

ПОИСК НАИЛУЧШЕГО ПРИБЛИЖЕНИЯ СТУПЕНЧАТЫМИ ФУНКЦИЯМИ В МЕТРИКЕ КВАДРАТИЧНОГО ОТКЛОНЕНИЯ ФУНКЦИИ ПЛОТНОСТИ ПОЛУКРУГОВОГО ЗАКОНА ВИГНЕРА

*канд. физ.-мат. наук, доц. Ю. Ф. ПАСТУХОВ,
канд. физ.-мат. наук, доц. Д. Ф. ПАСТУХОВ
(Полоцкий государственный университет, Беларусь)*

Полукруговое распределение Вигнера – непрерывное распределение на вещественной прямой, у которого график плотности представляет полуэллипс, полученный в результате нормировки из полукруга диаметра $2R$, симметричного относительно начала координат. Само распределение было определено Вигнером в 1955 году в результате решения задачи квантовой механики-определения предельного распределения собственных значений случайных эрмитовых матриц, размер которых стремится к бесконечности.

В работе получено приближение плотности распределения Вигнера ступенчатыми функциями в метрике квадратичного отклонения для различного количества ступенек.

Введение. В данной работе применен алгоритм поиска наилучшего приближения для функции плотности распределения полукругового распределения Вигнера в пространстве n -ступенчатых функций на заданном интервале.

Определение. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Функция $f_n : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ ($a < b$) называется n кусочно-постоянной (n -ступенькой) на отрезке $[a, b]$, если $\exists x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1}$:

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < b = x_n,$$

$$f_n(x) = c_i = \text{const} \quad \forall x \in (x_{i-1}, x_i),$$

$$f_n(x_i) = c_i \text{ или } f_n(x_i) = c_{i+1}, \quad c_i \neq c_{i+1}, \quad \forall i = \overline{1, n-1}.$$

Множество n -ступенчатых функций $f_n : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ ($a < b$) будем обозначать как $S_n[a, b]$.

Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^2[a, b]$, $f'(x) < 0 \quad \forall x \in [a, b]$. $n \in \mathbb{N}$. Для минимума ошибки квантования в пространстве n -ступенчатых функций нужно найти наилучшее приближение $h_n : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ функции $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ в метрике квадратичного

отклонения, чтобы $dist = \|f - h_n\|_{C^2[a,b]} = \min_{f_n \in S_n[a,b]} \|f - f_n\|_{C^2[a,b]}$. Поэтому, расстояние оценивается как

$$\begin{aligned} dist = \|f - h_n\|_{C^2[a,b]} &= \sqrt{\int_a^b (f(x) - h_n(x))^2 dx} = \\ &= \min_{f_n \in S_n[a,b]} \sqrt{\int_a^b (f(x) - f_n(x))^2 dx} = \min_{f_n \in S_n[a,b]} \|f - f_n\|_{C^2[a,b]} \end{aligned}$$

Пусть $h_n(x) = c_k$ при $x \in (B_{k-1}, B_k)$ $k = \overline{1, n}$, функция $G(B_1, \dots, B_{n-1}, C_1, \dots, C_n) = \sum_{k=1}^n \int_{B_{k-1}}^{B_k} (f(x) - c_k)^2 dx$ описывает квадрат отклонения (ошибки) функции $h_n : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ от функции $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ отклонения. Необходимое условие экстремума функции $G(B_1, \dots, B_{n-1}, C_1, \dots, C_n)$ описывается следующей системой уравнений:

$$G'_{B_i} = 0, i = \overline{1, n-1}, G'_{C_j} = 0, j = \overline{1, n},$$

из которой следует

$$\begin{cases} f(B_i) = \frac{1}{2}(C_i + C_{i+1}), i = \overline{1, n-1} \\ \int_{B_{j-1}}^{B_j} f(x) dx = C_j(B_j - B_{j-1}), j = \overline{1, n} \end{cases} \quad (1)$$

Система (1) имеет $2n-1$ уравнений и $2n-1$ неизвестных $B_1, B_2, \dots, B_{n-1}, C_1, C_2, \dots, C_n$.

При квантовании нужно приблизить функцию плотности нормального распределения $f(x) = \frac{2}{\pi r^2} \sqrt{r^2 - x^2} \forall x \in [-r, r], f(x) = 0, \forall x \notin [-r, r]$ ступенчатыми функциями, так, чтобы ошибка этого приближения была минимально возможной. Условия $f \in C^2[a, b], f'(x) < 0 \forall x \in [a, b]$ гарантируют существование и единственность решения системы (1) для произвольного натурального n , а также существование локального минимума для решения (1).

Разработан алгоритм численного решения системы (1).

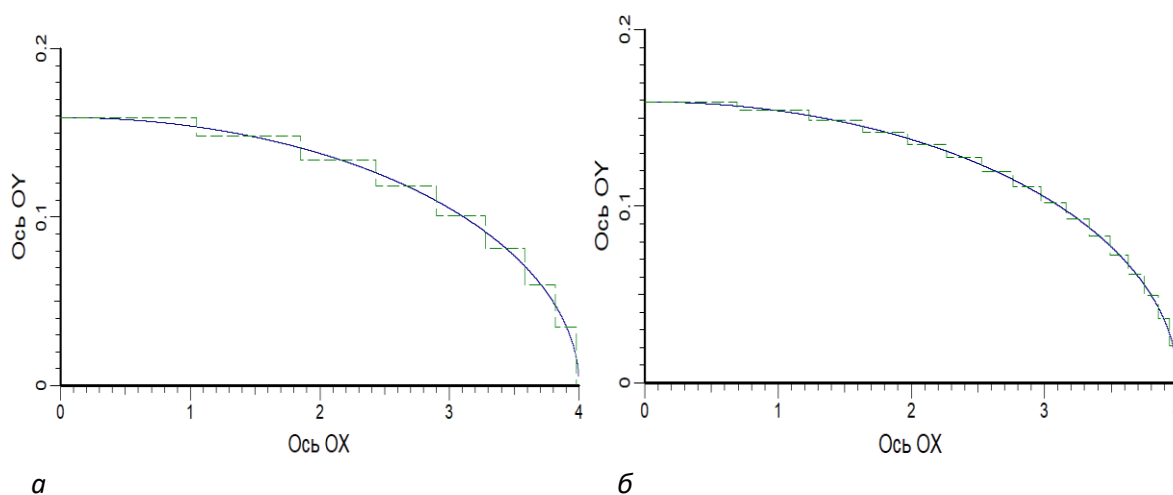
Для применения рассмотренного алгоритма разработано программное обеспечение, которое позволяет получать пороговые уровни и ошибку приближения для различного числа n на одну сторону от начала координат (таблица 1, $r = 4$).

Таблица 1. – Результаты исследований ошибки квантования
для различного количества ступеней

n	8	16	32	64	128
G	$8,46 \cdot 10^{-5}$	$2,12 \cdot 10^{-5}$	$5,31 \cdot 10^{-6}$	$1,35 \cdot 10^{-6}$	$3,65 \cdot 10^{-7}$
dist	$9,2 \cdot 10^{-3}$	$4,60 \cdot 10^{-3}$	$2,31 \cdot 10^{-3}$	$1,16 \cdot 10^{-3}$	$6,05 \cdot 10^{-4}$

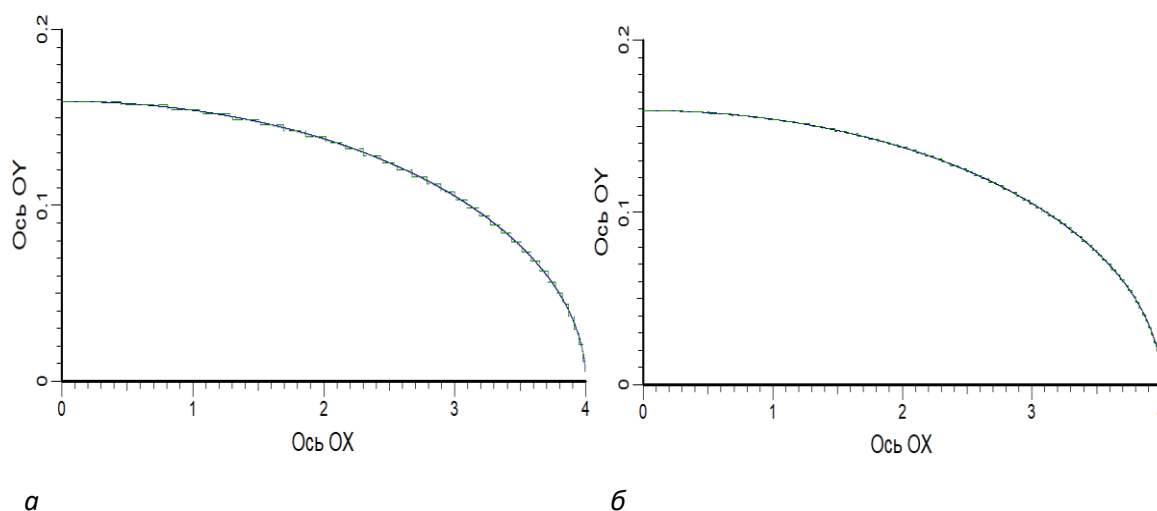
На рисунке 1 представлен пример квантования функции плотности полу-кругового распределения Вигнера на основе предложенного подхода в метрике квадратичного отклонения для $n = 8$ и 16.

Полученные значения пороговых уровней для числа ступеней $n = 8$: 0; 1.050; 1.472; 1.851; 2.151 2.432; 2.671; 2.897; 3.091; 3.275; 3.432; 3.581; 3.704; 3.819; 3.904; 3.977.



***a* – для $n = 8$; *б* – для $n = 16$**

Рисунок 1. – Результат квантования



***a* – для $n = 32$; *б* – для $n = 64$**

Рисунок 2. – Результат квантования

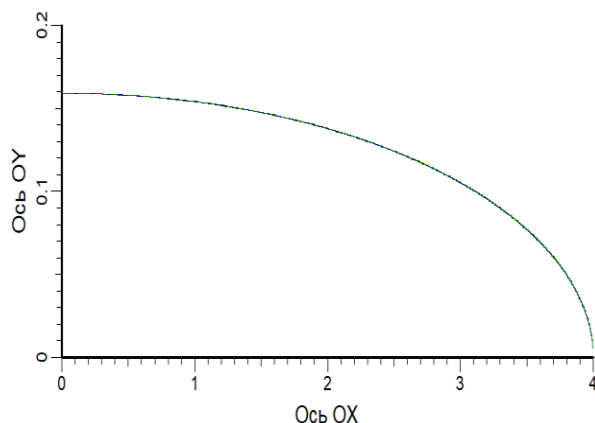


Рисунок 3. – Результат квантования для $n = 128$

ЛИТЕРАТУРА

1. Пастухов, Ю. Ф. Поиск наилучшего приближения в метрике квадратичного отклонения ступенчатыми функциями для обратной функции плотности распределения Коши. (Определение уровней восстановления для плотности распределения Коши) // Евразийское Научное Объединение. – 2021. – № 10-1 (80). – С. 29–34.
2. Пастухов, Ю. Ф. Поиск наилучшего приближения в метрике квадратичного отклонения ступенчатыми функциями для распределения Коши // Евразийское Научное Объединение. – 2019. – № 10-1 (56). – С. 10–15.
3. Пастухов, Ю. Ф., Пастухов, А. Ю., Пастухов, Д. Ф. Наилучшее приближение ступенчатыми функциями в метрике квадратичного отклонения для плотности распределения Лапласа // Евразийское Научное Объединение. – 2020. – № 3-1 (61). – С. 39–44.
4. Волосова, Н. К., Волосов, К. А., Волосова, А. К., Пастухов, Д. Ф., Пастухов, Ю. Ф., Сперанская, О. А. Геометрический подход для качественного поиска конвективных ячеек по температурному полю // Евразийское Научное Объединение. – 2021. – № 8-1 (78). – С. 10–18.
5. Волосова, Н. К., Басараб, М. А., Волосов, К. А., Волосова, А. К., Пастухов, Д. Ф., Пастухов, Ю. Ф. Обобщенная модель открытой каверны для аневризмы кровеносных сосудов // Евразийское Научное Объединение. – 2021. – № 8-1 (78). – С. 18–23.
6. Необходимые условия в обратной вариационной задаче / Ю. Ф. Пастухов // Фундаментальная и прикладная математика. – 2001. – Т. 7. – № 1. – С. 285–288.