

УДК 624.072

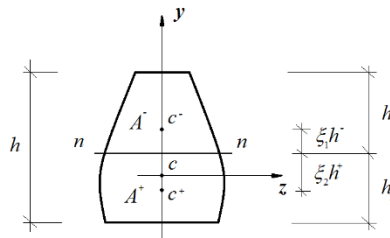
## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИЗГИБНОЙ ЖЕСТКОСТИ ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ С УЧЕТОМ РАЗНОМОДУЛЬНОСТИ МАТЕРИАЛА

**А.С. ВАСИЛЕНКО**

(Представлено: канд. техн. наук, доц. Л.С. Турицев)

Для симметричного поперечного сечения произвольной формы получены формулы, позволяющие в общем виде определять положение нейтральной линии и изгибной жесткости с учетом разномодульности материала. Показано применение полученных формул для приведенной изгибной жесткости двутаврового, таврового и прямоугольного поперечного сечения, наиболее часто встречающихся при расчетах изгибаемых плоских стержневых конструкций. Для указанных поперечных сечений в безразмерной форме получены аналитические формулы, позволяющие определять высоты сжатой и растянутой частей, и приведенной изгибных жесткостей сечений. Полученные формулы позволяют анализировать зависимость определяемых величин от параметров конструкционного материала и поперечных сечений.

**Постановка задачи.** Рассматривается симметричное поперечное сечение произвольной формы (рисунок 1).



**Рисунок 1. – Симметричное поперечное сечение произвольной формы**

где  $A^-$  – площадь сжатой части сечения с центром тяжести в точке  $c^-$  ;  
 $A^+$  – площадь растянутой части сечения с центром тяжести в точке  $c^+$  .  
 Общая площадь поперечного сечения

$$A = A^- + A^+.$$

Для нахождения изгибной жесткости поперечного сечения с учетом разномодульности материала [1] запишем уравнение моментов внутренних сил, возникающих в поперечном сечении, относительно нейтральной линии

$$\sum M = 0; \int_{A^-} \sigma^- y dA - \int_{A^+} \sigma^+ y dA = M. \quad (1)$$

Согласно обобщенному закону упругости [1] напряжения сжатой и растянутой частей сечения связаны с кривизной нейтрального слоя следующими зависимостями

$$\sigma^- = E^- \frac{y}{\rho}; \quad \sigma^+ = E^+ \frac{y}{\rho}. \quad (2)$$

Подставляя (2) в (1), получим уравнение оси изогнутого стержня с учетом разномодульности материала

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{D}.$$

Здесь

$$D = E^- I^- + E^+ I^+ \quad (3)$$

изгибная жесткость симметричного поперечного сечения произвольной формы с учетом разномодульности материала. Входящие в (3) величины  $I^-$  и  $I^+$  характеризуют моменты инерции, соответственно, сжатой и растянутой частей поперечного сечения относительно нейтральной оси.

Для определения положения нейтральной линии запишем уравнение проекций внутренних сил, возникающих в поперечном сечении, на ось x

$$\sum x = 0; \int_{A^-} \sigma^- dA - \int_{A^+} \sigma^+ dA = 0. \quad (4)$$

Подставляя (2) в (4), получим уравнение, позволяющее определять положение нейтральной линии

$$E^- S^- = E^+ S^+, \quad (5)$$

где  $S^- = \xi_1 h^- A^-$  – статический момент сжатой части поперечного сечения;

$S^+ = \xi_2 h^+ A^+$  – статический момент растянутой части поперечного сечения.

При решении уравнения (5) для конкретных типов поперечных сечений следует учитывать равенство

$$h = h^- + h^+. \quad (6)$$

**Решение.** Применим полученные формулы для определения положения нейтральной линии и приведенной изгибной жесткости двутаврового, таврового и прямоугольного поперечных сечений (рисунок 2).

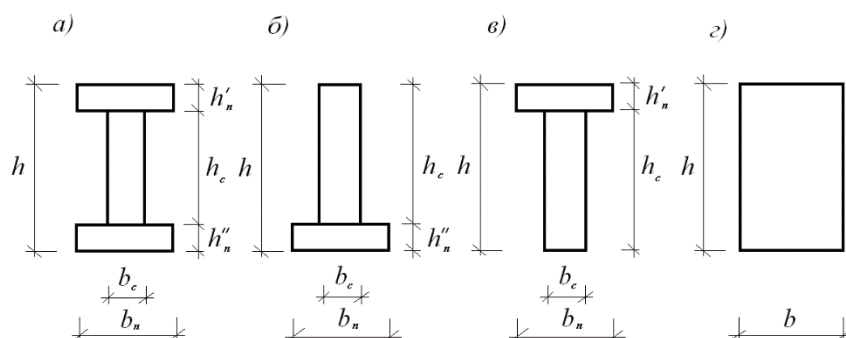


Рисунок 2. – Типы поперечных сечений

Такие поперечные сечения наиболее часто встречаются при расчетах стержневых конструкций.

Положение нейтральной линии для двутаврового сечения (рисунок 2, а) согласно (5) описывается уравнением следующего вида

$$E^- \left[ b_n h_n^- (h^- - 0.5 h_n^-) + \frac{b_c (h^- - h_n^-)^2}{2} \right] = E^+ \left[ b_n h_n^+ (h^+ - 0.5 h_n^+) + \frac{b_c (h^+ - h_n^+)^2}{2} \right]. \quad (7)$$

Вводя в (7) безразмерные геометрические параметры поперечного сечения

$$\eta^- = \frac{h_n^-}{h}; \quad \eta^+ = \frac{h_n^+}{h}; \quad \eta_1 = \frac{h_c^-}{h}; \quad \eta_2 = \frac{h_c^+}{h}; \quad \eta_3 = \frac{h_c}{h}; \quad \beta = \frac{b_n}{b_c} \quad (8)$$

с учетом (6) получим квадратное уравнение относительно  $\eta^-$

$$(\eta^-)^2 - 2p(\mu, \eta_1, \eta_2, \beta) \eta^- + q(\mu, \eta_1, \eta_2, \beta) = 0, \quad (9)$$

где

$$p(\mu, \eta_1, \eta_2, \beta) = \frac{1 - (1 - \beta)(\mu \eta_1 + \eta_2)}{1 - \mu};$$

$$q(\mu, \eta_1, \eta_2, \beta) = \frac{1 - (1 - \beta)(\mu \eta_1^2 + 2\eta_2 - \eta_2^2)}{1 - \mu}.$$

Тогда решение уравнения (9) имеет вид

$$\eta^- = p(\mu, \eta_1, \eta_2, \beta) \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{q(\mu, \eta_1, \eta_2, \beta)}{p^2(\mu, \eta_1, \eta_2, \beta)}} \right) \quad (10)$$

и, следовательно, положение нейтральной линии для двутаврового сечения характеризуется следующими значениями высот сжатой и растянутой частей сечения

$$h^- = \eta^- h; \quad h^+ = \eta^+ h; \quad \eta^+ = 1 - \eta^-. \quad (11)$$

Входящие в (3) моменты инерции сжатой и растянутой частей двутаврового поперечного сечения относительно нейтральной оси описываются формулами

$$I^- = \frac{b_c (h^- - h_n^-)^3}{3} + \frac{b_n (h_n^-)^3}{3} - \frac{b_n (h^- - h_n^-)^3}{3};$$

$$I^+ = \frac{b_c (h^+ - h_n^-)^3}{3} + \frac{b_n (h_n^+)^3}{3} - \frac{b_n (h^+ - h_n^-)^3}{3}.$$

Тогда приведенная жесткость такого сечения будет описываться выражением следующего вида

$$D = E^+ \frac{b_c h^3}{3} [\mu(1 - \beta)(\eta^- - \eta_1)^3 + \mu\beta(\eta^-)^3 + (1 - \beta)(\eta^+ - \eta_2)^3 + \beta(\eta^+)^3] \quad (12)$$

Полагая в (7)  $h_n = 0$ , получим уравнение, позволяющее определить положение нейтральной линии таврового поперечного сечения с полкой, расположенной в растянутой зоне (рисунок 2, б)

$$E^- \frac{b_c (h^-)^2}{2} = E^+ \left[ b_n h_n^- (h^+ - 0.5 h_n^-) + \frac{b_c (h^+ - h_n^-)^2}{2} \right]. \quad (13)$$

С учетом соотношения (3), обозначений (8) и значения  $\eta_1 = 0$  уравнение (13) примет вид

$$(\eta^-)^2 - 2p(\mu, \eta_2, \beta)\eta^- + q(\mu, \eta_2, \beta) = 0, \quad (14)$$

где

$$p(\mu, \eta_2, \beta) = \frac{1 - (1 - \beta)\eta_2}{1 - \mu};$$

$$q(\mu, \eta_2, \beta) = \frac{1 - (1 - \beta)(2 - \eta_2)\eta_2}{1 - \mu}.$$

Тогда решение уравнения (14) имеет вид

$$\eta^- = p(\mu, \eta_2, \beta) \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{q(\mu, \eta_2, \beta)}{p^2(\mu, \eta_2, \beta)}} \right). \quad (15)$$

Значения высот сжатой и растянутой частей, характеризующих положение нейтральной линии таврового поперечного сечения с полкой в растянутой зоне, определяются, как и в случае двутаврового поперечного сечения, по формулам (4). Входящие в (3) моменты инерции сжатой и растянутой частей таврового поперечного сечения с полкой в растянутой зоне относительно нейтральной оси описываются формулами

$$I^- = \frac{b_c (h^-)^3}{3};$$

$$I^+ = \frac{b_c (h^+ - h_n^-)^3}{3} + \frac{b_n (h_n^+)^3}{3} - \frac{b_c (h^+ - h_n^-)^3}{3}.$$

Тогда приведенная жесткость такого сечения будет описываться выражением следующего вида

$$D = E^+ \frac{b_c h^3}{3} [\mu(\eta^-)^3 + (1 - \beta)(\eta^+ - \eta_2)^3 + \beta(\eta^+)^3]. \quad (16)$$

Полагая в (7)  $h_n = 0$ , получим уравнение, позволяющее определить положение нейтральной линии таврового поперечного сечения с полкой, расположенной в сжатой зоне (рис.2.в)

$$E^- \left[ b_n h_n^- (h^- - 0.5 h_n^-) + \frac{b_c (h^- - h_n^-)^2}{2} \right] = E^+ \frac{b_c (h^+)^2}{2}. \quad (17)$$

С учетом соотношения (3), обозначений (8) и значения  $\eta_2 = 0$  уравнение (17) примет вид

$$(\eta^-)^2 - 2p(\mu, \eta_1, \beta)\eta^- + q(\mu, \eta_1, \beta) = 0, \quad (18)$$

где

$$p(\mu, \eta_1, \beta) = \frac{1 - \mu(1 - \beta)\eta_1}{1 - \mu};$$

$$q(\mu, \eta_1, \beta) = \frac{1 - \mu(1 - \beta)\eta_1^2}{1 - \mu}.$$

Тогда решение уравнения (18) имеет вид

$$\eta^- = p(\mu, \eta_1, \beta) \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{q(\mu, \eta_1, \beta)}{p^2(\mu, \eta_1, \beta)}} \right). \quad (19)$$

Значения высот сжатой и растянутой частей, характеризующих положение нейтральной линии таврового поперечного сечения с полкой в сжатой зоне, определяются, как и в двух предыдущих случаях, по формулам (11).

Входящие в (3) моменты инерции сжатой и растянутой частей таврового поперечного сечения с полкой в сжатой зоне относительно нейтральной оси описываются формулами

$$I^- = \frac{b_c (h^- - h_n^*)^3}{3} + \frac{b_n (h_n^-)^3}{3} - \frac{b_c (h^- - h_n^*)^3}{3};$$

$$I^+ = \frac{b_c (h^+)^3}{3}.$$

Тогда приведенная жесткость такого сечения будет описываться выражением следующего вида

$$D = E^+ \frac{b_c h^3}{3} [\mu(1 - \beta)(\eta^- - \eta_1)^3 + \mu\beta(\eta^-)^3 + (\eta^+)^3]. \quad (20)$$

Полагая в (7)  $h_n^* = 0$ ,  $h_n^- = 0$ ,  $b_c = b_n = b$ , получим уравнение, позволяющее определить положение нейтральной линии прямоугольного поперечного сечения (рис.2.г)

$$E^- \frac{b(h^-)^2}{2} = E^+ \frac{b(h^+)^2}{2}. \quad (21)$$

С учетом соотношения (3), обозначений (8) и значений  $\eta_1 = 0$ ,  $\eta_2 = 0$ ,  $\beta = 1$  уравнение (21) примет вид

$$(h^-)^2 - 2p(\mu)h^- + q(\mu) = 0, \quad (22)$$

где

$$p(\mu) = \frac{1}{1 - \mu}; \quad q(\mu) = \frac{1}{1 - \mu}.$$

Тогда решение уравнения (22) имеет вид

$$h^- = p(\mu) \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{q(\mu)}{p^2(\mu)}} \right) = \frac{1}{1 + \sqrt{\mu}}. \quad (23)$$

Значения высот сжатой и растянутой частей, характеризующих положение нейтральной линии прямоугольного поперечного сечения, определяются, как и в предыдущих случаях, по формулам (11)

$$h^- = \frac{1}{1 + \sqrt{\mu}} h \quad (24)$$

и

$$h^+ = \frac{\sqrt{\mu}}{1 + \sqrt{\mu}} h. \quad (25)$$

Входящие в (3) моменты инерции сжатой и растянутой частей прямоугольного поперечного сечения относительно нейтральной оси описываются формулами

$$I^- = \frac{b(h^-)^3}{3}; \quad I^+ = \frac{b(h^+)^3}{3}. \quad (26)$$

Тогда приведенная жесткость такого сечения будет описываться выражением следующего вида

$$D = \frac{b}{3} (E^- (h^-)^3 + E^+ (h^+)^3). \quad (27)$$

Подставляя в (27) значения высот сжатой и растянутой частей (24), (25), окончательно получим

$$D = 4E I_z \frac{\mu}{(1 + \sqrt{\mu})^2}, \quad (28)$$

где  $E = E^+$ ,  $I_z = \frac{bh^3}{12}$ .

Определение приведенной изгибной жесткости для прямоугольного сечения ранее рассматривалось [1; 2].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С.А. Разномодульная теория упругости – М. «Наука», 1982 – 320 с.
2. Смирнов А.Ф. Сопротивление материалов. – М. «Высшая школа», 1975 – 595 с.