

УДК 624.072

О ВЛИЯНИИ ПРОДОЛЬНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ НА ПАРАМЕТРЫ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ДВУХШАРНИРНОЙ АРКИ

Е.А. ХЛЕБКОВИЧ

(Представлено: канд. техн. наук, доц. Л.С. ТУРИЩЕВ)

Для двухшарнирной арки изучается влияние продольных деформаций на параметры её напряженно-деформированного состояния (НДС) в зависимости от двух параметров расчетной схемы арки, характеризующих степень пологости очертания оси арки и степень массивности тела арки. Установлена существенная зависимость параметров НДС от параметров расчетной схемы арки. Получены численные значения анализируемых величин, осуществляемых в среде MathCAD.

Широкое применение в гражданском и промышленном строительстве получили статически неопределимые арочные конструкции. Определение внутренних усилий в них обычно производится методом сил. Входящие в канонические уравнения коэффициенты и свободные члены являются перемещениями, определяются по формуле Максвелла – Мора и их величина зависит от изгибных, продольных и сдвиговых деформаций конструкции. Считается, что при расчете методом сил большинства стержневых конструкций можно ограничиваться учетом только изгибных деформаций. Но при расчете арок, как показали исследования проф. С.А. Бернштейна [1], И.А. Рабиновича [2], В.А. Киселева [3], этого недостаточно и необходим учет продольных деформаций. Однако выполненные ими исследования были проведены для частных случаев с числовыми значениями параметров расчетной схемы арки.

Исследуется влияние продольных деформаций на параметры напряженно-деформированного состояния двухшарнирной арки в общем виде (рисунок 1).

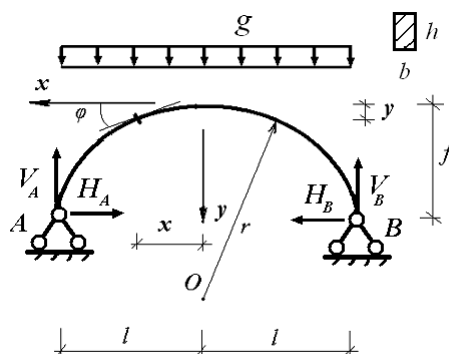


Рисунок 1. – Двухшарнирная арка

Рассматривается арка кругового очертания с постоянным по длине пролета прямоугольным поперечным сечением, нагруженная по длине всего пролета равномерно распределенной нагрузкой.

Вводятся следующие параметры геометрии арки:

$$\alpha = \frac{f}{l}, \quad \lambda = \frac{l}{h}.$$

Первый параметр характеризует степень пологости очертания оси арки, а второй – массивность тела арки или ее гибкость. С учетом введенных параметров закон очертания оси арки имеет вид:

$$y'(\xi, \alpha) = \frac{1}{\alpha \beta(\alpha)} \left(1 - \sqrt{1 - \beta^2(\alpha) \xi^2} \right),$$

где $y' = \frac{y}{f}$, $\xi = \frac{x}{l}$, $\beta(\alpha) = \frac{2\alpha}{1 + \alpha^2}$.

Расчет арки осуществляется методом сил с использованием основной системы в виде трехшарнирной арки.

Безразмерные внутренние усилия в произвольном сечении основной системы описываются следующими функциональными зависимостями от параметров геометрии арки:

- в единичном состоянии

$$\begin{aligned} m_1'(\xi, \alpha) &= 1 - y'(\xi, \alpha) \\ q_1'(\xi, \alpha) &= \beta(\alpha) \xi \\ n_1'(\xi, \alpha) &= \sqrt{1 - \beta^2(\alpha)} \xi^2 \end{aligned}$$

где $m_1' = m_1$ $q_1' = q_1 f$ $n_1' = n_1 f$;

- в грузовом состоянии

$$\begin{aligned} M_p'(\xi, \alpha) &= (1 - \xi) - \frac{(1 - \xi)^2}{2} - \frac{1}{2}(1 - y'(\xi, \alpha)) \\ Q_p'(\xi, \alpha) &= \xi \left(\sqrt{1 - \beta^2(\alpha)} \xi^2 - \frac{1}{1 + \alpha^2} \right) \\ N_p'(\xi, \alpha) &= -\beta(\alpha) \xi^2 - \frac{1}{2\alpha} \sqrt{1 - \beta^2(\alpha)} \xi^2 \end{aligned}$$

где $M_p' = \frac{M_p}{gl^2}$ $Q_p' = \frac{Q_p}{gl}$ $N_p' = \frac{N_p}{gl}$.

Каноническое уравнение метода сил имеет вид

$$\delta_{11}(\alpha, \lambda) X_1 + \Delta_{1P}(\alpha, \lambda) = 0. \tag{1}$$

Для возможности исследования влияния продольных деформаций на параметры НДС арки в зависимости от ее параметров геометрии формуле Максвелла – Мора при определении коэффициента и свободного члена канонических уравнений придается вид:

$$\delta_{11}(\alpha, \lambda) = I_{11M}(\alpha) + \frac{1}{12\alpha^2\lambda^2} I_{11N}(\alpha), \Delta_{1P}(\alpha, \lambda) = I_{1PM}(\alpha) + \frac{1}{12\alpha^2\lambda^2} I_{1PN}(\alpha)$$

где интегралы $I_{11M}(\alpha) = \int_{-1}^1 \frac{m_1'(\xi, \alpha)^2}{\cos(\xi, \alpha)} d\xi$, $I_{1PM}(\alpha) = \int_{-1}^1 \frac{m_1'(\xi, \alpha) M_p'(\xi, \alpha)}{\cos(\xi, \alpha)} d\xi$, учитывающие влияние изгибных

деформаций, а интегралы $I_{11N}(\alpha) = \int_{-1}^1 \frac{n_1'(\xi, \alpha)^2}{\cos(\xi, \alpha)} d\xi$, $I_{1PN}(\alpha) = \int_{-1}^1 \frac{n_1'(\xi, \alpha) N_p'(\xi, \alpha)}{\cos(\xi, \alpha)} d\xi$, учитывающие влияние продольных деформаций, при определении соответственно коэффициента и свободного члена канонического уравнения (1).

Тогда основное неизвестное, которое является изгибающим моментом в замковом сечении арки, описывается следующими функциональными зависимостями от параметров ее геометрии:

- в случае неучета продольных деформаций

$$X_{1M}(\alpha) = -\frac{I_{1PM}(\alpha)}{I_{11M}(\alpha)},$$

- в случае учета продольных деформаций

$$X_1(\alpha, \lambda) = -\frac{\Delta_{1P}(\alpha, \lambda)}{\delta_{11}(\alpha, \lambda)}.$$

В свою очередь, безразмерные внутренние усилия в произвольном сечении арки описываются следующими функциональными зависимостями от параметров ее геометрии:

- в случае неучета продольных деформаций

$$\begin{aligned} M_M'(\xi, \alpha) &= M_p'(\xi, \alpha) + m_1'(\xi, \alpha) X_{1M}(\alpha) \\ Q_M'(\xi, \alpha) &= Q_p'(\xi, \alpha) + q_1'(\xi, \alpha) X_{1M}(\alpha) \\ N_M'(\xi, \alpha) &= N_p'(\xi, \alpha) + n_1'(\xi, \alpha) X_{1M}(\alpha) \end{aligned} \tag{2}$$

где $M'_M = \frac{M_M}{gl^2}$, $Q'_M = \frac{Q_M}{gl}$, $N'_M = \frac{N_M}{gl}$;

- в случае учета продольных деформаций

$$\begin{aligned} M'(\xi, \alpha, \lambda) &= M'_p(\xi, \alpha) + m'_1(\xi, \alpha) X'_1(\alpha, \lambda) \\ Q'(\xi, \alpha, \lambda) &= Q'_p(\xi, \alpha) + q'_1(\xi, \alpha) X'_1(\alpha, \lambda) \\ N'(\xi, \alpha, \lambda) &= N'_p(\xi, \alpha) + n'_1(\xi, \alpha) X'_1(\alpha, \lambda) \end{aligned} \tag{3}$$

где $M' = \frac{M}{gl^2}$, $Q' = \frac{Q}{gl}$, $N' = \frac{N}{gl}$.

Соответствующие внутренним усилиям нормальные напряжения соответственно в верхнем и нижнем волокнах произвольного сечения описываются следующими функциональными зависимостями от параметров ее геометрии арки:

- в случае неучета продольных деформаций

$$\begin{aligned} \sigma'_M(\xi, \alpha, \lambda) &= N'_M(\xi, \alpha) - \sqrt{3\lambda} M'_M(\xi, \alpha) \\ \sigma'_m(\xi, \alpha, \lambda) &= N'_M(\xi, \alpha) + \sqrt{3\lambda} M'_M(\xi, \alpha), \end{aligned} \tag{4}$$

где $\sigma'_M = \frac{\sigma_M A}{gl}$, $\sigma'_m = \frac{\sigma_m A}{gl}$;

- в случае учета продольных деформаций

$$\begin{aligned} \sigma'_o(\xi, \alpha, \lambda) &= N'(\xi, \alpha, \lambda) - \sqrt{3\lambda} M'(\xi, \alpha, \lambda) \\ \sigma'_n(\xi, \alpha, \lambda) &= N'(\xi, \alpha, \lambda) + \sqrt{3\lambda} M'(\xi, \alpha, \lambda), \end{aligned} \tag{5}$$

где $\sigma'_o = \frac{\sigma_o A}{gl}$, $\sigma'_n = \frac{\sigma_n A}{gl}$.

Полученные функциональные зависимости (2)–(5) для внутренних усилий и нормальных напряжений позволяют оценить влияние продольных деформаций на их величины в зависимости от параметров геометрии арки α и λ .

На рисунке 2 приведены эпюры внутренних усилий двухшарнирной арки.

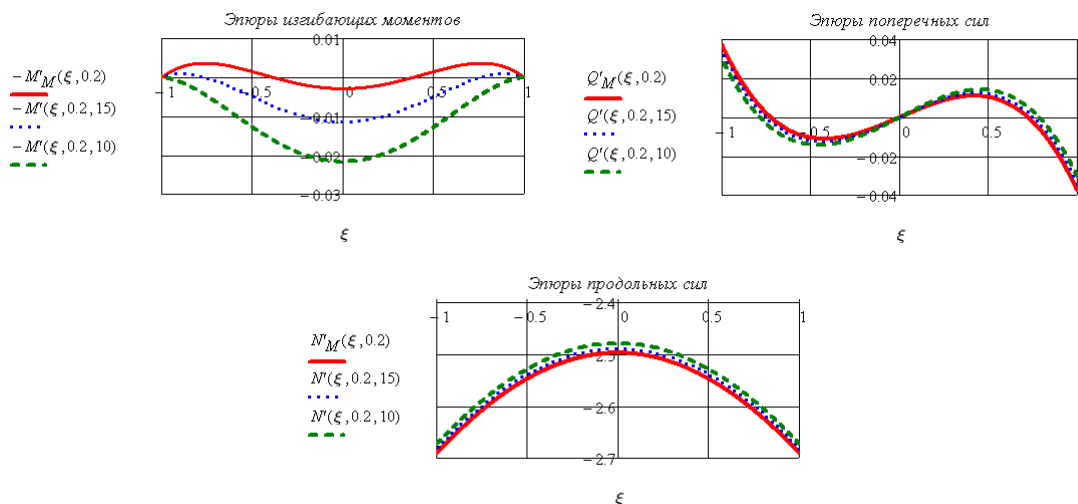


Рисунок 2. – Эпюры внутренних усилий двухшарнирной арки

Из приведенных эпюр видно, что внутренние усилия, найденные с учетом продольных деформаций, отличаются от внутренних усилий, найденных без учета таких деформаций.

Наиболее существенные изменения претерпевают изгибающие моменты. Меняются длины зон растяжения внизу и вверху тела арки. Увеличиваются модули моментов в средней части пролета и уменьша-

ются в приопорных частях пролета арки. Указанные изменения существенно зависят от параметров геометрии арки α и λ .

Из приведенных эпюр поперечных сил видно, что учет продольных деформаций приводит к уменьшению модулей поперечных сил – в опорных сечениях оно составляет чуть более 10% и уменьшается до нуля в замковом сечении. Указанные изменения несущественно зависят от параметров геометрии арки α и λ .

Из приведенных эпюр продольных сил видно, что учет продольных деформаций приводит к незначительному уменьшению модулей продольных сил, которое не превышает 1%. Указанные изменения практически не зависят от параметров геометрии арки α и λ .

На рисунке 3 приведены зависимости величин нормальных напряжений в крайних волокнах замкового сечения арки от параметра гибкости.

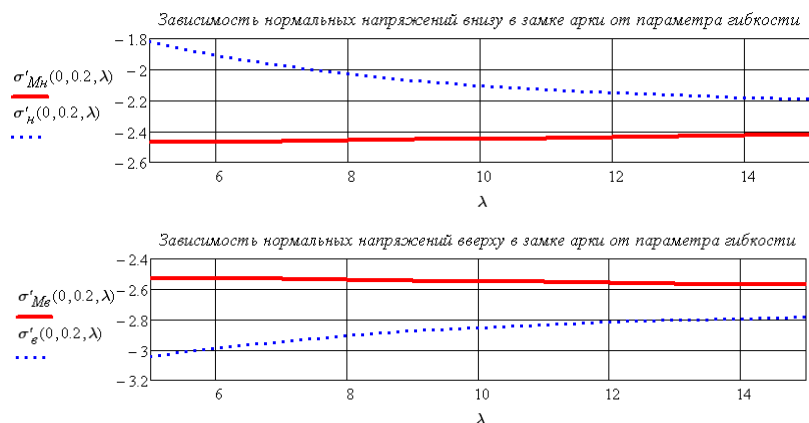


Рисунок 3. – Зависимости нормальных напряжений от параметра гибкости

Из приведенных графиков видно, что учет продольных деформаций оказывает существенное влияние на перераспределение нормальных напряжений в замковом сечении. Происходит увеличение их величины в верхних волокнах сечения более чем на 20% и уменьшение в нижних волокнах на 12%. Указанные изменения существенно зависят от параметров геометрии арки α и λ .

Таким образом, неучет влияния продольных деформаций при расчете двухшарнирной арки может приводить к ошибкам при определении параметров НДС, связанных с назначением размеров поперечных сечений арки и обеспечением ее несущей способности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бернштейн, С.А. Основы расчета статически неопределимых систем / С.А. Бернштейн. – М. : Стройиздат, 1936. – 223 с.
2. Рабинович, И.М. Курс строительной механики / И.М. Рабинович. – М. : Стройиздат, 1954. – Часть 2 : Статически неопределимые системы. – 543 с.
3. Киселев, В.А. Строительная механика / В.А. Киселев. – М. : Стройиздат, 1986. – 520 с.