный титульный экран – сведения об издании

УДК 51(075.8)

Одобрено и рекомендовано к изданию методической комиссией
механико-технологического факультета
в качестве методических указаний (протокол № 4 от 16.12.2021 г.)

Кафедра математики и компьютерной безопасности

Изложены теоретические основы двух разделов курса высшей математики для студентов технических специальностей: «Введение в математический анализ» и «Дифференциальное исчисление функции одной переменной». Предложено соответствующее дидактическое обеспечение: графические схемы, информационные таблицы, обучающие задачи, трехуровневые тесты, глоссарий. Спроектированы возможности использования информационных технологий для организации обучения математике.

Предназначен для преподавателей и студентов специальностей 1-36 07 02 «Производство изделий на основе трехмерных технологий», 1-44 01 02 «Организация дорожного движения» высших учебных заведений.

© Вакульчик В. С., Мателенок А. П., Завистовская Т. И., 2022

© Полоцкий государственный университет
имени Евфросинии Полоцкой, 2022

2 – дополнительный титульный экран – производственно-технические сведения

Для создания текстового электронного издания «Математика», часть 2 «Введение в математический анализ. Дифференциальное исчисление функции одной переменной» использованы текстовый процессор Microsoft Word и программа Adobe Acrobat XI Pro для создания и просмотра электронных публикаций в формате PDF.

Технические требования:

1 оптический диск.

Системные требования:

PC с процессором не ниже Core 2 Duo;

2 Gb RAM; свободное место на HDD 2 Mb;

Windows XP/7/8/8.1/10

привод CD-ROM/DVD-ROM;

мышь

Редактор *Т. А. Дарьянова*

Подписано к использованию 20.09.2022.

Объем издания 2,38 Мб. Заказ 534.

Издатель и полиграфическое исполнение:
учреждение образования «Полоцкий государственный университет
имени Евфросинии Полоцкой».

Свидетельство о государственной регистрации
издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/305 от 22.04.2014.

ЛП № 02330/278 от 08.05.2014.

211440, ул. Блохина, 29,
г. Новополоцк,
Тел. 8 (0214) 59-95-41, 59-95-44
<http://www.psu.by>

СОДЕРЖАНИЕ

Раздел 4

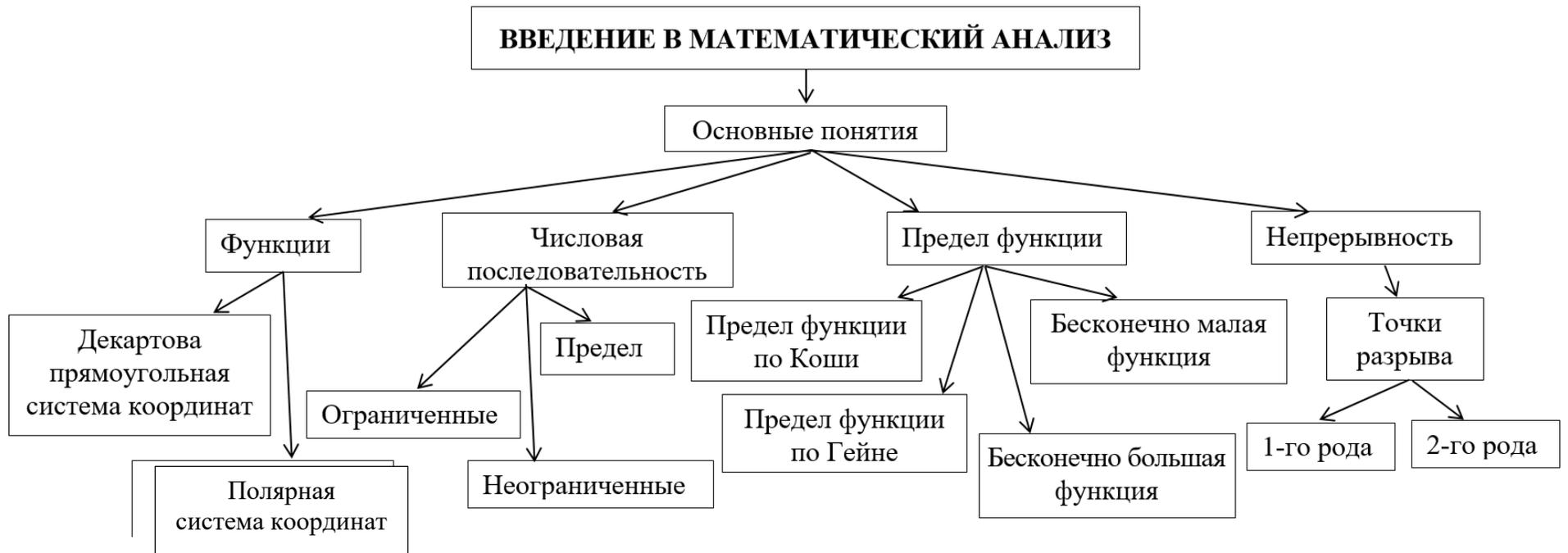
ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ.....	5
Графическая схема	5
Информационная таблица «Введение в математический анализ»	6
Базовый минимум к разделу «Введение в математический анализ»	7
Задания для самостоятельного решения	13
Методические средства для подготовки и проведения итогового контроля по разделу 4 «Введение в математический анализ».....	15
Глоссарий	29
Приложение.....	31

Раздел 5

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ	37
Графическая схема	37
Информационная таблица «Дифференциальное исчисление функции одной переменной»	38
Базовый минимум к разделу «Дифференциальное исчисление функции одной переменной»	39
Задачи для самостоятельного решения	42
Методические средства для подготовки и проведения итогового контроля по разделу 5 «Дифференциальное исчисление функции одной переменной».....	45
Глоссарий	53
Задачи профессионально ориентированного характера	55
Приложение.....	56

РАЗДЕЛ 4
ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Графическая схема



Информационная таблица «Введение в математический анализ»

<p>Переменная величина y называется <i>функцией от независимой переменной x</i> (аргумента), если указан закон (правило), по которому каждому элементу x некоторого множества ставится в соответствие единственный элемент y того же или другого множества</p>	<p style="text-align: center;">Алгоритмические предписания</p> <p>1. При раскрытии неопределенности вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ можно числитель и знаменатель дроби разделить на величину, имеющую в данном процессе <i>наибольший порядок</i> неограниченного роста (бесконечности) (чаще – наивысшую степень переменной).</p> <p>2. При раскрытии неопределенности вида $\left(\frac{0}{0}\right)$, содержащей отношение многочленов, можно: разложить числитель и знаменатель дроби на множители; разделить числитель и знаменатель на $(x - x_0)$.</p> <p>3. При раскрытии неопределенности вида $\left(\frac{0}{0}\right)$, содержащей иррациональные выражения, можно: перевести иррациональность из числителя в знаменатель (или наоборот) путем домножения на сопряженное выражение; заменить переменную.</p> <p>4. При раскрытии неопределенности вида $\left(\frac{0}{0}\right)$, содержащей тригонометрические выражения, можно воспользоваться первым замечательным пределом $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 1$.</p> <p>5. При раскрытии неопределенности вида (1^∞) можно воспользоваться вторым замечательным пределом $\lim_{y \rightarrow 0} (1 + y)^{\frac{1}{y}} = e$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$.</p> <p>6. При раскрытии неопределенностей вида $(\infty - \infty)$, $(0 \cdot \infty)$ необходимо воспользоваться сведением их к неопределенностям $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$</p>
<p>Известны следующие способы задания функции: <i>аналитический, графический, табличный</i></p>	
<p>Если каждому натуральному числу n поставлено в соответствие число x_n, то говорят, что задана <i>последовательность</i> $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots = \{x_n\}$</p>	
<p>Число a называется <i>пределом последовательности $\{x_n\}$</i>, если для любого положительного $\varepsilon > 0$ существует такой номер N, что для всех $n > N$ выполняется условие $x_n - a < \varepsilon$</p>	
<p>(по Коши) Число A называется <i>пределом функции $f(x)$</i> при $x \rightarrow a$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta_\varepsilon > 0$, что для всех таких x, что $x - a < \delta_\varepsilon$, верно неравенство $f(x) - A < \varepsilon$</p>	
<p>Число A называется <i>пределом функции $f(x)$</i> при $x \rightarrow \infty$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $M > 0$, что для всех x, удовлетворяющих $x > M$, выполняется неравенство $f(x) - A < \varepsilon$</p>	
<p>Функция $f(x)$, определенная в x_0 и в некоторой ее окрестности, называется <i>непрерывной в точке x_0</i>, если предел функции и ее значение в этой точке равны, т.е. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$</p>	
<p>Если функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0, но не является непрерывной в самой точке x_0, то она называется <i>разрывной функцией</i>, а точка x_0 – точкой разрыва</p>	
<p>Точка x_0 называется <i>точкой разрыва 1-го рода</i>, если в этой точке функция $f(x)$ имеет конечные, но не равные друг другу левый и правый пределы: $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x)$</p>	

**Базовый минимум к разделу
«Введение в математический анализ»**

I. Вычислить:

1) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{4}{x^2} - \frac{1}{x-2} \right)$.

Решение.

Имеем $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{4}{x^2} - \frac{1}{x-2} \right) = \left(\frac{4}{4-4} - \frac{1}{2-2} \right) = \left(\frac{4}{0} - \frac{1}{0} \right) = (\infty - \infty)$.

Преобразуем заданное выражение и получим:

$$\begin{aligned} \frac{4}{x^2-4} - \frac{1}{x-2} &= \frac{4-(x-2)}{(x+2)(x+2)} = \frac{2-x}{(x-2)(x+2)} = \\ &= -\frac{(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{-1}{x+2}, \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{-1}{x+2} \right) = -\frac{1}{2+2} = -\frac{1}{4}.$$

Ответ: $-\frac{1}{4}$.

2) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 6x + 8}{x - 4}$.

Решение.

Имеем $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 6x + 8}{x - 4} = \frac{16 - 24 + 8}{4 - 4} = \left(\frac{0}{0} \right)$.

Разложим на множители $x^2 - 6x + 8 = (x-2)(x-4)$, при подстановке получим $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-2)(x-4)}{x-4} = \lim_{x \rightarrow 4} (x-2) = 2$.

Ответ: 2.

3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - x + 5}{x^3 + x^2 - 1}$;

Решение.

Числитель и знаменатель дроби – бесконечно большие функции, поэтому имеем неопределенность вида $\left(\frac{\infty}{\infty} \right)$. Для ее раскрытия разделим

числитель и знаменатель дроби на старшую степень x , т.е. на x^3 .

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{1}{x^2} + \frac{5}{x^3}}{1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}} = \frac{2 - 0 + 0}{1 + 0 - 0} = 2.$$

Ответ: 2.

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x + 2}{x^2 + 3x - 1} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{5x}{x^2} + \frac{2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} + \frac{3x}{x^2} - \frac{1}{x^2}} = \frac{0 + 0}{1 + 0 - 0} = 0.$$

Ответ: 0.

$$5) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - x - 2}{x^2 - 5x + 1} = \left(\frac{0}{0} \right).$$

Решение.

Пользуясь разложением квадратного трехчлена на множители, получим:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x-1) \left(x + \frac{2}{3} \right)}{4(x-1) \left(x - \frac{1}{4} \right)} = \frac{3}{4} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + \frac{2}{3}}{x - \frac{1}{4}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1 + \frac{2}{3}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{5}{3}.$$

Ответ: $\frac{5}{3}$.

$$6) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{\sqrt{x+1} - 2} = \left(\frac{0}{0} \right).$$

Решение.

Избавиться от иррациональности в знаменателе и раскрыть неопределенность поможет домножение числителя и знаменателя дроби на выражение, сопряженное знаменателю, т.е. на $(\sqrt{x+1} + 2)$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x^2 - 9)(\sqrt{x+1} + 2)}{(\sqrt{x+1} - 2)(\sqrt{x+1} + 2)} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+1} + 2)}{x+1-4} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x+1} + 2 = 24. \end{aligned}$$

Ответ: 24.

$$7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{2x} = \left(\frac{0}{0} \right).$$

Решение. Вынесем $\frac{1}{2}$ за знак предела, преобразуем выражение и воспользуемся первым замечательным пределом, получим:

$$\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 7x}{7x} \right) \cdot 7 = \frac{1}{2} \cdot 7 = \frac{7}{2}.$$

Ответ: $\frac{7}{2}$.

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 8x} = \left(\frac{0}{0} \right).$$

Решение.

Преобразуем выражение и воспользуемся первым замечательным

пределом, получим:
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{\sin 5x}{5x} \right) \cdot 5}{\left(\frac{\sin 8x}{x} \right) \cdot 8} = \frac{5}{8}.$$

Ответ: $\frac{5}{8}$.

$$9) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{\frac{5}{x}} = (1^\infty).$$

Решение. Неопределенность такого вида будем раскрывать с помощью второго замечательного предела. Для этого числитель и знаменатель дроби, стоящей в показателе умножим на 3.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[(1 + 3x)^{\frac{1}{3 \cdot x}} \right]^{5 \cdot 3} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha} \cdot 15},$$

где $\alpha = 3x$.

Получаем: e^{15} .

Ответ: e^{15} .

$$10) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x-3} \right)^x = \left(\frac{\infty}{\infty} \right)^x = (1^\infty)$$

Решение. Преобразуем выражение, чтобы была возможность воспользоваться вторым замечательным пределом:

$$\frac{x-3+3+2}{x-3} = \frac{x-3}{x-3} + \frac{5}{x-3} = 1 + \frac{5}{x-3}.$$

Пусть $\alpha = \frac{5}{x-3}$, где $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{x-3} = 0$. Тогда

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{x-3}\right)^x = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left[\left(1 + \alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}} \right]^{\alpha \cdot x} = e^{\lim_{\alpha \rightarrow 0} \alpha \cdot x}.$$

Учитывая, что $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \left(1 + \alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}} = e$, получим $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{5x}{x-3}} = e^5$.

Ответ: e^5 .

II. Для заданных функций найти эквивалентные в соответствующем процессе величины:

1) $4x^2 - 3x + 5 \sim 4x^2$, т.к. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - 3x + 5}{4x^2} = 1$, а это означает, что

функции эквивалентны.

2) $3 - 2x + x^2 \sim x^2$ можно доказать аналогично, как в предыдущем

случае.

3) $\sin 5x \sim 5x$, т.к. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x} = 1$.

4) $\sin \frac{x}{2} \sim \frac{x}{2}$, т.к. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = 1$.

5) $1 - \cos 2x \sim 2(\sin x)^2 \sim 2x^2$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (\cos x)^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(\sin x)^2}{2x^2} = 1$.

6) $e^{5x} - 1 \sim 5x$ т.к. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x} - 1}{5x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \left. \begin{array}{l} e^{5x} - 1 = y, y \rightarrow 0 \\ e^{5x} = 1 + y, x \rightarrow 0 \\ 5x = \ln(1 + y) \end{array} \right| =$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\ln(1 + y)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\ln(1 + y)}{y}} = \frac{1}{\ln e} = 1.$$

III. Вычислить с помощью эквивалентных:

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin 5x)^2}{x^2}$.

Решение.

$\sin 5x \sim 5x$, поэтому $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{25x^2}{x^2} = 25$.

Ответ: 25.

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin \frac{x}{2}}{x}$.

Решение.

$\arcsin \frac{x}{2} \sim \frac{x}{2}$, поэтому $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{2}}{x} = \frac{1}{2}$.

Ответ: $\frac{1}{2}$.

3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 5x}{\arcsin 2x}$;

Решение.

Т.к. $\operatorname{arctg} 5x \sim 5x$, $\arcsin 2x \sim 2x$, то $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{2x} = \frac{5}{2}$.

Ответ: $\frac{5}{2}$.

4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{(\sin x)^2}$.

Решение.

Учитывая, что $1 - \cos 4x \sim 2(\sin 2x)^2 \sim 8x^2$, а $(\sin x)^2 \sim x^2$, полу-

чим: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{(\sin x)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8x^2}{x^2} = 8$.

Ответ: 8.

IV.

1) установить область непрерывности функций и найти точки разрыва функций: а) $y = \frac{2x+1}{2x-1}$; б) $y = 5^{\frac{5}{x}}$; в) $y = \ln(5+x)$.

Решение.

а) $y = \frac{2x+1}{2x-1}$, т.к. дробно-рациональная функция определена на всей

числовой прямой, кроме точки, где $2x - 1 = 0$, получаем точку разрыва

$$x = \frac{1}{2}$$

Ответ: $x = \frac{1}{2}$ – точка разрыва.

б) $y = 5^{\frac{5}{x}}$.

Данная функция определена и непрерывна на всей числовой прямой кроме точки, где $x=0$.

Ответ: $x=0$ – точка разрыва.

в) $y = \ln(5+x)$.

Область определения функции состоит из точек, где выполняется неравенство $5+x > 0$ или $x > -5$, для этих точек функция будет непрерывной. Точек разрыва нет.

2) исследовать функцию на непрерывность.

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2}, & \text{если } -1 \leq x \leq 0 \\ 1+x^2, & \text{если } 0 < x \leq 2 \\ x-3, & \text{если } x > 2 \end{cases}$$

Решение.

Внутри каждого интервала из области определения $D(y) = [-1; +\infty)$ функция непрерывна. Значит, возможными точками разрыва могут быть точки «склеивания» графиков элементарных функций $x = 0$; $x=2$. Вычислим

$$y(0)=1; \lim_{\substack{x \rightarrow 0- \\ x < 0}} \sqrt{1-x^2} = 1; \lim_{\substack{x \rightarrow 0+ \\ x > 0}} \sqrt{1-x^2} = 1.$$

Таким образом, по определению, функция непрерывна в точке $x = 0$.

$$\text{Вычислим далее } y(2) = 5; \lim_{\substack{x \rightarrow 2- \\ x < 2}} 1+x^2 = 5; \lim_{\substack{x \rightarrow 2+ \\ x > 2}} 1+x^2 = 5.$$

Таким образом, по определению, функция непрерывна в точке $x = 2$.

Графиком на 1-м участке интервала будет часть окружности $x^2 + y^2 = 1$, где $y \geq 0$, На интервале 2-м: $(0;2]$ имеем параболу $y = x^2 + 1$, $y(0) = 1$; $y(2) = 5$. На 3-м интервале: $(2;+\infty)$ – часть прямой.

Задания для самостоятельного решения

I. Вычислить:

$$1) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + 1}{4x^2 - 5x + 1}.$$

Ответ: 0,3.

$$2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6}.$$

Ответ: -4.

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3x - 1}{x^2 + 5x + 3}.$$

Ответ: 1.

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 1}{5 + x^2 + x^3}.$$

Ответ: 2.

$$5) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 7}{x^2 + 3x + 10}.$$

Ответ: 0.

$$6) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+8} - 3}{x-1}.$$

Ответ: $\frac{1}{6}$.

$$7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 10x}{2}.$$

Ответ: 5.

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 8x}{\sin 10x}.$$

Ответ: $\frac{8}{13}$.

$$9) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 5x)^{\frac{1}{x}}.$$

Ответ: e^5 .

$$10) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+5}{x+1} \right)^x.$$

Ответ: e^4 .

II. Для заданных функций найти эквивалентные в соответствующем процессе величины:

1) $5x^2 - 3x + 7 \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} ;$ Ответ: $5x^2$.

2) $7 - 2x + x^3 \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} ;$ Ответ: x^3 .

3) $\sin \frac{x}{3} \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} ;$ Ответ: $\frac{x}{3}$.

4) $1 - \cos 4x \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} ;$ Ответ: $8x^2$.

5) $\sin x^2 \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} ;$ Ответ: x^2 .

6) $e^{2x} - 1 \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} ;$ Ответ: $2x$.

III. Вычислить с помощью эквивалентных:

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x}{x^2} ;$ Ответ: 9.

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} \frac{x}{3}}{x} ;$ Ответ: $\frac{1}{3}$.

3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 7x}{\operatorname{arctg} 12x} ;$ Ответ: $\frac{7}{12}$.

4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{\sin^2 2x} ;$ Ответ: $\frac{1}{2}$.

IV. 1. Установить область непрерывности функций и найти их точки разрыва:

а) $y = \frac{7x + 5}{x + 5} ;$ Ответ: $(-\infty; -5) \cup (-5; +\infty)$ $x = -5$.

б) $y = 3^{\frac{4}{x}} ;$ Ответ: $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ $x = 0$.

в) $y = \ln(x - 2) ;$ Ответ: $(2; +\infty)$ нет точек разрыва.

2. Исследовать на непрерывность и сделать схематический чертеж.

$$y = \begin{cases} x - 1, & x \leq 0 \\ x^2, & 0 < x < 2 \\ 2x, & x \geq 2 \end{cases}$$

Ответ: $x = 0$ – точка разрыва I рода.

**МЕТОДИЧЕСКИЕ СРЕДСТВА
ДЛЯ ПОДГОТОВКИ И ПРОВЕДЕНИЯ ИТОГОВОГО КОНТРОЛЯ
ПО РАЗДЕЛУ 4
«ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ»**

Контрольная работа

Вариант 0

1. Вычислить: $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 - 8x - 3}{x^2 - x - 6}$.

Решение.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 - 8x - 3}{x^2 - x - 6} = \frac{3 \cdot 9 - 8 \cdot 3 - 3}{3^2 - 3 - 6} = \left(\frac{0}{0} \right) =$$

$$\left. \begin{array}{l} 3x^2 - 8x - 3 = 0; x_1 = 3; x_1 \cdot x_2 = \frac{-3}{3} = -1 \Rightarrow x_2 = -\frac{1}{3}; \\ 3x^2 - 8x - 3 = 3(x-3)\left(x + \frac{1}{3}\right); \\ x^2 - x - 6 = 0; x_1 = 3; x_1 \cdot x_2 = \frac{-6}{1} = -6 \Rightarrow x_2 = -2; \\ x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2) \end{array} \right| =$$
$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(3x+1)}{(x-3)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x+1}{x+2} = \frac{10}{5} = 2.$$

Ответ: 2.

2. Вычислить: $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 + 3x - 2}{3x^2 + 2x + 8}$.

Решение.

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 + 3x - 2}{3x^2 + 2x + 8} = \frac{2 \cdot 4 - 3 \cdot 2 - 2}{3 \cdot 4 - 2 \cdot 2 + 8} = \left(\frac{0}{16} \right) = 0.$$

Ответ: 0.

3. Вычислить: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^5 - 4x^4 - 1}{x^3 - 1}$.

Решение.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^5 - 4x^4 - 1}{x^3 - 1} = \frac{5 \cdot 1 - 4 \cdot 1 - 1}{1 - 1} = \left(\frac{0}{0} \right) =$$

$$\left| \begin{array}{l} 5x^5 - 4x^4 - 1 \\ \hline -(5x^5 - 5x^4) \\ \hline x^4 - 1 \\ \hline -(x^4 - x^3) \\ \hline x^3 - 1 \\ \hline -(x^3 - x) \\ \hline x - 1 \\ \hline -(x - 1) \\ \hline 0 \end{array} \right| =$$

$$= x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cancel{(x-1)}(5x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)}{\cancel{(x-1)}(x^2 + x + 1)} = \frac{9}{3} = 3.$$

Ответ: 3.

4. Вычислить: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3x-2} - 2}{x^2 - 4}$.

Решение.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3x-2} - 2}{x^2 - 4} &= \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{3x-2} - 2)(\sqrt{3x-2} + 2)}{(\sqrt{3x-2} + 2)(x^2 - 4)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x - 2 - 4}{(\sqrt{3x-2} + 2)(x^2 - 4)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x - 6}{(\sqrt{3x-2} + 2)(x^2 - 4)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3\cancel{(x-2)}}{(\sqrt{3x-2} + 2)\cancel{(x-2)}(x+2)} = \frac{3}{4 \cdot 4} = \frac{3}{16} \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{3}{16}$.

5. Вычислить: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^2 + 3x^4 - x + 1}{5x^3 - 8x^5 - 9x^8}$.

Решение.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^2 + 3x^4 - x + 1}{5x^3 - 8x^5 - 9x^8} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{7x^2}{x^8} + \frac{3x^4}{x^8} - \frac{x}{x^8} + \frac{1}{x^8}}{\frac{5x^3}{x^8} - \frac{8x^5}{x^8} - \frac{9x^8}{x^8}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{7 \rightarrow 0}{x^6} + \frac{3 \rightarrow 0}{x^4} - \frac{1 \rightarrow 0}{x^7} + \frac{1 \rightarrow 0}{x^8}}{\frac{5}{x^5 \rightarrow 0} - \frac{8}{x^3 \rightarrow 0} - 9} = \frac{0}{-9} = 0.$$

Ответ: 0.

6. Вычислить: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 7x}{3x^2}.$

Решение.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 7x}{3x^2} &= \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{7x}{2}}{3x^2} = \\ &= \frac{2}{3} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{7x}{2}}{\frac{7}{2}x} \right)^2 \cdot \frac{49}{4} = \frac{2}{3} \cdot \frac{49}{4} = \frac{49}{6}. \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{49}{6}.$

7. Вычислить: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x-3}{4x+5} \right)^{x-3}.$

Решение. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x-3}{4x+5} \right)^{x-3} = \left| \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x-3}{4x+5} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 - \frac{3}{x}}{4 + \frac{5}{x}} = 1, \\ \lim_{x \rightarrow \infty} (x-3) = \infty \end{array} \right| = (1^\infty) =$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \left(\frac{4x-3}{4x+5} - 1 \right) \right)^{x-3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-8}{4x+5} \right)^{x-3} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left[\left(1 + \frac{-8}{4x+5} \right)^{\frac{4x+5}{-8}} \right]^{\frac{-8}{4x+5} (x-3)} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{-8(x-3)}{4x+5}} = e^{-8 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-3}{4x+5}} = e^{-8 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{3}{x}}{4 + \frac{5}{x}}} = e^{\frac{-8}{4}} = e^{-2}.$$

Ответ: e^{-2}

8. Вычислить: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x+3}{3x-4} \right)^{2x-1}$.

Решение.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x+3}{3x-4} \right)^{2x-1} = \left[\begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x+3}{3x-4} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 + \frac{3}{x}}{3 - \frac{4}{x}} = \frac{5}{3} \\ \lim_{x \rightarrow \infty} (2x-1) = \infty \end{array} \right] =$$

$$= \left(\frac{5}{3} \right)^\infty = \begin{cases} +\infty, & \text{если } x \rightarrow +\infty, \\ 0, & \text{если } x \rightarrow -\infty. \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} +\infty, & \text{если } x \rightarrow +\infty, \\ 0, & \text{если } x \rightarrow -\infty. \end{cases}$

9. Вычислить: $\lim_{x \rightarrow \infty} (x-2) [\ln(7x-3) - \ln(7x+4)]$.

Решение.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x-2) [\ln(7x-3) - \ln(7x+4)] = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{7x-3}{7x+4} \right)^{x-2} =$$

$$= \left[\begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{7x-3}{7x+4} \right)^{x-2} = (1^\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[1 + \left(\frac{7x-3}{7x+4} - 1 \right) \right]^{x-2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{-7}{7x+4} \right]^{x-2} \\ = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{-7}{7x+4} \right)^{\frac{7x+4}{-7}} \right]^{\frac{-7(x-2)}{7x+4}} = e^{-7 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-2}{7x+4}} = e^{-\frac{7}{7}} = e^{-1} > 0 \end{array} \right] =$$

$$= \ln \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{7x-3}{7x+4} \right)^{x-2} = \ln e^{-1} = -1.$$

Ответ: -1.

10. Вычислить: $\lim_{x \rightarrow 3} (4x-11) \frac{x+1}{x^2-9}$.

Решение.

$$\lim_{x \rightarrow 3} (4x-11) \frac{x+1}{x^2-9} = (1^\infty) = \lim_{x \rightarrow 3} \left(\left[1 + (4x-12) \right] \frac{(4x-12) \cdot (x+1)}{x^2-9} \right) =$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow 3} \frac{4(x-3)(x+1)}{(x-3)(x+3)}} = e^{4 \cdot \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+1}{x+3}} = e^{4 \cdot \frac{4}{6}} = e^{\frac{8}{3}}.$$

Ответ: $e^{\frac{8}{3}}$.

11. Вычислить: $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln(1 + \cos x)}{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2}$.

Решение.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln(1 + \cos x)}{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2} &= \left(\frac{0}{0}\right) = \left. \begin{array}{l} x - \frac{\pi}{2} = y; \quad y \rightarrow 0 \\ x = \frac{\pi}{2} + y \quad x \rightarrow \frac{\pi}{2} \end{array} \right| = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} + y\right)\right)}{y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - \sin y)}{y^2} = \left| \ln(1 + (-\sin y)) \underset{y \rightarrow 0}{\sim} (-\sin y) \right| = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-\sin y}{y^2} = - \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{\sin y}{y} \right) \cdot \frac{1}{y} = \left| \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 1 \right| = - \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{y} = -\infty. \end{aligned}$$

Ответ: $-\infty$.

12. Исследовать на непрерывность $f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0, & \frac{\pi}{2} < x < \pi \\ 2, & x \geq \pi \end{cases}$.

Решение.

1) внутри промежутков задания функция представлена непрерывными функциями.

Значит, возможными точками разрыва могут быть $x = \frac{\pi}{2}$; $x = \pi$;

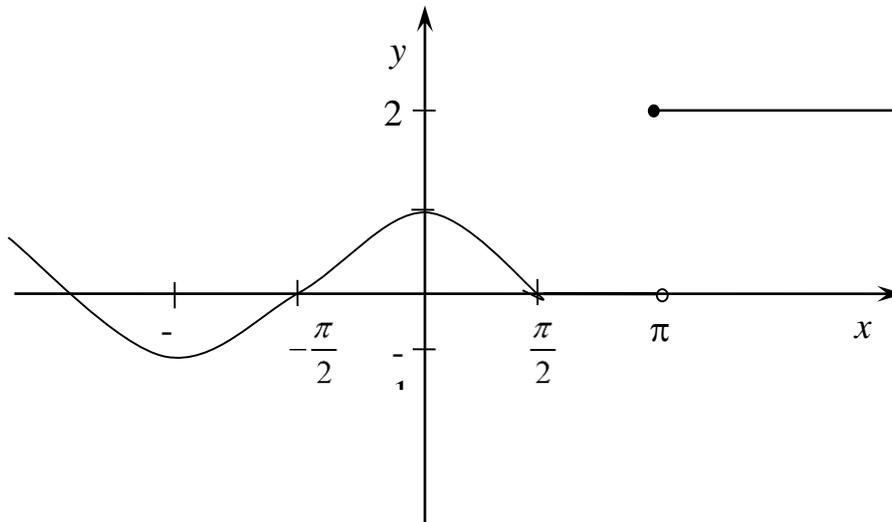
2) имеем:

$$\left. \begin{array}{l} f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos \frac{\pi}{2} = 0 \\ \lim_{\substack{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0 \\ x < \frac{\pi}{2}}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cos x = 0 \\ \lim_{\substack{x \rightarrow \frac{\pi}{2}+0 \\ x > \frac{\pi}{2}}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} 0 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

при $x = \frac{\pi}{2}$ - функция непрерывна.

$$\left. \begin{array}{l}
 f(\pi) = 2 \\
 3) \lim_{\substack{x \rightarrow \pi-0 \\ x < \pi}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi} 0 = 0 \\
 \lim_{\substack{x \rightarrow \pi+0 \\ x > \pi}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi} 2 = 2
 \end{array} \right\} 0 \neq 2 \Rightarrow$$

при $x = \pi$ функция терпит разрыв I рода.



Аналогичный вариант для самопроверки

1. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{2x^2 - x - 6}$. Ответ: $\frac{1}{7}$.
2. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 + 3x - 2}{3x^2 + 2x - 8}$. Ответ: 1.
3. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{7x^5 - 6x^4 - 1}{x^3 - 1}$. Ответ: $\frac{11}{3}$.
4. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{x+4} - 1}{\sqrt{3-2x} - 3}$. Ответ: $-\frac{3}{2}$.
5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^8 + 3x^4 - x + 1}{5x^3 - 8x - 9x^8}$. Ответ: $-\frac{7}{9}$.

6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{\cos x}$ Ответ: 0.
7. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-3}{x+9} \right)^{x-2}$ Ответ: e^{-12} .
8. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{8x+1}{3x+7} \right)^{3x-1}$ Ответ: $\begin{cases} +\infty, & \text{если } x \rightarrow +\infty, \\ 0, & \text{если } x \rightarrow -\infty. \end{cases}$
9. $\lim_{x \rightarrow 1} (2x-1)^{\frac{x+1}{x^2-1}}$ Ответ: e^2 .
10. $\lim_{x \rightarrow \infty} x(\ln(x-3) - \ln(x+3))$ Ответ: -6.
11. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln(1 + \cos x)}{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}$ Ответ: -1.
12. Исследовать функцию на непрерывность

$$F(x) = \begin{cases} 1-x, & x \in (-\infty; 0] \\ \frac{1}{x}, & x \in (0; 2) \\ \frac{x}{4}, & x \in [2; +\infty) \end{cases}$$

Ответ: при $x = 0$ функция терпит разрыв II рода; при $x = 2$ функция непрерывна.

Трехуровневые тестовые задания к разделу «Введение в математический анализ»

Уровень I

I. Вычислить:

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)! + (n+1)!}{(n+3)!}$; Ответ: 0.
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^{n+1} + 3^{n+1}}{5^n + 3^n}$; Ответ: 5.
- 3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 + x^2 - 6}{2x^4 - x + 2}$; Ответ: 1,5.
- 4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7-3x}{5x^3 + 2x^2 - 1}$; Ответ: 0.

$$5) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{2x^2 - x - 6}; \quad \text{Ответ: } \frac{1}{7}.$$

$$6) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{2-x} - \sqrt{x+6}}{x^2 - x - 6}; \quad \text{Ответ: } \frac{1}{10}.$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1+3x} - 1}; \quad \text{Ответ: } \frac{2}{3}.$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{\operatorname{arctg} x}; \quad \text{Ответ: } 5.$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{1 - \cos 8x}; \quad \text{Ответ: } \frac{1}{4}.$$

$$10) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{\frac{1}{x}}; \quad \text{Ответ: } e^2.$$

$$11) \lim_{x \rightarrow \infty} (2x + 3) [\ln(x + 2) - \ln x]. \quad \text{Ответ: } 4.$$

II. Для заданных функций найти эквивалентные в соответствующем процессе величины:

$$1) 20 + 5x - 8x^2 + 5x^3 \underset{x \rightarrow \infty}{\sim}; \quad \text{Ответ: } 5x^3.$$

$$2) 3x + x^3 \underset{x \rightarrow 0}{\sim}; \quad \text{Ответ: } 3x.$$

$$3) x^2 \operatorname{tg} x \underset{x \rightarrow 0}{\sim}; \quad \text{Ответ: } x^3.$$

$$4) \sqrt{x} + \sin x \underset{x \rightarrow 0}{\sim}; \quad \text{Ответ: } \sqrt{x}.$$

$$5) \operatorname{tg} x + 2x \underset{x \rightarrow 0}{\sim}; \quad \text{Ответ: } 3x.$$

$$6) 1 - \cos 5x \underset{x \rightarrow 0}{\sim}; \quad \text{Ответ: } \frac{25x^2}{2}.$$

$$7) e^{2x} - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim}; \quad \text{Ответ: } 2x.$$

$$8) \ln(5x^2 + 3x + 1) \underset{x \rightarrow 0}{\sim}. \quad \text{Ответ: } 3x.$$

III. Вычислить с помощью эквивалентных:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2}; \quad \text{Ответ: } \frac{1}{4}.$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\operatorname{tg}(6x-3)}{\sin(2x-1)}; \quad \text{Ответ: 3.}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{\sin 7x}; \quad \text{Ответ: 0.}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{e^{x+1} - 1}{2x + 2}; \quad \text{Ответ: } \frac{1}{2}.$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 7x}{5x^2 - 3x}. \quad \text{Ответ: } -\frac{7}{3}.$$

IV.

1. Установить область непрерывности функций и найти их точки разрыва:

$$a) y = \frac{7x + 4}{7x - 4};$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{4}{7}, \text{ точка разрыва 2-го рода, } D(y) = \left(-\infty; \frac{4}{7}\right) \cup \left(\frac{4}{7}; +\infty\right).$$

$$б) y = 2^{\frac{1}{x+5}};$$

$$\text{Ответ: } x = -5, \text{ точка разрыва 2-го рода, } D(y) = (-\infty; -5) \cup (-5; +\infty).$$

$$в) \ln(1 - x^2).$$

$$\text{Ответ: } D(y) = (-1; 1).$$

2. Исследовать на непрерывность и сделать схематический чертеж:

$$f(x) = \begin{cases} x - 3, & x < 0, \\ x + 1, & 0 \leq x \leq 4, \\ x^2 + 3, & x > 4. \end{cases}$$

IV. Найти соответствие между условием и графиком. Ответ представить в виде:

1) — ...; 2) — ...; 3) — ...; 4) — ...; 5) — ...; 6) — ...

$$1. \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0.$$

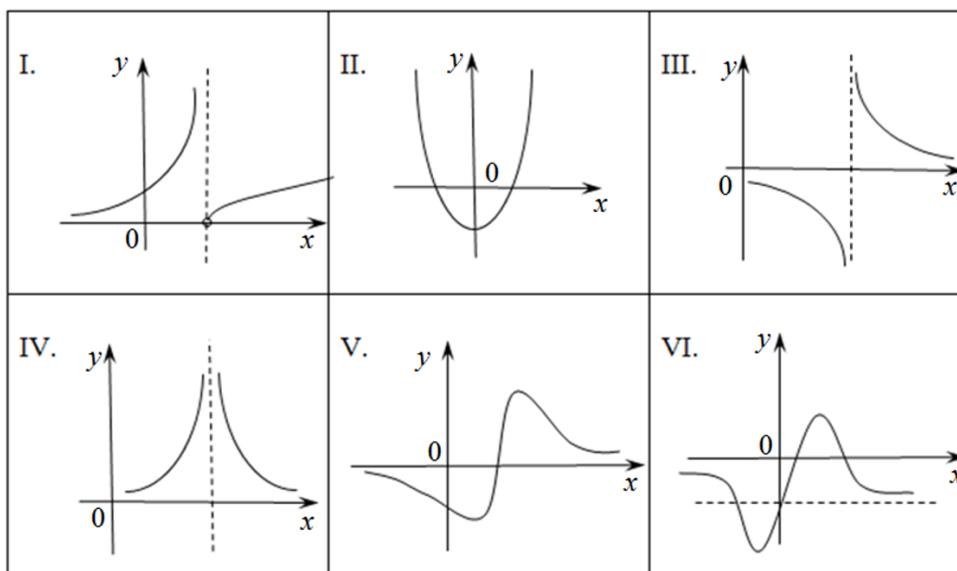
$$2. \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty.$$

$$3. \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty, \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 0. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty, \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty. \end{cases}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1.$$

$$6. \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1, \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0. \end{cases}$$



Уровень II

I. Вычислить:

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n}}{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{3^n}}.$$

Ответ: $\frac{4}{3}$.

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{n^5 + 2} - \sqrt[3]{n^2 + 1}}{\sqrt[5]{n^4 + 2} - \sqrt{n^3 + 1}}.$$

Ответ: 0.

$$3. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^3 - 8x + 8}.$$

Ответ: $-\frac{1}{4}$.

$$4. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1}{3x^4 - 5x^3 + 2x^2 - x + 1}.$$

Ответ: $\frac{1}{2}$.

$$5. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x - 2 - \sqrt{4x^2 - x - 2}}{x^2 - 3x + 2}.$$

Ответ: $\frac{1}{2}$.

6. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^3 - 2x - 1}{\sqrt{3x^3 + 9} - \sqrt{4x^3 + 8}}$. Ответ: $-\frac{28\sqrt{3}}{3}$.
7. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos 3x}{\sin 2x}$. Ответ: $-\frac{3}{2}$.
8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \cos x} - \sqrt{2} \cos x}{\sqrt{3 + \cos x} - 2 \cos x}$. Ответ: $\frac{3\sqrt{2}}{7}$.
9. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$. Ответ: $\frac{\pi}{4}$.
10. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x + 1)^{10}}{3x^{10} - 7x^9 + 3x^2 - 2}$. Ответ: $\frac{2^{10}}{3}$.
11. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{x - 1}$. Ответ: e .
12. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \operatorname{tg}^2 x\right)^{\frac{1}{2x}}$. Ответ: 1.
13. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left((2x + 1)(\ln(3x + 1) - \ln(3x - 2)) \right)$. Ответ: 2.

II. Для заданных функций найти эквивалентные в соответствующем процессе величины:

1. $\sqrt{x + \sqrt{x^2 + \sqrt{x^3 + 1}}}$ $\underset{x \rightarrow \infty}{\sim}$. Ответ: $\sqrt{2x}$.
2. $\sqrt[7]{1 - 3x - 5x^2} - 1$ $\underset{x \rightarrow 0}{\sim}$. Ответ: $-\frac{3}{7}$.
3. $1 - \cos^3 2x$ $\underset{x \rightarrow 0}{\sim}$. Ответ: $6x^2$.
4. $a^{3x} - \cos 9x$ $\underset{x \rightarrow 0}{\sim}$. Ответ: $3x \ln a$.
5. $\ln(3 - 2e^{2x})$ $\underset{x \rightarrow 0}{\sim}$. Ответ: $-4x$.
6. $(x^3 - 2x^5) \lg \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}\right)$ $\underset{x \rightarrow 0}{\sim}$. Ответ: $\frac{x^5}{4 \ln 10}$.
7. $e^{2x} - e^\pi$ $\underset{x \rightarrow \frac{\pi}{2}}{\sim}$. Ответ: 0.

III. Вычислить с помощью эквивалентных:

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1 + x^4} + 2\sqrt[3]{1 + x^6}}{(x + \sqrt{1 + x^2})^2}$. Ответ: $\frac{3}{4}$.

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(2e^{x \sin x} - 1)}{\ln \cos x}$. Ответ: -4.
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt[3]{1+2x} \cdot \sqrt[4]{1+3x}}{x}$. Ответ: $\frac{1}{2}$.
4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x^2}{x^2(1 - \cos x)}$. Ответ: 1.
5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\cos x} + e^{\cos 2x} - 2e^{\cos 4x}}{x^2}$. Ответ: $-\frac{27}{2}$.
6. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\arcsin(4-x)}{5^{4-x} - 1}$. Ответ: $\log_5 e$.
7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 2x}{x \cdot \arcsin x}$. Ответ: 2.

IV. Доказать по определению, что:

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{3n} = 1$.
2. $\lim_{x \rightarrow 5} (2x^2 - 5x) = 25$.

Уровень III

I. Вычислить:

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2010 \sqrt{2010 \sqrt{2010 \dots}}}$. Ответ: 2010.
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \cdot \sin \frac{2x+1}{x^2 + 4x^3}$. Ответ: $\frac{1}{2}$.
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \ln \frac{\sqrt{n^2+1}}{n}$. Ответ: $\frac{1}{2}$.
4. $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{ctg} x \ln(x + \sqrt{x+1})$. Ответ: $\frac{1}{2}$.
5. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}-0} (\cos x - \sin x) \sqrt{\operatorname{tg} 2x}$; Ответ: 0.
6. $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{4}{3}} \left((x^2 + 1)^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{2}{3}} \right)$. Ответ: $\frac{1}{3}$.

7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{1 - \cos x \sqrt{\cos x}} - \frac{1}{1 - \sqrt{\cos x}}$. Ответ: 1.
8. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{1 + 2 \cos 2x} - \frac{\sqrt{3}}{2 \sin 3x} \right)$. Ответ: $-\frac{1}{3}$.
9. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(e^x + \sin x \right)^{\frac{1}{x}}$. Ответ: e^2 .
10. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{\ln \cos x}}$. Ответ: 0.
11. $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[x]{\cos \sqrt{x}}$. Ответ: $e^{-\frac{1}{2}}$.
12. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} \right)^x$. Ответ: e .
13. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 3x + 5}{x^2 + x + 1} \right)^x$. Ответ: e^2 .
14. $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x-1}{2x-3} \right)^{\frac{4}{x^2-4}}$. Ответ: e^{-1} .
15. $\lim_{x \rightarrow +0} \left(\frac{x-1}{2x-3} \right)^{\frac{1}{x}}$. Ответ: 0.
16. $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x-1}{2x-3} \right)^{3x}$. Ответ: 1.

II. Доказать по определению, что:

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{x^2} = 0$.
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos n\alpha}{n-1} = 0$.

III. Исследовать на непрерывность:

- $f(x) = x^2 \cdot \sin \frac{1}{x}$.

Ответ: $x = 0$ – точка устранимого разрыва.

- $f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

Ответ: $x = 0$ – точка непрерывности.

IV. Выделить главную часть функций:

1. $y = \sqrt[5]{x^2 - 3} - 1$ при $x \rightarrow 2$. Ответ: $\frac{4}{5}(x - 2)$.
2. $y = \ln(x^2 - x - 1)$ при $x \rightarrow 2$. Ответ: $3 \cdot (x - 2)$.
3. $y = \ln\left(\frac{x^2 + 2x + 4}{x^2 - x - 1}\right)$ при $x \rightarrow \infty$. Ответ: $\frac{3}{x}$.
4. $y = \ln(\cos ax + \sin bx)$ при $x \rightarrow 0$. Ответ: bx .
5. $y = \sqrt[3]{\cos 2x} - 1$ при $x \rightarrow 0$. Ответ: $-\frac{2x^2}{3}$.

V. Вычислить с помощью эквивалентных:

1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{\ln x}$. Ответ: e .
2. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{e^x - e^a}{\ln x - \ln a}$. Ответ: $a \cdot e^a$.
3. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3^x - \sqrt{8+x}}{x-1}$. Ответ: 2 .
4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{2x^2 + 10x - 1} - \sqrt[7]{2x^2 + 10x - 1}}{x}$.
Ответ: $\frac{4}{7}$.
5. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\sqrt{1+x} - x\right)^{\frac{1}{x}}$. Ответ: $e^{-\frac{1}{2}}$.
6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{1+x \sin 10x} - 1}{x^2}$. Ответ: 2 .
7. $\lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln x - 1}{x - e}$. Ответ: $\frac{1}{e}$.

VI. Построить графики функций:

1. $y = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin^{2n} x$.
2. $y = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1+x^n} \quad (x \geq 0)$.

ГЛОССАРИЙ

Новые понятия	Содержание
<i>1</i>	<i>2</i>
Функция	правило, закон, по которому каждому элементу x (аргументу) некоторого множества X (области определения) соответствует единственный элемент y (зависимая переменная) другого множества Y (область значений функции)
Четная функция	функция f , у которой область определения симметрична относительно начала координат и для всех x из ее области определения $f(-x) = f(x)$
Нечетная функция	функция f , у которой область определения симметрична относительно начала координат и для всех x из ее области определения $f(-x) = -f(x)$
Функция монотонно возрастающая (убывающая) на интервале $(a, b) \in X$	функция $y = f(x)$, для которой большему значению аргумента из (a, b) соответствует большее (меньшее) значение функции, т.е. для $x_1 < x_2$ следует $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$)
Ограниченная функция	функция, для которой в заданной области определения существует постоянное $k > 0$, такое, что $ f(x) \leq k$
Основные элементарные функции	<p>1) <i>степенная</i> $y = x^p$, где p – действительное число;</p> <p>2) <i>показательная</i> $y = a^x$, где a – положительное число, не равное 1;</p> <p>3) <i>логарифмическая</i> $y = \log_a x$, где $a > 0$, не равно 1;</p> <p>4) <i>тригонометрические</i> $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{ctg} x$ $y = \operatorname{tg} x$;</p> <p>обратные тригонометрические функции $y = \arcsin x$ $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$</p>
Предел последовательности	число A , к которому можно приблизиться с любой степенью точности при стремлении номера члена последовательности к бесконечности, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$
Предел функции $y = f(x)$ при стремлении аргумента x к фиксированному значению x_0	число A , к которому может приблизиться значение функции y с любой наперед заданной точностью ε : $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$

1	2
<i>Два замечательных предела</i>	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y = e$
Функция $y = f(x)$ непрерывна в точке $x = x_0$	<p>если существует значение функции в точке x_0 и ее предел в точке x_0 равен значению функции в этой точке $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, или ее предел справа равен пределу слева при $x \rightarrow x_0$ и равен значению функции в этой точке:</p> $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = f(x_0)$ $(f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0) = f(x_0))$

ПРИЛОЖЕНИЕ

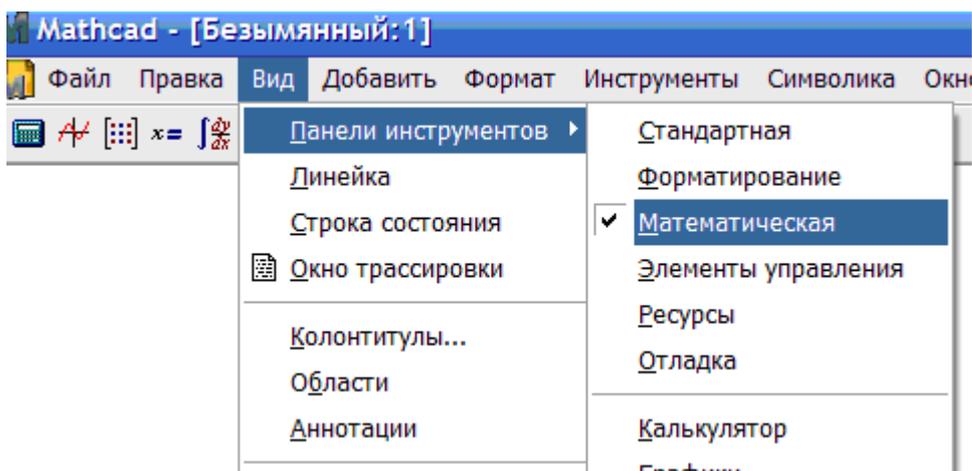
Решение задач по теме «Введение в математический анализ» с помощью математических пакетов Maple и Mathcad

Предлагаемые программы помогут Вам при проверке домашнего задания или, при необходимости, предоставят возможность быстрого вычисления пределов любой сложности, исследования функций на непрерывность и др.

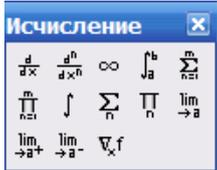
Рассмотрим один из наиболее популярных математических пакетов MathCAD.

Чтобы начать работать с приложением, вызовите панель Calculus (вычисления).

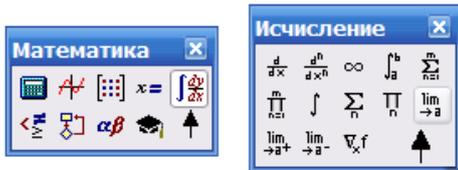
Выберите на панели вкладку ВИД → ПАНЕЛИ ИНСТРУМЕНТОВ → МАТЕМАТИЧЕСКАЯ



Появится панель  , на данной вкладке необходимо

выбрать панель «Исчисление»  и продолжить работу.

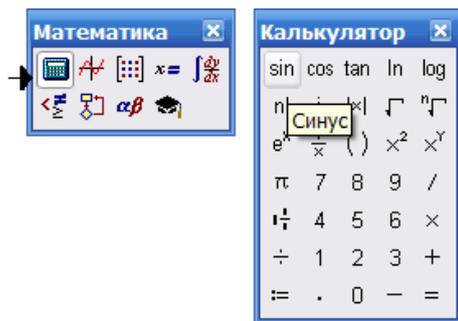
Например, Вы хотите вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$. Для этого на вкладке «Исчисление» найдите значок предела



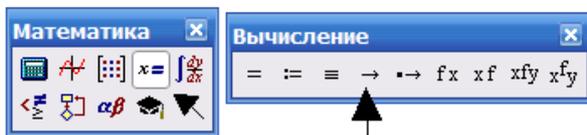
(на рисунке на него указывает стрелочка).

После этого появляется следующий символ $\lim_{x \rightarrow \cdot}$, в нашем примере

$x \rightarrow 0$, поэтому нижние поля мы заполняем соответственно $\lim_{x \rightarrow 0}$. Далее, используя вкладку «калькулятор»

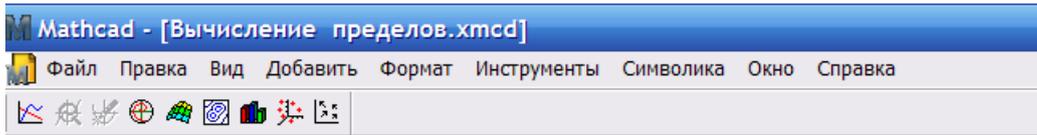


заполним основное поле $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}$. Затем выбираем «вычисление»



на этой вкладке стрелочку и видим результат $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} \rightarrow 1$.

Далее разобраны задачи наиболее часто встречаемые в теме «Введение в математический анализ».



Вычисление пределов

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} \rightarrow 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[[n! \cdot (n+2)] - (n-2)!]}{(n-1)! + n!} \rightarrow \infty$$

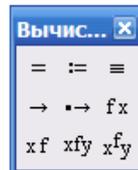
Решение пределов любой сложности



Исследовать на непрерывность

$$y = \frac{4 - x^2}{8 + x^3}$$

$$y(x) := \frac{(4 - x^2)}{8 + x^3}$$



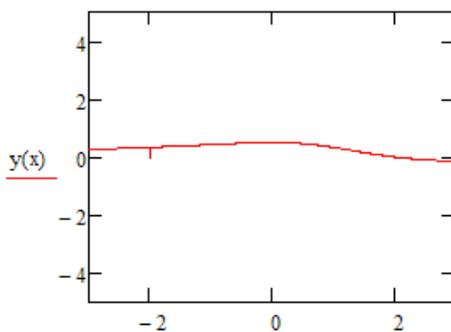
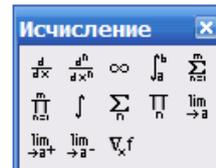
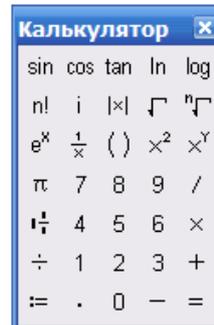
Предполагаемая точка разрыва $x = -2$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{(4 - x^2)}{8 + x^3} \rightarrow \frac{1}{3}$$

исследуем слева

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{(4 - x^2)}{8 + x^3} \rightarrow \frac{1}{3}$$

исследуем справа



Построение графика

Рассмотрим несколько функций и убедимся, что они бесконечно малые

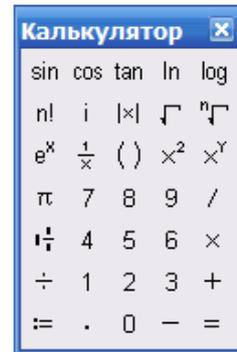
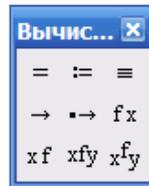
$$f(x) := \sqrt{1+x^2} - 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \rightarrow 0$$

$$p(x) := \exp(x^2) - 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} p(x) \rightarrow 0$$

$$u(x) := x \cdot \ln(1 + \sqrt{x}) \quad \lim_{x \rightarrow 0} u(x) \rightarrow 0$$

$$v(x) := 1 - \cos(x^3) \quad \lim_{x \rightarrow 0} v(x) \rightarrow 0$$

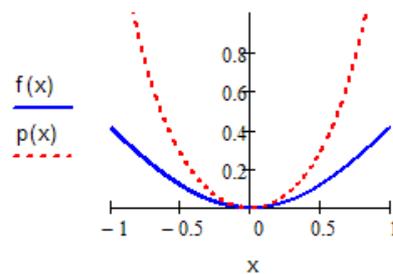
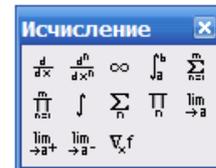
$$w(x) := x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad \lim_{x \rightarrow 0} w(x) \rightarrow 0$$



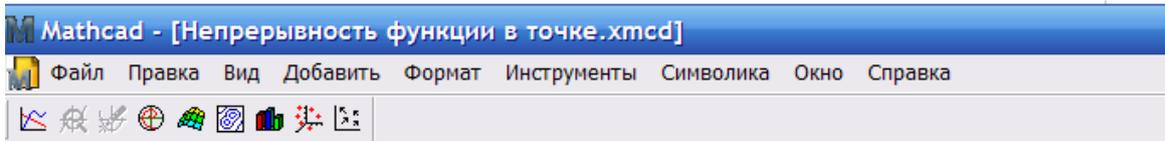
Все они бесконечно малые сравним некоторые из них

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{p(x)} \rightarrow \frac{1}{2}$$

они одного порядка малости



Строим графики

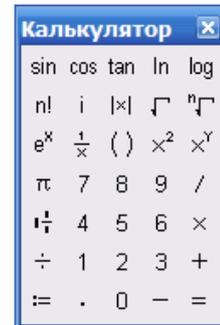
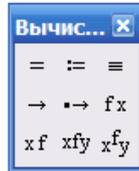


Убедимся в непрерывности функции в точке $x=2$

$$y(x) := x^4 - 2$$

Найдём значение функции в точке

$$y(2) = 14$$



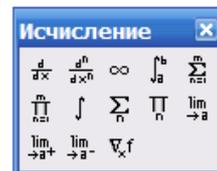
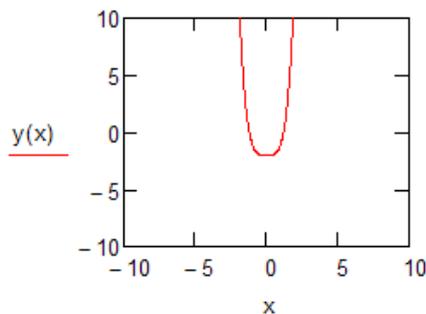
$$\lim_{x \rightarrow 2} y(x) \rightarrow 14$$

Вычислим предел в этой точке

+

Функция непрерывна

Сделаем график



Рассмотрим вычисление пределов любой сложности, исследование функций на непрерывность с помощью математического пакета **Maple**. Maple имеет несколько операторов для работы с пределами: `Limit` (функция, $x = a$) – отображает искомый предел, `limit` (функция, $x = a$) – выводит ответ. На разобранных примерах мы демонстрируем сочетание этих операторов.

Нужно помнить, что в выбранной программе очень важное место занимают операторы «:=» – присвоить, «;» – окончание предложения.

Вычисление пределов

$$> \text{Limit} \left(\frac{\sin(10 \cdot x)}{10 \cdot x}, x = \pi \right) = \text{limit} \left(\frac{\sin(x)}{x}, x = \pi \right);$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \left(\frac{1}{10} \frac{\sin(10x)}{x} \right) = 0$$

$$> \text{Limit} \left(\sqrt{25 \cdot x^2 + x + 2} - \sqrt{25 \cdot x^2 - 3 \cdot x}, x = \infty \right) = \text{limit} \left(\sqrt{25 \cdot x^2 + x + 2} - \sqrt{25 \cdot x^2 - 3 \cdot x}, x = \infty \right);$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{25x^2 + x + 2} - \sqrt{25x^2 - 3x} \right) = \frac{2}{5}$$

$$> \text{Limit} \left(\sin \left(\frac{x}{2} \right)^{\frac{1}{\sin(2 \cdot x)}}, x = \pi \right) = \text{limit} \left(\sin \left(\frac{x}{2} \right)^{\frac{1}{\sin(2 \cdot x)}}, x = \pi \right);$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \sin \left(\frac{1}{2} x \right)^{\left(\frac{1}{\sin(2x)} \right)} = 1$$

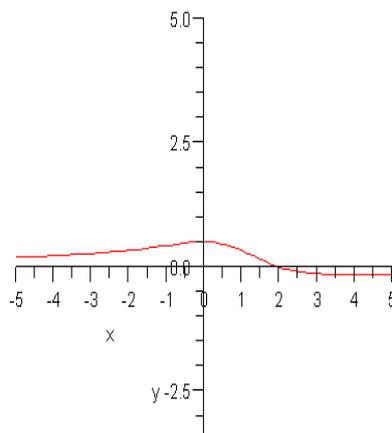
$$> \text{Limit} \left(\frac{4 - x^2}{8 + x^3}, x = -2, \text{left} \right) = \text{limit} \left(\frac{4 - x^2}{8 + x^3}, x = -2, \text{left} \right); \text{исследование функции на непрерывность в точке } x = -2 \text{ слева}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \left(\frac{4 - x^2}{8 + x^3} \right) = \frac{1}{3}$$

$$> \text{Limit} \left(\frac{4 - x^2}{8 + x^3}, x = -2, \text{right} \right) = \text{limit} \left(\frac{4 - x^2}{8 + x^3}, x = -2, \text{right} \right); \text{исследование функции на непрерывность в точке } x = -2 \text{ справа}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \left(\frac{4 - x^2}{8 + x^3} \right) = \frac{1}{3}$$

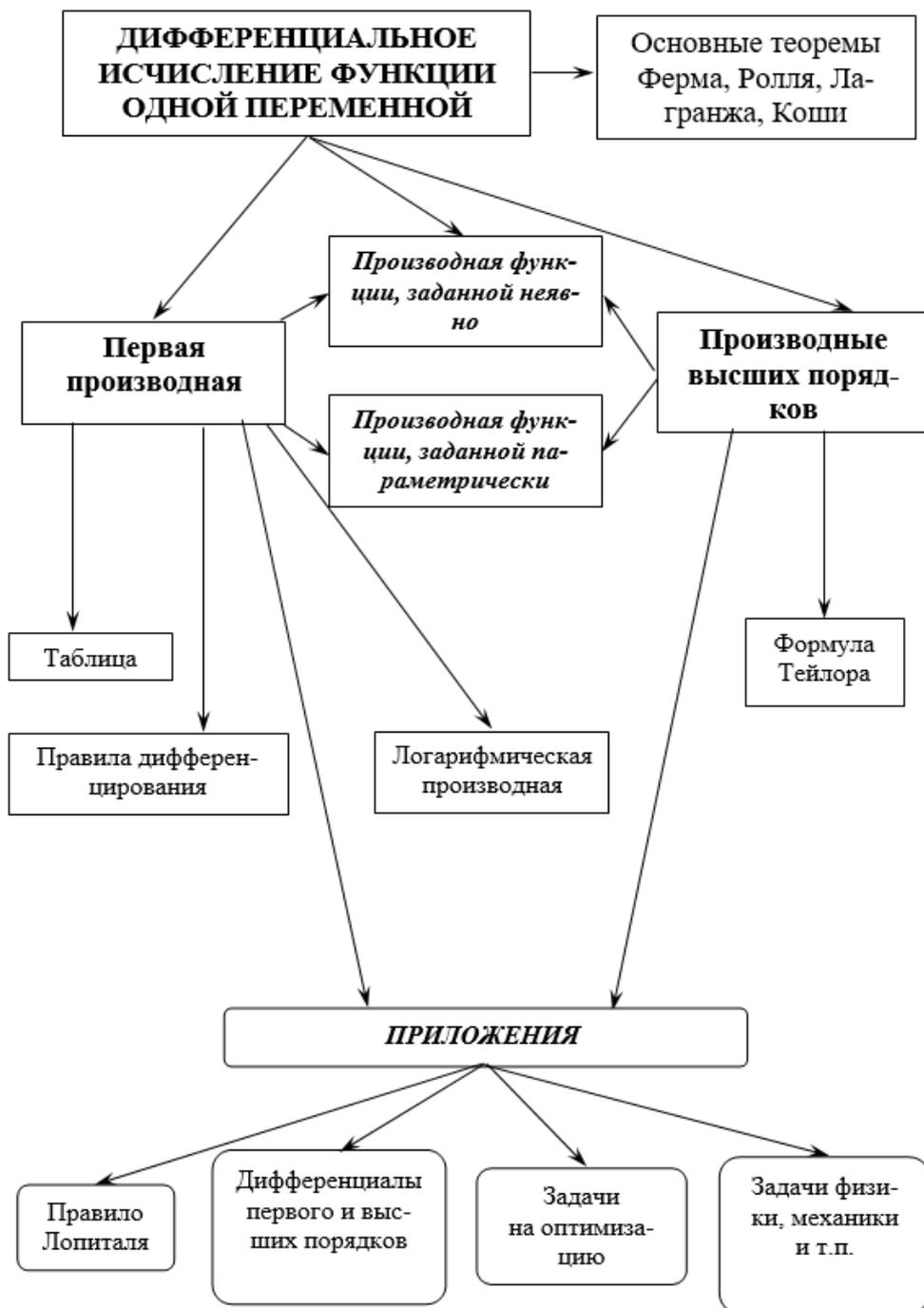
$$> \text{plot} \left(\frac{4 - x^2}{8 + x^3}, x = -5 \dots 5, y = -5 \dots 5 \right); \text{построение графика функций}$$



При необходимости Вы можете воспользоваться нашими примерами, просто введите свои данные в предложенные нами операторы.

РАЗДЕЛ 5
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ
ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Графическая схема



Информационная таблица «Дифференциальное исчисление функции одной переменной»

Производной от функции $y = y(x)$ в точке x называется предел приращения функции к приращению аргумента, когда последнее стремится к нулю, если этот предел существует, конечен и не зависит от способа стремления Δx к нулю.

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Таблица производных

- | | | |
|-----|---|-----------------------------------|
| 1. | $(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$; | <i>степенная</i> |
| 2. | $x' = 1$; | |
| 3. | $(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$; | |
| 4. | $(\frac{1}{u})' = -\frac{1}{u^2} \cdot u'$; | |
| 5. | $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$; | <i>тригонометрические</i> |
| 6. | $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$; | |
| 7. | $(\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$; | |
| 8. | $(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$; | |
| 9. | $(a^x)' = a^x \cdot \ln a \cdot u'$; | <i>показательные</i> |
| 10. | $(e^x)' = e^x \cdot u'$; | |
| 11. | $(\log_a u)' = \frac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$; | <i>логарифмическая</i> |
| 12. | $(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$; | |
| 13. | $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$; | <i>обратно-тригонометрические</i> |
| 14. | $(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$; | |
| 15. | $(\operatorname{arctg} u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$; | |
| 16. | $(\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$; | |
| 17. | $(\operatorname{sh} u)' = \operatorname{ch} u \cdot u'$; | <i>гиперболические</i> |
| 18. | $(\operatorname{ch} u)' = \operatorname{sh} u \cdot u'$; | |
| 19. | $(\operatorname{th} u)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 u} \cdot u'$; | |
| 20. | $(\operatorname{cth} u)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 u} \cdot u'$; | |

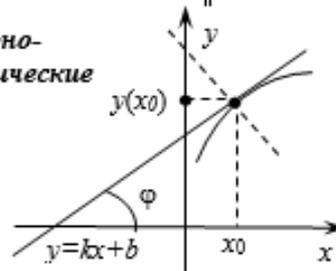
Правила дифференцирования

- | | |
|---|-------------------------------------|
| 1. $c' = 0$; | 2. $(u \pm v)' = u' \pm v'$; |
| 3. $(uv)' = u'v + uv'$; | 4. $(cu)' = cu'$; |
| 5. $(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$; | 6. $f'_x(u(x)) = f'_u \cdot u'_x$. |

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}, \quad y''_{xx} = \frac{(y'_t)'_t}{x'_t}, \quad \text{if } \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

$$y'_x = -\frac{F'_x}{F'_y}, \quad \text{if } F(x, y) = 0$$

Геометрический смысл производной: производная от функции $y = f(x)$ в точке x_0 есть тангенс угла наклона касательной, проведённой к графику функции в точке x_0 : $y'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha = k$.



$$y = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0)$$

- уравнение касательной.

$$y = y(x_0) - \frac{1}{y'(x_0)}(x - x_0)$$

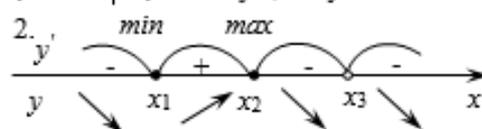
- уравнение нормали

Механический смысл производной: производная от функции S , равная $S'(t)$, где $S(t)$ -путь, пройденный материальной точкой за время t , есть мгновенная скорость материальной точки в определенный момент времени. $S = S(t)$, $v_{\text{мгн}}(t_0) = S'(t_0)$

I. Монотонность, экстремум

1. Найти критические точки

$$y' = 0 \quad | \quad y' \text{ - не существует}$$



II. Наибольшее и наименьшее значения

1. Найти критические точки.
2. Вычислить $f(x)$ в критических точках, попавших в отрезок.
3. Вычислить $f(x)$ на концах отрезка
4. Выбрать $f_{\text{макс}}$ и $f_{\text{мин}}$

**Базовый минимум к разделу
«Дифференциальное исчисление функции одной переменной»**

1. Найти производную данной функции:

а) $y = \frac{x+1}{x-1}$;

б) $y = e^x \cos x$;

в) $y = \frac{x}{4^x}$;

г) $y = \sqrt[3]{x^2} - x\sqrt[4]{x}$.

Решение.

а) применяя формулы $(u/v)' = (u'v - uv')/v^2$ и $x' = 1$, $c' = 0$, получаем

$$y' = \left(\frac{x+1}{x-1} \right)' = \frac{(x+1)'(x-1) - (x+1)(x-1)'}{(x-1)^2} = \\ = \frac{1 \cdot (x-1) - (x+1) \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2};$$

б) применяя формулы $(uv)' = u'v + uv'$, $(x^n)' = nx^{n-1}$, находим

$$y' = (e^x)' \cos x + e^x (\cos x)' = e^x \cos x + e^x (-\sin x) = e^x (\cos x - \sin x);$$

в) используя формулы $(u/v)' = (u'v - uv')/v^2$, $(a^x)' = a^x \ln a$, $x' = 1$, получаем

$$y' = \left(\frac{x}{4^x} \right)' = \frac{(x)' \cdot 4^x - x \cdot (4^x)'}{4^{2x}} = \frac{4^x - x \cdot 4^x \ln 4}{4^{2x}} = \frac{4^x (1 - x \ln 4)}{4^{2x}} = \frac{1 - x \ln 4}{4^x};$$

г) имеем

$$y = \sqrt[3]{x^2} - x\sqrt[4]{x} = x^{2/3} - x^{5/4}.$$

Тогда

$$y' = \frac{2}{3} x^{-1/3} - \frac{5}{4} x^{1/4}.$$

2. Найти производную функции:

а) $y = \operatorname{tg} x \cdot \log_3 x$;

б) $y = \frac{e^x - \ln x}{e^x + \ln x}$;

в) $y = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$.

Решение.

Применяя правила дифференцирования и используя таблицу производных, находим:

а)

$$y' = (tgx \cdot \log_3 x)' = (tgx)' \log_3 x + tgx(\log_3 x)' = \frac{\log_3 x}{\cos^2 x} + \frac{tgx}{x \ln 3};$$

б)

$$\begin{aligned} y' &= \left(\frac{e^x - \ln x}{e^x + \ln x} \right)' = \frac{(e^x - \ln x)'(e^x + \ln x) - (e^x - \ln x)(e^x + \ln x)'}{(e^x + \ln x)^2} = \\ &= \frac{(e^x - 1/x)(e^x + \ln x) - (e^x - \ln x)(e^x + 1/x)}{(e^x + \ln x)^2} = \\ &= \frac{e^{2x} - e^x/x + e^x \ln x - \ln x/x - e^{2x} + \ln x \cdot e^x - e^x/x + \ln x/x}{(e^x + \ln x)^2} = \\ &= \frac{2e^x \ln x - 2e^x/x}{(e^x + \ln x)^2} = \frac{2e^x(\ln x - 1/x)}{(e^x + \ln x)^2}; \end{aligned}$$

в)

$$\begin{aligned} y' &= \left(\frac{\sin x}{1 + \cos x} \right)' = \frac{(\sin x)'(1 + \cos x) - \sin x(1 + \cos x)'}{(1 + \cos x)^2} = \\ &= \frac{\cos x \cdot (1 + \cos x) - \sin x \cdot \sin x}{(1 + \cos x)^2} = \frac{1 + \cos x}{(1 + \cos x)^2} = \frac{1}{1 + \cos x}. \end{aligned}$$

3. Найти производную данной функции:

а) $y = 5^{2x-3};$

б) $y = \ln \sin x;$

в) $y = \sin^2 x;$

г) $y = \operatorname{arctg} \sqrt{x}.$

Решение.

а) введем обозначение $2x - 3 = u$. Тогда $y = 5^u$, и, применив формулу для производной сложной функции, получим:

$$y' = (5^u)' = 5^u \ln 5 \cdot u' = 5^{2x-3} \ln 5 \cdot (2x - 3)' = 5^{2x-3} \ln 5 \cdot 2;$$

б) пусть $u = \sin x$, тогда $y = \ln u$. Имеем:

$$y' = (\ln u)' = \frac{1}{u} u' = \frac{1}{\sin x} (\sin x)' = \frac{\cos x}{\sin x} = \operatorname{ctgx};$$

в) если $u = \sin x$, то $y = u^2$,

$$y' = (u^2)' = 2uu' = 2 \sin x \cdot (\sin x)' = 2 \sin x \cdot \cos x = \sin 2x;$$

г) если $u = \sqrt{x}$, то $y = \operatorname{arctg} u$ и

$$y' = (\arctgu)' = \frac{1}{1+u^2} u' = \frac{1}{1+(\sqrt{x})^2} (\sqrt{x})' = \frac{1}{1+x} \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}.$$

4. Найти производную данной функции:

а) $y = \ln \operatorname{tg} \frac{2x+1}{4}$; б) $y = \log_2(\log_3(\log_5 x))$;

в) $y = e^{\sqrt{\ln(ax^2+bx+c)}}$; г) $y = 10^{1-\sin^4 3x}$;

д) $y = \arcsin^2(\ln(x^3+6))$.

Решение.

а) пусть $u = \operatorname{tg} \frac{2x+1}{4}$, тогда $y = \ln u$,

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{u} u' = \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{2x+1}{4}} \left(\operatorname{tg} \frac{2x+1}{4} \right)' = \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{2x+1}{4}} \frac{1}{\cos^2 \frac{2x+1}{4}} \times \\ &\times \left(\frac{2x+1}{4} \right)' = \frac{1}{\sin \frac{2x+1}{4} \cdot \cos \frac{2x+1}{4}} \frac{1}{2} = \frac{1}{\sin \frac{2x+1}{2}}; \end{aligned}$$

б) запишем данную функцию в виде $y = \log_2 u$, где $u = \log_3(\log_5 x)$.

Тогда

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{u \ln 2} u' = \frac{1}{\log_3(\log_5 x) \cdot \ln 2} \cdot (\log_3(\log_5 x))' = \\ &= \frac{1}{\log_3(\log_5 x) \cdot \ln 2} \cdot \frac{1}{\log_5 x \cdot \ln 3} \cdot (\log_5 x)' = \\ &= \frac{1}{\log_3(\log_5 x) \cdot \ln 2} \cdot \frac{1}{\log_5 x \cdot \ln 3} \cdot \frac{1}{x \ln 5}; \end{aligned}$$

в) записав данную функцию в виде $y = e^u$, где $u = \sqrt{\ln(ax^2+bx+c)}$,

имеем

$$\begin{aligned} y' &= e^u u' = e^{\sqrt{\ln(ax^2+bx+c)}} \left(\sqrt{\ln(ax^2+bx+c)} \right)' = \\ &= e^{\sqrt{\ln(ax^2+bx+c)}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\ln(ax^2+bx+c)}} \left(\ln(ax^2+bx+c) \right)' = \\ &= \frac{e^{\sqrt{\ln(ax^2+bx+c)}}}{2\sqrt{\ln(ax^2+bx+c)}} \cdot \frac{1}{ax^2+bx+c} \cdot (ax^2+bx+c)' = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{e^{\sqrt{\ln(ax^2+bx+c)}}}{2\sqrt{\ln(ax^2+bx+c)}} \cdot \frac{1}{ax^2+bx+c} \cdot (2ax+b) = \\
&= \frac{e^{\sqrt{\ln(ax^2+bx+c)}}}{2\sqrt{\ln(ax^2+bx+c)}} \cdot \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c};
\end{aligned}$$

г) пусть $u = 1 - \sin^4 3x$, тогда $y = 10^u$,

$$\begin{aligned}
y' &= 10^u \ln 10 \cdot u' = 10^{1-\sin^4 3x} \ln 10 \cdot (1 - \sin^4 3x)' = \\
&= 10^{1-\sin^4 3x} \ln 10 \cdot (-4 \sin^3 3x) (\sin 3x)' = \\
&= 10^{1-\sin^4 3x} \ln 10 \cdot (-4 \sin^3 3x) \cos 3x \cdot 3 = \\
&= -12 \ln 10 \cdot 10^{1-\sin^4 3x} \cdot \sin^3 3x \cdot \cos 3x;
\end{aligned}$$

д) если $u = \arcsin \ln(x^3 + 6)$, то $y = u^2$,

$$\begin{aligned}
y' &= 2uu' = 2 \arcsin(\ln(x^3 + 6)) \cdot (\arcsin \ln(x^3 + 6))' = \\
&= 2 \arcsin(\ln(x^3 + 6)) \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \ln^2(x^3 + 6)}} (\ln(x^3 + 6))' = \\
&= 2 \arcsin(\ln(x^3 + 6)) \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \ln^2(x^3 + 6)}} \frac{1}{x^{3+6}} (x^3 + 6)' = \\
&= 2 \arcsin(\ln(x^3 + 6)) \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \ln^2(x^3 + 6)}} \frac{1}{x^3 + 6} (x^3 + 6)' = \\
&= 2 \arcsin(\ln(x^3 + 6)) \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \ln^2(x^3 + 6)}} \frac{3x^2}{x^3 + 6} = \\
&= \frac{6x^2 \arcsin(\ln(x^3 + 6))}{(x^3 + 6)\sqrt{1 - \ln^2(x^3 + 6)}}.
\end{aligned}$$

Задачи для самостоятельного решения

В задачах 1.1–1.6 найти производную указанной функции.

1.1. $y = \frac{(x+2)^2}{x^{3/2}}$.

Ответ: $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{2}{x\sqrt{x}} - \frac{6}{x^2\sqrt{x}}$.

$$1.2. \quad y = \frac{x^2 - 3x + 5}{x}.$$

$$\text{Ответ: } y' = (x^2 - 5) / x^2.$$

$$1.3. \quad y = \frac{\arccos x}{1 - x^2}.$$

$$\text{Ответ: } y' = \frac{2x \arccos x - \sqrt{1 - x^2}}{(1 - x^2)^2}.$$

$$1.4. \quad y = x \ln x - x.$$

$$\text{Ответ: } y' = \ln x.$$

$$1.5. \quad y = 3^x \arcsin x.$$

$$\text{Ответ: } y' = \frac{3^x}{\sqrt{1 - x^2}} + 3^x \ln 3 \cdot \arcsin x.$$

$$1.6. \quad y = (1 + x^2) \operatorname{arctg} x.$$

$$\text{Ответ: } y' = 1 + 2x \operatorname{arctg} x.$$

В задачах 2.1.–2.9. найти производную сложной функции.

$$2.1. \quad y = \sqrt{3x^3 - x^2 - 5}.$$

$$\text{Ответ: } y' = \frac{x(9x - 2)}{2\sqrt{3x^3 - x^2 + 5}}.$$

$$2.2. \quad y = (2x + 3x^2)^{-3/4}.$$

$$\text{Ответ: } y' = \frac{-3(1 + 3x)}{2^4 \sqrt[4]{(2x + 3x^2)^7}}.$$

$$2.3. \quad y = \sqrt[3]{x\sqrt{x}}.$$

$$\text{Ответ: } y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

$$2.4. \quad y = \frac{\sqrt{5 - x^2}}{5 + x}.$$

$$\text{Ответ: } y' = \frac{-5(x + 1)}{(5 + x)^2 \sqrt{5 - x^2}}.$$

$$2.5. \quad y = \cos^4 x.$$

$$\text{Ответ: } y' = -4 \cos^3 x \cdot \sin x.$$

$$2.6. \quad y = 4^{\cos x}.$$

$$\text{Ответ: } y' = -4^{\cos x} \ln 4 \cdot \sin x.$$

$$2.7. \quad y = \sqrt{e^x}.$$

$$\text{Ответ: } y' = \frac{1}{2} \sqrt{e^x}.$$

$$2.8. \quad y = \ln \sin x + \frac{1}{2} \cos^2 x.$$

$$\text{Ответ: } y' = \frac{\cos^3 x}{\sin x}.$$

$$2.9. \quad y = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}}.$$

$$\text{Ответ: } y' = -\frac{1}{2\sqrt{1 - x^2}}.$$

В задачах 3.1.–3.4. найти производную данной функции.

$$3.1. \quad y = \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}} + \ln \sqrt{1 - x^2}. \quad \text{Ответ: } y' = \frac{\arcsin x}{(1 - x^2)^{3/2}}$$

$$3.2. \quad y = \arccos \sqrt{1 - 2x} + \sqrt{2x - 4x^2}. \quad \text{Ответ: } y' = \sqrt{\frac{2}{x}} - 4.$$

$$3.3 \quad y = \ln\left(\sin x + \sqrt{1 + \sin^2 x}\right).$$

$$\text{Ответ: } y' = \frac{\cos x}{\sqrt{1 + \sin^2 x}}.$$

$$3.4 \quad y = \sqrt{4x - x^2} + 4\arcsin\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right).$$

$$\text{Ответ: } y' = -\sqrt{\frac{4}{x} - 1}.$$

**МЕТОДИЧЕСКИЕ СРЕДСТВА
ДЛЯ ПОДГОТОВКИ И ПРОВЕДЕНИЯ ИТОГОВОГО КОНТРОЛЯ
ПО РАЗДЕЛУ 5
«ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ
ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ»**

Внеаудиторная контрольная работа

Вариант 0

1. Найти производные следующих функций.

1.1. $y = \ln \operatorname{tg} \sqrt{\operatorname{arctg} 2^{5x}}$.

$$y'_x = \frac{1}{\operatorname{tg} \sqrt{\operatorname{arctg} 2^{5x}}} \cdot \frac{1}{\cos^2 \sqrt{\operatorname{arctg} 2^{5x}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\operatorname{arctg} 2^{5x}}} \cdot \frac{1}{1+(2^{5x})^2} \cdot 2^{5x} \ln 2 \cdot 5.$$

1.2. $y = \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$.

Применим формулу: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

$$y'_x = \frac{-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \sqrt{1-x^2} - \arccos x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{(1-x^2)} = \frac{-\sqrt{1-x^2} + x \cdot \arccos x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \frac{x \cdot \arccos x - \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{(1-x^2)^3}}.$$

1.3. $y = \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \ln \sqrt{1-x^2}$.

$$y'_x = \frac{\left(\arcsin x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) \sqrt{1-x^2} - x \cdot \arcsin x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \frac{(1-x^2) \arcsin x + x\sqrt{1-x^2} + x^2 \cdot \arcsin x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} - \frac{x}{1-x^2} = \frac{\arcsin x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}.$$

$$1.4. xy = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}.$$

Эта функция задана неявно. По правилу дифференцирования неявной функции получим

$$(xy)' = \left(\operatorname{arctg} \frac{x}{y} \right)' \Rightarrow y + xy' = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y} \right)^2} \cdot \frac{y - xy'}{y^2} \Rightarrow y' = \frac{y(1 - x^2 - y^2)}{x(1 + x^2 + y^2)}.$$

$$1.5. y = (\cos x)^{\sin x}.$$

Применение методов предварительного логарифмирования упрощает вычисление производной сложно-показательной функции. Логарифмируя, имеем:

$$\ln y = \sin x \cdot \ln \cos x.$$

Дифференцируем обе части этого уравнения, не забывая, что

$$y = y(x),$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \cos x \cdot \ln \cos x + \sin x \cdot \frac{1}{\cos x} (-\sin x).$$

Следовательно,

$$y' = (\cos x)^{\sin x} \left(\cos x \cdot \ln \cos x - \frac{\sin^2 x}{\cos x} \right) = (\cos x)^{\sin x} (\cos x \cdot \ln \cos x - \operatorname{tg} x \sin x).$$

2. Найти производные второго порядка.

$$2.1. y = (\arcsin x)^2.$$

$$y' = 2 \arcsin x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$y'' = 2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \arcsin x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2} \cdot (1-x^2)} \right) =$$

$$= 2 \left(\frac{1}{1-x^2} + \frac{x \cdot \arcsin x}{\sqrt{1-x^2} (1-x^2)} \right) = 2 \frac{\sqrt{1-x^2} + x \cdot \arcsin x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}.$$

$$2.2. y = \begin{cases} x = t \cdot \ln t \\ y = \frac{\ln t}{t} \end{cases}.$$

Функция задана параметрически,

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}, \quad y''_{xx} = (y'_x)'_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}, \quad y'_t = \frac{\frac{1}{t} \cdot t - \ln t}{t^2} = \frac{1 - \ln t}{t^2},$$

$$x'_t = \ln t + t \cdot \frac{1}{t} = \ln t + 1; \quad y'_x = \frac{1 - \ln t}{t^2(1 + \ln t)},$$

$$(y'_x)'_t = \frac{-\frac{1}{t}t^2(1 + \ln t) - (1 - \ln t)\left(2t(1 + \ln t) + t^2 \frac{1}{t}\right)}{t^4(1 + \ln t)^2} =$$

$$= \frac{-t(1 + \ln t) - (1 - \ln t)t(3 + 2 \ln t)}{t^4(1 + \ln t)^2},$$

$$y''_{xx} = \frac{-t(1 + \ln t) - (1 - \ln t)t(3 + 2 \ln t)}{t^4(1 + \ln t)^3}.$$

3. Найти дифференциал функции.

$$3.1. y = \ln \frac{1-x}{1+x}.$$

$$dy = f'(x)dx \quad dy = \frac{1 - (1+x) - (1-x)}{\frac{1-x}{1+x} \cdot (1-x^2)} dx = \frac{-2}{1-x^2} dx.$$

$$3.2. y = e^{3x+2}, \quad x = \cos t.$$

Учитывая свойства инвариантности дифференциала, имеем

$$dy = e^{3x+2} \cdot 3(-\sin t)dt = -3e^{3\cos t+2} \sin t \cdot dt.$$

4. Вычислим приближенное значение $\sin 45^{\circ}06'$.

$$\Delta y \approx dy; \quad \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x),$$

$$f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x; \Rightarrow f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x.$$

Эта формула дает возможность найти значение функции $f(x + \Delta x)$ в некоторой точке $x + \Delta x$, если известно значение функции $y = f(x)$ и ее производной в точке x .

Вычислим без таблиц $\sin 45^{\circ}06'$.

$$x = \frac{\pi}{4} : \Delta x = \frac{\pi}{180} \cdot \frac{6}{60} = \frac{\pi}{1800} : f(x) = \sin x, f'(x) = \cos x,$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{1800}\right) \approx \sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\pi}{1800} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\pi}{1800} \approx 0.7083.$$

5. Показать, что функция $y = 3\sin x - 4\cos x$ удовлетворяет уравнению $y'' + y = 0$,

$$y' = 3\cos x + 4\sin x,$$

$$y'' = -3\sin x + 4\cos x.$$

После подстановки в уравнение, имеем

$$-3\sin x + 4\cos x + 3\sin x - 4\cos x = 0; \Rightarrow 0 = 0.$$

6. Определить наибольшее и наименьшее значения, точки перегиба функции изгибающего момента $M(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$ на отрезке $[-2; 2]$.

1) функция изгибающего момента $M(x)$ на данном отрезке достигает своего наибольшего (наименьшего) значения или в критических точках, или на концах этого отрезка.

$$M'(x) = 3x^2 - 6x + 3, M'(x) = 0 \Rightarrow x = 1, x = 1 \in [-2; 2],$$

$$M(1) = 3, M(-2) = -24, M(2) = 4.$$

Сравнивая значения функции в этих точках, заключаем, что наименьшее значение функции $m = -24$ достигается при $x = -2$ (на левом конце отрезка), а наибольшее $M = 4$ в точке $x = 2$ (на правом конце отрезка);

2) находим точки перегиба $M''(x) = 6x - 6, M''(x) = 0 \Rightarrow x = 1$,

$$M''(1 + \varepsilon) > 0, M''(1 - \varepsilon) < 0.$$

Так как $M''(x)$ при переходе x через $x = 1$ меняет знак, следовательно, $x = 1$ является точкой перегиба.

7. Исследовать функцию и построить ее график $y = \frac{2x^3}{x^2 - 4}$.

$$1) D(y) = [-\infty; -2] \cup [-2; 2] \cup [2; +\infty].$$

Прямые $x = \pm 2$ являются вертикальными асимптотами;

$$\lim_{x \rightarrow -2-0} \frac{2x^3}{x^2 - 4} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -2+0} \frac{2x^3}{x^2 - 4} = +\infty,$$

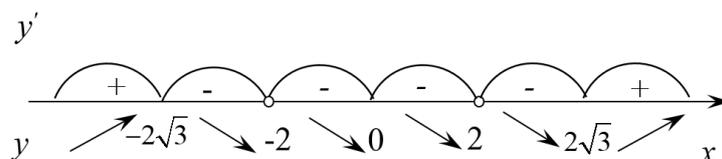
$$\lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{2x^3}{x^2 - 4} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{2x^3}{x^2 - 4} = +\infty;$$

2) функция нечетная, график симметричен относительно начала координат, поэтому исследование функции достаточно провести на промежутке $[0; \infty]$. Функция не периодична;

3) находим первую производную

$$y' = \frac{6x^2(x^2 - 4) - 2x^3 \cdot 2x}{(x^2 - 4)^2} = \frac{2x^4 - 24x^2}{(x^2 - 4)^2} = \frac{2x^2(x^2 - 12)}{(x^2 - 4)^2}.$$

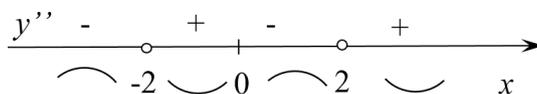
Критическими точками 1 рода будут: $x = 0$, $x = \pm 2\sqrt{3}$.



$$y_{\max}(-2\sqrt{3}) = y(-2\sqrt{3}) = -6\sqrt{3},$$

$$y_{\max}(2\sqrt{3}) = 6\sqrt{3}$$

4) вторая производная $y'' = \frac{16x(x^2 + 12)}{(x^2 - 4)^3}$ дает критическую точку второго рода $x = 0$.



$$y_{\text{перел.}} = y(0) = 0$$

5) находим наклонную асимптоту:

$$y = kx + b,$$

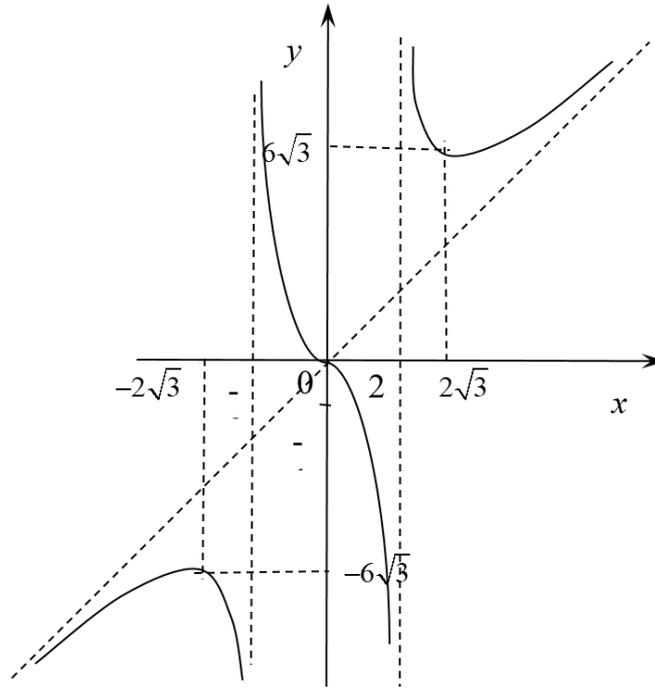
$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3}{(x^2 - 4)x} = 2,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^3}{x^2 - 4} - 2x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - 2x^3 + 8x}{x^2 - 4} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8x}{x^2 - 4} = 0.$$

При $x \rightarrow -\infty$ k и b принимают те же значения, следовательно, график функции имеет наклонную асимптоту $y = 2x$;

б) график имеет одну точку пересечения с осями координат. Используя результаты исследования, строим график.



8. Пользуясь правилом Лопиталья, вычислить пределы.

$$8.1. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi - 2 \operatorname{arctg} x}{\frac{3}{e^x - 1}}.$$

Это неопределенность типа $\left(\frac{0}{0}\right)$. Используя правило Лопиталья, полу-

чаем

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi - 2 \operatorname{arctg} x}{\frac{3}{e^x - 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{-2}{1+x^2}}{\frac{3}{e^x} \left(-\frac{3}{x^2}\right)} = \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = \frac{2}{3}.$$

$$8.2. \lim_{x \rightarrow 0} x^{\frac{1}{\ln(e^x - 1)}};$$

Это неопределенность типа (0^0) . Логарифмируя предварительно

$y = x^{\frac{1}{\ln(e^x - 1)}}$, получаем равенство $\ln y = \frac{1}{\ln(e^x - 1)} \cdot \ln x$ (неопределенность

типа $\frac{\infty}{\infty}$).

Находим предел $\ln y$, после чего находим и предел y .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \ln y &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\ln(e^x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{e^x - 1}{x \cdot e^x}} = \frac{e^x - 1}{x \cdot e^x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{e^x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{1} = 1, \end{aligned}$$

следовательно,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln y = 1 \Rightarrow \ln \lim_{x \rightarrow 0} y = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} y = \lim_{x \rightarrow 0} x^{\frac{1}{\ln(e^x - 1)}} = e^1 = e.$$

Задачи для самостоятельного решения

I. Пользуясь правилом Лопиталю, вычислить пределы:

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\ln(1+x)}$ Ответ: 2.

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\ln 2x)^{\frac{1}{\ln x}}$. Ответ: 1.

II. Определить наибольшее и наименьшее значение функции:

$$y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2 \text{ на отрезке } [-2, 4].$$

Ответ: $y(3) = -9,25$ – наименьшее значение функции;

$$y(-2) = \frac{16}{3} \text{ наибольшее значение функции.}$$

III. Исследовать функцию $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 4}$ и построить ее график.

IV. Вычислить приближенно значение числа $\operatorname{ctg} 46^\circ$

(с помощью дифференциала).

Ответ: 0,98.

V. Найти $\frac{dy}{dx}$.

1. $y = \frac{1}{2} \ln \operatorname{tg} x + \ln \cos x + \left(1 + \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)^3$.

Ответ: $y' = \frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg} x} - \operatorname{tg} x + 3 \left(1 + \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-x)}}$.

$$2. \quad y = \frac{2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$\text{ОТВЕТ: } y' = \frac{2\sqrt{1-x^2} + 2x \cdot \arcsin x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}.$$

$$3. \quad y = \sin \sqrt{x} \cdot \ln \frac{1}{x} + e^{\cos^2 x} + \frac{4 \ln x}{1 - \ln x}.$$

$$\text{ОТВЕТ: } y' = \frac{\cos \sqrt{x} \cdot \ln x}{2\sqrt{x}} - \frac{\sin \sqrt{x}}{x} - e^{\cos^2 x} \cos 2x + \frac{4}{x(1 - \ln x)}.$$

$$4. \quad y = x^{\ln^3 x}. \quad \text{ОТВЕТ: } y' = x^{\ln^3 x} \cdot \frac{4 \ln^3 x}{x}.$$

$$5. \quad y = x e^{-xy}. \quad \text{ОТВЕТ: } y' = \frac{e^{-xy} (1 - xy)}{1 + x e^{-xy}}.$$

IX. Найти $\frac{d^2 y}{dx^2}$.

$$1. \quad y = \frac{1+x}{\sqrt{1-x}}. \quad \text{ОТВЕТ: } y'' = \frac{-2\sqrt{1-x} - 3x + 9}{4}.$$

$$2. \quad \begin{cases} x = \operatorname{ctg} 2t, \\ y = \sin^2 2t. \end{cases} \quad \text{ОТВЕТ: } y'' = 0.$$

$$3. \quad \begin{cases} y = \cos^3 t, \\ x = t + \frac{1}{2} \cdot \sin t. \end{cases} \quad \text{ОТВЕТ: } y'' = \frac{2 \cos 2t}{\cos t}.$$

VI. Показать, что функция $y = \frac{1+x}{1-x}$ удовлетворяет уравнению

$$y' = \frac{1+y^2}{1+x^2}.$$

ГЛОССАРИЙ

№ п/п	Новые понятия	Содержание
1	2	3
1	Производная функции в точке x_0	предел отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx при стремлении Δx к нулю: $y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$
2	Функция имеет бесконечную производную	если для некоторого значения x выполняется одно из условий $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = +\infty \text{ или } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\infty$
3	Производная 2-го порядка от функции $y = f(x)$	называется производная от ее первой производной. Обозначают y'' , $f''(x) = (f'(x))'$, y''_{x^2} .
4	Дифференциал функции $y = f(x)$ в точке x_0	произведение производной функции $f'(x_0)$ на приращение аргумента Δx , т.е. $dy = f'(x_0) \cdot \Delta x$, если x – независимая переменная, то $dy = f'(x_0) \cdot dx$
5	Геометрический смысл дифференциала заключается в следующем	дифференциал функции $y = f(x)$ в точке x_0 равен приращению ординаты касательной при $x \rightarrow x_0$
6	Точка максимума (минимума) функции $y = f(x)$	точка x_0 , для которой существует такая окрестность точки x_0 , что для всех точек $x \neq x_0$, принадлежащих этой окрестности, выполняется неравенство $f(x_0) > f(x)$ ($f(x_0) < f(x)$)
7	Асимптота к графику функции $y = f(x)$	прямая, к которой приближается точка $M(x, y)$, лежащая на графике, при неограниченном удалении ее от начала координат; асимптоты бывают наклонные $y = kx + b$ или вертикальные $x = a$, или горизонтальные $y = b$
8	Производная n-го порядка от функции $y = f(x)$	называется производная от ее производной $(n-1)$ -го порядка. Приняты следующие обозначения: $y^{(III)}, y^{(IV)}, \dots, y^{(n)} = \left(y^{(n-1)} \right)', \frac{d^n y}{dx^n}$
9	Свойство инвариантности (неизменности) дифференциала первого порядка	Дифференциал функции равен произведению производной на дифференциал аргумента, независимо от того, является ли этот аргумент <i>независимой переменной</i> или <i>функцией</i> другой независимой переменной $dy = y' \cdot dx$

1	2	3
10	Точка локального минимума (максимума) функции $y = f(x)$	является точка x_0 , если $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ выполняется неравенство $f(x) \geq f(x_0), (f(x) \leq f(x_0))$
11	Точка перегиба	называется точка, в которой функция меняет направление выпуклости
12	Формула Тейлора	позволяет приближать некоторую функцию $y = y(x)$, дифференцируемую n раз, к многочленам n -ой степени: $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$, где $P_n(x) = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) + \dots + \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$
13	Остаточный член, записанный в форме Пеано	называется остаточный член $R_n(x) = o((x - x_0)^n)$
14	Остаточный член, записанный в форме Лагранжа	называется остаточный член $R_n(x) = \frac{y^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$, где $c \in (x_0, x)$

Задачи профессионально ориентированного характера

I. Сосуд с вертикальными стенками высотой H , наполненный невязкой жидкостью, стоит на горизонтальной плоскости. Определить местоположение отверстия, при котором дальность струи будет наибольшей, если скорость вытекающей жидкости по закону Торричелли равна $\sqrt{2gx}$, где x – расстояние от отверстия до поверхности жидкости; g – ускорение свободного падения.

Ответ: $H/2$.

II. Требуется изготовить открытый цилиндрический бак вместимостью V . Стоимость 1 м^2 материала, из которого изготавливается дно бака, составляет P_1 руб., а стоимость 1 м^2 материала, идущего на стенки бака, – P_2 руб. При каком отношении радиуса дна к высоте бака затраты на материал будут минимальны?

Ответ: P_2/P_1 .

III. Лампа висит над центром круглого стола радиусом r . При какой высоте лампы над столом освещенность предмета, лежащего на его крае, будет наилучшей? (Освещенность прямо пропорциональна косинусу угла падения лучей света и обратно пропорциональна квадрату расстояния от источника света.)

Ответ: $r/\sqrt{2}$.

IV. По оси Ox движутся две материальные точки, законы движения которых $x = 3t^2 - 8$ и $x = 2t^2 + 5t + 6$. С какой скоростью удаляются эти точки друг от друга в момент встречи?

Ответ: 42 м/с, 33 м/с.

V. Полоса жести шириной a , имеющая прямоугольную форму, должна быть согнута в виде открытого кругового цилиндрического желоба так, чтобы его сечение имело форму сегмента. Каким должен быть центральный угол φ , опирающийся на дугу этого сегмента, чтобы вместимость желоба была наибольшей?

**Решение задач по теме
«ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ
ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ»
с помощью математических пакетов Maple и Mathcad**

Предлагаемые программы помогут Вам при проверке домашнего задания или, при необходимости, предоставят возможность быстрого вычисления производной любого порядка и сложности, исследования функций и построения графиков и др.

Рассмотрим вычисление производной, исследование функций с построением графика с помощью математического пакета **Maple**. Maple имеет следующий оператор для вычисления производной: Diff (функция, x) – выводит ответ. Нужно помнить, что в выбранной программе очень важное место занимают операторы «:» – присвоить, «;» – окончание предложения.

```

> Вычисление производной
> Diff(sin(x^3), x) = diff(sin(x^3), x);

$$\frac{d}{dx} \sin(x^2) = 2 \cos(x^2) x$$

> Diff(cos(2*x)^2, x$4) = diff(cos(2*x)^2, x$4); # после значка $ указывается порядок производной

$$\frac{d^4}{dx^4} (\cos(2x)^2) = -128 \sin(2x)^2 + 128 \cos(2x)^2$$

> simplify(%); # упрощение выражения

$$\frac{d^4}{dx^4} (\cos(2x)^2) = 256 \cos(2x)^2 - 128$$

> combine(%); # или так можно упростить выражение

$$\frac{d^4}{dx^4} \left( \frac{1}{2} \cos(4x) + \frac{1}{2} \right) = 128 \cos(4x)$$

> D(sin)(pi):eval(%);# Вычисление производной в точке, f(x) = sinx при x = pi
-1

```

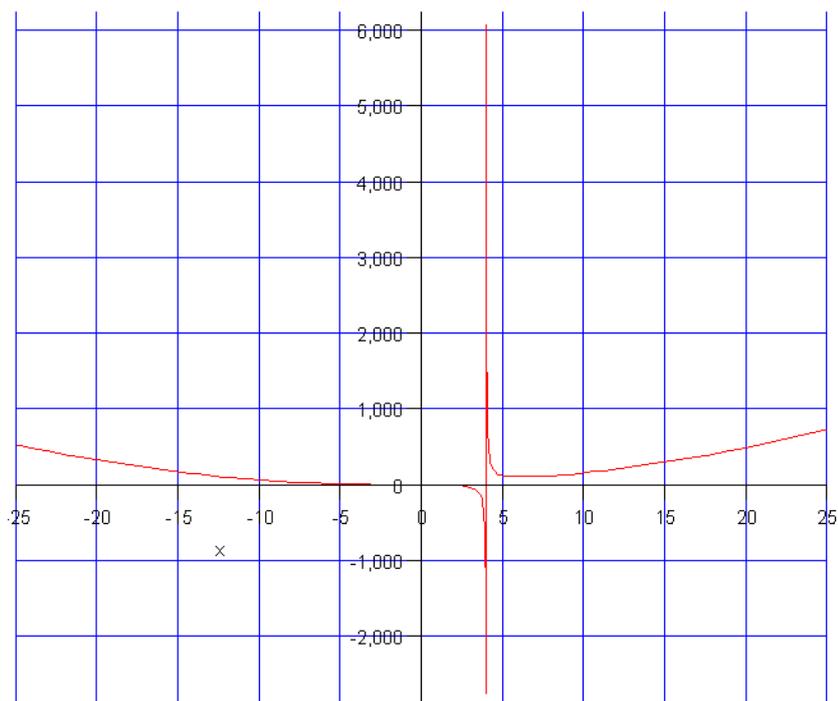
Исследование графика функций

```

> y := x^3 / (x - 4); # проведём исследования данного графика функций
                                     y := x^3 / (x - 4)
-----
> readlib(iscont): readlib(discont): readlib(singular):
> iscont(y, x=-infinity..infinity); # проверяем функцию на непрерывность
                                     false
-----
> наша функция не является непрерывной, а следовательно, найдём точки разрыва
> discont(y, x);
                                     {4}
-----
> xr := convert(%4, '+');
                                     xr := 4
-----
> Существует вертикальная асимптота x = 4, найдём коэффициенты наклонной асимптоты
> k1 := limit(y/x, x=+infinity);
                                     k1 := ∞
-----
> b1 := limit(y - k1*x, x=+infinity);
                                     b1 := ∞
-----
> k2 := limit(y/x, x=-infinity);
                                     k2 := -∞
-----
> b2 := limit(y - k2*x, x=-infinity);
                                     b2 := ∞
-----
> Наклонной асимптоты нет
> readlib(extrema): readlib(maximize): readlib(minimize):
> extrema(y, {x}, s); # найдём экстремумы
                                     {0, 108}
                                     {{x=6}, {x=0}}

```

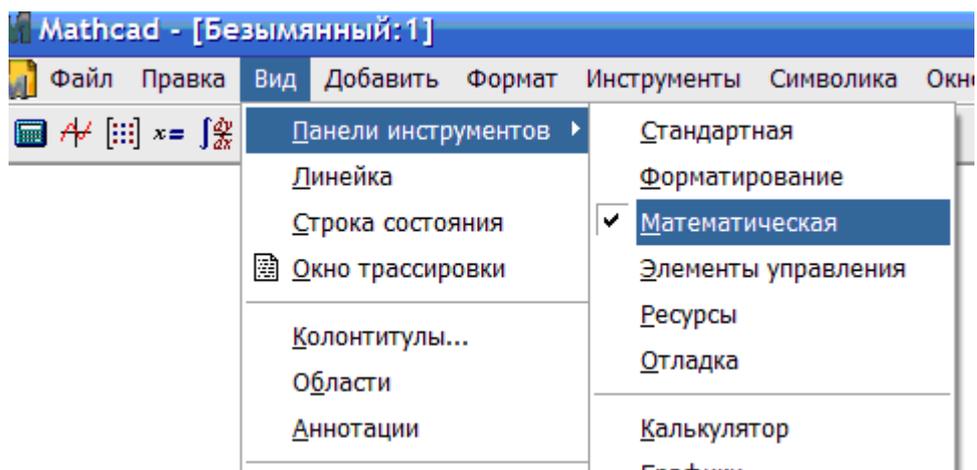
> `plot(y, x = -25..25, axis = [gridlines = [10, color = blue]]);# Построим график функций`

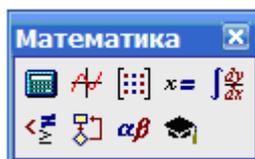


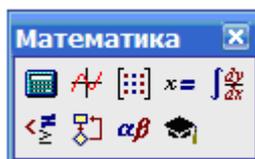
Рассмотрим один из наиболее популярных математических пакетов **MathCAD**.

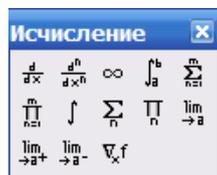
Чтобы начать работать с приложением, вызовите панель Calculus (вычисления).

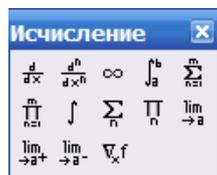
Выберите на панели вкладку ВИД → ПАНЕЛИ ИНСТРУМЕНТОВ → МАТЕМАТИЧЕСКАЯ



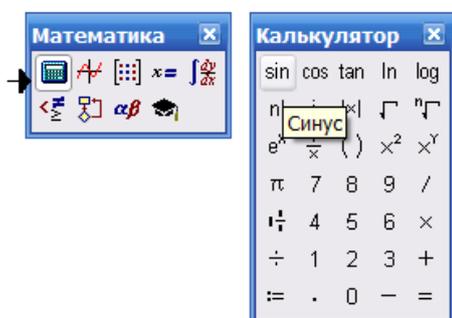


Появится панель . На данной вкладке необходимо

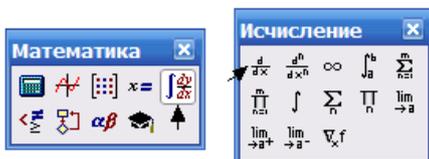


выбрать панель «Исчисление»  и продолжить работу.

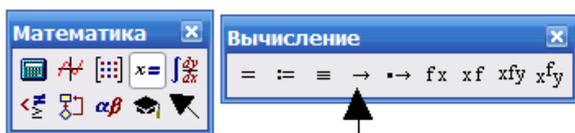
Например, Вы хотите вычислить производную функции $\frac{\sin x}{x}$. Для этого можно сначала задать функцию: ввести $y(x):=$, выбрать вкладку «калькулятор»



и с ее помощью набрать нужную функцию $y(x) := \frac{\sin(x)}{x}$. После этого используйте вкладки



Появляется следующий символ $\frac{d}{dx}$. Нижнее поле заполняется x , верхнее – $y(x)$. Получим $\frac{d}{dx}y(x)$. Теперь выбираете вкладку «вычисление», затем стрелочку



появляется результат $\frac{d}{dx}y(x) \rightarrow \frac{\cos(x)}{x} - \frac{\sin(x)}{x^2}$.

Далее разобраны задачи, наиболее часто встречаемые в теме «Дифференциальное исчисление функции одной переменной».

Mathcad - [Вычисление производной.xmcd]

Файл Правка Вид Добавить Формат Инструменты Символика Окно Справка

Вычисление производной

$y(x) := \cos(x) - \frac{\sin(4 \cdot x)}{x}$ Ввели нужную функцию

$\frac{d}{dx}y(x) \rightarrow \frac{\sin(4 \cdot x)}{x^2} - \frac{4 \cdot \cos(4 \cdot x)}{x} - \sin(x)$ Получили ответ

Математика

Вычис...

Калькулятор

Исчисление

Исследовать график функций

$$f(x) := \frac{x^2 + 6 \cdot x + 9}{x + 4}$$

Найдём точки пересечения с координатными осями

$$f(0) = 2.25$$

$$\frac{x^2 + 6 \cdot x + 9}{x + 4} \quad \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Найдём асимптоты

$$x + 4 \quad -4 \quad \text{Исследуем точку } x = -4$$

$$\lim_{x \rightarrow -4^+} f(x) \rightarrow \infty \quad \lim_{x \rightarrow -4^-} f(x) \rightarrow -\infty$$

$$k := \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \rightarrow 1 \quad k = 1$$

$$b := \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x) \rightarrow 2 \quad b = 2$$

$$y(x) := x + 2 \quad \text{наклонная асимптота}$$

Вычислим первую производную

$$\frac{d}{dx}f(x) \rightarrow \frac{2 \cdot x + 6}{x + 4} - \frac{x^2 + 6 \cdot x + 9}{(x + 4)^2} = 0$$

$$\frac{2 \cdot x + 6}{x + 4} - \frac{x^2 + 6 \cdot x + 9}{(x + 4)^2}$$

преобразуем первую производную, вычислим ее значение при $y=0$

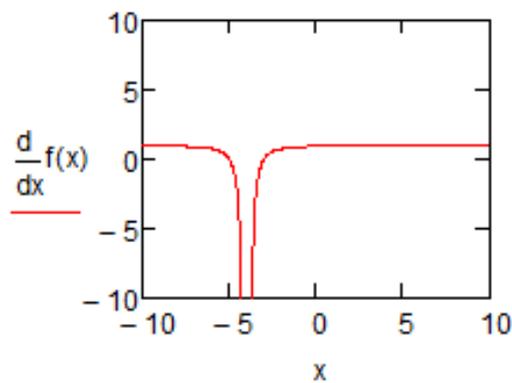
$$1 - \frac{1}{(x + 4)^2} \quad \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$f(-5) = -4$$

$$f(-3) = 0$$

значение функции в точках экстремума

Строим график производной



$(-5, 4)$ – максимум

$(-3, 0)$ – минимум

Найдём вторую производную

$$\frac{d^2}{dx^2}f(x) \rightarrow \frac{2 \cdot (x^2 + 6 \cdot x + 9)}{(x+4)^3} - \frac{2 \cdot (2 \cdot x + 6)}{(x+4)^2} + \frac{2}{x+4}$$

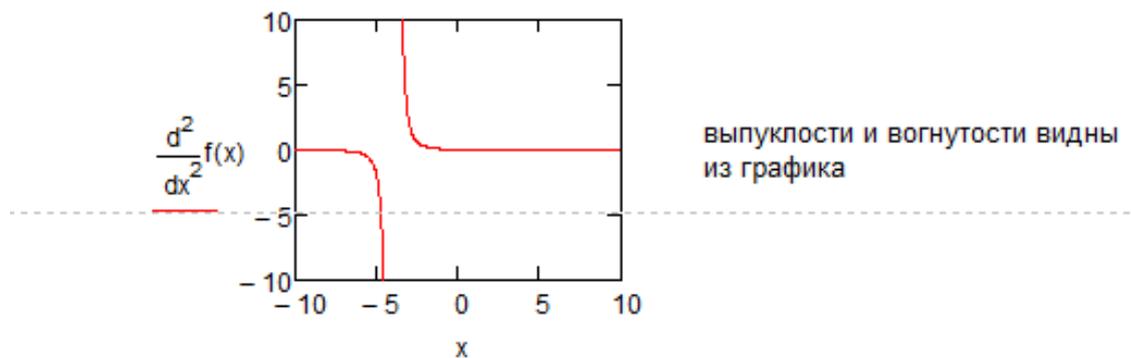
$$\frac{2 \cdot (x^2 + 6 \cdot x + 9)}{(x+4)^3} - \frac{2 \cdot (2 \cdot x + 6)}{(x+4)^2} + \frac{2}{x+4}$$

преобразуем вторую производную, вычислим ее значение при $y=0$

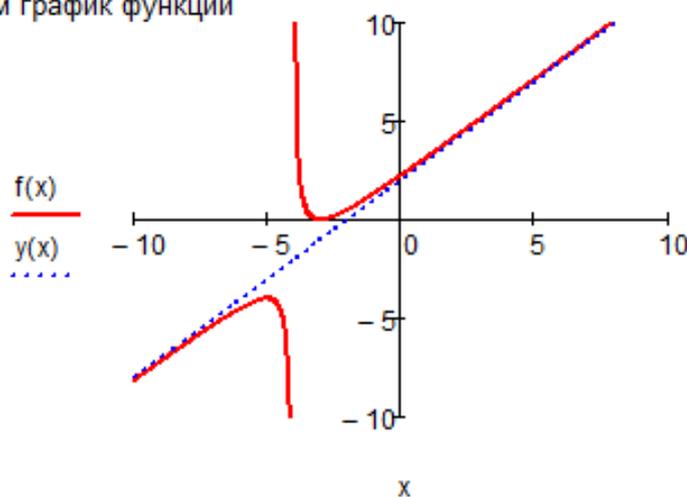
$$\frac{2}{(x+4)^3}$$

решений нет

Строим график второй производной



Строим график функций



Записать уравнение касательной и нормали к графику функций $y=x^3$ в точке $x=2$

$$y(x) := x^3$$

Вычислим угловой коэффициент $k=y'(2)$

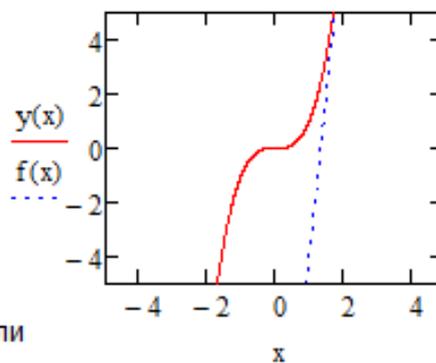
$$\frac{d}{dx}y(x) \rightarrow 3 \cdot x^2$$

$$k := 3 \cdot 2^2 = 12$$

Запишем уравнение касательной

$$f(x) := k \cdot (x - 2) + y(2)$$

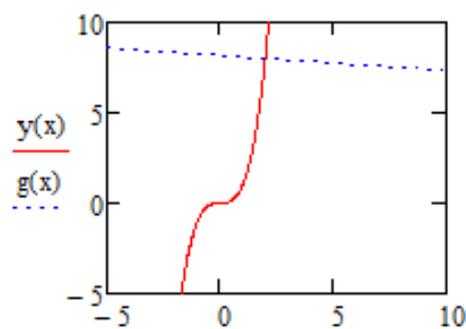
Строим график функций



Запишем уравнение нормали

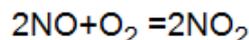
$$n := \frac{-1}{k} \quad n = -0.083$$

$$g(x) := n \cdot (x - 2) + y(2)$$



Приведем примеры решения творческих заданий междисциплинарного содержания в Mathcad.

5. Установить, при каком процентном содержании кислорода в газовой смеси скорость окисления оксида азота будет максимальной.



$$v = k \cdot [\text{NO}]^2 \cdot [\text{O}_2]$$

v-скорость реакции

x-концентрация NO

y-концентрация O₂

100-Вся газовая смесь

k-константа скорости реакции, не зависящая от концентрации, а зависящая только от температуры.

$$y = 100 - x \quad v = k \cdot x^2(100 - x) = k(100x^2 - x^3) \quad v := k \cdot (100x^2 - x^3)$$

Найдем 1-ую производную этой функции:

$$\frac{d}{dx} v \rightarrow k \cdot (200 \cdot x - 3 \cdot x^2)$$

Given

$$k \cdot (200 \cdot x - 3 \cdot x^2) = 0$$

$$\text{Find}(x) \rightarrow \left(0 \quad \frac{200}{3} \right)$$

k-не может быть равно 0, значит x=66,7%

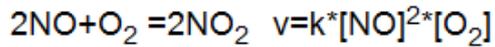
Что бы узнать какое из полученных значений x соответствует максимальной скорости окисления, найдем вторую производную функции

$$\frac{d^2}{dx^2} v \rightarrow -k \cdot (6 \cdot x - 200)$$

Подставим значение x=0 во вторую производную найдем $v = -k(6 \cdot 0 - 200) = -k \cdot (-200) = 200k, > 0$, т.е скорость окисления минимальна при концентрации окиси азота равной 0.

Подставим значение x=66.7% во вторую производную, найдем $v = -k(6 \cdot 66.7 - 200) = -k \cdot 400.2 + 200k = -200.2k, < 0$, значит функция имеет максимально значение при 66,7% содержании окиси азота в смеси, т е 33,3% содержание O₂ в смеси.

6. Пусть в газовой смеси, помимо оксида азота и кислорода содержатся и другие компоненты, не принимающие участия в химической реакции (инертные вещества). Определить, при каком стехиометрическом отношении $y:x$ скорость окисления по формуле: $2\text{NO} + \text{O}_2 = 2\text{NO}_2$, будет максимальной.



v -скорость реакции

x -концентрация NO

y -концентрация O_2

100-Вся газовая смесь

k -константа скорости реакции, не зависящая от концентрации, а зависящая только от температуры.

z -концентрация инертных компонентов.

$$x + y + z = 100 \quad y = 100 - z - x$$

$$v = kx^2(100 - z - x) = k((100 - z)x^2 - x^3)$$

$$v := k \cdot [(100 - z)x^2 - x^3]$$

$$\frac{d}{dx} v \rightarrow -k \cdot [2 \cdot x \cdot (z - 100) + 3 \cdot x^2]$$

$$\text{Given} \quad -k \cdot [2 \cdot x \cdot (z - 100) + 3 \cdot x^2] = 0$$

$$\text{Find}(x) \rightarrow \left(0 \quad \frac{200}{3} - \frac{2 \cdot z}{3} \right)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} v \rightarrow -k \cdot (6 \cdot x + 2 \cdot z - 200)$$

Максимум скорость окисления будет при $x = \frac{200}{3} - \frac{2 \cdot z}{3}$

т к $y = 100 - z - x$ тогда

$$x = \frac{200}{3} - \frac{2 \cdot z}{3}$$

$$y := (100 - z) - \frac{2}{3} \cdot (100 - z)$$

$$y \text{ simplify} \rightarrow \frac{100}{3} - \frac{z}{3} \quad \text{либо } y = 1/3 \cdot (100 - z)$$

$$L := \frac{y}{x} \quad L(z) := \frac{\frac{100-z}{3}}{\frac{2(100-z)}{3}}$$

$$L(z) \text{ simplify} \rightarrow \frac{1}{2}$$

1. Пусть газ состоящий из оксида азота и инертного газа, смешивают с воздухом, концентрация кислорода в котором составляет 20,8 %. Определить, какой объем воздуха необходимо добавить к объему оксида азота, чтобы обеспечить максимальную скорость окисления последнего. (Выполнить решение задачи в Mathcad)

Решение:

Рассмотрим смесь монооксида азота и инертного газа объемом 1 л. Пусть объем монооксида азота - x л.

Пусть добавили z л воздуха. Учитывая, что объемная доля кислорода в воздухе 0,208 (т.е. объем O_2 равен $0,208z$ л), найдем концентрации монооксида азота и кислорода после смешения:

$$[NO] = \frac{x}{1+z}, \quad [O_2] = \frac{0,208z}{1+z}.$$

$$v = k \cdot [NO] \cdot [O_2]$$

Для упрощения расчетов примем, что $k = x = 1$, тогда:

$$k := 1$$

$$x := 1$$

$$v(z) := k \cdot \left(\frac{x}{1+z} \right)^2 \cdot \frac{0,208z}{1+z} \text{ simplify} \rightarrow \frac{0,208 \cdot z}{(z+1,0)^3}$$

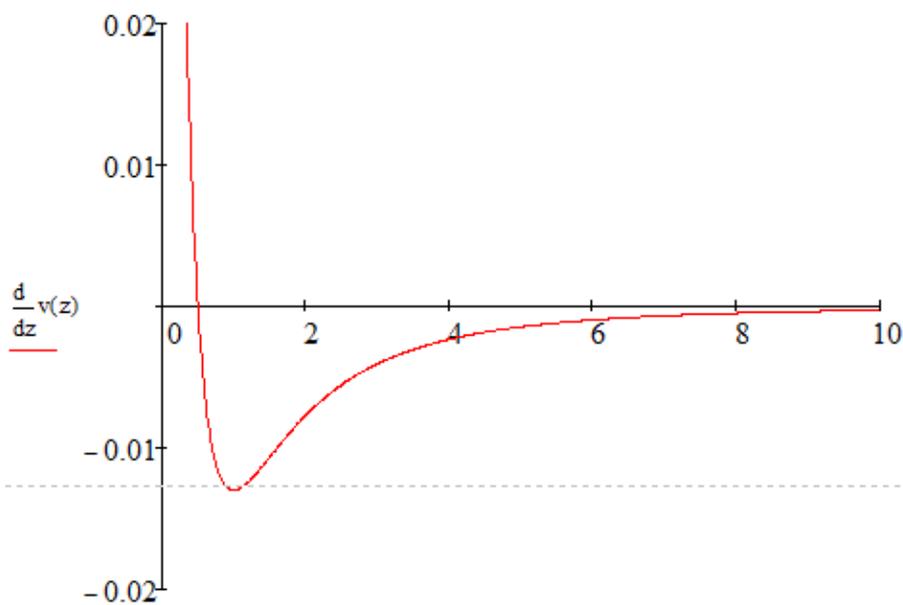
Найдем первую производную полученного выражения для нахождения скорости реакции:

$$\frac{d}{dz} v(z) \rightarrow \frac{0,208}{(z+1,0)^3} - \frac{0,624 \cdot z}{(z+1,0)^4}$$

Найдем при каком z значение первой производной равно 0:

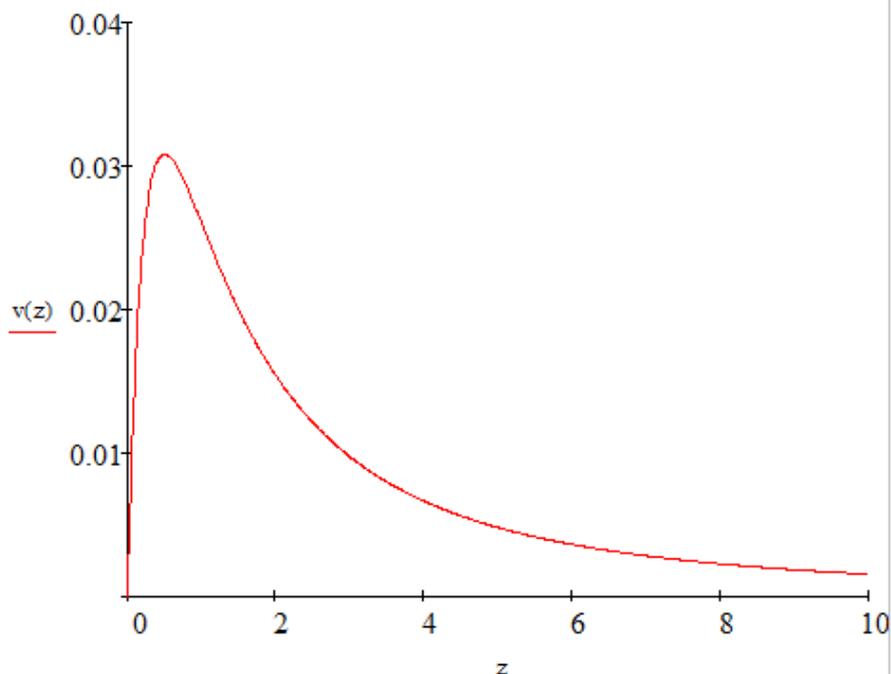
$$\frac{0,208}{(z+1,0)^3} - \frac{0,624 \cdot z}{(z+1,0)^4} \text{ solve, } z \rightarrow 0,5$$

Построим график первой производной для определения какой точкой экстремума является найденная точка $z = 0,5$:



Как видно из графика, при переходе через точку $z = 0.5$, первая производная меняет свой знак с "+" на "-", значит $z = 0.5$ - точка максимума

Таким образом, при добавлении 0,5 л воздуха к одному объему смеси монооксида азота и инертного газа наблюдается максимальная скорость окисления NO. Приведем график зависимости скорости окисления от объема добавленного воздуха:



В точке $z = 0.5$ наблюдается максимум скорости окисления.

Ответ: $z = 0,5$.

+