УДК 372.853

ПРИМЕНЕНИЕ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО МЕТОДА ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

Т.В. ИВАНОВА
(Представлено: канд. тех. наук, доц. О.Н. ПЕТРОВИЧ)

Показаны возможности применения энергетического метода для описания движения и нахождения периода колебаний систем с одной степенью свободы. Приведенный методический прием является универсальным по отношению к колебаниям различной природы и основан на том, что энергия системы, совершающей незатухающие колебания, является интегралом движения.

Введение. При поступлении в учреждения, обеспечивающие получение высшего образования, абитуриентам необходимо пройти централизованное тестирование. Подготовка к централизованному тестированию по физике сопряжена с рядом трудностей, одной из которых является большое количество типов задач, которые относятся к разным темам и охватывают все разделы физики [1]. Поэтому выпускники школ должны уметь определить тип представленной задачи и правильно выбрать метод её решения. Для этого ученики должны ориентироваться в совокупности общих и частных физических методах решения задач.

В группу общих методов можно отнести энергетический метод, который используется при решении задач практически во всех разделах физики. Усвоение данного метода также необходимо для формирования научного мировоззрения, которое базируется на нескольких фундаментальных идеях, в том числе на идее сохранения энергии и ее преобразования из одного вида в другой. В теоретической физике показывается [2], что сохранение энергии в природе обусловлено таким свойством времени, как его однородность. Энергетический метод, кроме своего непосредственного использования, позволяет в сочетании с дифференциальным методом получить уравнения движения системы, в том числе классического осциллятора. В данной работе показываются возможности применения энергетического метода при решении задач, связанных с изучением колебательных процессов.

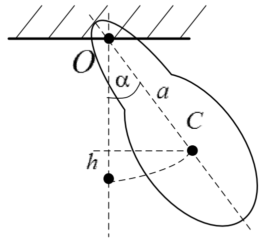
Колебательные системы с одной степенью свободы. Рассмотрим колебательные системы с одной степенью свободы. Мгновенное положение колебательной системы с одной степенью свободы может быть определено с помощью одной величины q, которая называется обобщенной координатой. В качестве обобщенной координаты q может выступать смещение материальной точки относительно положения равновесия x, угол поворота системы относительно оси вращения φ и т.д.

Производная по времени от обобщенной координаты называется обобщенной скоростью: $\dot{q} = q' = \frac{dq}{dt}$. Тогда потенциальная энергия колебательной системы имеет вид $W_{пот} = \frac{1}{2}kq^2$, кинетическая энергия определяется выражением $W_{кин} = \frac{1}{2}m\dot{q}^2$. Общая энергия колебательной системы $W = W_{пот} + W_{кин}$ в общем случае уменьшается вследствие постепенного расходования доли полной энергии на преодоление сил трения, и свободные колебания реальных колебательных систем являются затухающими.

В случае колебательных систем с малым трением, диссипацией энергии можно пренебречь, и считать, что полная энергия системы сохраняется во времени. Тогда $\frac{dW}{dt} = 0$, что приводит к дифференциальному уравнению свободных незатухающих колебаний (собственных колебаний): $\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0$. Решение этого уравнения имеет вид: $q(t) = q_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$.

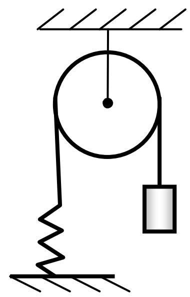
Применение энергетического метода для определения уравнения движения и периода колебаний осциллятора.

Пример 1. Физический маятник. Полная механическая энергия системы: $mgh + \frac{I\varpi^2}{2} = const$. Производная по времени от полной энергии равна нулю: $\frac{dW}{dt} = 0$. Так как угловая скорость вращения



$\varpi = \alpha'$, высота подъема центра тяжести по отношению к равновесному положению $h = a(1-\cos\alpha)$, то $\dfrac{dW}{dt} = mga\sin\alpha\alpha' + \dfrac{I2\alpha'\alpha''}{2} = 0$. Отсюда: $I\alpha'' + mga\sin\alpha = 0$. Таким образом, дифференциальное уравнение колебаний физического маятника: $\alpha'' + \dfrac{mga}{I}\sin\alpha = 0$. Из вида полученного уравнения можно заключить, что колебания физического маятника (так же как и математического маятника) не являются изохронными. Только при выполнении условия $\sin\alpha \approx \alpha$, что справедливо для малых углов отклонения маятника от вертикали, колебания физического маятника будут изохронными.

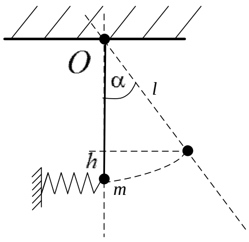
Пример 2. Механическая колебательная система. Полная энергия системы $W = \dfrac{kl^2}{2} - mgl + \dfrac{m\upsilon^2}{2} + \dfrac{I\omega^2}{2}$ сохраняется. I – момент инерции блока, m – масса груза, k – жесткость пружины, $l = l_0 + x$ – деформация пружины, x – отклонение системы от равновесного состояния. Производная от неизменяющейся величины равна нулю: $\dfrac{dW}{dt} = kll' - mgl' + m\vartheta\vartheta' + I\omega\omega' = 0$. Так как $mg = T = kl_0, l' = x'$, то $kl_0l' + kxl' - kl_0l' + m\vartheta\vartheta' + I\omega\omega' = 0$, отсюда $kxx' + mx'x'' + I\dfrac{x'x''}{R^2} = 0$. Тогда уравнение движения имеет вид уравнения гармонических колебаний: $x'' + \dfrac{k}{m + \dfrac{I}{R^2}}x = 0$. Получим для периода колебаний: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k} + \dfrac{I}{kR^2}}$.



Пример 3. Электромагнитный колебательный контур. Полная энергия системы $W = \dfrac{q^2}{2C} + \dfrac{Li^2}{2}$. L – индуктивность соленоида, C – емкость конденсатора, $i = q'$ – сила тока в катушке равна производной от заряда конденсатор. Тогда: $\dfrac{dW}{dt} = \dfrac{2qq'}{2C} + \dfrac{2Lii'}{2} = 0$. Отсюда уравнение гармонических колебаний контура: $q'' + \dfrac{1}{LC}q = 0$. Период колебаний: $T = 2\pi\sqrt{LC}$.

Пример 4. Колебания идеальной жидкости в U-образной трубке. Полная энергия системы $W = \dfrac{m\vartheta^2}{2} + 2m'g\left(\dfrac{2x}{2}\right) = \text{const}$. x – отклонение системы от равновесного состояния, m – масса жидкости, налитой в трубку, m' – масса жидкости в слое высотой x. Тогда: $\dfrac{dW}{dt} = mx'x'' + 2m'gx' = 0$. Отсюда уравнение гармонических колебаний системы: $x'' + 2\dfrac{m'g}{m} = 0$. Тогда $x'' + \dfrac{2gS}{V}x = 0$, где S – площадь сечения трубки, V – объем жидкости в трубке. Период колебаний: $T = \pi\sqrt{\dfrac{2V}{gS}}$.

Пример 5. Связанные маятники. Полная механическая энергия системы: $mgh + \dfrac{m\vartheta^2}{2} + \dfrac{kx^2}{2} = \text{const}$. Производная по времени от полной энергии равна нулю: $\dfrac{dW}{dt} = 0$. Так как угловая скорость движения



материальной точки $\varpi = \alpha'$, высота ее подъема по отношению к равновесному положению $h = l(1-\cos\alpha)$, скорость $\vartheta = \varpi l$, деформация пружины в случае малых колебаний $x = \alpha l$, а $\sin\alpha \approx \alpha$, то $\frac{dW}{dt} = mgl\alpha\alpha' + m\alpha'\alpha'' l^2 + k\alpha\alpha' l^2 = 0$. Отсюда: $ml\alpha'' + mg\alpha + kl\alpha = 0$. Таким образом, дифференциальное уравнение малых колебаний связанных маятников: $\alpha'' + \left(\frac{g}{l} + \frac{k}{m}\right)\alpha = 0$. Циклическая частота колебаний $\omega = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{k}{m}}$.

Заключение. Применение энергетического метода для определения уравнений движения и периода колебаний систем с одной степенью свободы позволяет алгоритмизировать процесс решения такого типа задач независимо от природы колебаний осциллятора. Суть данного алгоритма основана на дифференцировании по времени энергии колебательной системы. Так как энергия системы с пренебрежимо малым трением, совершающей свободные колебания, является интегралом движения (сохраняется), то производная от интеграла движения обращается в нуль. Последующие математические преобразования приводят к дифференциальному уравнению колебательного движения системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Балаш, В.А. Задачи по физике и методы их решения / В.А. Балаш. – М., 1983. – 434 с.
2. Ландау, Л.Д. Механика. Теоретическая физика / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М. : Наука, 1988. – Т. 1. – 214 с.