Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Полоцкий государственный университет»

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ.

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Учебно-методический комплекс
для студентов технических специальностей

Под общей редакцией
В. С. ВАКУЛЬЧИК

Новополоцк
ПГУ
2011

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73
О62

Рекомендовано к изданию методической комиссией
радиотехнического факультета в качестве
учебно-методического комплекса (протокол № 3 от 17.11.2008)

АВТОРЫ:
В. С. Вакульчик, Ф. Ф. Яско, В. А. Жак,
Т. И. Завистовская, А. П. Мателёнок

РЕЦЕНЗЕНТЫ:
д-р физ.-мат. наук, проф., зав. каф. алгебры и методики преподавания
математики УО «ВГУ им. П.М. Машерова» Н. Т. ВОРОБЬЁВ;
канд. физ.-мат. наук, доц. каф. высшей математики
УО «ПГУ» А. В. КАПУСТО

Определенный интеграл. Функции нескольких переменных :
О62 учеб.-метод. комплекс для студентов техн. специальностей / В. С. Вакульчик [и др.] ; под общ. ред. В. С. Вакульчик. – Новополоцк : ПГУ, 2011. – 244 с.
ISBN 978-985-531-186-8.

Изложены теоретические основы двух разделов курса высшей математики для студентов технических специальностей: «Определенный интеграл», «Функции нескольких переменных»; спроектированы основные этапы практических занятий; предложено соответствующее дидактическое обеспечение: графические схемы, информационные таблицы, обучающие задачи, трехуровневые тесты, вопросы к экзамену, глоссарий.

Предназначен для преподавателей и студентов технических специальностей высших учебных заведений.

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73

ISBN 978-985-531-186-8

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Данный учебно-методический комплекс (УМК) является частью серии учебно-методических пособий, разрабатываемых кафедрой высшей математики УО «ПГУ» по курсу «Высшая математика» для студентов технических специальностей под руководством кандидата педагогических наук, доцента В. С. Вакульчик. Теоретические и дидактические принципы разработки таких пособий изложены в нулевом учебном модуле [5]. Мы надеемся, что наши читатели знакомы, а точнее, изучили этот УМК, в противном случае, советуем ознакомиться хотя бы с его нулевым модулем. В основу проектирования практической части модулей «Неопределенный интеграл», «Определенный интеграл» положен многолетний опыт обучения математике старшего преподавателя кафедры высшей математики В. А. Жак.

В предлагаемом УМК, графическая схема которого представлена на рис. 1, авторами предпринята попытка спроектировать процесс обучения математике как систему целей, содержания, форм, методов и средств обучения, обеспечивающих в своем взаимодействии организацию познавательной деятельности студентов с учетом дифференциации студенческой аудитории. Дидактическую основу УМК составляет дифференцированный и деятельностный подход к обучению математике, а также дидактические принципы научности, системности, доступности. В применении к математике мы руководствуемся сформулированным А. А. Столяром исходным положением теории обучения математике: «Обучение математике есть дидактически целесообразное сочетание обучения математическим знаниям и математической деятельности». Под дифференцированным подходом к обучению математике понимается такая его организация, при которой каждый студент, овладевая некоторым минимумом математических знаний и их практических приложений, получает право и возможность расширять и углублять свои математические знания на более высоких уровнях усвоения. Отдельное внимание необходимо обратить на наличие в УМК таких дидактических средств как графические схемы, информационные таблицы, глоссарий, обобщенные планы, алгоритмические указания, алгоритмическое выделение этапов познавательной деятельности, которые позволяют организовать мыслительную деятельность по переработке математической информации, помогают обучающемуся в логической организации, структурировании, систематизации математических знаний. УМК содержит в себе возможности самоконтроля, а также уровневого контроля знаний. Студенты, работающие на I уровне сложности, потенциально могут претендовать на получение на экзамене оценки «4» – «5»; работающие на II уровне – оценки «6» – «8»; работающие на III уровне – оценки «9» – «10». Информационное поле УМК позволяет студенту выбирать свою траекторию обучения в каждом модуле. Трехуровневая тестовая среда УМК создает условия для перехода студентов от заданий, требующих воспроизводящей мыслительной деятельности, к заданиям, требующим познавательной деятельности преобразующе-воспроизводящего или творческого характера.

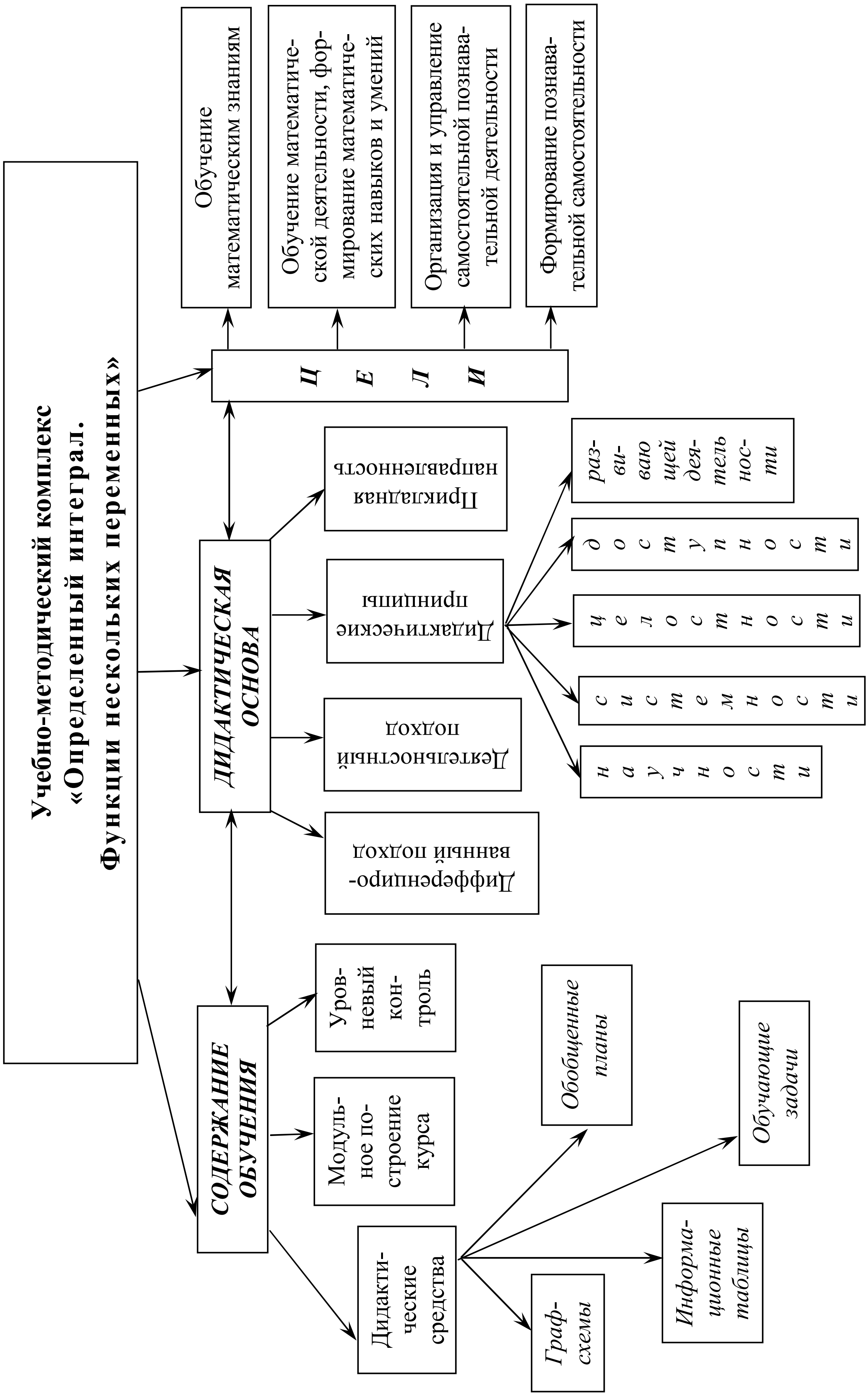

Учебно-методический комплекс «Определенный интеграл. Функции нескольких переменных»
Ц Е Л И
Обучение математическим знаниям
Обучение математической деятельности, формирование математических навыков и умений
Организация и управление самостоятельной познавательной деятельности
Формирование познавательной самостоятельности
ДИДАКТИЧЕСКАЯ ОСНОВА
Прикладная направленность
Дидактические принципы
Деятельностный подход
Дифференцированный подход
развивающей деятельности
доступности
целостности
системности
научности
СОДЕРЖАНИЕ ОБУЧЕНИЯ
Уровневый контроль
Модульное построение курса
Дидактические средства
Обобщенные планы
Обучающие задачи
Информационные таблицы
Граф-схемы

Рис. 1.

УЧЕБНЫЙ МОДУЛЬ 7
ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Введение

Определенный интеграл – важный для инженера инструмент математического аппарата, который необходим для решения многих практических задач, когда приходится суммировать бесконечно большое число бесконечно малых слагаемых. При освоении понятия «определенный интеграл» будем использовать методы вычисления неопределенного интеграла.

ДИДАКТИЧЕСКИЕ ЦЕЛИ ОБУЧЕНИЯ

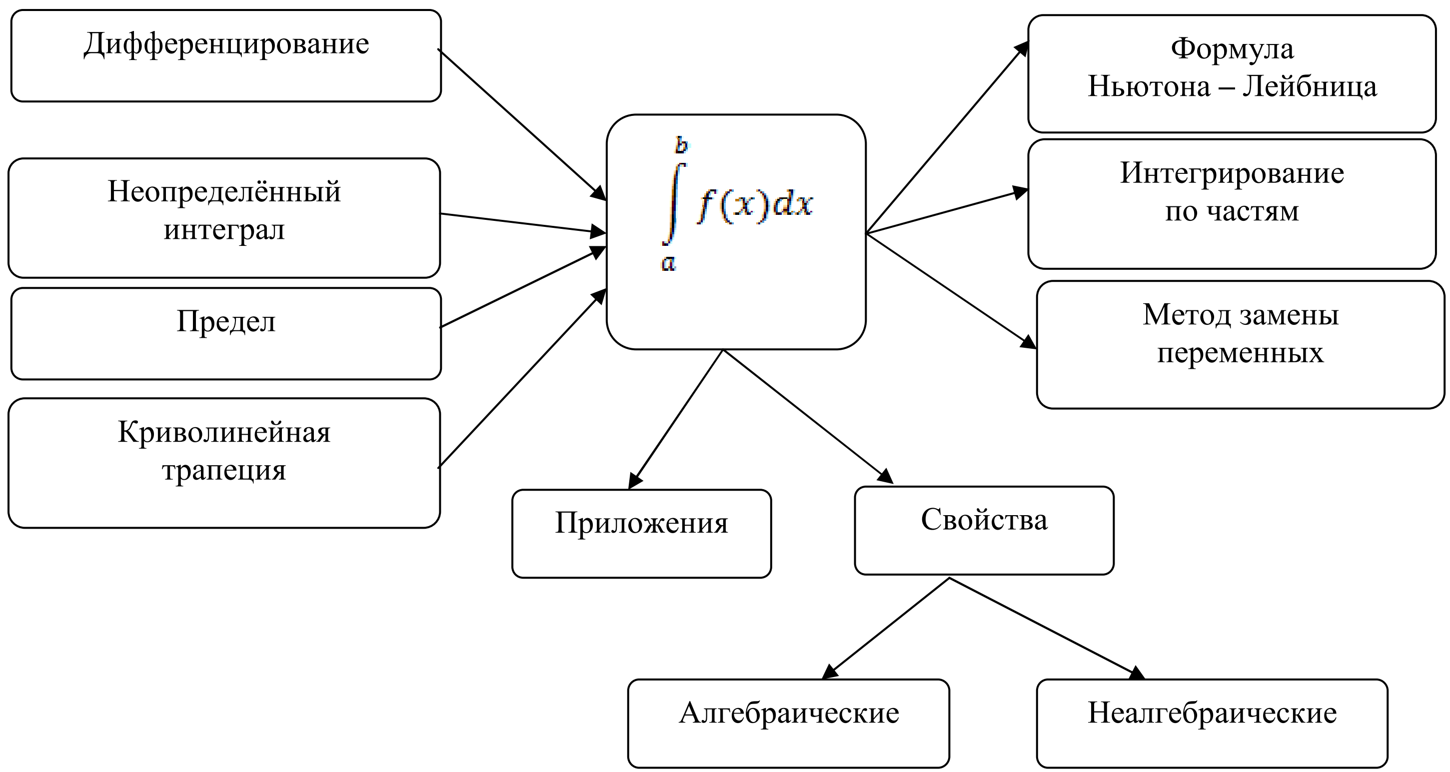
Студент должен знать	*Студент должен уметь*
– типовые задачи, приводящие к понятию определенного интеграла; – основные определения, связанные с понятием определенного интеграла; – основные свойства определенного интеграла; – таблицу интегрирования основных классов элементарных функций; – формулу Ньютона – Лейбница вычисления определенного интеграла; – интегрирование заменой переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле; – определение и вычисление несобственных интегралов первого и второго рода; – признаки сходимости несобственных интегралов первого и второго рода; – геометрические приложения определенного интеграла; – механические и физические приложения определенного интеграла	– записывать по памяти таблицу интегрирования основных классов элементарных функций; – вычислять определенный интеграл с помощью формулы Ньютона – Лейбница; – использовать при вычислении определенного интеграла его основные свойства; – применять при вычислении определенного интеграла методы замены переменной и интегрирования по частям; – вычислять по определению несобственные интегралы первого и второго рода; – применять признаки сходимости несобственных интегралов первого и второго рода; – применять определенные интегралы к вычислению площадей фигур, длин дуг, площадей поверхностей вращения, объемов тел; – применять определенные интегралы к вычислению различных величин, необходимость в определении которых возникает при решении задач механического и физического содержания

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА МОДУЛЯ

Название вопросов, которые изучаются на лекции	Номер практического занятия	Наглядные и методические пособия	Формы контроля знаний
1. Задачи, приводящие к понятию определенных интегралов. Определенный интеграл как предел интегральных сумм. Основные свойства определенного интеграла	I, II	2, 4, 7, 8, 15	ПДЗ
2. Теорема о производной интеграла по верхнему пределу. Формула Ньютона – Лейбница. Интегрирование по частям и замена переменных в определенном интеграле	III	2, 4, 7, 8	Опрос
3. Несобственные интегралы (Н.И.) с бесконечными пределами. Несобственные интегралы от неограниченных функций, основные свойства. Абсолютная и условная сходимости	IV, V	2, 4, 7, 8	Р, ПДЗ
4. Приложение интегралов к вычислению площадей плоских фигур, длин дуг кривых	VI	2, 4, 7, 8	Р, ПДЗ
5. Приложение интегралов к вычислению объемов тел и площадей поверхностей вращения. Физические приложения определенного интеграла	VII, VIII	2, 4, 7, 8	ИДЗ, опрос

Принятые сокращения:
ИДЗ – индивидуальные домашние задания;
ПДЗ – проверка домашнего задания;
Р – разминка.

ГРАФИЧЕСКАЯ СХЕМА МОДУЛЯ



ИНФОРМАЦИОННАЯ ТАБЛИЦА *«ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ»*

Определенным интегралом от функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ называется предел интегральной суммы $\sum\limits_{k=1}^{n} f(\alpha_k)\cdot\Delta x_k$ при условии, что максимальное $\Delta x_k \to 0$, если он существует, не зависит ни от способа разбиения, ни от выбора точек α_k на элементарном промежутке. Обозначается $\int\limits_a^b f(x)dx \overset{def}{=} \lim\limits_{\max \Delta x_k \to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} f(\alpha_k)\cdot\Delta x_k$

Если $f(x)\in C_{[a,b]}$ и для нее существует первообразная $F(x)=f(x)$, то $\int\limits_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$ (формула Ньютона – Лейбница).

Формула интегрирования по частям в определенном интеграле $\int\limits_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b vdu$.

Замена переменной в определенном интеграле $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(x(t))x'(t)dt$.

Вычисление несобственных интегралов

$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{B\to+\infty}\int\limits_a^B f(x)dx$ – *несобственный интеграл I рода*

$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon_1\to 0}\int\limits_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \lim\limits_{\varepsilon_2\to 0}\int\limits_{c+\varepsilon_2}^b f(x)dx,\quad c\in[a,b]$ – точка разрыва II рода.

Если указанные пределы существуют и конечны, то несобственные интегралы I и II рода называют ***сходящимися***. В противном случае – ***расходящимися.***

Признаки сравнения несобственных интегралов I рода

1. Пусть $x\in[a,+\infty)$ и $0<\varphi(x)<f(x)$,

а) if $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ (1) – сходится, то и $\int\limits_0^{+\infty}\varphi(x)dx$ (2) – сходится.

б) if (2) – расходится, то и (1) – расходится.

2. if $\exists \lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = k,\ k\neq 0, k\neq\infty,$ то несобственные интегралы (1) и (2) сходятся или расходятся одновременно.

Аналогичные признаки имеют место и для **интегралов II рода**

Эталонные ряды: 1. $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^k}\Rightarrow$ при $\left[\begin{array}{l} k\le 1, \text{ Н.И. расходится} \\ k>1, \text{ Н.И. сходится}\end{array}\right]$

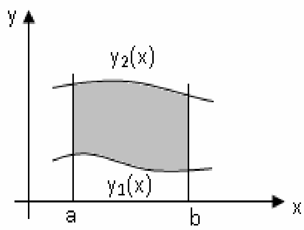
2. $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-kx}dx\Rightarrow$ сходится $\forall k>0$.

3. $\int\limits_{a}^{b}\frac{dx}{|x-c|^m}\Rightarrow$ при $\left[\begin{array}{ll} m\ge 1, & \text{Н.И.расходится} \\ m<1, & \text{Н.И.сходится}\end{array}\right]$, где $a\le c\le b$.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА:

Вычисление площадей плоских фигур

функция задана явно $S=\int\limits_a^b\left[y_2(x)-y_1(x)\right]dx$;



функция задана параметрически $S=\int\limits_{t_1}^{t_2} y(t)\cdot x'(t)\,dt$;

функция задана в полярной системе координат $S=\frac{1}{2}\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}\left[\rho(\varphi)\right]^2 d\varphi$.

Вычисление длины дуги кривой

Функция:

1) задана явно, $l=\int\limits_a^b\sqrt{1+(y'_x)^2}\,dx$;

2) *задана параметрически,* $l=\int\limits_{t_1}^{t_2}\sqrt{(x'_t)^2+(y'_t)^2}\,dt$;

3) задана в полярной системе координат, $l=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\sqrt{(\rho)^2+(\rho')^2}\,d\varphi$.

Вычисление объемов тел вращения

$$V_y=\pi\int\limits_c^d x^2dy,\quad V_x=\pi\int\limits_a^b y^2dx,\quad V_y=2\pi\int\limits_a^b xydx.$$

Вычисление площади боковой поверхности тел вращения

$$\sigma_x=2\pi\int\limits_a^b|y|\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx,\quad \sigma_y=2\pi\int\limits_c^d|x|\sqrt{1+\left(\varphi'(y)\right)^2}\,dy.$$

ФИЗИЧЕСКИЕ И МЕХАНИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА:

1. Путь, пройденный телом, перемещающимся со скоростью $v = v(t)$ за промежуток времени $[t_1;t_2]$, выражается интегралом $S = \int\limits_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt.$
2. Работа переменной силы, заданной функцией $F = F(x)$ и направленной вдоль оси Ox на отрезке $[a;b]$, равна интегралу $A = \int\limits_a^b F(x)dx.$
3. Давление жидкости на вертикальную пластину, ограниченную линиями $x = a$, $x = b$, $y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x)$, вычисляется по формуле $P = g\gamma\int\limits_a^b \left(f_2(x) - f_1(x)\right)x\,dx$,

где g – ускорение свободного падения, γ – плотность жидкости.

4. Статистические моменты относительно координатных осей, моменты инерции и координаты центра тяжести плоской дуги $y = f(x)$, $a \le x \le b$ находятся соответственно по формулам $M_x = \int\limits_a^b \gamma y dl$, $M_y = \int\limits_a^b \gamma x dl$, $I_y = \int\limits_a^b \gamma x^2 dl$, $I_x = \int\limits_a^b \gamma y^2 dl$, $x_c = \frac{M_y}{m}$, $y_c = \frac{M_x}{m}$, $m = \int\limits_a^b \gamma\sqrt{1+(y_x')^2}dx,$ где $\gamma = \gamma(x)$ – плотность, dl – дифференциал дуги,

$$dl = \sqrt{1+\left(y_x'\right)^2}dx,\ dl = \sqrt{\left(x_t'\right)^2 + \left(y_t'\right)^2}dt,\ dl = \sqrt{\rho^2 + \left(\rho'_\varphi\right)^2}d\varphi.$$

5. Координаты центра тяжести плоской фигуры, ограниченной кривыми $y_1 = f_1(x)$, $y_2 = f_2(x)$, $a \le x \le b$, находятся соответственно по формулам

$$x_c = \frac{\int\limits_a^b \gamma x\left[f_2(x) - f_1(x)\right]dx}{m},$$

$$y_c = \frac{\frac{1}{2}\int\limits_a^b \gamma\left[f_2(x) + f_1(x)\right]\left[f_2(x) - f_1(x)\right]dx}{m},$$

$$m = \int\limits_a^b \gamma\left[f_2(x) - f_1(x)\right]dx.$$

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА

7.1. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла

Задача 1 (о массе). Найти массу куска тонкого неоднородного стержня, если $\gamma = \gamma(x)$ – линейная плотность в точке $x \in [a,b]$.

Решение. Разумеется, если бы плотность была постоянной, то массу стержня можно было бы определить по формуле $m = \gamma \cdot l$. В условии задачи плотность γ стержня меняется от точки к точке, поэтому массу всего стержня невозможно найти старыми методами.

Поступим следующим образом:

1) отрезок $[a,b]$ разобьем произвольным образом на n частей так, чтобы внутри разбиения γ изменялась незначительно (рис. 7.1.1);

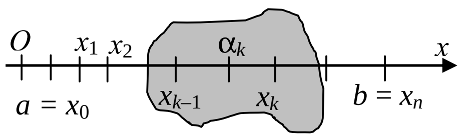


Рис. 7.1.1

2) обозначим точки разбиения: $a = x_0, x_1, x_2, ..., x_{k-1}, x_k, ..., x_n = b$;

3) пусть $\Delta x_1 = x_1 - a, \Delta x_2 = x_2 - x_1, ..., \Delta x_n = b - x_{n-1}$;

4) на каждом из элементарных участков выберем по одной произвольной точке α_k;

5) будем считать элементарные участки Δx_k настолько малыми, что изменением плотности на каждом из них можно пренебречь и принять плотность элементарного участка $\approx \gamma(\alpha_k)$;

6) вычислим массу произвольного элементарного участка $[x_{k-1}, x_k]$: $\Delta m_k \approx \gamma(\alpha_k) \cdot \Delta x_k,\ \Delta x_k = x_k - x_{k-1}$;

7) тогда масса всего куска неоднородного стержня:

$$m \approx \sum_{k=1}^{n} \gamma(\alpha_k) \cdot \Delta x_k . \qquad (7.1.1)$$

Зададимся вопросами: «Когда сумма в (7.1.1) будет определять истинную массу стержня? Как определить истинную массу стержня? Какой инструмент математического аппарата поможет нам в этом?» Математический анализ дает нам возможность дать ответ: «За истинную массу куска стержня естественно принять предел, когда воображаемое разбиение стержня измельчается до ***бесконечно малых*** размеров, а число участков разбиения ***бесконечно*** увеличивается:

$$m = \lim_{\substack{\max \Delta x_k \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{k=1}^{n} \gamma(\alpha_k) \cdot \Delta x_k . \qquad (7.1.2)$$

Определение 7.1.1. Фигура, ограниченная графиками непрерывных кривых: снизу $y_1 = y_1(x)$; сверху $y_2 = y_2(x)$; слева $x = a$; справа $x = b$, причем $y_1(x) \le y_2(x)$ и $x \in [a, b]$, называется ***криволинейной трапецией***.

Задача 2 (о площади криволинейной трапеции). Вычислить площадь криволинейной трапеции **(опр. 7.1.1)**.

Решение. Для вычисления площади всей фигуры разобьем отрезок $[a, b]$ произвольным образом на элементарные части точками (рис. 7.1.2)

$a = x_0, x_1, x_2, ..., x_{k-1}, x_k, ..., x_n = b$ так, что $x_0 = a < x_1 < ... < x_n = b$.

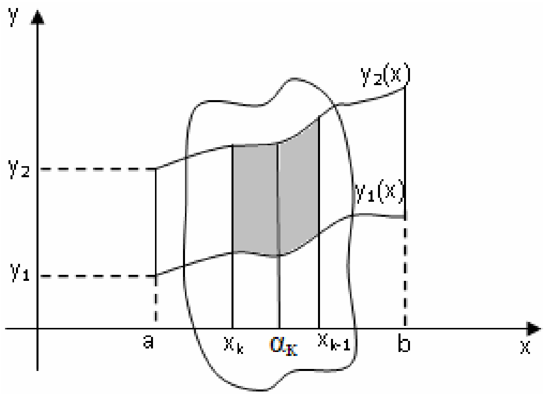


Рис. 7.1.2

На произвольном промежутке $[x_{k-1}, x_k]$ рассмотрим элемент разбиения, который представляет собой криволинейную трапецию, площадь которой можно заменить площадью прямоугольника $\Delta S_k = \left[y_2(\alpha_k) - y_1(\alpha_k) \right] \cdot \Delta x_k$, где $\alpha_k \in [x_{k-1}, x_k]$ выбрано произвольным образом. Очевидно, $S \approx \sum_{k=1}^{n} \Delta S_k$, тогда

$$S = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} \left[y_2(\alpha_k) - y_1(\alpha_k) \right] \cdot \Delta x_k . \qquad (7.1.3)$$

Задача 3 (о пройденном пути, изучить самостоятельно**).** Будем считать, что нам известен закон изменения мгновенной скорости $v = v(t)$ при движении материальной точки. Необходимо найти путь, пройденный за время $[t_0, T]$.

Разобьем весь промежуток времени $[t_0, T]$ на n число малых «частичных» промежутков времени, так что

$$t_0 = t_0 < t_1 < t_2 ... < t_{k-1} < t_k ... < t_{n-1} < t_n = T ,$$

где $t_1, t_2, \ldots, t_k, \ldots, t_{n-1}$ – некоторые промежуточные произвольно выбранные моменты времени.

Обозначим длины промежутков времени:

$$\Delta t_1 = t_1 - t_0,\ \ \Delta t_2 = t_2 - t_1,\ \ \ldots,\ \Delta t_k = t_k - t_{k-1},\ \ldots,\ \Delta t_n = t_n - t_{n-1}.$$

1. В каждом промежутке времени $[t_{k-1}, t_k]\left(k = \overline{1,n}\right)$ возьмем произвольный момент времени $\tau_k \in [t_{k-1}, t_k]$ и найдем в нем мгновенную скорость $v(\tau_k)$. Если Δt_k достаточно малые, то можно считать движение равномерным, и путь, пройденный за это время Δt_k, найдем как $\Delta S_k = v(\tau_k)\cdot\Delta t_k$, где $k = \overline{1,n}$.

2. Тогда весь путь за время $[t_0, T]$

$$S \cong v(\tau_1)\cdot\Delta t_1 + v(\tau_2)\cdot\Delta t_2 + v(\tau_k)\cdot\Delta t_k + \ldots + v(\tau_n)\cdot\Delta t_n = \sum_{k=1}^{n} v(\tau_k)\cdot\Delta t_k\ .$$

3. Эта формула тем точнее, чем мельче разбиение основного промежутка времени. Чтобы получить точную формулу, надо перейти к пределу, приняв, что это разбиение бесконечно измельчается, т.е.

$$S = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\Delta t_k \to 0}} \sum_{k=1}^{n} v(\tau_k)\cdot\Delta t_k\ . \tag{7.1.4}$$

Вопрос: достаточно ли сказать, что предел берется при $n\to\infty$? Нет, так как участки Δt_k не предполагаются равными и, если потребовать только, чтобы $n\to\infty$, то может получиться, что одна часть интервала $[t_0, T]$ измельчается, а другая – нет.

Задача 4 (о количестве произведенной продукции, изучить самостоятельно**).** Пусть формула изменения производительности труда известна и зависима от времени $f = f(t)$. Нужно найти объем производства продукции за время $[t_0, T]$. Произведем аналогичные рассуждения, получим, что объем произведенной продукции будет приближенно равен сумме:

$$\varPi_k \approx \sum_{k=1}^{n} f(\tau_k)\Delta t_k\ ,$$

тогда

$$\varPi = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\Delta t_k \to 0}} \sum_{k=1}^{n} f(\tau_k)\cdot\Delta t_k(4). \tag{7.1.5}$$

З а д а ч а 5 (о работе переменной силы). Вычислить работу переменной силы $F(x)$ по перемещению материальной точки единичной массы вдоль $[a,b]$ в направлении оси *Ox*.

Решение. Рассуждая как в предыдущих задачах, повторяем процедуру разбиения (самостоятельно).

$$[x_{k-1},x_k],\ \Delta A_k \approx F(\alpha_k)\cdot\Delta x_k,\ \alpha_k\in[x_{k-1},x_k],$$

$$A\approx\sum_{k=1}^{n}F(\alpha_k)\Delta x_k;$$

$$A=\lim_{\Delta x_k\to 0}\sum_{k=1}^{n}F(\alpha_k)\Delta x_k. \qquad (7.1.6)$$

Выводы:

1. Как видно из рассмотренных задач, различных по смыслу и практическому содержанию, их объединяет единая методика решения, в результате применения которой необходимо вычислять пределы вида (7.1.2) – (7.1.6).

2. Пределы (7.1.2) – (7.1.6) имеют одинаковую структуру.

3. Пределы (7.1.2) – (7.1.6) суммируют бесконечное число бесконечно малых слагаемых.

4. Необходимо ввести новое математическое понятие, объединяющее все пределы такого рода.

7.2. Определенный интеграл, как предел интегральных сумм

Рассмотрим функцию *y* = *f*(*x*), определенную и ограниченную на отрезке $[a,b]$ (рис. 7.2.1). Произведем следующие действия:

1. Разобьем отрезок $[a;b]$ на n частичных отрезков так, что

$$a=x_0<x_1<x_2...<x_{k-1}<x_k...<x_{n-1}<x_n=b.$$

Обозначим данное разбиение буквой T. Отрезок $[x_{k-1};x_k]\left(k=\overline{1,n}\right)$ будем называть ***k-тым частичным отрезком***, а длину его будем обозначать $\Delta x_k=x_k-x_{k-1}$. Обозначим через $\lambda(T)=\max\limits_k \Delta x_k$ (наибольший из этих отрезков). Величину $\lambda(T)$ будем называть ***диаметром данного разбиения***.

2. На каждом из частичных отрезков произвольным образом выберем точку $\alpha_k\in[x_{k-1};x_k]\left(k=\overline{1,n}\right)$ и вычислим значение функции $f(\alpha_k)$.

3. Вычислим также произведение $f(\alpha_k)\cdot\Delta x_k\ \left(k=\overline{1,n}\right)$. Составим сумму

$$\sum_{k=1}^{n} f(\alpha_k)\cdot\Delta x_k=\sigma\left(f,T,\alpha_k\right). \quad (7.2.1)$$

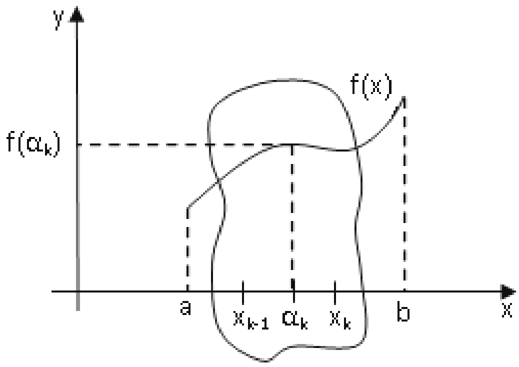


Рис. 7.2.1

Определение 7.2.1. Сумма $\sigma\left(f,T,\alpha_k\right)$ называется ***интегральной суммой*** функции $y = f(x)$ на отрезке $[a,b]$ или ***суммой Римана***.

Интегральная сумма (7.2.1) в общем случае зависит от $f(x)$, от отрезка $[a,b]$, от способа разбиения, от выбора точек α_k.

Определение 7.2.2. ***Определенным интегралом*** от функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ называется предел интегральной суммы $\sigma\left(f,T,\alpha_k\right)$ при условии, что максимальное $\Delta x_k \to 0$, если он существует, не зависит ни от способа разбиения, ни от выбора точек α_k на элементарном промежутке.

Обозначается $$\int_a^b f(x)dx \overset{def}{=} \lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\alpha_k)\cdot\Delta x_k. \quad (7.2.2)$$

Определение 7.2.3. Функция, для которой существует конечный предел в (**7.2.2**), называется ***интегрируемой*** на отрезке $[a,b]$. Обозначается $f(x)\in I_{[a,b]}$. Числа a и b называются нижним и верхним пределом интегрирования, $f(x)$ – подынтегральной функцией, $f(x)dx$ – подынтегральным выражением, x – переменной интегрирования, $[a;b]$ – отрезком интегрирования.

ТЕОРЕМА 7.2.1 (необходимое условие интегрируемой функции).

Если функция $f(x)\in I_{[a,b]}$, то она ограничена на отрезке $[a,b]$.

ТЕОРЕМА 7.2.2 (достаточные условия интегрируемой функции).

Если выполняется одно из условий: 1) функция $f(x)\in C_{[a,b]}$ или 2) $y=f(x)$ ограничена на $[a;b]$ и непрерывна во всех точках этого отрезка, за исключением лишь конечного числа точек, где функция терпит разрыв I рода, то $f(x)\in I_{[a,b]}$.

Физический, экономический, геометрический смысл определенного интеграла

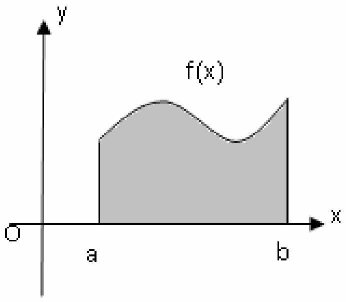


Рис. 7.2.2

1) ***Физический*** смысл – $\int_{t_0}^{T} \vartheta(t)dt = S$ – выражает путь.

2) ***Экономический*** смысл – $\int_{t_0}^{T} f(t)dt = П$ – выражает объем произведенной продукции за время $[t_0, T]$.

3) ***Геометрический*** смысл $\int_{a}^{b} f(x)dx = S$ – численно равен площади криволинейной трапеции (рис. 7.2.2).

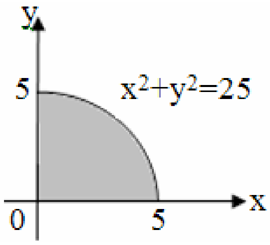


Рис. 7.2.3

П р и м е р 7.2.1. Исходя из геометрического смысла определенного интеграла, найти $\int_0^5 \sqrt{25 - x^2}dx$ (рис. 7.2.3).

*Решение***.** Линия $y = \sqrt{25 - x^2}$ есть верхняя половина окружности $x^2 + y^2 = 25$. Та часть линии, которая получается при изменении *x* от 0 до 5, лежит в первой координатной четверти, отсюда заключаем, что криволинейная трапеция, ограниченная линиями $x = 0, x = 5, y = 0, y = \sqrt{25 - x^2}$, есть четверть круга $x^2 + y^2 = 25$; ее площадь равна $\frac{25\pi}{4}$. Значит $\int_0^5 \sqrt{25 - x^2}dx = \frac{25\pi}{4}$ ед. кв.

П р и м е р 7.2.2. Вычислить $\int_0^1 xdx$, исходя из его определения как предела интегральной суммы.

Решение. Так как функция $f(x) = x$ непрерывна на $[0,1]$, то $\int_0^1 xdx$ существует и не зависит от способа разбиения и выбора точек α_k. Поэтому интервал $[0,1]$ разбиваем на *n* равных (для удобства вычислений) частичных отрезков длиной $\Delta x_k = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n}$. Значения заданной функции $f(x) = x$ выберем в правых концах частичных отрезков, т. е. $f(\alpha_k)=\frac{k}{n}$, где k = 1, 2, …, n. Составим интегральную сумму:

$$\sum_{k=1}^{n} f(\alpha_k)\Delta x_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{n^2}(1+2+3+...+n)=\frac{1}{n^2}\cdot\frac{1+n}{2}\cdot n=\frac{n+1}{2n}.$$

Здесь сумма в скобках найдена по формуле суммы арифметической прогрессии с разностью d = 1. Перейдем к пределу (т. к. частичные отрезки разбиения равны, то условие $\max\Delta x_k\to 0$ равносильно условию $n\to\infty$). Будем иметь $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}$, $\Rightarrow\int\limits_0^1 xdx=\frac{1}{2}$.

Очевидно, что вычисление определенного интеграла исходя из его определения связано с громоздкими выкладками. Позже мы получим для вычисления определенного интеграла удобную формулу Ньютона – Лейбница:

$$\int\limits_a^b f(x)dx=F(b)-F(a),$$

где $F'(x)=f(x)$.

Замечание 7.2.1. Часто возникает необходимость вычисления предела суммы, когда число слагаемых неограниченно возрастает. Такие пределы в некоторых случаях можно найти с помощью определенного интеграла, если данную сумму удается преобразовать так, чтобы она оказалась интегральной суммой.

Например, рассматривая точки $\frac{1}{n},\frac{2}{n},\ldots,\frac{n}{n}$ как точки деления отрезка [0;1] на n равных частей длиной $\Delta x=\frac{1}{n}$, для любой непрерывной функции $f(x)$ имеем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+...+f\left(\frac{n}{n}\right)\right)=\int\limits_0^1 f(x)dx.$$

Пример 7.2.3. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+...+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right)$.

Решение. Числа, стоящие в скобках, представляют собой значения функции $f(x)=\sin x$ в точках $x_1=\frac{\pi}{n}$, $x_2=\frac{2\pi}{n}$, ..., $x_{n-1}=\frac{(n-1)\pi}{n}$, делящих отрезок $[0;\pi]$ на n равных частей длиной $\Delta x=\frac{\pi}{n}$. Поэтому, если к нашей сумме прибавить слагаемое $\sin\frac{\pi n}{n}=0$, то она будет являться интегральной для функции $f(x)=\sin x$ на отрезке $[0;\pi]$.

По определению

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+...+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}+\sin\frac{\pi n}{n}\right)=\int_0^{\pi}\sin xdx=-\cos x\Big|_0^{\pi}=2.$$

7.3. Основные свойства определенного интеграла

Свойство 7.3.1. Определенный интеграл не зависит от выбора обозначения аргумента подынтегральной функции:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(t)dt=\int_a^b f(z)dz.$$

Свойство 7.3.2. Если функция $f(x)\in I_{[a,b]}$, то $cf(x)\in I_{[a,b]}$, причем выполняется равенство: $\int_a^b cf(x)dx=c\int_a^b f(x)dx$.

Доказательство. По условию $f(x)\in I_{[a,b]}$, следовательно, существует конечный предел $\lim_{\max\Delta x_k\to 0}\sum_{k=1}^{n}f(\alpha_k)\cdot\Delta x_k$.

Рассмотрим $\lim_{\max\Delta x_k\to 0}\sum_{k=1}^{n}c\cdot f(\alpha_k)\cdot\Delta x_k$. По свойству конечных сумм и предела он равен $\lim_{\max\Delta x_k\to 0}c\sum_{k=1}^{n}\cdot f(\alpha_k)\cdot\Delta x_k=c\cdot\lim_{\max\Delta x_k\to 0}\sum_{k=1}^{n}f(\alpha_k)\cdot\Delta x_k$. Значит, $\lim_{\max\Delta x_k\to 0}\sum_{k=1}^{n}c\cdot f(\alpha_k)\cdot\Delta x_k$ существует и конечен. Следовательно, $c\cdot f(x)\in I_{[a,b]}$ и $\int_a^b cf(x)dx=c\int_a^b f(x)dx$.

Свойство 7.3.3. Если $f_1(x)\in I_{[a,b]}$, $f_2(x)\in I_{[a,b]}$, то $\left[f_1(x)\pm f_2(x)\right]\in I_{[a,b]}$, причем $\int_a^b\left[f_1(x)\pm f_2(x)\right]dx=\int_a^b f_1(x)dx\pm\int_a^b f_2(x)dx$.

Свойство 7.3.4. Интеграл $\int_a^a f(x)dx=0$.

Свойство 7.3.5. $\int\limits_a^b dx = b - a$ (следует из геометрического свойства определенного интеграла).

Свойство 7.3.6. $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$ (следует из определения определенного интеграла).

Свойство 7.3.7 ***(аддитивности).*** Если $f(x) \in I$ на наибольшем из отрезков $[a;b]$, $[a;c]$, $[c,b]$, то она также интегрируема и на двух других отрезках, причем имеет место равенство $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$.

Доказательство. 1. Пусть $c \in [a,b]$. По условию $f(x) \in I_{[a,b]}$, следовательно, существует конечный предел $\lim\limits_{\max \Delta x_k \to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} f(\alpha_k) \cdot \Delta x_k$, который не зависит от способа разбиения. Разобьем отрезок $[a,b]$ так, что $x_0 = a < x_1 < .... < x_{k-1} = c \le x_k < .... < x_n = b$. Тогда будем иметь $\lim\limits_{\max \Delta x_k \to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} f(\alpha_k) \cdot \Delta x_k = \lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0} \left(\sum\limits_{i=1}^{k-1} f(\alpha_i) \cdot \Delta x_i + \sum\limits_{i=k}^{n} f(\alpha_i) \Delta x_i \right)$.

Зная, что предел суммы равен сумме пределов, получим

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx.$$

2. Пусть $c \notin [a,b]$. По условию $f(x) \in I_{[a,c]}$. В пункте 1 доказано, что $\int\limits_a^c f(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_b^c f(x)dx$, из этого следует, что $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx - \int\limits_c^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$.

Свойство 7.3.8. Если $f(x) \ge 0$ для любых $x \in [a,b]$, то $\int\limits_a^b f(x)dx \ge 0$.

Свойство 7.3.9. Если $f_1(x) \ge f_2(x)$ для любых $x \in [a,b]$, то $\int\limits_a^b f_1(x)\,dx \ge \int\limits_a^b f_2(x)dx$.

Пример 7.3.1. Установить, какой из двух интегралов $\int_0^1 \sqrt{x}dx$, $\int_0^1 x^3 dx$ больше?

Решение. Так как $\sqrt{x} > x^3$ при $0 < x < 1$, то $\int_0^1 \sqrt{x}dx > \int_0^1 x^3 dx$.

Свойство 7.3.10. Если $m = min\ f(x)$; $M = max\ f(x)$ на отрезке $[a,b]$ и $f(x) \in C_{[a,b]}$, то

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

Свойство 7.3.11. Если $f(x) \in I_{[a,b]}$, то $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$.

Свойство 7.3.12 (теорема о среднем). Если $f(x) \in C_{[a,b]}$, то существует $c \in [a,b]$ такое, что $\int_a^b f(x)dx = f(c) \cdot (b-a)$.

Доказательство. Так как функция $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то она достигает своих наименьшего m и наибольшего M значений, т. е. для любого $x \in [a,b]$ выполняется неравенство $m \le f(x) \le M$, из которого следует неравенство $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$. Очевидно $b-a > 0$, разделим неравенство на $(b-a)$ и получим $m \le \frac{\int_a^b f(x)dx}{(b-a)} \le M$.

В последнем неравенстве число $\mu = \frac{\int_a^b f(x)dx}{(b-a)}$ находится между наименьшим и наибольшим значениями непрерывной на $[a,b]$ функции $f(x)$, которая принимает все промежуточные значения из отрезка $[m;M]$, в том числе и значение μ. Следовательно, существует точка $c \in [a,b]$, такая, что $f(c) = \mu$. Значит, $f(c) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{(b-a)}$, откуда $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$.

Определение 7.3.1. Выражение

$$f(c)=\frac{\int\limits_a^b f(x)dx}{(b-a)} \tag{7.3.1}$$

называется ***средним значением*** функции $f(x)$ на $[a,b]$.

Замечание 7.3.1. Формула (7.3.1) используется на практике для нахождения средней производительности труда, издержек производства и т.д.

Свойство 7.3.13. Если $f(x) = f(-x)$, то $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int\limits_{0}^{a} f(x)dx$.

Свойство 7.3.14. Если $f(-x) = -f(x)$, то $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.

7.4. Интеграл с переменным верхним пределом

Определение 7.4.1. Пусть $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$, значит функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,x]$, где $x\in[a,b]$. Функцию $\Phi(x)=\int\limits_a^x f(t)dt, x\in[a,b]$ называют ***интегралом с переменным верхним пределом*** (рис. 7.4.1).

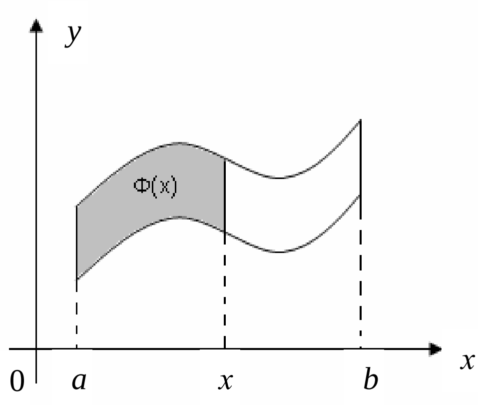


Рис. 7.4.1

ТЕОРЕМА 7.4.1. Производная от интеграла с переменным верхним пределом равна значению подынтегральной функции в верхнем пределе:

$$\left[\Phi(x)\right]' = f(x).$$

Доказательство. Вычислим производную от функции $\Phi(x)$. Будем иметь:

$$\Phi'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\Phi}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)}{\Delta x}=$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\int\limits_a^{x+\Delta x} f(t)dt-\int\limits_a^x f(t)dt}{\Delta x}\overset{\text{св.6}}{=}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\int\limits_x^a f(t)\,dt+\int\limits_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt}{\Delta x}\overset{\text{св.12}}{=}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(c)(x+\Delta x-x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0} f(c)=f(x).$$

Следствие 7.4.1. Интеграл с переменным верхним пределом является первообразной для подынтегральной функции, то есть

$$\Phi(x)=F(x)+C\,.$$

Следствие 7.4.2. $\int\limits_x^a f(t)dt=-\Phi(x)$.

Замечание 7.4.1. Интеграл с переменным верхним пределом используется при определении многих других функций:

1. $\int\limits_0^x\frac{\sin t}{t}dt=Si(x)$ – (**интегральный синус**);

2. $\int\limits_1^x\frac{\cos t}{t}dt=Ci(x)$ – (**интегральный косинус**);

3. $\int\limits_{+0}^x\frac{\ln t}{t}dt=li(t)$ – (**интегральный логарифм**);

4. $\int\limits_0^x\sin^2 t dt=S(x)$

– (**интегралы Френеля**);

5. $\int\limits_0^x\cos^2 t dt=C(x)$

6. $\Phi(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^x e^{-t^2}dt$ – (**функция Лапласа**);

7. $Ei(x)=\int\limits_{-\infty}^x\frac{e^{-t}}{t}dt$ – (**интегральная показательная функция**).

Замечание 7.4.2. Все представленные функции не являются элементарными, но хорошо изучены, имеют широкое применение на практике и для них составлены таблицы.

7.5. Определенный интеграл и его вычисление. Формула Ньютона – Лейбница

ТЕОРЕМА 7.5.1. Если $f(x)\in C_{[a,b]}$ и для нее существует первообразная $F(x)$, то $\int\limits_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$.

Доказательство. $f(x)\in C_{[a,b]} \Rightarrow f(x)\in I_{[a,b]}$. По следствию 7.4.1 имеем $\Phi(x)=\int\limits_a^x f(t)dt = F(x)+C$.

Вычислим

$$\Phi(a)=F(a)+C; \text{ но } \Phi(a)=\int\limits_a^a f(t)dt=0; \Rightarrow F(a)+C=0; \Rightarrow C=-F(a).$$

Тогда

$$\Phi(b)=\int\limits_a^b f(t)dt; \Phi(b)=F(b)+C; \Rightarrow \int\limits_a^b f(t)dt = F(b)-F(a).$$

Замечание. Символически формулу Ньютона – Лейбница записывают в виде $\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b$.

Пример 7.5.1. Вычислить, исходя из определения, интеграл $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x}$.

Решение. Разобьем отрезок [1; 2] на n частей так, чтобы точки деления x_i (i = 0, 1, 2, 3, …, n) составляли геометрическую прогрессию:

$$x_0=1;\ x_1=q;\ x_2=q^2;\ x_3=q^3;...;\ x_n=q^n=2, \text{ откуда } q=\sqrt[n]{2}.$$

Длинна i-того частичного отрезка равна $\Delta x_i = q^{i+1}-q^i=q^i(q-1)$, так что $\max\Delta x_i = q^{n-1}(q-1)\to 0$ при $n\to\infty$, т. е. при $q\to 1$.

В качестве точек c_i выберем правые концы частичных отрезков, т.е. $c_i = x_{i+1} = q^{i+1}$.

Составляем интегральную сумму:

$$\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{c_i}\Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{q^{i+1}}q^i(q-1) = \frac{n}{q}(q-1) = \frac{1}{2^{\frac{1}{n}}}n\left(2^{\frac{1}{n}}-1\right).$$

Тогда предел интегральной суммы:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{c_i}\Delta x_i=\frac{n\left(2^{\frac{1}{n}}-1\right)}{2^{\frac{1}{n}}}=\ln 2,\quad \text{т.к. } 2^{\frac{1}{n}}-1\approx\frac{1}{n}\ln 2 \quad \text{при } n\to\infty.$$

Итак, $\int\limits_1^2\frac{dx}{x}=\ln 2$.

П р и м е р 7.5.2. Вычислить $\int\limits_0^1 e^{2x-1}dx$.

Решение. $\int\limits_0^1 e^{2x-1}dx=\frac{1}{2}e^{2x-1}\Big|_0^1=\frac{1}{2}\left(e^1-e^{-1}\right)=\text{sh}1$.

П р и м е р 7.5.3. Вычислить $\int\limits_{-1}^4\frac{dx}{(x-2)^4}$.

Решение. $\int\limits_{-1}^4\frac{dx}{(x-2)^4}=\frac{(x-2)^{-3}}{-3}\Bigg|_{-1}^4=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(x-2)^3}\Bigg|_{-1}^4=-\frac{1}{3}\left[\frac{1}{8}+\frac{1}{27}\right]<0$.

У п р а ж н е н и е. Полученный результат содержит противоречие. Установить это противоречие и найти ошибку в вычислениях.

7.6. Формула интегрирования по частям в определенном интеграле

Т Е О Р Е М А 7.6.1. Если $u(x)\in C'_{[a,b]}, v(x)\in C'_{[a,b]}$, то

$$\int\limits_a^b udv=uv\Big|_a^b-\int\limits_a^b vdu.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Следует из формулы интегрирования по частям в неопределенном интеграле а также формулы Ньютона-Лейбница.

П р и м е р 7.6.1. Вычислить $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\cdot\cos\frac{1}{2}xdx$.

Решение. Применим формулу интегрирования по частям в определенном интеграле $\int\limits_a^b udv=uv\Big|_a^b-\int\limits_a^b vdu$.

Будем иметь

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cdot\cos\frac{1}{2}xdx=\left|\begin{matrix}u=x;\, du=dx;\\ dv=\cos\frac{x}{2}dx;\, v=2\sin\frac{x}{2}\end{matrix}\right|=2x\cdot\sin\frac{x}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\frac{x}{2}dx=$$

$$=2\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-0+2\cdot2\cos\frac{x}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi\sqrt{2}}{2}+4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right).$$

П р и м е р 7.6.2. Вычислить $\int_1^2 x^2\ln xdx$.

Решение. $\int_1^2 x^2\ln xdx=\left|\begin{matrix}u=\ln x;\, du=\frac{1}{x}dx;\\ dv=x^2dx;\, v=\frac{x^3}{3}\end{matrix}\right|=\frac{x^3}{3}\ln x\Big|_1^2-\frac{1}{3}\int_1^2 x^2dx=$

$$=\frac{8}{3}\ln 2-\frac{1}{3}\ln 1-\frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_1^2=\frac{8}{3}\ln 2-\frac{1}{9}(8-1)=\frac{8}{3}\ln 2-\frac{7}{9}.$$

П р и м е р 7.6.3. $\int_{-\pi}^{\pi} x^2\sin xdx=0$.

У п р а ж н е н и е. Какое свойство определенного интеграла позволяет получить результат, не вычисляя заданный определенный интеграл?

7.7. Замена переменных в определенном интеграле

ТЕОРЕМА 7.7.1. Если 1) $f(x)\in C_{[a,b]}$; 2) $x=x(t)$, $x(t)\in C'_{[\alpha,\beta]}$ и при изменении t от α до β значения $x(t)$ попадают в отрезок $[a,b]$; 3) $x(\alpha)=a$, $x(\beta)=b$, то $\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(x(t))x'(t)dt$.

П р и м е р 7.7.1. Вычислить $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{2\sin x+3}dx$.

Решение. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{2\sin x+3}dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d(2\sin x+3)}{2\sin x+3}=$

$$=\frac{1}{2}\ln|2\sin x+3|\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}\left(\ln|5|-\ln|3|\right)=\frac{1}{2}\ln\frac{5}{3}=\ln\sqrt{\frac{5}{3}}.$$

П р и м е р 7.7.2. Вычислить $\int\limits_4^{11}\frac{dx}{x\sqrt{x+5}}$.

Решение. $\int\limits_4^{11}\frac{dx}{x\sqrt{x+5}}=\left|\begin{array}{l}\sqrt{x+5}=t;\ \ x+5=t^2;\quad x=t^2-5;\\ dx=2tdt;\ \ \alpha=\sqrt{4+5}=3;\ \ \beta=\sqrt{11+5}=4\end{array}\right|=$

$$=\int\limits_3^4\frac{2tdt}{\left(t^2-5\right)t}=2\int\limits_3^4\frac{dt}{t^2-5}=2\cdot\frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{5}}{t+\sqrt{5}}\right|\Bigg|_3^4=\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{4-\sqrt{5}}{4+\sqrt{5}}\right|-\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}\right|.$$

П р и м е р 7.7.3. Вычислить $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{2+\cos x}$.

Решение. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{2+\cos x}=\left|\begin{array}{l}\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t;\quad x=2\operatorname{arctg}t;\quad dx=\frac{2dt}{1+t^2};\\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2};\ \ \alpha=\operatorname{tg}\frac{0}{2}=0;\ \ \beta=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1\end{array}\right|=$

$$=\int\limits_0^1\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\left(2+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}=2\int\limits_0^1\frac{dt}{2+2t^2+1-t^2}=2\int\limits_0^1\frac{dt}{3+t^2}=$$

$$=2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{3}}\Big|_0^1=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{6}-0\right)=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

7.8. Несобственные интегралы первого рода. Сходимость несобственных интегралов

7.8.1. Несобственный интеграл первого рода

О п р е д е л е н и е 7.8.1. Пусть $f(x)\in C_{[a,+\infty)}$. ***Несобственным интегралом*** от функции $f(x)$ по промежутку $[a,+\infty)$ называют предел

$$\lim_{B\to+\infty}\int\limits_a^B f(x)dx=\int\limits_a^{+\infty}f(x)dx \qquad (7.8.1)$$

О п р е д е л е н и е 7.8.2. Если предел (7.8.1) существует и конечен, то несобственный интеграл первого рода называют ***сходящимся***. В противном случае – ***расходящимся.***

З а м е ч а н и е 7.8.1. Геометрически несобственный интеграл первого рода вычисляет площадь неограниченной фигуры.

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, причем $f(x) \geq 0$ для $x \in [a;+\infty)$.

В этом случае Н.И. $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ выражает площадь неограниченной (бесконечной) области, заключенной между линиями $y = f(x)$, $x = a$ и осью абсцисс, как показано на рис. 7.8.1.

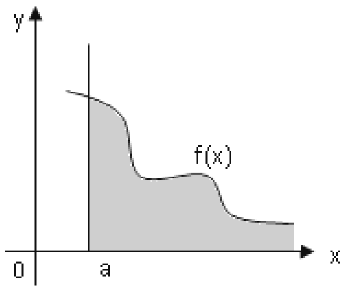


Рис. 7.8.1

З а м е ч а н и е 7.8.2. В физике с помощью несобственного интеграла вычисляют потенциал электростатического поля.

П р и м е р 7.8.1. Вычислить или доказать расходимость $\int\limits_0^{+\infty} e^{-kx}dx$.

Решение. Воспользуемся определением Н.И. Будем иметь

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-kx}dx = \lim_{B\to+\infty}\int\limits_0^{B} e^{-kx}dx = \lim_{B\to+\infty}\left(-\frac{1}{k}\cdot e^{-kx}\right)\Big|_0^B =$$

$$= -\frac{1}{k}\lim_{B\to+\infty}\left[e^{-kB} - e^{0}\right] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{k}, & k>0 \\ +\infty, & k<0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{при} \begin{bmatrix} k>0, & \text{Н.И. сходится} \\ k<0, & \text{Н.И. расходится} \end{bmatrix}$$

П р и м е р 7.8.2. Вычислить или доказать расходимость $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$.

Решение. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim\limits_{B\to+\infty}\int\limits_1^{B}\frac{dx}{x} = \lim\limits_{B\to+\infty}\left[\ln|x|\ \Big|_1^B\right] = \lim\limits_{B\to+\infty}(\ln B - \ln 1) = \infty$.

Таким образом, по определению, исходный интеграл расходится.

П р и м е р 7.8.3. Вычислить или доказать расходимость $\int\limits_0^{+\infty} \cos x dx$.

Решение. $\int\limits_0^{+\infty} \cos x dx = \lim\limits_{B\to+\infty}\int\limits_0^{B}\cos x dx = \lim\limits_{B\to+\infty}\left[\sin x\ \Big|_0^B\right] =$

$$= \lim_{B\to+\infty}\left[\sin B - \sin 0\right](\text{не существует}) \Rightarrow \text{Н.И. расходится.}$$

Определение 7.8.3. Пусть $f(x) \in C_{[-\infty, B]}$, тогда несобственным интегралом первого рода по промежутку $[-\infty, B]$ называют

$$\lim_{A \to -\infty} \int_{A}^{B} f(x)dx = \int_{-\infty}^{B} f(x)dx. \qquad (7.8.2)$$

Определение 7.8.4. Пусть $f(x) \in C_{(-\infty, +\infty)}$, тогда несобственным интегралом по промежутку $(-\infty, +\infty)$ называют

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{+\infty} f(x)dx. \qquad (7.8.3)$$

Определение 7.8.5. Интеграл (7.8.3) называется ***сходящимся***, если в сумме сходится каждый из интегралов.

7.8.2. Исследование на сходимость несобственного интеграла первого рода

ТЕОРЕМА 7.8.1. (первый признак сравнения). Пусть при достаточно больших x выполняется неравенство $0 < f(x) < \varphi(x)$. Рассмотрим интегралы:

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx, \qquad (7.8.4)$$

$$\int_{a}^{+\infty} \varphi(x)dx. \qquad (7.8.5)$$

Тогда:

1) если несобственный интеграл (7.8.5) сходится, то сходится и несобственный интеграл (7.8.4).

2) если несобственный интеграл (7.8.4) расходится, то расходится и несобственный интеграл (7.8.5).

ТЕОРЕМА 7.8.2. (предельный признак сравнения). Если существует предел $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = k,\ k \neq 0, k \neq \infty$, то несобственные интегралы (7.8.4), (7.8.5) сходятся или расходятся одновременно.

Следствие 7.8.1. Если $f(x) \underset{x \to \infty}{\cong} \varphi(x)$, то Н.И. (7.8.4) и (7.8.5) сходятся или расходятся одновременно.

Следствие 7.8.2. Если Н.И. $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится, то сходится и $k\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$.

Следствие 7.8.3. Если $\int\limits_a^{+\infty} |\ f(x)\ |dx$ сходится, то сходится и $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$.

Замечание 7.8.3. Если сходится Н. И. $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$, то Н.И. $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ называют абсолютно сходящимся.

Замечание 7.8.4. Теоремы 7.8.1, 7.8.2 и их следствия можно применять, если знать сходимость интегралов-эталонов. В качестве эталона может выступать

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-kx}dx, \text{ который при } \begin{bmatrix} k>0, \text{ Н.И. сходится} \\ k<0, \text{ Н.И. расходится} \end{bmatrix}.$$

Изучим сходимость еще одного эталонного интеграла

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^k}.$$

Докажем, что при $\begin{bmatrix} k>1, \text{ Н.И. сходится} \\ k\le 1, \text{ Н.И. расходится} \end{bmatrix}$.

Доказательство. 1) При $k = 1$ смотри пример 7.8.2 из п. 7.8.1.

2) Пусть $k \neq 1$, тогда интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^k} = \lim\limits_{B\to+\infty} \int\limits_1^{B} \frac{dx}{x^k} = \lim\limits_{B\to+\infty} \frac{x^{-k+1}}{-k+1} \Big|_1^B =$

$$= \frac{1}{1-k} \lim_{B\to+\infty} x^{-k+1} \Big|_1^B = \frac{1}{1-k} \lim_{B\to+\infty} \left[B^{-k+1} - 1 \right] = \begin{bmatrix} \infty, & 1-k>0 \\ \dfrac{1}{k-1}, & 1-k<0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{при } \begin{bmatrix} k>1, \text{ Н.И. сходится} \\ k\le 1, \text{ Н.И. расходится} \end{bmatrix}.$$

Пример 7.8.4. Исследовать на сходимость Н. И. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^4+5x^2+3}$.

Решение. Имеем $\dfrac{1}{x^4+5x^2+3} \underset{x\to\infty}{\cong} \dfrac{1}{x^4}$. Так как при $k>1$ Н. И. $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x^4}$ сходится, то заданный несобственный интеграл сходится по следствию 7.8.1.

Пример 7.8.5. Исследовать на сходимость несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{xdx}{\sqrt{1+x^3}}$.

Решение. Имеем $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^3}} \underset{x\to\infty}{\cong} \dfrac{x}{\sqrt{x^3}} = \dfrac{1}{x^{1/2}}$, так как $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x^{1/2}}$, расходится $(k=\dfrac{1}{2}<1)$, то по следствию 7.8.1. Н. И. $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{xdx}{\sqrt{1+x^3}}$ расходится.

7.9. Несобственный интеграл второго рода

Определение 7.9.1. Пусть $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a,b]$, за исключением конечного числа точек, вблизи которых функция неограниченна (имеет разрыв второго рода). Предположим, что $f(x)$ неограниченна в левом конце $x = a$. Тогда ***несобственным интегралом второго рода*** называют

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx. \tag{7.9.1}$$

Определение 7.9.2. Если функция $f(x)$ непрерывна во всех точках отрезка $[a,b]$, кроме правого конца $x = b$, и неограниченна в правом конце $x = b$, то ***несобственным интегралом второго рода*** называют

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{a}^{b-\varepsilon} f(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx. \tag{7.9.2}$$

Определение 7.9.3. Если функция непрерывна на отрезке $[a,b]$, за исключением точки $a < c < b$, в которой она терпит разрыв второго рода, то ***несобственным интегралом второго рода*** называют

$$\lim_{\varepsilon_1\to 0} \int\limits_{a}^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \lim_{\varepsilon_2\to 0} \int\limits_{c+\varepsilon_2}^{b} f(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx. \tag{7.9.3}$$

Определение 7.9.4. Если в левой части (7.9.1) – (7.9.3) все пределы существуют и конечны, то несобственный интеграл называется ***сходящимся***, в противном случае – ***расходящимся***.

Геометрический смысл несобственного интеграла второго рода.

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, причем $f(x) \geq 0$ для $x \in [a;c)$ и в точке $x = c$ функция терпит разрыв второго рода.

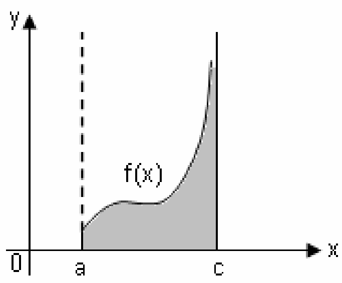


Рис. 7.9.1

В этом случае несобственный интеграл $\int\limits_a^c f(x)dx$ выражает площадь неограниченной (бесконечной) области, заключенной между линиями $y = f(x)$, $x = a$, осью абсцисс и вертикальной асимптотой $x = c$, как показано на рис. 7.9.1

Признаки сходимости *несобственного* интеграла второго рода.

Замечание 7.9.1. Признаки сходимости несобственных интегралов второго рода по формулировке совпадают с признаками сходимости несобственных интегралов первого рода, только сравнение идет с эталонами в окрестности точек разрыва. В качестве интегралов-эталонов могут быть использованы интегралы вида

$$\int\limits_a^b \frac{dx}{|x-c|^m},$$

которые при $\begin{bmatrix} m < 1, & \text{Н.И. сходятся} \\ m \geq 1, & \text{Н.И. расходятся} \end{bmatrix}$, где $c \in [a;b]$.

Пример 7.9.1. Исследовать на сходимость $\int\limits_{-1}^{2} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$.

Решение. Подынтегральная функция терпит на отрезке интегрирования разрыв второго рода в точке $x = 1$.

Первый способ. Вычислим заданный Н. И. по определению 7.9.3. Будем иметь

$$\int\limits_{-1}^{2} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} = \lim_{\varepsilon_1 \to 0} \int\limits_{-1}^{1-\varepsilon_1} (x-1)^{-2/3} dx + \lim_{\varepsilon_2 \to 0} \int\limits_{1+\varepsilon_2}^{2} (x-1)^{-2/3} dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon_1 \to 0} \left[3\sqrt[3]{x-1} \Big|_{-1}^{1-\varepsilon_1} \right] + \lim_{\varepsilon_2 \to 0} \left[3\sqrt[3]{x-1} \Big|_{1+\varepsilon_2}^{2} \right] =$$

$$= 3\lim_{\varepsilon_1\to 0}\left[\sqrt[3]{\varepsilon_1}+\sqrt[3]{2}\right]+3\lim_{\varepsilon_2\to 0}\left[1-\sqrt[3]{\varepsilon_2}\right]=3\sqrt[3]{2}+3.$$

Следовательно, заданный интеграл сходится.

Второй способ. Сравним заданный Н. И. с интегралом-эталоном $\int_a^b \frac{dx}{|x-c|^m}$. В нашем случае интеграл имеет вид $\int_a^b \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}=\int_a^b \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}$.

Имеем, что $m=\frac{2}{3}<1$, значит, исходный интеграл сходится.

Применение определенного интеграла к задачам в геометрии, механике, физике

Две схемы применения определенного интеграла

Первая схема (схема I) основана на определении определенного интеграла, как предела интегральной суммы. Этот прием мы рассмотрели для вычисления массы тонкого неоднородного стержня, работы переменной силы, площади криволинейной трапеции и т. п.

Вторая схема (схема II) основана на том, что по условию задачи составляются соотношения между дифференциалами рассматриваемых величин, а затем интегрируется полученное равенство дифференциалов.

7.10. Вычисление площадей плоских фигур в ДПСК

Задача 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной непрерывными кривыми: слева $x=a$, справа $x=b$, снизу $y_1=y_1(x)$, сверху $y_2=y_2(x)$, где $y_1(x)\le y_2(x)$, $x\in[a,b]$.

Решение. Смотри решение задачи 2 п. 7.1.

$$S=\int_a^b\left[y_2(x)-y_1(x)\right]dx. \qquad (7.10.1)$$

Задача 2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной непрерывными кривыми: снизу $y=c$, сверху $y=d$, слева $x_1=x_1(y)$, справа $x_2=x_2(y)$, где $x_1(y)\le x_2(y)$, $y\in[c;d]$.

Решение. Изобразим схематически заданную фигуру (рис. 7.10.1). Разобьем ее прямыми, параллельными оси x, на элементарные части шириной dy. Выделим в произвольной точке $y \in [c;d]$ элемент разбиения. Элемент разбиения при этом имеет площадь $dS = (x_2(y) - x_1(y))dy$. Тогда, в соответствии с методикой использования второй схемы применения определенного интеграла площадь всей фигуры вычислим по формуле

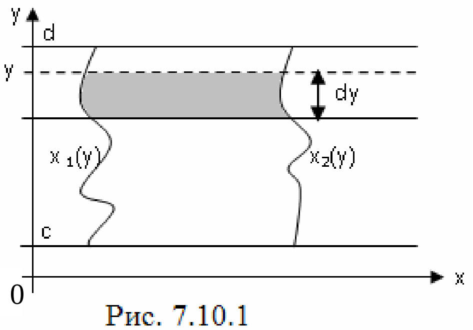


Рис. 7.10.1

$$S = \int_c^d [x_2(y) - x_1(y)]dy. \qquad (7.10.2)$$

Замечание 7.10.1. Если плоская фигура ограничена таким образом, что не подчиняется ни первой задаче, ни второй, то фигуру разбивают так, чтобы каждую часть можно было вычислить либо по формуле (7.10.1), либо по формуле (7.10.2).

Пример 7.10.1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $y^2 = x^3$, прямой $y = 1$, осью Oy.

Решение. Изобразим фигуру, как на рис. 7.10.2.

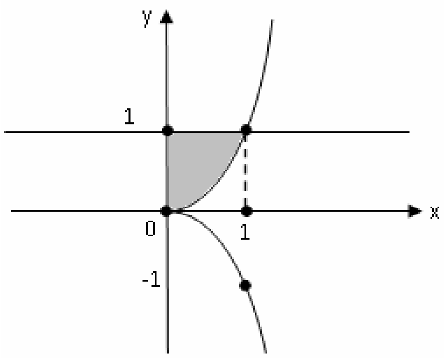


Рис. 7.10.2

Для вычисления площади полученной фигуры воспользуемся формулой (7.10.2)

$$S = \int_c^d [x_2(y) - x_1(y)]dy.$$

Линия $y^2 = x^3$ задана неявно, значит нужно выразить одну переменную через другую. Несложные рассуждения приводят к выводу, что однозначно выражается переменная x:

$$x = y^{\frac{2}{3}},$$

тогда $x_1(y) = 0$, $x_2(y) = y^{\frac{2}{3}}$, $0 \le y \le 1$.

Значит, $S = \int_0^1 y^{\frac{2}{3}} dy = \frac{3}{5} y^{\frac{5}{3}} \Big|_0^1 = \frac{3}{5} \approx 0{,}6$.

Оценивая результат, исходя из геометрических соображений, делаем вывод, что он верный.

Пример 7.10.2. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями $y=\sqrt{2-x}$, $y=x+4$ и осью Ox.

Решение. 1. Изучим кривую $y=\sqrt{2-x}$ – часть параболы $y^2=2-x$, у которой ветви направлены в левую часть полуплоскости. Координаты вершины параболы (2, 0).

2. Определим точки пересечения заданных линий. Для этого решим уравнение $\sqrt{2-x}=x+4$, которое равносильно системе

$$\begin{cases} 2-x=x^2+8x+16 \\ 2-x\ge 0 \\ x+4\ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+9x+14=0 \\ 2-x\ge 0 \\ x+4\ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x_1=-2 \\ x_2=-7 \end{array}\right. \\ x\le 2 \\ x\ge -4 \end{cases} \Rightarrow x=-2,\ y=2.$$

3. Изобразим схематично заданную фигуру (рис. 7.10.3).

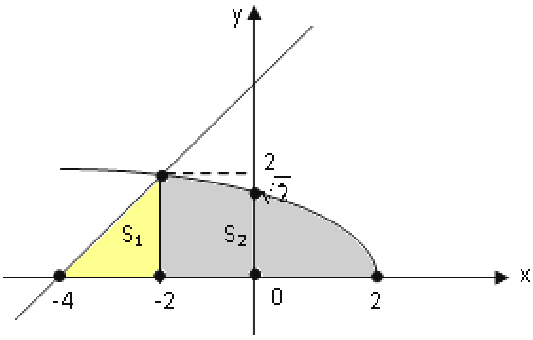


Рис. 7.10.3

4. Вычислим площадь изображенной фигуры. Поскольку она сверху ограничена двумя различными линиями, придется ее разбивать прямой $x=-2$ на две части. Будем иметь

$$S=S_1+S_2=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2+\int_{-2}^{2}\left(\sqrt{2-x}\right)dx=2-\frac{(2-x)^{3/2}}{3/2}\Bigg|_{-2}^{2}=$$

$$=2-\frac{2}{3}\left(\left(\sqrt{2-2}\right)^3-\left(\sqrt{2+2}\right)^3\right)=2-\frac{2}{3}(-8)=2+\frac{16}{3}=2+5\frac{1}{3}=7\frac{1}{3}.$$

Упражнение. Оцените полученный результат, исходя из геометрических соображений. Замените в условии кривую $y=\sqrt{2-x}$ на кривую $y^2=-x+2$ и вычислите самостоятельно площадь полученной фигуры.

7.11. Вычисление площади плоской фигуры, заданной параметрически

Если есть плоская фигура, заданная как в задаче 1 или 2 п. 7.10.1, где ограничивающие кривые заданы параметрически, то применяем теорему о замене переменной в определенном интеграле. Тогда вычисление площади осуществляется по формулам (7.10.1) или (7.10.2) с переходом на новую переменную интегрирования *t*.

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt \quad \text{или} \quad S = \int_{t_1}^{t_2} x(t)y'(t)dt.$$

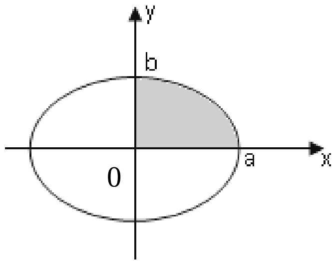


Рис. 7.11.1

Пример 7.11.1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной эллипсом $\begin{cases} x = a\sin t, \\ y = b\cos t. \end{cases}$

Решение. В силу симметрии фигуры (рис. 7.11.1) будем иметь $S = 4S_1$. Заштрихованная часть фигуры ограничена: снизу осью абсцисс $y_1 = 0$, сверху – эллипсом. Поэтому будем использовать формулу $S_1 = \int_a^b ydx$. Воспользуемся параметрическими уравнениями эллипса $\begin{cases} x = a\sin t, \\ y = b\cos t. \end{cases}$

В нашем случае (для заштрихованной части фигуры) переменная *x* изменяется от $x = 0$ до $x = a$, значит, переменная t будет изменяться от $t = 0$ до $t = \frac{\pi}{2}$. Отсюда следует, что

$$S_1 = \int_0^a ydx = \begin{vmatrix} x = a\sin t,\ t_1 = 0 \\ y = b\cos t,\ t_2 = \dfrac{\pi}{2} \\ dx = a\cos tdt \end{vmatrix} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} b\cos t \cdot a\cos tdt =$$

$$= ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 tdt = \frac{ab}{2}\left[t + \frac{1}{2}\sin 2t\right] \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi ab}{4}.$$

Окончательно,

$$S = 4S_1 = 4 \cdot \frac{\pi ab}{4} = \pi ab.$$

П р и м е р 7.11.2. Вычислить площадь, расположенную под одной аркой циклоиды

$$\begin{cases} x = R(t - \sin t), \\ y = R(1 - \cos t), \ 0 \le t \le 2\pi. \end{cases}$$

Решение. Напомним, что ***циклоидой*** называется линия, описываемая точкой окружности, которая катится без скольжения и проворачивания по прямой (рис. 7.11.2).

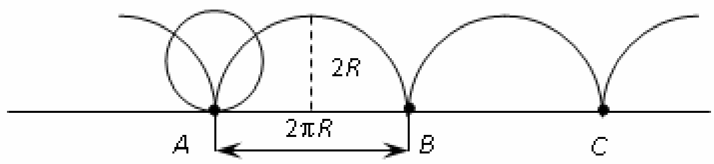


Рис. 7.11.2

Из определения следует, что циклоида состоит из ряда арок, причем высота этих арок равна $2R$, где R – радиус катящейся окружности, расстояния $AB, BC, \ldots$ между соседними «точками опоры» равны $2\pi R$.

В качестве оси Ox возьмем прямую, по которой катится окружность, а за начало координат примем положение точки M, описывающей циклоиду, в тот момент, когда эта точка лежит на оси Ox.

Будем иметь

$$S = \int_0^{2\pi R} y dx = \int_0^{2\pi} R(1 - \cos t)\, d\left[R(t - \sin t)\right] =$$

$$= R^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 dt = 3\pi R^2.$$

7.12. Вычисление площади криволинейного сектора в полярной системе координат

З а д а ч а 1. Вычислить площадь криволинейного сектора, т. е. плоской фигуры, ограниченной непрерывной линией $\rho = \rho(\varphi)$ и лучами $\varphi = \alpha, \varphi = \beta, (\alpha < \beta)$, где ρ и φ – полярные координаты.

Решение. Схематично изобразим криволинейный сектор (рис. 7.12.1).

Для решения задачи используем схему 2 – «метод дифференциалов» или «метод отбрасывания бесконечно малых высших порядков».

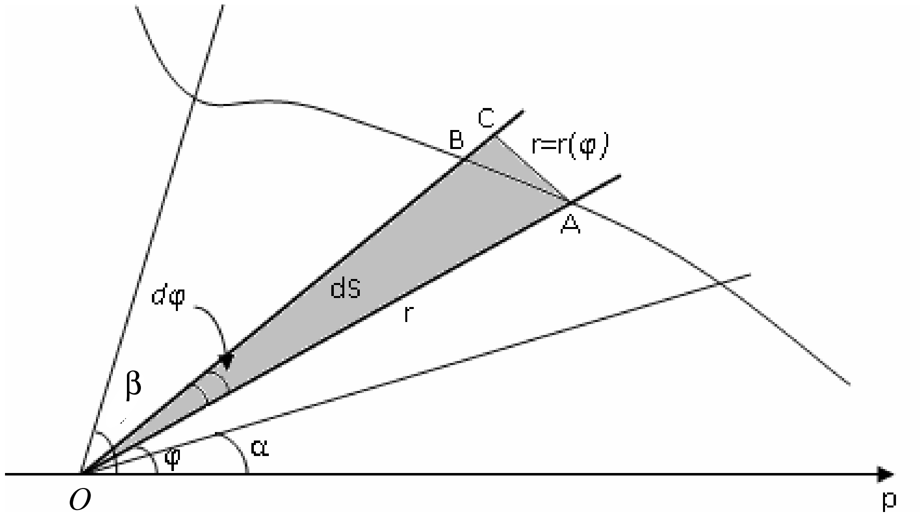


Рис. 7.12.1

1. Будем рассматривать часть искомой площади S функцией угла φ, т. е. $S = S(\varphi)$, где $\alpha \le \varphi \le \beta$ (если $\varphi = \alpha$, то $S(\alpha) = 0$, если $\varphi = \beta$, то $S(\beta) = S$).

2. Если текущий полярный угол φ получит приращение $\Delta\varphi = d\varphi$, то соответствующее ему приращение площади ΔS равно площади «элементарного криволинейного сектора» OAB. Дифференциал dS представляет собой главную часть приращения ΔS при $d\varphi \to 0$ и равен площади кругового сектора OAC (на рисунке она заштрихована) радиуса $\rho(\varphi)$ с центральным углом $d\varphi$. Поэтому $dS = \frac{1}{2}\left[\rho(\varphi)\right]^2 \cdot d\varphi$.

3. Интегрируя полученное равенство в пределах от $\varphi = \alpha$ до $\varphi = \beta$, получим искомую площадь:

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\left[\rho(\varphi)\right]^2 \cdot d\varphi. \qquad (7.12.1)$$

Пример 7.12.1. Вычислить площадь, ограниченную кардиоидой:

$$\rho(\varphi) = 2R \cdot (1 - \cos\varphi).$$

Напомним, ***кардиоидой*** называется линия, описываемая точкой M окружности радиуса R, катящейся по окружности с таким же радиусом.

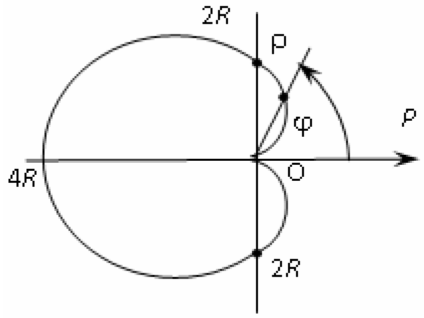


Рис. 7.12.2

Решение. В силу симметрии кардиоиды (рис. 7.12.2) относительно полярной оси будем иметь $S = 2S_1$.

Тогда

$$S_1=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}4R^2\left(1-\cos\varphi\right)^2 d\varphi=\frac{1}{2}4R^2\int_0^{\pi}\left(1-2\cos\varphi+\cos^2\varphi\right)d\varphi=$$

$$=\frac{4R^2}{2}\left[\varphi-2\sin\varphi+\frac{1}{2}\varphi+\frac{1}{4}\sin 2\varphi\right]\Bigg|_0^{\pi}=\frac{3\cdot 4R^2\pi}{4}=3\cdot R^2\pi.$$

Окончательно площадь заданной фигуры $S=2S_1=6R^2\pi$.

Пример 7.12.2. Найти площадь фигуры, ограниченной «трехлепестковой розой» $\rho(\varphi)=a\cdot\cos 3\varphi$.

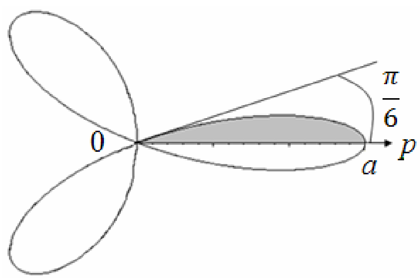


Рис. 7.12.3

Решение. Изобразим фигуру, как на рис. 7.12.3.

Найдем сначала площадь половины одного лепестка «розы», т. е. $\frac{1}{6}$ часть всей площади фигуры:

$$\frac{1}{6}S=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(a\cos 3\varphi\right)^2 d\varphi=\frac{1}{2}a^2\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{2}\left(1+\cos 6\varphi\right)d\varphi=$$

$$=\frac{a^2}{4}\left(\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}+\frac{1}{6}\sin 6\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}\right)=\frac{a^2}{4}\left(\frac{\pi}{6}+0\right)=\frac{\pi a^2}{24},$$

то есть $\quad \frac{1}{6}S=\frac{\pi a^2}{24}\Rightarrow \quad S=\frac{\pi a^2}{4}.$

Замечание 7.12.1. Если плоская фигура имеет «сложную» форму, то лучами, выходящими из полюса, ее следует разбить на криволинейные секторы, к которым применить полученную формулу для нахождения площади.

7.13. Применение определенного интеграла к вычислению пределов (к заданиям на оценку «8» – «9»)

Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n}\right).$

Решение. Преобразуем выражение, стоящее под знаком предела

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\ldots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right).$$

Выражение $S_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i}{n}}$ представляет собой интегральную сумму для функции $f(x)=\frac{1}{1+x}$ на отрезке $[0,1]$. Названная функция является непрерывной на отрезке $[0,1]$. Значит, согласно достаточному условию существования определенного интеграла предел ее интегральной суммы существует, не зависит от способа разбиения и выбора точек внутри разбиения. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\int_0^1\frac{dx}{1+x}=\ln(1+x)=\ln 2.$$

Таким образом, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)=\ln 2$.

2. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\ldots+\sqrt{1+\frac{n}{n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+\frac{i}{n}}=$

$$=\int_0^1\sqrt{1+x}\,dx=\frac{2}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right).$$

3. $\lim_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}+\ldots+\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n^4}}=$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt[3]{\frac{1}{n}}+\sqrt[3]{\frac{2}{n}}+\ldots+\sqrt[3]{\frac{n}{n}}\right)=\int_0^1\sqrt[3]{x}\,dx=\frac{3}{4}.$$

4. $\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}\left(1+\sqrt{\frac{n}{n+3}}+\ldots+\sqrt{\frac{n}{n+3(n-1)}}\right)$. Ответ: $2\left(\sqrt{2}-1\right)$.

5. $\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\ldots+\frac{1}{(2n)^2}\right)$. Ответ: $\frac{1}{2}$.

6. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{4n^2-1}}+\frac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}}\right)$. Ответ: $\frac{\pi}{6}$.

7. $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(\dfrac{1}{\left(n^2+1\right)^2}+\dfrac{1}{\left(n^2+2\right)^2}+\ldots+\dfrac{1}{\left(n^2+n\right)^2}\right)$. Ответ: $\dfrac{1}{2}$.

8. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$ Ответ: e^{-1}.

9. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}\left(e^{\frac{1}{n}}+e^{\frac{2}{n}}+\ldots+e^{\frac{n}{n}}\right)$. Ответ: $e-1$.

10. $\lim\limits_{n\to\infty} \sin\dfrac{\pi}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{2+\cos\frac{i\pi}{n}}$. Ответ: $\dfrac{\pi}{\sqrt{3}}$.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ДЛИНЫ ДУГИ КРИВОЙ

7.14. Длина дуги кривой в ДПСК

Определение 7.14.1. Под ***длиной дуги*** AB понимается предел, к которому стремится длина ломаной линии, вписанной в эту дугу, когда число звеньев ломаной неограниченно возрастает, а длина наибольшего звена стремится к нулю.

ТЕОРЕМА 7.14.1. Пусть дуга AB задана в ДПСК: $AB:\begin{cases} y=f(x), \\ a\le x\le b. \end{cases}$

Если функция $y=f(x)$ и ее производная $y'=f'(x)$ непрерывны на отрезке $[a,b]$, то кривая AB имеет длину, равную

$$l=\int\limits_a^b\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx. \qquad \textbf{(}7.14.1\textbf{)}$$

Доказательство. Применим схему 1 (метод сумм).

1. Точками $x_0=a, x_1, x_2,\ldots,x_n=b$ $\left(x_0=a<x_1<x_2<\ldots<x_n=b\right)$ разобьем отрезок $[a,b]$ на n частей, как показано на рис. 7.14.1. Пусть точкам разбиения соответствуют точки $M_0=A, M_1, M_2,\ldots,M_n=B$ на кривой AB. Проведем хорды $M_0M_1, M_1M_2,\ldots,M_{n-1}M_n$, длины которых обозначим соответственно через $\Delta L_1, \Delta L_2,\ldots,\Delta L_n$. Получим ломаную $M_0M_1M_2\ldots M_{n-1}M_n$, длина которой равна

$$L_n=\Delta L_1+\Delta L_2+\ldots+\Delta L_n=\sum_{i=1}^{n}\Delta L_i .$$

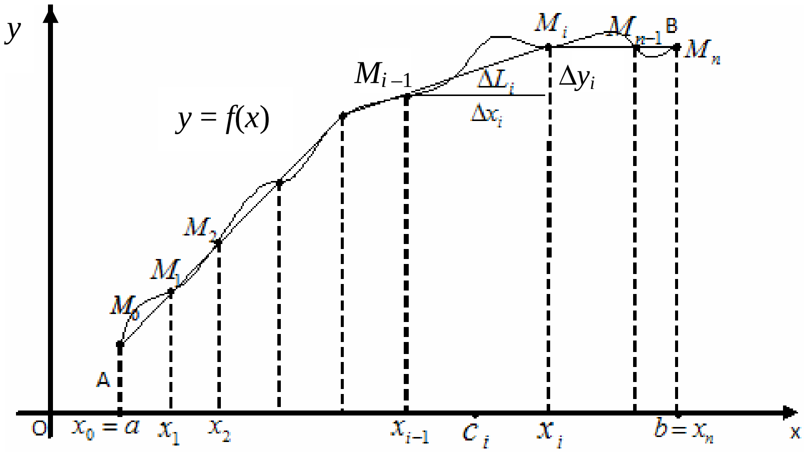


Рис. 7.14.1

2. Длину хорды (или звена ломаной) ΔL_i можно найти по теореме Пифагора из треугольника с катетами Δx_i и Δy_i: $\Delta L_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$, где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1})$. По теореме Лагранжа о конечном приращении функции $\Delta y_i = f'(c_i) \cdot \Delta x_i$, где $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Поэтому $\Delta L_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + [f'(c_i)\Delta x_i]^2} = \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2} \cdot \Delta x_i$, а длина всей ломаной $M_0 M_1 M_2 ... M_{n-1} M_n$ равна

$$L_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta L_i = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2} \cdot \Delta x_i. \tag{7.14.2}$$

3. Длина l кривой AB, по определению, равна $l = \lim\limits_{\max \Delta L_i \to 0} L_n = \lim\limits_{\max \Delta L_i \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} \Delta L_i$. Заметим, что при $\Delta L_i \to 0$ также и $\Delta x_i \to 0$ $\left(\Delta L_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} \Rightarrow |\Delta x_i| < |\Delta L_i|\right)$. Функция $\sqrt{1 + [f'(x)]^2}$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, т. к., по условию, непрерывна функция $f'(x)$. Следовательно, существует предел интегральной суммы (7.14.2), когда $\max \Delta L_i \to 0$, а значит, и $\max \Delta x_i \to 0$:

$$l = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2} \cdot \Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \cdot dx.$$

Таким образом, $l = \int\limits_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \cdot dx$, или в сокращенной записи $l = \int\limits_a^b \sqrt{1 + (y'_x)^2} \cdot dx$.

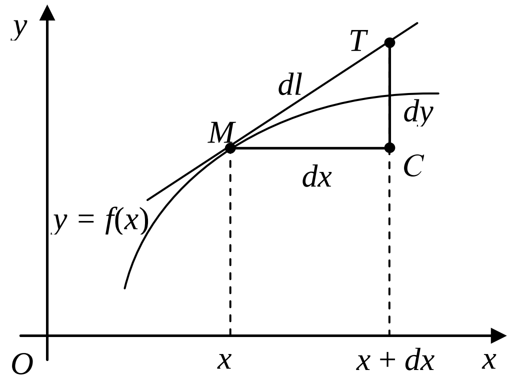


Рис. 7.14.2

Замечание 7.14.1. Равенство $dl=\sqrt{1+\left(y'_x\right)^2}dx$ называется формулой дифференциала дуги в прямоугольных координатах, т. к. $y'_x=\dfrac{dy}{dx}$, то

$$dl=\sqrt{\left(dx\right)^2+\left(dy\right)^2}\,. \qquad (*)$$

Последняя формула представляет собой теорему Пифагора для бесконечно малого треугольника MCT (рис. 7.14.2).

Пример 7.14.1. Найти длину астроиды $\begin{cases} x=a\cos^3 t, \\ y=a\sin^3 t. \end{cases}$

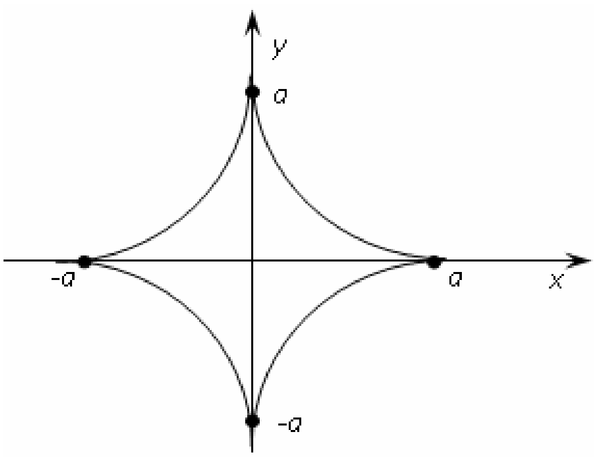


Рис. 7.14.3

Решение. 1. Изобразим заданную кривую (рис. 7.14.3).
2. Составим уравнение астроиды в декартовой системе координат. Выразим из параметрических уравнений $\begin{cases} \cos^3 t=\dfrac{x}{a}, \\ \sin^3 t=\dfrac{y}{a}. \end{cases}$

Тогда $\left(\dfrac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\dfrac{y}{a}\right)^{\frac{2}{3}}=1$, или

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}.$$

3. Дифференцируя функцию как неявно заданную, будем иметь $\dfrac{2}{3}x^{\frac{1}{3}}+\dfrac{2}{3}y^{\frac{1}{3}}\cdot y'=0$. Отсюда $y'=-\dfrac{y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}$.

Найдем выражение для подынтегральной функции в формуле $l=\int\limits_a^b\sqrt{1+\left(y'_x\right)^2}dx$. Имеем $\sqrt{1+\left(y'\right)^2}=\sqrt{1+\dfrac{y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}}=\sqrt{\dfrac{x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}}=\sqrt{\dfrac{a^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}}=\dfrac{a^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}$.

Тогда $\dfrac{1}{4}l=\int\limits_0^a\sqrt{1+\left(y'\right)^2}dx=\int\limits_0^a\dfrac{a^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}dx=a^{\frac{1}{3}}\cdot\dfrac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}\Bigg|_0^a=\dfrac{3}{2}a^{\frac{1}{3}}a^{\frac{2}{3}}=\dfrac{3}{2}a$.

Окончательно $\quad l=4\cdot\dfrac{3}{2}a=6a$.

7.15. Длина дуги кривой, заданной параметрически

Пусть дуга кривой AB задана **параметрически**

$$\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases},\ t_1\le t\le t_2,\ x(t)\in C'_{[t_1,t_2]},\ y(t)\in C'_{[t_1,t_2]}.$$

Пусть $a=x(t_1),\ b=x(t_2)$.

Воспользуемся результатами предыдущей задачи. Так как

$$\begin{cases}x=x(t), & \Rightarrow dx=x'dt,\\ y=y(t); & \Rightarrow dy=y'dt\end{cases}\quad \text{и}\quad a=x(t_1), b=x(t_2),$$

то будем иметь $\quad l=\int\limits_a^b dl=\int\limits_a^b\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=\int\limits_{t_1}^{t_2}\sqrt{(x')^2+(y')^2}dt$, или

$$l=\int\limits_{t_1}^{t_2}\sqrt{(x')^2+(y')^2}dt. \tag{7.15.1}$$

Пример 7.15.1. Найти длину эвольвенты (развертки) окружности:

$$\begin{cases}x=a(t\sin t+\cos t),\\ y=a(\sin t-t\cos t)\end{cases}\quad \text{от точки } t=0 \text{ до точки } t=2\pi.$$

Решение. Воспользуемся формулой (7.15.1), будем иметь

$$l=\int\limits_{t_1}^{t_2}\sqrt{(x')^2+(y')^2}dt=a\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{(t\cos t)^2+(t\sin t)^2}dt=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}tdt=\frac{at^2}{2}\Bigg|_0^{2\pi}=2\pi^2a.$$

Замечание 7.15.1. Для пространственной дуги кривой $\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t),\\ z=z(t),\end{cases}$

где $t_1 \le t \le t_2$, $x(t) \in C'_{[t_1,t_2]}$, $y(t) \in C'_{[t_1,t_2]}$, $z(t) \in C'_{[t_1,t_2]}$ формула вычисления ее дуги будет аналогична формуле (7.15.1) и имеет вид

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}\,dt\,. \qquad (7.15.2)$$

7.16. Длина дуги кривой, заданной в полярной системе координат

Пусть дуга кривой задана в полярной системе координат:

$$AB: \rho = \rho(\varphi), \alpha \le \varphi \le \beta\ , \quad \rho(\varphi) \in C'_{[\alpha;\beta]}.$$

Воспользуемся для вычисления элемента дуги dl формулами связи:

$$\text{ДПСК и ПСК} \begin{cases} x = \rho(\varphi)\cdot\cos\varphi, \\ y = \rho(\varphi)\cdot\sin\varphi, \end{cases}$$

а также формулой (*), получим

$$\begin{cases} dx = x'd\varphi = \left[\rho'\cos\varphi + \rho(-\sin\varphi)\right]d\varphi, \\ dy = y'd\varphi = \left[\rho'\sin\varphi + \rho\cos\varphi\right]d\varphi. \end{cases}$$

Отсюда будем иметь

$$(x')^2 + (y')^2 = \rho'^2\cos^2\varphi - 2\rho\cdot\rho'\sin\varphi\cos\varphi + \rho'^2\sin^2\varphi +$$
$$+\rho^2\cos^2\varphi + 2\rho\cdot\rho'\sin\varphi\cos\varphi + \rho^2\sin^2\varphi = \rho^2 + (\rho')^2.$$

Тогда по формуле (*) $dl = \sqrt{(\rho)^2 + (\rho')^2}\,d\varphi$ и

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\rho)^2 + (\rho')^2}\,d\varphi\,. \qquad (7.16.1)$$

Пример 7.16.1. Вычислить длину дуги кардиоиды $\rho(\varphi) = a(1+\sin\varphi)$.

$$l = 2l_1 = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(a\cos\varphi)^2 + a^2\cdot\left(1 + 2\sin\varphi + \sin^2\varphi\right)}\,d\varphi =$$

$$= 2a\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2(1+\sin\varphi)}\,d\varphi = 2\sqrt{2}a\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\left(\sin\frac{\varphi}{2} + \cos\frac{\varphi}{2}\right)^2}\,d\varphi =$$

$$=4a\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left|\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\varphi}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\right|d\varphi=4a\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left|\sin\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|d\varphi=$$

$$=8a\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)d\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=-8a\cos\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=$$

$$=-8a\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right]=8a\sqrt{2}.$$

7.17. Вычисление объемов тел по известным площадям поперечных сечений. Вычисление объемов тел вращения

1. Пусть в пространстве задано тело. Пусть построены его сечения плоскостями, перпендикулярными оси Ox и проходящими через точки $x\in[a;b]$ на ней (рис. 7.17.1). Площадь фигуры, образующейся в сечении, зависит от токи x, определяющей плоскость сечения. Пусть эта зависимость известна и задана непрерывной на отрезке $[a;b]$ функцией $S(x)$. Тогда объем части тела, заключенного между плоскостями $x=a$ и $x=b$, перпендикулярными к оси Ox, находится по формуле

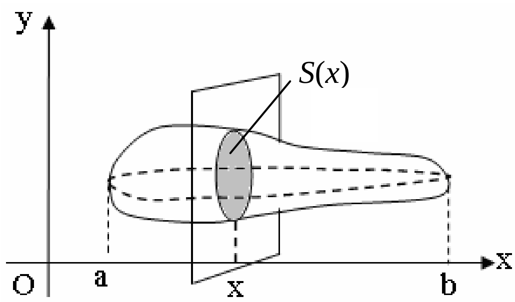


Рис. 7.17.1

$$V=\int_a^b S(x)\,dx. \qquad (7.17.1)$$

2. Объемы тел вращения, образованных вращением вокруг оси Ox (или оси Oy) криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y=f(x)$, осью Ox и двумя вертикалями $x=a$ и $x=b$, вычисляются соответственно по формулам:

$$V_x=\pi\int_a^b y^2\,dx, \qquad (7.17.2)$$

$$V_y=2\pi\int_a^b xy\,dx. \qquad (7.17.3)$$

3. Если фигура, ограниченная кривыми $y_1 = f_1(x)$, $y_2 = f_2(x)$ $(0 \le f_1(x) \le f_2(x))$ и прямыми $x = a$, $x = b$, вращается вокруг оси *Ox*, то объем тела вращения:

$$V_x = \pi \int_a^b \left({y_2}^2 - {y_1}^2 \right) dx. \qquad (7.17.4)$$

4. Если тело образовано при вращении вокруг оси *Oy* криволинейной трапеции, ограниченной $x = \varphi(y)$ $(\varphi(y) \ge 0)$ и прямыми $x = 0$, $y = c$, $y = d$, то объем тела вращения равен:

$$V_y = \pi \int_c^d x^2 \, dy. \qquad (7.17.5)$$

5. Если криволинейная трапеция ограничена кривой, заданной параметрически $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$ где $t \in [t_1; t_2]$, то объем тела вращения вокруг оси *Ox* находится по формуле

$$V_x = \pi \int_{t_1}^{t_2} \left(y(t) \right)^2 \cdot x'(t) \, dt. \qquad (7.17.6)$$

6. Если криволинейный сектор, ограниченный кривой $\rho = \rho(\varphi)$ и лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$, вращается вокруг полярной оси, то объем тела вращения равен

$$V = \frac{2}{3} \pi \int_\alpha^\beta \rho^3 \sin\varphi \, d\varphi.$$

Пример 7.17.1. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси *Oy* области, ограниченной линиями $y = e^{-x}$, $x = 0$, $y = 0 (x \ge 0)$.

Решение. Используя формулу $V_y = \pi \int_c^d x^2 dy$, находим

$$V_y = \pi \int_0^1 (-\ln y)^2 \, dy = \pi \int_0^1 (\ln y)^2 \, dy = \begin{bmatrix} u = \ln^2 y, du = 2\ln y \cdot \dfrac{1}{y} dy \\ dv = dy, v = y \end{bmatrix} =$$

$$\pi \int_0^1 \left(\lim_{\varepsilon \to 0} y \ln y \Big|_{0+\varepsilon}^{1} - 2\int_0^1 \ln y dy \right) = \begin{bmatrix} u = \ln y, \quad du = \dfrac{1}{y} dy \\ dv = dy, v = y \end{bmatrix} =$$

$$= \pi\left(0 - 2\left(\lim_{\varepsilon\to 0}\left(y\ln y\Big|_{0+\varepsilon}^{1} - y\Big|_{0+\varepsilon}^{1}\right)\right)\right) = -2\pi(0-1) = 2\pi.$$
$\varepsilon\to 0$

Заметим, что можно использовать формулу $V_y = 2\pi\int_a^b xy dx$.

$$V_y = 2\pi\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx = 2\pi\left(\lim_{b\to+\infty}\left(-xe^{-x} - e^{-x}\right)\Big|_0^b\right) = 2\pi(0+1) = 2\pi.$$

7.18. Вычисление площади боковой поверхности тела вращения

1. Если дуга кривой, заданная неотрицательной функцией $y = f(x)$, $x \in [a;b]$, вращается вокруг оси *Ox*, то площадь боковой поверхности тела вращения вычисляется по формуле

$$\sigma_x = 2\pi\int_a^b |y|\sqrt{1+(y')^2}\,dx, \qquad (7.18.1)$$

где a и b – абсциссы начала и конца дуги.

2. Если дуга кривой, заданная неотрицательной функцией $x = \varphi(y)$, $y \in [c;d]$, вращается вокруг оси *Oy*, то площадь боковой поверхности тела вращения вычисляется по формуле

$$\sigma_y = 2\pi\int_c^d |x|\sqrt{1+(x')^2}\,dy, \qquad (7.18.2)$$

где c и d – ординаты начала и конца дуги.

3. Если дуга кривой задана параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in [t_1;t_2], \text{ причем } y(t) \ge 0, \text{ то}$$

$$\sigma_x = 2\pi\int_{t_1}^{t_2} y(t)\sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2}\,dt. \qquad (7.18.3)$$

4. Если дуга задана в полярных координатах $\rho = \rho(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha;\beta]$, то

$$\sigma_x = 2\pi\int_\alpha^\beta \rho|\sin\varphi|\sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}\,d\varphi. \qquad (7.18.4)$$

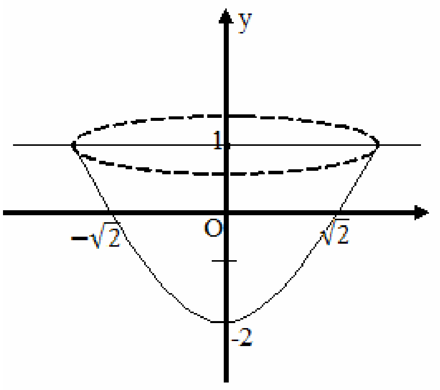


Рис.7.18.1

П р и м е р 7.18.1. Найти площадь боковой поверхности тела, образованного вращением кривой $x^2 = y+2,\ y=1$ вокруг оси *Oy* (рис. 7.18.1).

Решение. Воспользовавшись формулой $S_y = 2\pi\int\limits_c^d |x|\sqrt{1+(x')^2}\,dy$, имеем $2x\cdot x'=1,\ x'=\dfrac{1}{2x}$,

$$\sqrt{1+(x'(y))^2} = \sqrt{1+\frac{1}{4x^2}} = \sqrt{1+\frac{1}{4(y+2)}} = \frac{\sqrt{4y+9}}{2\sqrt{y+2}}.$$

$$S_y = 2\pi\int\limits_{-2}^{1}\frac{\sqrt{y+2}\sqrt{4y+9}}{2\sqrt{y+2}}dy = \pi\int\limits_{-2}^{1}\sqrt{4y+9}\,dy = \frac{\pi}{6}\left(13\sqrt{13}-1\right).$$

П р и м е р 7.18.2. Найти площадь поверхности тела, образованного вращением части астроиды $\begin{cases} x = R\cos^3\dfrac{t}{4}, \\ y = R\sin^3\dfrac{t}{4}, \end{cases}$ $0\le t\le 2\pi$ вокруг оси *Ox*.

Решение. Используя формулу $S_x = 2\pi\int\limits_{t_1}^{t_2} y(t)\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt$,

будем иметь

$$x'_t = 3R\cos^2\frac{t}{4}\left(-\sin\frac{t}{4}\right)\frac{1}{4}, \qquad y'_t = 3R\sin^2\frac{t}{4}\cdot\cos\frac{t}{4}\cdot\frac{1}{4},$$

$$\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2} = \sqrt{\frac{9}{16}R^2\cos^4\frac{t}{4}\sin^2\frac{t}{4}+\frac{9}{16}R^2\sin^4\frac{t}{4}\cos^2\frac{t}{4}} =$$

$$= \frac{3}{4}R\sqrt{\sin^2\frac{t}{4}\cos^2\frac{t}{4}} = \frac{3}{4}R\sin\frac{t}{4}\cos\frac{t}{4}.$$

$$S_x = 2\pi\int\limits_0^{2\pi} R\sin^3\frac{t}{4}\cdot\frac{3}{4}R\sin\frac{t}{4}\cos\frac{t}{4}\,dt =$$

$$= \frac{3}{2}\pi R^2\int\limits_0^{2\pi} 4\sin^4\frac{t}{4}\,d\left(\sin\frac{t}{4}\right) = 6\pi R^2\cdot\left.\frac{\sin^5\frac{t}{4}}{5}\right|_0^{2\pi} = \frac{6\pi}{5}R^2.$$

Следовательно, $S_x = \dfrac{6}{5}\pi R^2$.

7.19. Физические и механические приложения определенного интеграла. Общий принцип применения определенных интегралов для решения задач механики и физики

Если для некоторого физического объекта требуется определить общую (интегральную) величину $\boldsymbol{y}$, характеризующую состояние всего объекта в целом (массу, равнодействующую силу, энергию, работу, время завершения процесса и т. п.), причем параметры объекта, влияющие на эту интегральную величину, непрерывно изменяются при переходе от одной точки объекта к другой, то поступают следующим образом:

1. Объект разбивают на большое количество (на n) малых элементов так, чтобы внутри каждого элемента параметры объекта изменялись мало.
2. Среди изменяющихся параметров выбирают некоторый главный параметр $\boldsymbol{x}$ (независимый аргумент). Остальные параметры выражают через независимый аргумент.
3. Рассматривают отдельно взятый i-тый малый элемент и, считая его параметры приблизительно постоянными, записывают физический закон, определяющий приращение Δy_i искомой величины на i-том элементе через независимый аргумент x_i и приращение аргумента Δx_i.
4. Осуществляют суммирование приращений Δy_i искомой величины y по всем n малым элементам (получают интегральную сумму).
5. Увеличивают количество разбиений (элементов) таким образом, чтобы внутри каждого элемента приращение Δx_i независимого аргумента стремилось к нулю. В пределе получается выражение искомой величины y всего объекта через определенный интеграл по x, который затем вычисляют.

З а м е ч а н и е 7.19.1. Приращение Δx независимого аргумента x равно его дифференциалу dx. Кроме того, при малом Δx приращение Δy зависимой дифференцируемой величины y приблизительно (с точностью до бесконечно малых) равно ее дифференциалу dy. Поэтому возможен другой способ решения задачи. Согласно этому способу сначала выполняют пункты 1 и 2, описанные выше. Затем в пункте 3 выбирают физический закон, выражающий Δy_1 через x_i и Δx_i, который записывают в дифференциальной форме: приращения заменяют на дифференциалы. Таким образом, получают $dy = f(x)dx$, где $f(x)$ – некоторая найденная функция. Отсюда легко определяют производную $y(x) = \frac{dy}{dx} = f(x)$. Следовательно, искомая величина $y(x)$ при произвольном значении аргумента x может быть записана в виде интеграла с переменным верхним пределом:

$$y(x) = \int_a^x f(x)dx\,. \qquad (7.19.1)$$

Нижний постоянный предел интегрирования a выбирают из физического смысла задачи (обычно это крайнее (наименьшее) значение аргумента x в данном объекте). Для определения искомой интегральной величины y всего объекта в целом в формулу (7.19.1) вместо переменного предела x следует подставить его второе значение (обычно это максимальное значение аргумента), чтобы получить интегрирование по всему объекту. В результате задачу также сводят к вычислению определенного интеграла

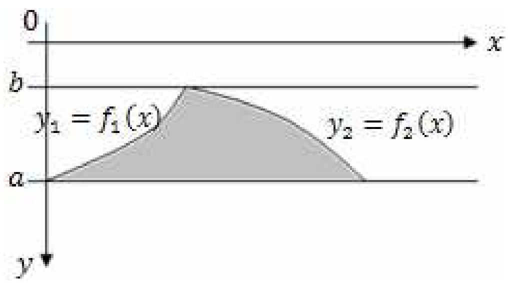


Рис. 7.19.1

$$y = \int_a^b f(x)dx.$$

Определенный интеграл применяют к вычислению работы переменной силы, давления жидкости на плоскую пластину, координат центра тяжести плоской фигуры и плоской кривой и т. п.

Запишем готовые формулы для вычисления физических величин в наиболее часто встречающихся приложениях определенного интеграла:

а) путь, пройденный телом, перемещающимся со скоростью $v = v(t)$ за промежуток времени $[t_1;t_2]$, выражается интегралом

$$S = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt\,;$$

б) работа переменной силы, заданной функцией $F = F(x)$ и направленной вдоль оси Ox на отрезке $[a;b]$, равна интегралу

$$A = \int_a^b F(x)dx\,;$$

в) давление жидкости на горизонтальную пластину равно весу столба этой жидкости (закон Паскаля), т. е. $P = g\gamma Sh$, где g – ускорение свободного падения, γ – плотность жидкости, S – площадь пластинки, h – глубина ее погружения.

Давление жидкости на вертикальную пластину, ограниченную линиями $x=a$, $x=b$, $y_1=f_1(x)$ и $y_2=f_2(x)$ (рис. 7.19.1), вычисляют по формуле

$$P=g\gamma\int_a^b\left(f_2(x)-f_1(x)\right)x\,dx;$$

г) статическим моментом относительно оси *u* материальной точки *A*, имеющей массу *m* и отстоящей от оси *u* на расстоянии *d* называется число $M_u=md$.

Если дуга плоской материальной кривой задана уравнением $y=f(x)$, где $x\in[a;b]$, и имеет плотность $\gamma=\gamma(x)$, то статические моменты этой дуги M_x и M_y относительно координатных осей *Ox* и *Oy* находят по формулам:

$$M_x=\int_a^b\gamma(x)f(x)dl,\qquad M_y=\int_a^b\gamma(x)x\,dl,$$

где dl – дифференциал дуги ($dl=\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}dx$, $dl=\sqrt{\left(x_t'\right)^2+\left(y_t'\right)^2}dt$, $dl=\sqrt{\rho^2+\left(\rho_\varphi'\right)^2}d\varphi$).

Моментом инерции относительно оси *u* материальной точки массой *m*, отстоящей от оси *u* на расстоянии *d*, называется число:

$$I_u=md^2.$$

Моменты инерции дуги плоской материальной кривой $y=f(x)$, где $x\in[a;b]$, с заданной плотностью $\gamma=\gamma(x)$, относительно осей координат соответственно равны

$$I_x=\int_a^b\gamma(x)\left(f(x)\right)^2\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}dx,$$

$$I_y=\int_a^b\gamma(x)\,x^2\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}dx.$$

Координаты центра масс дуги плоской материальной кривой $y=f(x)$, где $x\in[a;b]$, с плотностью $\gamma=\gamma(x)$ вычисляют по формулам:

$$x_c=\frac{M_y}{m}=\frac{\int_a^b\gamma(x)x\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}dx}{m},$$

$$y_c=\frac{M_x}{m}=\frac{\int_a^b\gamma(x)f(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}dx}{m},$$

где m – масса дуги, вычисляемая по формуле $m=\int_a^b\gamma(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}dx$;

д) для плоской фигуры, ограниченной кривыми $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, $f_1(x) \le f_2(x)$ и прямыми $x = a$, $x = b$ $(a \le x \le b)$, статистические моменты выражаются формулами:

$$M_x = \frac{1}{2}\int_a^b \gamma(x)\left(f_2^2(x) - f_1^2(x)\right)dx,$$

$$M_y = \int_a^b x\,\gamma(x)\left(f_2(x) - f_1(x)\right)dx.$$

Координаты центра масс плоской фигуры вычисляются по формулам:

$$x_c = \frac{M_y}{m} = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b x\,\gamma(x)\left(f_2(x) - f_1(x)\right)dx}{\int_a^b \gamma(x)\left(f_2(x) - f_1(x)\right)dx},$$

$$y_c = \frac{M_x}{m} = \frac{\frac{1}{2}\int \gamma(x)\left(f_2^2(x) - f_1^2(x)\right)dx}{\int_a^b \gamma(x)\left(f_2(x) - f_1(x)\right)dx}.$$

Пример 7.19.1. Найти работу, которую нужно затратить, чтобы выкачать жидкость плотности γ из цистерны, имеющей форму параболического цилиндра, размеры которого указаны на рис. 7.19.2.

Решение. Работа, затрачиваемая на поднятие тела весом p на высоту h, равна ph. Но различные слои жидкости в цистерне находятся на различных глубинах и высота поднятия до края цистерны различных слоев не одинакова. Для решения задачи применим так называемый «метод дифференциалов» (введем систему координат, как показано на рис. 7.19.2):

1. Работа, затрачиваемая на выкачивание слоя жидкости толщиной dx ($x \in [0;H]$), есть функция от x, т. е. $A = A(x)$ ($A(0) = 0$, $A(H) = A_0$).

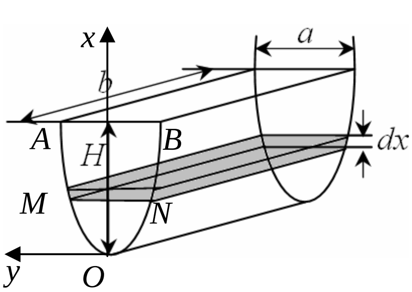


Рис. 7.19.2

2. Находим главную часть приращения ΔA при изменении x на величину $\Delta x = dx$, т. е. находим дифференциал dA функции $A(x)$.

Ввиду малости dx считаем, что «элементарный слой» жидкости находится на одной глубине x от края цистерны (см. рис. 7.19.2). Тогда $dA = dP \cdot x$, где dP – вес этого слоя, он равен $g\gamma dV$, где g – ускорение свободного падения, γ – плотность жидкости, dV – объем «элементарного слоя» жидкости, т. е. $dP = g\gamma dV$. Но $dV = b \cdot MN \cdot dx$.

Найдем *MN*. Имеем $\frac{1}{2}MN$ – ордината точки $M(H-x; y)$, лежащей на параболе *AOB*, уравнение которой в выбранной системе координат – $y^2 = 2px$. Параметр *p* найдем из условия, что точка $A\left(H; \frac{a}{2}\right)$ принадлежит параболе, следовательно $\frac{a^2}{4} = 2ph,\ p = \frac{a^2}{8H}$, т. е. уравнение параболы есть $y^2 = \frac{a^2}{4H}x$. Точка $M(H-x; y)$ лежит на параболе. Следовательно, $y^2 = \frac{a^2}{4H}\left(M - x\right)$. Отсюда находим $y = \frac{a}{2\sqrt{H}}\sqrt{H-x} = \frac{1}{2}MN$, т. е. $MN = \frac{a\sqrt{H-x}}{\sqrt{H}}$. Следовательно, $dV = b\frac{a\sqrt{H-x}}{\sqrt{H}}dx$, $dp = g\gamma ba\frac{\sqrt{H-x}}{\sqrt{H}}dx$ и $dA = g\gamma ba\frac{\sqrt{H-x}}{\sqrt{H}}xdx$.

3. Интегрируя это равенство в пределах от *x* = 0 до *x* = *H*, находим искомую работу:

$$A = \frac{g\gamma ba}{\sqrt{H}}\int_0^H x\sqrt{H-x}dx = \begin{bmatrix} \sqrt{H-x} = t, x = H - t^2, \\ dx = -2tdt,\ \sqrt{H} \le t \le 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{g\gamma ba}{\sqrt{H}}\int_0^{\sqrt{H}} 2\left(Ht^2 - t^4\right)dt = \frac{g\gamma ba}{\sqrt{H}} \cdot 2\left(\frac{Ht^3}{3} - \frac{t^5}{5}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{H}} =$$

$$= \frac{g\gamma ba}{\sqrt{H}} \cdot \frac{4}{15}H^2\sqrt{H} = \frac{4}{15}g\gamma baH^2.$$

П р и м е р 7.19.2. Определить величину давления морской воды на вертикальный круг радиуса *R* = 0,2 м, центр которого погружен в воду на глубине *H* = 10 м. Плотность морской воды γ = 1020 кг/м^3.

Решение. Поместим начало координат на поверхности воды, ось *Oy* направим горизонтально, а ось *Ox* – вертикально вниз. Воспользуемся формулой $P = g\gamma\int_a^b \left(f_2(x) - f_1(x)\right)xdx$.

В данном случае пластинка (т. е. круг) ограничена линиями:

$$y_1 = -\sqrt{R^2 - (x-H)^2}, \quad y_2 = +\sqrt{R^2 - (x-H)^2}, \; x = H - R, \quad x = H + R,$$

поэтому

$$P = g\gamma \int_{H-R}^{H+R} \left(\sqrt{R^2 - (x-H)^2} - \left(-\sqrt{R^2 - (x-H)^2} \right) \right) x\,dx =$$

$$= 2g\gamma \int_{H-R}^{H+R} \left(x\sqrt{R^2 - (x-H)^2} \right) dx = \begin{bmatrix} x - H = t, x = t + H, dx = dt, \\ t_1 = -R, t_2 = R \end{bmatrix} =$$

$$= 2g\gamma \int_{-R}^{R} (t+H)\sqrt{R^2 - t^2}\,dt = 2g\gamma \left(-\frac{1}{2} \int_{-R}^{R} \left(R^2 - t^2 \right)^{\frac{1}{2}} d\left(R^2 - t^2 \right) + H \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - t^2}\,dt \right) =$$

$$= 2g\gamma \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{\left(R^2 - t^2 \right)^3}}{3} \Bigg|_{-R}^{R} + H \left(\frac{t}{2}\sqrt{R^2 - t^2} + \frac{R^2}{2} \arcsin\frac{t}{2} \right) \Bigg|_{-R}^{R} \right) =$$

$$= 2\gamma RH \cdot \frac{R^2}{2} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = g\gamma\pi HR^2.$$

Подставляя значения $g,\ \gamma,\ \pi,\ H,\ R$, получаем

$$P = 9{,}81 \cdot 1020 \cdot \pi \cdot 10 \cdot 0{,}04 \approx 12{,}6 \text{ кН}.$$

Пример 7.19.3. Найти центр тяжести одной арки однородной ($\gamma = \text{const}$) циклоиды $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases}$ $a \le t \le 2\pi.$

Решение. Первая арка циклоиды симметрична относительно прямой $x = \pi a$. Поэтому абсцисса центра тяжести кривой равна πa, т. е. $x_c = \pi a$. Тогда по формулам:

$$M_x = \int_a^b \gamma y\,dl, \quad M_y = \int_a^b \gamma x\,dl,$$

$$x_c = \frac{M_y}{m}, \quad y_c = \frac{M_x}{m}, \quad m = \int_a^b \gamma\sqrt{1 + \left(y'_x \right)^2}\,dx$$

находим

$$y_c = \frac{\gamma \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t)\sqrt{\left[a(t - \sin t)' \right]^2 + \left[a(1 - \cos t)' \right]^2}\,dt}{\gamma \int_0^{2\pi} \sqrt{\left[a(t - \sin t)' \right]^2 + \left[a(1 - \cos t)' \right]^2}\,dt} =$$

$$=\frac{a\int_0^{2\pi}(1-\cos t)\cdot a\cdot 2\sin\frac{t}{2}dt}{a\int_0^{2\pi}2\sin\frac{t}{2}dt}=\frac{2a\int_0^{2\pi}2\sin^2\frac{t}{2}\cdot\sin\frac{t}{2}dt}{-4\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi}}=$$

$$=\frac{-2\cdot 4a\int_0^{2\pi}\left(1-\cos^2\frac{t}{2}\right)d\left(\cos\frac{t}{2}\right)}{8}=-a\left(\cos\frac{t}{2}-\frac{1}{3}\cos^3\frac{t}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi}=$$

$$=-a\left(-1-1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{3}a,$$

$$x_c=\frac{\gamma\int_0^{2\pi}a(t-\sin t)\cdot 2a\sin\frac{t}{2}dt}{\gamma\cdot 8a}=\frac{2a^2\int_0^{2\pi}\left(t\cdot\sin\frac{t}{2}-\sin t\sin\frac{t}{2}\right)dt}{8a}=$$

$$=\frac{1}{4}a(4\pi-0)=\pi a.$$

Пример 7.19.4. Пластинка, имеющая форму прямоугольного треугольника с катетами a и b, вращается с угловой скоростью $\overline{\omega}$ вокруг первого катета (рис. 7.19.3). Удельная поверхностная плотность пластинки равна γ. Вычислить кинетическую энергию пластинки, если a = 1 м, b = 1 м, $\overline{\omega}$ = 2 рад/с, γ = 1 кг/м^2.

Решение:

1 способ. Разобьем пластинку на n вертикальных полос и рассмотрим i-тую полосу шириной Δr_i, удаленную от оси вращения на расстояние от r_{i-1} до r_i. Если Δr_i мало, то эту полосу можно приблизительно считать прямоугольником с высотой l_i, все точки которого удалены от оси вращения приблизительно на одно и тоже расстояние r_i. Тогда кинетическая энергия i-той полосы (или, что тоже самое, приращение суммарной кинетической энергии при добавлении к пластине i-той полосы) приблизительно равна

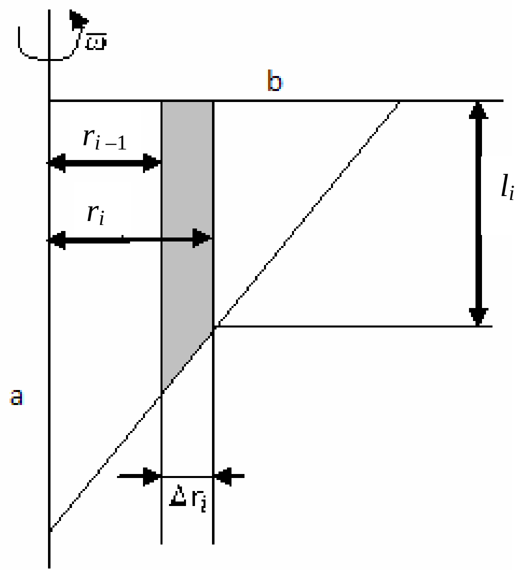


Рис. 7.19.3

$$\Delta E_i\approx\frac{\Delta m_i\cdot v_i^2}{2}=\frac{\Delta m_i\cdot\omega^2\cdot r_i^2}{2}.$$

Площадь i-той полосы приближенно вычислим как площадь прямоугольника: $\Delta S \approx l_i \cdot \Delta r_i$. Высоту l_i выразим через r_i из подобия треугольников:

$$\frac{a}{b} = \frac{l_i}{b - r_i} \Rightarrow l_i = \frac{a}{b} \cdot \left(b - r_i\right).$$

Отсюда масса i-той полосы $\Delta m_i = \rho \cdot \Delta S_i \approx \rho \cdot \dfrac{a}{b}\left(b - r_i\right) \cdot \Delta r_i$.

Подставляя полученные параметры в формулу для ΔE_i, получим

$$\Delta E_i \approx \frac{\rho \cdot a \cdot \omega^2}{2 \cdot b}\left(b - r_i\right) \cdot r_i^2 \cdot \Delta r_i.$$

Точное значение суммарной кинетической энергии $E = \sum\limits_{i=1}^{n} \cdot \Delta E_i$ по всей пластинке получим в пределе при $\Delta r_i \to 0$:

$$E = \lim_{\Delta r_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \cdot \frac{\rho \cdot a \cdot \omega^2}{2b}\left(b - r_i\right) \cdot r_i^2 \cdot \Delta r_i = \frac{\rho \cdot a \cdot \omega^2}{2b} \int_0^b \left(b - r\right) \cdot r^2 dr =$$

$$= \frac{1 \cdot 1 \cdot 2^2}{2 \cdot 1} \int_0^1 \left(r^2 - r^3\right) dr = 2 \cdot \left. \left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{4}\right) \right|_0^1 = \frac{1}{6} (\text{Дж}).$$

2 способ. Так как приращение независимой переменной $\Delta r_i = dr$, а приращения зависимых переменных $\Delta E_i \approx dE$, $\Delta m_i \approx dm$, то равенство для ΔE_i в дифференциальной форме примет вид

$$dE = \frac{a^2 \cdot r^2 dm}{2},$$

причем масса элементарной полоски dm выражается через ширину полоски dr, которую приблизительно считаем прямоугольником: $dm = \rho \cdot d \cdot S = \rho \cdot l \cdot dr$. Из подобия треугольников выражаем высоту элементарной полоски $l = \dfrac{a}{b}\left(b - r\right)$ и подставляем dm в формулу

$$dE = \frac{\rho \cdot a \cdot \omega^2}{2b}\left(b - r\right) \cdot r^2 dr.$$

Получили равенство дифференциалов двух функций. Следовательно, кинетическая энергия $E(r)$ трапециевидной пластинки, имеющей произвольную ширину r, может быть записана в виде интеграла с переменным верхним пределом:

$$E\left(r\right) = \frac{\rho \cdot a \cdot \omega^2}{2b} \int_0^r \left(b - r\right) \cdot r^2 dr.$$

Нижний предел интегрирования взят равным 0, т. к. должно быть $E(r)/_{r=0}=0$. Кинетическая энергия пластинки нулевой толщины, расположенной на оси, равна нулю. Значение кинетической энергии всей треугольной пластинки получим при $r=b$:

$$E=E(b)=\frac{\rho\cdot a\cdot\omega^2}{2b}\int_0^b(b-r)\cdot r^2dr=\frac{1}{6}(\text{Дж}).$$

Пример 7.19.5. (повышенный уровень сложности). Найти давление воды на поверхность шара диаметром 4 м, если его центр находится на глубине 3 м от поверхности воды.

Решение. Проведем через центр шара вертикальную плоскость и выберем на ней прямоугольную систему координат *xOy* как показано на рис. 7.19.4.

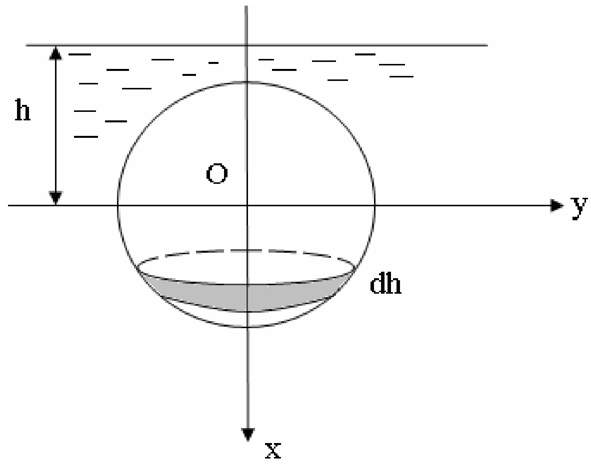


Рис. 7.19.4

Рассечем шар на глубине h горизонтальной плоскостью. Тогда давление воды на отсеченную часть поверхности шара будет некоторой функцией $P(h)$.

При изменении h на величину dh площадь S отсеченной поверхности шара как площадь поверхности вращения вокруг оси Oy, изменится на величину $dS=2\pi ydl$, где dl – дифференциал дуги окружности, а давление $P(h)$ изменится на величину $dP=2\pi hydl$.

Выразив dP через одну переменную x и интегрируя в пределах от $x=-2$ до $x=2$, найдем давление воды на всю поверхность шара. Из уравнения окружности $x^2+y^2=4$ найдем $y'=-\dfrac{x}{y}$ и затем

$$dl=\sqrt{1+(y')^2}dx=\sqrt{1+\frac{x^2}{y^2}}dx=\sqrt{\frac{x^2+y^2}{y^2}}dx=\frac{2}{y}dx.$$

Из рисунка 7.19.4 находим $h=3+x$. Следовательно,

$$P=2\pi\int_{-2}^{2}(3+x)y\cdot\frac{2}{y}dx=4\pi\int_{-2}^{2}(3+x)dx=2\pi(3+x)^2\Big|_{-2}^{2}\approx 470880\pi(\text{Н}).$$

Давление на верхнюю половину поверхности шара получим, интегрируя dP в пределах от – 2 до 0:

$$P_1 = 2\pi(3+x)^2\Big|_{-2}^{0} \approx 156960\pi(\text{Н}).$$

Давление на нижнюю половину поверхности будет

$$P_2 = 2\pi\left(3+x\right)^2\Big|_{0}^{2} \approx 313920\pi\left(\text{Н}\right).$$

П р и м е р 7.19.6. (повышенный уровень сложности). Шар лежит на дне бассейна глубиной H = 14 дм. Найти работу, необходимую для извлечения шара из воды, если его радиус R = 3 дм, а удельный вес $\delta = 2$.

Решение. При подъеме шара (рис. 7.19.5) до поверхности воды сила P_1, совершающая работу, постоянна и равна разности между весом шара и весом вытесняемой им воды:

$$P_1 = \frac{4}{3}\pi R^3\delta - \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi R^3\left(\delta - 1\right).$$

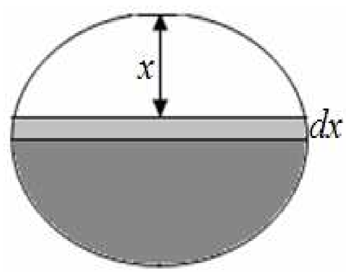


Рис. 7.19.5

Поэтому работа A_1, необходимая для поднятия шара до поверхности воды, определяется элементарным путем, как произведение силы P_1 на высоту подъема $\left(H-2R\right)$.

$$A_1 = P_1\left(H-2R\right) = \frac{4}{3}\pi R^3\left(\delta-1\right)\left(H-2R\right).$$

При дальнейшем подъеме шара сила P, совершающая работу, будет изменяться в зависимости от высоты x надводной части шара

$$P(x) = P_ш - P_в,$$

где $P_ш$ – вес шара; $P_в$ – вес воды, вытесняемой подводной частью шара, численно равный объему шарового сегмента с высотой $h = 2R - x$.

Так как объем шарового сегмента вычисляется по формуле

$$V = \pi H^2\left(R - \frac{1}{3}H\right),$$

то в нашем случае

$$P_в = \pi H^2\left(R - \frac{1}{3}H\right) = \frac{\pi}{3}\left(2R-x\right)^2\left(R+x\right) = \frac{\pi}{3}\left(x^3 - 3Rx^2 + 4R^3\right).$$

Очевидно, что и работа, совершаемая силой $P(x)$, будет некоторой функцией $A(x)$. Допуская, что при подъеме шара еще на малую высоту dx сила $P(x)$ остается неизменной, найдем приближенную величину приращения работы:

$$\Delta A \approx P(x)dx = (P_ш - P_в)dx = \frac{\pi}{3}\left(4R^3(\delta - 1) - x^3 + 3Rx^2\right)dx = dA$$

Интегрируя dA в пределах от $x = 0$ до $x = 2R$, найдем работу A_2, которую надо совершить, чтобы шар, поднятый со дна бассейна до поверхности, полностью извлечь из воды:

$$A_2 = \frac{\pi}{3}\int_0^{2R}\left(4R^3(\delta-1) - x^3 + 3Rx^2\right)dx = \frac{\pi}{3}\left(4R^3(\delta-1)x - \frac{x^4}{4} + Rx^3\right)\Bigg|_0^{2R} =$$

$$= \frac{4}{3}\pi R^4(2\delta - 1).$$

Вся искомая работа:

$$A = A_1 + A_2 = \frac{4}{3}\pi R^3\left(R + (\delta-1)H\right) =$$

$$= \frac{4}{3}\pi \cdot 27\left(0,3 + (2-1)\cdot 1,4\right) \approx 600,4\pi \text{ (Дж)}.$$

Пример 7.19.7. (повышенный уровень сложности). Прямоугольный резервуар с площадью горизонтального сечения $S = 6$ м^2 наполнен водой до высоты $H = 5$ м. Определить время, в течение которого вся вода вытечет из резервуара через небольшое отверстие в его дне площадью $S_1 = 0,01$ м^2, если принять, что скорость истечения воды равна $0,6\sqrt{2gh}$, где h – высота уровня воды над отверстием, g – ускорение силы тяжести.

Решение. Согласно общей схеме I, разобьем искомое время T на большое число маленьких промежутков $\Delta t_1, \Delta t_2, \ldots, \Delta t_n$ и пусть за каждый такой промежуток уровень воды в резервуаре понижается на величину $\Delta x = \frac{H}{n}$ (рис. 7.19.6).

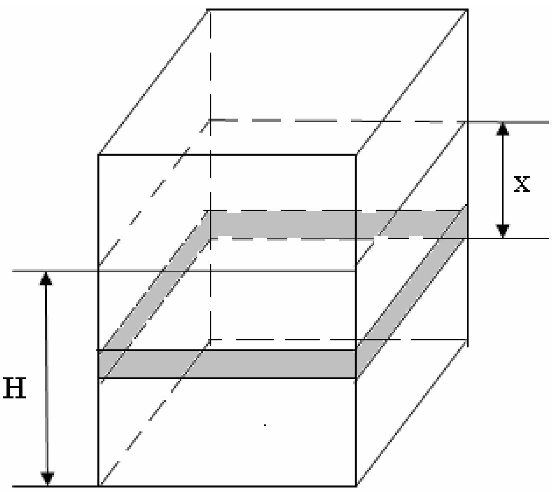


Рис. 7.19.6

Допустим, что в течение каждого малого промежутка времени Δt_i скорость истечения воды через отверстие в дне остается постоянной, равной ее значению в начале промежутка $0,6\sqrt{2g(H-x_i)}$. Тогда прибавление в объеме воды, вытекающей с такой скоростью через отверстие в дне за промежуток Δt_i, равно объему опорожнившейся за этот же промежуток части резервуара. В результате получим приближенно равенство

$$0,6S_1\sqrt{2g(H-x_i)}\Delta t_i \approx S\Delta x.$$

Откуда $\Delta t_i \approx \dfrac{S\Delta x}{0,6S_1\sqrt{2g(H-x_i)}}$.

Приближенное значение всего искомого времени T будет равно

$$T=\sum_{i=1}^{n}\Delta t_i \approx \sum_{i=1}^{n}\frac{S\Delta x}{0,6\sqrt{2g(H-x_i)}S_1}, \qquad (**)$$

где по условию задачи точки x_i заключены на отрезке $[0;H]$.

Убедившись, что с возрастанием n погрешность полученного приближенного значения T стремится к нулю, найдем точное значение T как предел интегральной суммы (**) при $n \to +\infty$, т. е. как соответствующий определенный интеграл:

$$T=\frac{S}{0,6S_1\sqrt{2g}}\int_0^H (H-x)^{-\frac{1}{2}}dx=\frac{2S}{0,6S_1\sqrt{2g}}(H-x)^{\frac{1}{2}}\Big|_H^0=\frac{S}{0,6S_1}\sqrt{\frac{2H}{g}}.$$

Подставляя числовые значения параметров S = 6, H = 5, S_1 = 0,01, g = 9,81, получим

$$T \approx 1019 \text{ с} \approx 16,99 \text{ мин.}$$

Если бы убыль воды в резервуаре постоянно возмещалась, т. е. если бы уровень воды в нем оставался неизменным, то и скорость истечения воды была бы постоянной, равной $0,6\sqrt{2gh}$. В этом случае, в каждую секунду через отверстие в дне резервуара будет вытекать объем воды $0,6\sqrt{2gH}$. Поэтому при указанном предположении объем воды, вмещающийся в резервуаре, вытечет из него за время $T_1=\dfrac{1}{2}\dfrac{S}{0,6S_1}\sqrt{\dfrac{2H}{g}}$.

Сопоставление этого результата с предыдущим показывает, что время истечения T без возмещения убыли воды в резервуаре, в два раза больше времени истечения T_1 при постоянном возмещении убыли воды: $T=2T_1$.

Пример 7.19.8. Цилиндр высотой H = 1,5 м и радиусом R = 0,4 м, наполнен газом под атмосферным давлением (10330 кг/м^2), закрыт поршнем. Определить работу, затрачиваемую на изотермическое сжатие газа при перемещении поршня на расстояние h = 1,2 м внутрь цилиндра.

Решение. При изотермическом изменении состояния газа, когда его температура остается неизменной, зависимость между объемом V и давлением p газа выражается формулой $pV = c = \text{const}$ (закон Бойля – Мариотта).

Поэтому, если поршень будет вдвинут на x м внутрь цилиндра (рис. 7.19.7), то давление $p(x)$ газа на единицу площади поршня будет

$$p(x) = \frac{c}{V(x)} = \frac{c}{S(H-x)},$$

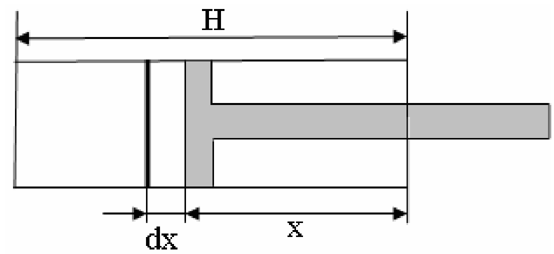


Рис. 7.19.7

а давление на всю площадь S поршня

$$P(x) = Sp(x) = \frac{c}{H-x}.$$

Полагая, что работа, затрачиваемая при вдвижении поршня на x м, есть некоторая функция $A(x)$, и допуская, что при дальнейшем вдвижении поршня на малое расстояние dx испытываемое им давление $p(x)$ остается неизменным, найдем приближенную величину приращения (дифференциал) функции $A(x)$:

$$\Delta A \approx P(x)dx = \frac{c}{H-x}dx = dA.$$

Всей искомой работе A соответствует изменение x от 0 до h, поэтому

$$A = c\int_0^h \frac{dx}{H-x} = -c\ln|H-x|\Big|_0^h = c\ln\left|\frac{H}{H-h}\right|.$$

При H = 1,5 м, R = 0,4 м, h = 1,2 м, $p_0 = 10330$ кг/м^2 найдем

$$V_0 = \pi R^2 H = 0{,}24\pi \text{ м}^3;\ c = p_0 \cdot V_0 = 2479{,}2\pi.$$

$$A \approx 122951{,}7 \text{ Дж}.$$

7.20. Приближенные вычисления определенного интеграла (для самостоятельного изучения)

На практике в процессе использования определенного интеграла встречаются ситуации, когда применение формулы Ньютона – Лейбница бывает проблематичным из-за весьма сложного вычисления первообразной для подынтегральной функции (например, для дробно-рациональной функции и т. п.) либо применение указанной формулы становится невозможным (например, подынтегральная функция задана графически или таблично). В таких случаях прибегают к приближенным формулам, с помощью которых определенный интеграл вычисляется с наперед заданной точностью. Рассмотрим наиболее часто используемые формулы приближенного вычисления определенного интеграла (прямоугольников, трапеций, Симпсона), вывод которых осуществим с использованием формулы Тейлора и метода неопределенных коэффициентов.

Напомним, что если функция $f(x)$ непрерывна и имеет на отрезке $[a; b]$ непрерывные производные до n-ного порядка включительно, а в каждой внутренней точке отрезка имеет конечную производную $(n + 1)$-го порядка, то при $x \in [a; b]$ справедлива следующая формула Тейлора:

$$\begin{gathered} f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!}+\ldots \\ \ldots+f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!}+f^{(n+1)}(\xi)\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \end{gathered} \tag{7.20.1}$$

где $\xi = a + \theta(x - a)$ и $0 < \theta < 1$.

Если положить в этой формуле $a = 0$, то получим формулу Маклорена:

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+f''(0)\frac{x^2}{2!}+f'''(0)\frac{x^3}{3!}+\ldots+f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!}+f^{(n+1)}(\xi)\frac{x^{n+1}}{(n+1)!},$$

где $\xi = \theta x$, $0 < \theta < 1$.

Последний член в формуле Тейлора называется остаточным членом формулы Тейлора в форме Лагранжа и обозначается $R_n(x)$:

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}\big(a+\theta(x-a)\big)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

соответственно остаточный член в формуле Маклорена имеет вид

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

Формулу (7.20.1) можно записать в виде

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+o\Big((x-a)^n\Big),$$

где $o\Big((x-a)^n\Big)$ – бесконечно малая порядка выше n-ного по сравнению с $(x - a)$.

Эта форма остаточного члена была указана Пеано. В частности, при $a = 0$ имеем

$$f(x) = f(0) + f'(0)(x) + f''(0)\frac{x^2}{2!} ... + f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} + o\left(x^n\right).$$

Получим формулы приближенного вычисления определенных интегралов (прямоугольников, трапеций, Симпсона), используя формулу Тейлора и метод неопределенных коэффициентов.

1. Формула прямоугольников. Рассмотрим задачу: пусть требуется вычислить $\int\limits_a^b f(x)dx$, где $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и имеет непрерывную производную на промежутке (a, b) (считаем, что первообразная не выражается через элементарные функции или этот интеграл удобнее вычислить приближенно).

Разобьем отрезок интегрирования на n равных частей:

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b,$$

где $\quad x_i = x_0 + ih, \quad i = 0, 1, \ldots, n, \quad h = \dfrac{b-a}{n}.$

Тогда, $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)dx + ... + \int\limits_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx.$

Рассмотрим интеграл $\int\limits_{x_0}^{x_1} f(x)dx$. Подберем коэффициент A так, чтобы

$$\int\limits_{x_0}^{x_1} f(x)dx = Af(x_0) \cdot h + r_1. \qquad (7.20.2)$$

Первое слагаемое в (7.20.2) дает приближенное значение определенного интеграла, а второе – погрешность. Для определения коэффициента A, поступаем следующим образом: $f(x)$ представляем формулой Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа, ограничившись первым порядком малости.

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0 + \theta_1 \cdot h) \cdot (x - x_0), \quad 0 < \theta_1 < 1.$$

Воспользовавшись обобщенной теоремой о среднем, будем иметь

$$\int\limits_{x_0}^{x_1} \left[f(x_0) + f'(x_0 + \theta_1 \cdot h) \cdot (x - x_0) \right] dx =$$

$$= f(x_0)(x - x_0)\Big|_{x_0}^{x_1} + f'(\xi_1)\frac{(x - x_0)^2}{2}\Bigg|_{x_0}^{x_1} = f(x_0) \cdot h + \frac{f'(\xi_1) \cdot h^2}{2},$$

где $\quad x_0 < \xi_1 < x_1, \quad x_1 - x_0 = h.$

$$\int_{x_0}^{x_1} f'(x_0+\theta_1 h)\cdot(x-x_0)\,dx = f'(\xi_1)\int_{x_0}^{x_1}(x-x_0)\,dx, \quad x_0<\xi_1<x_1.$$

Подставляя в (7.20.2), получим равенство

$$f(x_0)\cdot h+\frac{f'(\xi_1)}{2}\cdot h^2 = A\cdot f(x_0)\cdot h + r_1,$$

отсюда, $A=1, \quad |r_1|\le\frac{f'(\xi_1)}{2}\cdot h^2.$

Аналогично имеем для произвольного интервала

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx = f(x_{i-1})\cdot h + r_1^i,$$

где $\quad |r_1^i|\le\frac{|f'(\xi_i)|}{2}\cdot h^2, \quad i=\overline{1,n}, \quad x_{i-1}<\xi_1<x_1.$

Отсюда, $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = h[f(x_o)+f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_{n-1})]+R_1,$

где $\quad |R_1|\le\frac{h^2}{2}\left(|f'(\xi_1)|+|f'(\xi_2)|+...+|f'(\xi_n)|\right),$

т. е. $\quad |R_1|\le\frac{h^2}{2}n\cdot\max\limits_{x\in[a,b]}|f'(x)| = \frac{(a-b)^2}{2n}\max\limits_{x\in[a,b]}|f'(x)| = \frac{h}{2}(b-a)\max\limits_{x\in[a,b]}|f'(x)|.$

Таким образом, мы получили формулу прямоугольников для вычисления определенного интеграла.

2. Формула трапеций. Вернемся к исходной задаче. Рассмотрим задачу: необходимо вычислить $\int_a^b f(x)dx$, где $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и имеет непрерывные производные до 3-го порядка на промежутке (a, b).

Разобьем отрезок интегрирования на n равных частей:

$$x_0 = a < x_1 < x_2 \ldots < x_n = b,$$

где $\quad x_i = x_0 + ih, \; i = 0, 1, \ldots, n, \; h=\frac{b-a}{n}.$

Тогда, $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_{x_o}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + ... + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx.$

Рассмотрим

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = h[Af(x_0)+Bf(x_0+h)]+r_2. \tag{7.20.3}$$

Функции $f(x)$ и $f\left(x_0+h\right)$ представим по формуле Тейлора:

$$f\left(x\right)=f(x_0)+f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)+\frac{f''\left(x_0+\theta_1\cdot h\right)}{2}\left(x-x_0\right)^2,$$

$$f\left(x+h\right)=f\left(x_0\right)+f'\left(x_0\right)h+\frac{f''\left(x_0+\theta_2\cdot h\right)}{2}h^2,$$

где $0<\theta_1<1,\quad 0<\theta_2<1.$

Полученные разложения подставим в (7.11.3) и получим

$$\int\limits_{x_0}^{x_1}[f\left(x_0\right)+f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)+\frac{f''\left(x_0+\theta_1\cdot h\right)}{2}\left(x-x_0\right)^2]dx=$$

$$=h[Af\left(x_0\right)+Bf(x_0)+Bf'\left(x_0\right)\cdot h+B\frac{f''\left(x_0+\theta_2 h\right)}{2}h^2]+r_2$$

или

$$f\left(x_0\right)h+f'\left(x_0\right)\cdot\frac{h^2}{2}+\frac{f''\left(\xi_1\right)}{2}\cdot\frac{h^3}{3}=$$

$$=A\cdot f\left(x_0\right)\cdot h+B\cdot f\left(x_0\right)\cdot h+Bf'\left(x_0\right)\cdot h^2+B\cdot\frac{f''\left(x_0+\theta_2\cdot h\right)}{2}h^3+r_2,$$

где $x_0<\xi_1<x_1,\quad 0<\theta_2<1.$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях h:

$$\left.\begin{array}{l} h^1:1=A+B \\ h^2:\frac{1}{2}=B \end{array}\right\}\Rightarrow\left\{B=\frac{1}{2},A=\frac{1}{2}.\right.$$

Тогда,
$$f\left(x\right)dx=\frac{1}{2}h\left[f\left(x_0\right)+f\left(x_1\right)\right]+r_2,$$

$$\left|r_2\right|=h^3\left|\frac{f''(\xi_1)}{6}-\frac{f''\left(x_0+\theta_2 h\right)}{4}\right|=$$

$$=\frac{h^3}{12}\left|\left[2\left(f''(\xi_1)-f''\left(x_0+\theta_2 h\right)-f''\left(x_0+\theta_2 h\right)\right)\right]\right|\le$$

$$\le\frac{h^3}{12}\left[\left|f''\left(x_0+\theta_2 h\right)\right|+2\left|f'''(\xi_2)(\xi_1-x_0-\theta_2 h)\right|\right].$$

Здесь мы воспользовались теоремой Лагранжа:

$$f''(\xi_1)-f''\left(x_0+\theta_2 h\right)=f'''(\xi_2)(\xi_1-x_0-\theta_2 h),\quad \xi_1<\xi_2<x_0+\theta_2 h,$$

т. к. $f'''(\xi_2)(\xi_1-x_0-\theta_2 h)=0(h)$, то $\left|r_2\right|\le\frac{h^3}{12}\left|f''(c_1)\right|$, где $x_0<c_1<x_1$.

Аналогично, $\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx = \frac{1}{2}h\left[f(x_{i-1}) + f(x_i)\right] + r_2^{\,i}$,

где $\left|r_2^{\,i}\right| \le \frac{h^3}{12}\left|f''(c_i)\right|$.

Поэтому

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \frac{1}{2}h\left[f(x_0) + 2\cdot(f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \ldots + f(x_{n-1})) + f(x_n)\right] + R_2 =$$

$$= h\left[\frac{f(x_0) + f(x_n)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \ldots + f(x_{n-1})\right] + R_2,$$

где $|R_2| \le \frac{h^3}{12}\left|f''(c_1) + f''(c_2) + \ldots + f''(c_n)\right|$ или

$$|R_2| \le \frac{h^3}{12}\cdot n\cdot \max_{x\in[a,b]}\left|f''(x)\right| = \frac{(b-a)^3}{12n^2}\max_{x\in[a,b]}\left|f''(x)\right|.$$

3. Формула Симпсона. Вернемся к исходной задаче: необходимо вычислить $\int\limits_a^b f(x)dx$, где $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и имеет непрерывные производные до 5-го порядка на промежутке (a, b).

Как и в предыдущих примерах, разобьем отрезок интегрирования на m равных частей, но предположим, что m – четное число – $m = 2n$:

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{2n} = b,$$

где $x_i = x_0 + ih$, $i = 0, 1, \ldots, 2n$, $h = \frac{b-a}{2n}$.

Тогда, $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int\limits_{x_2}^{x_4} f(x)dx + \ldots + \int\limits_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} f(x)dx$.

Заменим дугу линии $y = f(x)$, соответствующую $[x_0, x_2]$, дугой параболы, которая проходит через точки:

$$\left(x_0, f(x_0)\right);\ \left((x_0+h), f(x_0+h)\right);\ \left((x_0+2h), f(x_0+2h)\right).$$

Подберем A, B, C так, чтобы

$$\int\limits_{x_0}^{x_0+2h} f(x)\,dx = h\left[Af(x_0) + Bf(x_0+h) + Cf(x_0+2h)\right] + r_4.$$

Представляя $f(x)$, $f(x_0+h)$, $f(x_0+2h)$, по формуле Тейлора,

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+$$
$$+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+\frac{f^{(4)}(x_0+\theta\cdot h)}{4!}(x-x_0)^4,$$
$$f(x_0+h)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}h+\frac{f''(x_0)}{2!}h^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}h^3+\frac{f^{(4)}(x_0+\theta_1\cdot h)}{4!}h^4,$$
$$f(x_0+2h)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}2h+\frac{f''(x_0)}{2!}(2h)^2+$$
$$+\frac{f'''(x_0)}{3!}(2h)^3+\frac{f^{(4)}(x_0+\theta_2\cdot h)}{4!}(2h)^4,$$
где $0<\theta<1,\quad 0<\theta_1<1,$ получим
$$\int_{x_0}^{x_0+2h}[f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+$$
$$+\frac{f^{(4)}(x_0+\theta\cdot h)}{4!}(x-x_0)^4]dx=f(x_0)2h+f'(x_0)\frac{(2h)^2}{2}+$$
$$+\frac{f''(x_0)}{2}\frac{(2h)^3}{3}+\frac{f'''(x_0)}{3!}\frac{(2h)^4}{4}+\frac{f^{(4)}(\xi_1)}{4!}\frac{(2h)^5}{5},\ \text{где}\ x_0<\xi_1<x_0+2h.$$
Тогда,
$$f(x_0)2h+f'(x_0)\frac{(2h)^2}{2}+\frac{f''(x_0)}{2}\frac{(2h)^3}{3}+\frac{f'''(x_0)}{3!}\frac{(2h)^4}{4}+\frac{f^{(4)}(\xi_1)}{4!}\frac{(2h)^5}{5}=$$
$$=h[Af(x_0)+Bf(x_0)+Bf'(x_0)h+\frac{Bf''(x_0)}{2!}h^2+B\frac{f'''(x_0)}{3!}h^3+$$
$$+B\frac{f^{(4)}(x_0+\theta_1 h)}{4!}h^4+Cf(x_0)+Cf'(x_0)2h+C\frac{f''(x_0)}{2!}(2h)^2+$$
$$+C\frac{f''(x_0)}{2!}(2h)^2+C\frac{f'''(x_0)}{3!}(2h)^3+B\frac{f^{(4)}(x_0+\theta_2 h)}{4!}(2h)^4]+r_4.$$
Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях:
$$\left.\begin{aligned}2h:1&=\frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{C}{2}\\ h:(2h)^2:\frac{1}{2}&=\frac{B}{4}+\frac{C}{2}\\ (2h)^3:\frac{1}{6}&=\frac{B}{16}+\frac{C}{4}\end{aligned}\right\}$$

Откуда, $A=\frac{1}{3},\ B=\frac{4}{3},\ C=\frac{1}{3}$ и, следовательно,

$$f\left(x\right)dx=\frac{h}{3}\left[f\left(x\right)+4f\left(x\right)+f\left(x\right)\right]+r,$$

где $$\left|r_4\right|=\frac{(2h)^5}{4!}\cdot\left|\frac{f^{(4)}(\xi_1)}{5}-\frac{f^{(4)}(x_0+\theta_1 h)}{3\cdot 8}-\frac{f^{(4)}(x_0+\theta_2 h)}{6}\right|=$$

$$=\frac{(2h)^5}{4!}\cdot\frac{1}{120}\left|24f^{(4)}(\xi_1)-5f^{(4)}(x_0+\theta_1 h)-20f^{(4)}(x_0+\theta_2 h)\right|=$$

$$=\frac{(2h)^5}{4!\cdot 120}\cdot\left|24(f^{(4)}(\xi_1)-f^{(4)}(x_0+\theta_2 h))-5(f^{(4)}(x_0+\theta_1 h)-f^{(4)}(x_0+\theta_2 h))-f^{(4)}(x_0+\theta_2 h)\right|\le$$

$$\le\frac{(2h)^5}{4!\cdot 120}\cdot\left(\left\|f^{(4)}(x_0+\theta_2 h)\right|+\left|24f^{(4)}(\xi_1)(\xi_1-x_0-\theta_2 h)-5f^{(5)}(\xi_3)(\theta_1-\theta_2)h\right\|\right),$$

для $x_0<\xi_i<x_2,\ i=1,\ 2,\ 3.$

Так как $24f^{(4)}\left(\xi_1\right)\left(\xi_1-x_0-\theta_2 h\right)-5f^{(5)}(\xi_3)\left(\theta_1-\theta_2\right)h=o\left(h\right)$, то

$$\left|r_4\right|\le\frac{\left(2h\right)^5}{4!\cdot 120}\left|f^{(4)}\left(x_0+\theta_2 h\right)\right|.$$

Для произвольного интервала имеем:

$$\int\limits_{x_{i-2}}^{x_i}f(x)dx=\frac{h}{3}[f(x_{i-2})+4f(x_{i-1})+f(x_{i-2}+2h)]+r^i{}_4,$$

где $$\left|r^i{}_4\right|\le\frac{(2h)^5}{90}\left|f^{(4)}(c_i)\right|,\quad x_{i-2}<c_i<x_i.$$

Суммируя, получим

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\frac{h}{3}[f(x_0)+f(x_{2n})+2(f(x_2)+f(x_4)+\ldots$$

$$\ldots+f(x_{2n-2})+4(f(x_1)+f(x_3)+\ldots+f(x_{2n-1}))]+R_4.$$

Это формула Симпсона с остаточным членом:

$$\left|R_4\right|\le\frac{h^5}{90}\cdot n\cdot\max_{x\in[a,b]}\left|f^{(4)}\left(x\right)\right|=\frac{\left(b-a\right)^5}{2\cdot 90\cdot 2^4\cdot n^4}\max_{x\in[a,b]}\left|f^{(4)}\left(x\right)\right|=$$

$$=\frac{h^4}{180}\left(b-a\right)\max_{x\in[a,b]}\left|f^{(4)}\left(x\right)\right|.$$

7.21. Приближенное вычисление несобственных интегралов с бесконечными пределами интегрирования

Напомним, что несобственный интеграл с бесконечными пределами интегрирования по определению равен

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Если предел справа существует и он конечен, то несобственный интеграл называется сходящимся, в противном случае, считается, что он лишен смысла или говорят – расходится.

Для того чтобы с точностью ε вычислить сходящийся несобственный интеграл $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$, необходимо представить его в виде

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^{\infty} f(x)\,dx,$$

где b выбирают настолько большим, чтобы имело место неравенство

$$\left|\int_b^{\infty} f(x)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Затем определенный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ вычисляют по одной из формул (7.20.2 – 7.20.4) с точностью $\frac{\varepsilon}{2}$, и приближенно получается, что

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx \approx \int_a^b f(x)\,dx.$$

Замечание 7.21.1. Несобственный сходящийся интеграл от разрывной в точке c функции $f(x)$, по определению равный

$$\int_a^c f(x)\,dx = \lim_{\delta\to 0}\int_a^{c-\delta} f(x)\,dx,$$

вычисляют аналогично вычислению несобственного интеграла с бесконечными пределами интегрирования.

Пусть

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^{c-\delta} f(x)\,dx + \int_{c-\delta}^{c} f(x)\,dx,$$

тогда δ подбирают таким образом, чтобы выполнялось неравенство

$$\left| \int_{c-\delta}^{c} f(x)dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Затем по одной из формул (7.20.2 – 7.20.4) с точностью $\frac{\varepsilon}{2}$ вычисляют $\int_{a}^{c-\delta} f(x)dx = \int_{a}^{c} f(x)dx$ с точностью ε.

Пример 7.21.1. Вычислить $\int_{1,2}^{1,6} \frac{\sin(2x-2,1)}{x^2+1}dx$ по формуле Симпсона с точностью $\varepsilon = 0,001$, применяя правило двойного пересчета, за начальный шаг принять $h = 0,1$.

Решение. Вычислительная формула имеет вид

$$J = \frac{h}{3}\left[y_0 + y_{2m} + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2m-2}) + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2m-1})\right],$$

где $y_i = y(x_i) = \frac{\sin(2x_i - 2,1)}{x_i^2 + 1}$, $x_i = 1,2 + ih$ $(i = 0,1,2,\ldots,2m)$, причем $n = \frac{b-a}{h} = \frac{1,6-1,2}{0,1} = 4$.

Так как для оценки погрешности будет применяться двойной пересчет, сразу составим таблицу значений $f(x) = \frac{\sin(2x-2,1)}{x^2+1}$ для $n = 8$.

i	x_i	$2x_i - 2,1$	$\sin(2x_i - 2,1)$	$x_i^2 + 1$	y_i
0	1,20	0,30	0,29552	2,4400	0,1211
1	1,25	0,40	0,38942	2,5625	0,1520
2	1,30	0,50	0,47940	2,6900	0,1782
3	1,35	0,60	0,5646	2,8225	0,2000
4	1,40	0,70	0,6442	2,9600	0,2176
5	1,45	0,80	0,7174	3,1024	0,2312
6	1,50	0,90	0,7833	3,2500	0,2410
7	1,55	1,00	0,8415	3,4025	0,2473
8	1,60	1,10	0,8912	3,5600	0,2503

Для $n = 4$, $h = 0,1$ имеем

$$J_4 \approx \frac{0,1}{3}\left(0,1211 + 0,2503 + 2 \cdot 0,2176 + 4(0,1782 + 0,2410)\right) = 0,08278.$$

Для $n=8$, $h=0,05$ имеем

$$J_8 = \frac{0,05}{3}\left(0,1211+0,2503+2\left(0,1782+0,2176+0,2410\right)+\right.$$
$$\left.+\left(0,1520+0,2000+0,2312+0,2473\right)\right) = 0,08278.$$

Так как $\left|J_4 - J_8\right| < 0,001$, то

$$\int_{1,2}^{1,6} \frac{\sin(2x-2,1)}{x^2+1}\,dx = 0,08278 \approx 0,083.$$

П р и м е р 7.21.2. Вычислить сходящийся несобственный интеграл $J = \int_2^{\infty} \frac{dx}{1+x^3}$ с точностью $\varepsilon = 10^{-2}$.

Решение. Представим $\int_2^{\infty} \frac{dx}{1+x^3} = \int_2^{b} \frac{dx}{1+x^3} + \int_b^{\infty} \frac{dx}{1+x^3}$, b выберем из условия $\left|\int_b^{\infty} \frac{dx}{1+x^3}\right| < \frac{10^{-2}}{2}$.

Заметим, что $\int_b^{\infty} \frac{dx}{1+x^3} < \int_b^{\infty} \frac{dx}{x^3} = \frac{1}{2b^2}$, значит, $\frac{1}{2b^2} = \frac{10^{-2}}{2}$, т. е. $b = 10$.

Тогда получаем, что $\int_2^{\infty} \frac{dx}{1+x^3} \approx \int_2^{10} \frac{dx}{1+x^3}$. Получившийся определенный интеграл вычисляем с точностью $\frac{10^{-2}}{2}$, по формуле Симпсона, составив таблицу значений функции $y = \frac{1}{1+x^3}$.

i	x_i	$1+x_i^3$	$y = \frac{1}{1+x^3}$
0	2,0	9	0,1111
1	3,0	28	0,0357
2	4,0	65	0,0154
3	5,0	126	0,0079
4	6,0	217	0,0046
5	7,0	344	0,0029
6	8,0	513	0,0020
7	9,0	730	0,0014
8	10,0	1001	0,0010

При $h=2$ имеем $n=4$,

$$J_4=\frac{2}{3}\big(0{,}1111+0{,}0010+2\cdot 0{,}0046+4\cdot\big(0{,}0154+0{,}0020\big)\big)=0{,}1210.$$

При $h=1$ имеем $n=8$,

$$J_8=\frac{1}{3}\big(0{,}1111+0{,}0010+2\big(0{,}0154+0{,}0046+0{,}0020\big)+$$
$$+4\big(0{,}0357+0{,}0079+0{,}0029+0{,}0014\big)\big) = 0{,}1169.$$

Так как $\left|J_4-J_8\right|= 0{,}0041 < 0{,}005$, то $\int\limits_2^{10}\frac{dx}{1+x^3}=0{,}1169$.

Значит, $\int\limits_2^{\infty}\frac{dx}{1+x^3}=0{,}1169$ с точностью $\varepsilon=10^{-2}$.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ПРОВЕДЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

Учебно-информационный блок для проведения практических занятий

Тема занятия	Тип занятия	Количество часов
I. Формула Ньютона – Лейбница	Повторение и обобщение имеющихся знаний. Усвоение и закрепление изученного на лекции нового материала	2
II. Интегрирование по частям и замена переменных в определенном интеграле	Углубление и расширение полученных знаний. Усвоение нового материала. Текущий контроль	2
III. Несобственные интегралы. Сходимость, вычисление	Усвоение и закрепление нового материала. Применение полученных знаний. Текущий контроль	2
IV. Вычисление площадей плоских фигур	Усвоение и закрепление нового материала. Применение полученных знаний. Текущий контроль	2
V. Вычисление длин дуг кривых. Вычисление объемов тел и площадей поверхностей вращения	Усвоение и закрепление нового материала. Применение полученных знаний. Текущий контроль	2
VI. Физические (механические) приложения определенного интеграла	Усвоение и закрепление нового материала. Применение полученных знаний. Текущий контроль	2

Основная и дополнительная литература

1. Гусак, А. А. Справочник по высшей математике / А. А. Гусак, Г. М. Гусак. – Минск: Навука и тэхника, 1991.

2. Мышкис, А. Д. Лекции по высшей математике / А. Д. Мышкис. – М.: Наука, 1973.

3. Сборник задач по математике для втузов. Линейная алгебра и основы математического анализа / под ред. А. В. Ефимова и Б. П. Демидовича. – М.: Наука, 1986.

4. Неопределенный интеграл: учеб.-метод. комплекс для студентов техн. специальностей / В. С. Вакульчик [и др.]; под общ. ред. В. С. Вакульчик. – Новополоцк: ПГУ, 2010. – 168 с.

5. Maple : система компьютерной алгебры: учеб.-метод. пособие / авт.-сост.: И. Е. Андрушкевич, В. А. Жизневский. – Витебск: Изд-во УО «ВГУ им. П. М. Машерова, 2006. – 158 с.

I. Формула Ньютона – Лейбница

1. Провести краткий теоретический обзор с использованием лекционного материала, графической схемы. Сделать акцент на то, что при решении многих задач приходится суммировать бесконечно большое число бесконечно малых слагаемых. Это приводит к одному из основных понятий в высшей математике – определенному интегралу, ради которого излагались методы интегрирования. Вычисление площадей, ограниченных кривыми, длин дуг, объемов, работы, скорости, пути, моментов инерции и т. д. сводится к вычислению определенного интеграла.

Понятие интегральной суммы является фундаментом определенного интеграла. Напомнить основные этапы процесса составления интегральной суммы.

Пусть на отрезке $[a,b]$ определена функция $f(x)$. Произвольным образом отрезок $[a,b]$ разобьем на n частей непересекающихся отрезков длины $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $(k=1,2,..,n)$. В каждом из полученных отрезков также произвольным образом (внутри или на концах) выберем по точке $c_к$.

Вычислим значение заданной функции в них $f(c_k)$, составим сумму произведений полученных значений функции для каждого частичного отрезка на его длину, т. е.

$$f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + ..f(c_k)\Delta x_k + .. + f(c_n)\Delta x_n = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k = S_n.$$

Полученная таким образом сумма называется интегральной суммой для функции $f(x)$ по отрезку $[a;b]$.

Пусть теперь разбиение отрезка $[a;b]$ измельчается так, чтобы наибольший из них стремился к 0 ($\max \Delta x_k \to 0$). Очевидно, что при этом число частичных отрезков будет стремиться к бесконечности ($n \to \infty$).

Определение I.1. Определенным интегралом от функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ называется предел интегральных сумм S_n при условии, что длина наибольшего частичного отрезка Δx_k стремится к 0.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max \Delta x_k \to 0}} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k . \qquad (I.1)$$

Геометрически определенный интеграл представляет собой алгебраическую сумму площадей фигур, ограниченных графиком функции $y = f(x)$, осью Ox и прямыми $x=a$ и $x=b$ (рис. I.1), причем площади, расположенные выше оси Ox, входят в эту сумму со знаком плюс, а площади, расположенные ниже оси Ox, – со знаком минус.

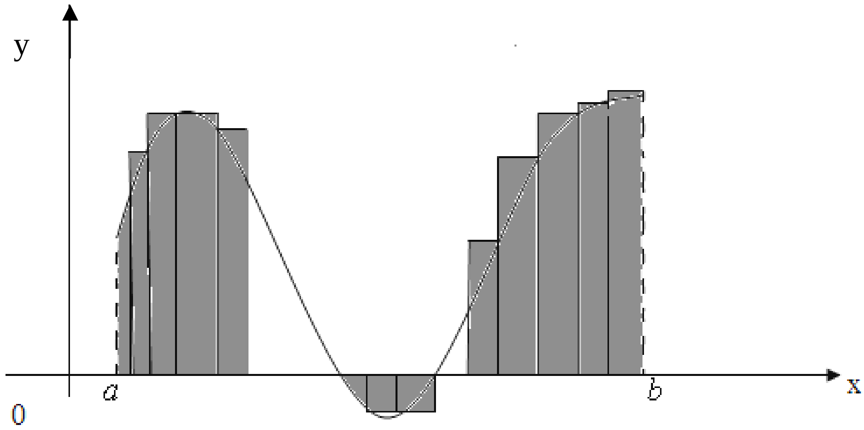


Рис. I.1

Обучающий пример 1. Вычислить исходя из определения интеграл $\int\limits_0^2 x\,dx$.

Решение. Из геометрических соображений следует, что интеграл существует и равен площади прямоугольного треугольника. Значит, разбиение отрезка можно производить произвольным образом. Отрезок [0;2] разбиваем на n (для удобства вычислений) равных частичных отрезков длины $\Delta x_k = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n}$. Значения заданной функции $\left(f(x)=x\right)$ выберем в правых концах частичных отрезков, т. е. $f(c_k)=\frac{2k}{n}$. Тогда интегральная сумма будет

$$\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n}\frac{2k}{n}\cdot\frac{2}{n} = \frac{4}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k = \frac{4}{n^2}(1+2+\ldots+n) = \frac{4}{n^2}\cdot\frac{1+n}{2}\cdot n = 2\cdot\frac{1+n}{n}.$$

Здесь сумма в скобках найдена по формуле суммы арифметической прогрессии n членов.

Так как частичные отрезки разбиения равны, то условие $\max\Delta x_k \to 0$ равносильно условию $n\to\infty$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} 2\frac{1+n}{n} = 2$ (по правилу Лопиталя).

Итак $\int\limits_0^2 xdx = 2.$

Обучающий пример 2 (повышенный уровень). Вычислить $\int\limits_a^b e^x dx$.

Решение. Подынтегральная функция непрерывна на отрезке интегрирования. Следовательно, интеграл существует и не зависит от способа разбиения отрезка и выбора точек c_k. Разделим отрезок $[a; b]$ на n равных частей:

$$x_0 = a,\ x_1 = a + \Delta x,\ ....,\ x_n = a + n\Delta x,\ \ \Delta x = \frac{b-a}{n}.$$

За точки c_k возьмем крайние левые точки. Составим интегральную сумму:

$$S_n = e^a \Delta x + e^{a+\Delta x}\Delta x + ... + e^{a+(n-1)\Delta x}\Delta x = e^a\left(1 + e^{\Delta x} + e^{2\Delta x} + ... + e^{(n-1)\Delta x}\right)\Delta x.$$

Выражение в скобках есть сумма геометрической прогрессии со знаменателем $e^{\Delta x}$ и первым членом 1, поэтому

$$S_n = e^a \frac{e^{n\Delta x} - 1}{e^{\Delta x} - 1}\Delta x = e^a\left(e^{n\Delta x} - 1\right)\frac{\Delta x}{e^{\Delta x} - 1}.$$

Далее имеем

$n\Delta x = b - a;\ \ \lim\limits_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta x}{e^{\Delta x} - 1} = 1$ (по правилу Лопиталя, $\lim\limits_{z \to 0}\frac{z}{e^z - 1} = \lim\limits_{z \to 0}\frac{1}{e^z} = 1$).

Таким образом, $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ \max \Delta x_k \to 0}} S_n = e^a\left(e^{b-a} - 1\right)\cdot 1 = e^b - e^a$,

то есть $\int\limits_a^b e^x dx = e^b - e^a$.

Обучающий пример 3 (повышенный уровень). Исходя из определения определенного интеграла найти (у доски два студента с помощью преподавателя выполняют задание) $\int\limits_1^4 x dx$, разбивая отрезок [1;4] на равные части, причем в каждом из указанных разбиений в качестве c_i выбрать левые и правые концы отрезков.

Обучающий пример 4. Найти величину интеграла $I = \int\limits_0^4 \sqrt{16 - x^2}\,dx$, опираясь на его геометрический смысл.

Решение. Линия $y=\sqrt{16-x^2}$ есть верхняя половина окружности $x^2+y^2=16$. Та часть линии, которая получается при изменении x от 0 до 4, лежит в I координатной четверти (рис. I.2). Отсюда заключаем, что криволинейная трапеция, ограниченная линиями $x=0$, $x=4$, $y=0$, $y=\sqrt{16-x^2}$, есть четверть круга $x^2+y^2=16$, ее площадь равна $\frac{16\pi}{4}=4\pi$.

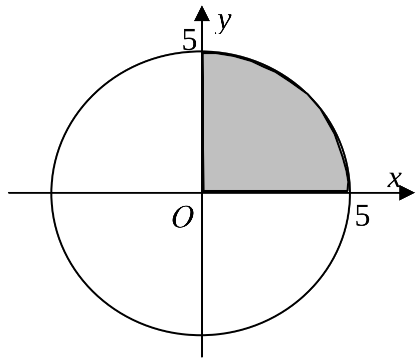


Рис. I.2

Следовательно, $\int\limits_0^4 \sqrt{16-x^2}dx=4\pi$.

2. У доски три студента решают следующие примеры. Исходя из геометрического смысла интеграла необходимо вычислить:

а) $\int\limits_0^5 (4x-1)dx$. *Ответ*: 45.

б) $\int\limits_{-3}^3 \sqrt{9-x^2}dx$. *Ответ*: $\frac{9\pi}{2}$.

в) $\int\limits_1^2 (2x+1)dx$. *Ответ*: 4.

3. Сделать выводы: рассмотренные выше примеры показывают, что непосредственное вычисление определенных интегралов как пределов интегральных сумм связано с большими трудностями. Поэтому естественно возникает задача: найти практически удобный метод вычисления определенных интегралов. Этот метод, открытый Ньютоном и Лейбницем, использует глубокую связь, существующую между интегрированием и дифференцированием.

Если для непрерывной на отрезке [a; b] функции $f(x)$ может быть найдена ее первообразная $F(x)$, то простым и удобным методом вычисления определенного интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$ является формула Ньютона – Лейбница:

$$\int\limits_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a). \qquad \text{(I.2)}$$

Обучающий пример 5. Применяя формулу Ньютона – Лейбница и свойство определенного интеграла, вычислить:

а) $\int_1^2 6(x-1)^2\,dx$.

Решение. $\int_1^2 6(x-1)^2\,dx = 6\int_1^2 (x-1)^2\,d(x-1) = 6\frac{(x-1)^3}{3}\Big|_1^2 = 2(x-1)^3\Big|_1^2 =$

$= 2\left((2-1)^3-(1-1)^3\right) = 2(1-0) = 2$;

б) $\int_1^2 \frac{2x-1}{x^3+x}\,dx$.

*Решение***.** Подынтегральная функция представляет собой правильную рациональную дробь. Разложим ее на простейшие рациональные дроби:

$$\frac{2x-1}{x^3+x} = \frac{2x-1}{x\left(x^2+1\right)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{A\left(x^2+1\right)+(Bx+C)x}{x\left(x^2+1\right)};$$

$$2x-1 = A\left(x^2+1\right) + Bx^2 + Cx,$$

$$\left.\begin{array}{l|l} x^2 & 0 = A+B \\ x^1 & 2 = C \\ x^0 & -1 = A \end{array}\right\}, \qquad \text{откуда} \quad A = -1, \quad B = 1, \quad C = 2.$$

Следовательно,

$$\int_1^2 \frac{2x-1}{x^3+x}\,dx = \int_1^2 \left(-\frac{1}{x}+\frac{x+2}{x^2+1}\right)dx = \int_1^2\left(-\frac{1}{x}+\frac{x}{x^2+1}+\frac{2}{x^2+1}\right)dx =$$

$$= \left(-\ln x + \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + 2\operatorname{arctg} x\right)\Big|_1^2 = -\ln 2 + \frac{1}{2}\ln 5 + 2\operatorname{arctg} 2 - \frac{1}{2}\ln 2 - 2\operatorname{arctg} 1 =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{5}{8} + 2\left(\operatorname{arctg} 2 - \frac{\pi}{4}\right) \approx 0{,}38.$$

Обучающий пример 6. Вычислить $\int_0^2 |1-x|\,dx$.

Решение. Так как $|1-x| = \begin{cases} 1-x, & \text{при } 0 \le x \le 1, \\ x-1, & \text{при } 1 \le x \le 2, \end{cases}$ то

$$\int_0^2 |1-x|\,dx = \int_0^1 (1-x)\,dx + \int_1^2 (x-1)\,dx = -\frac{(1-x)^2}{2}\Bigg|_0^1 + \frac{(x-1)^2}{2}\Bigg|_1^2 = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1.$$

Обучающий пример 7 (повышенный уровень). Вычислить $\int\limits_0^{\pi} \sqrt{\dfrac{1+\cos 2x}{2}}\, dx$.

Решение. $\sqrt{\dfrac{1+\cos 2x}{2}} = \sqrt{\dfrac{2\cos^2 x}{2}} = |\cos x| = \begin{cases} \cos x & 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}, \\ -\cos x & \dfrac{\pi}{2} \le x \le \pi, \end{cases}$

поэтому $\int\limits_0^{\pi} \sqrt{\dfrac{1+\cos 2x}{2}}\, dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx + \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-\cos x)\, dx = \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (-\sin x)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} =$

$$= (1-0) + \big(0-(-1)\big) = 2.$$

Отметим, что заданный интеграл можно вычислить более эффективным способом:

$$\int\limits_0^{\pi} |\cos x|\, dx = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx.$$

Замечание I.1. Если не обратить внимание на то, что значения $\cos x$ отрицательны в $[\pi/2; \pi]$ и положить $\dfrac{1+\cos 2x}{2} = \cos x$, получим заведомо неверный результат $\int\limits_0^{\pi} \cos x dx = \sin x\Big|_0^{\pi} = 0$.

Обучающий пример 8 (повышенный уровень). Вычислить $\int\limits_0^{100\pi} \sqrt{1-\cos 2x}\, dx$.

Решение. Имеем $\sqrt{1-\cos 2x} = \sqrt{2}\,|\sin x|$. Так как $|\sin x|$ имеет период π, то $\int\limits_0^{100\pi} \sqrt{1-\cos 2x}\, dx = \sqrt{2}\int\limits_0^{100\pi} |\sin x|\, dx = 100\sqrt{2}\int\limits_0^{\pi} \sin x dx = 200\sqrt{2}$.

Обучающий пример 9 (повышенный уровень). Найти ошибку, допущенную при следующем вычислении интеграла:

$$\int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{1+2\sin^2 x} = \int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{\cos^2 x + 3\sin^2 x} = \int\limits_0^{\pi} \frac{\dfrac{dx}{\cos^2 x}}{1+3\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}\cdot \operatorname{tg} x\right)\Big|_0^{\pi} = 0.$$

Интеграл всюду положительной функции оказался равным нулю.

Решение. Применить формулу Ньютона – Лейбница нельзя, т. к. первообразная $F(x)=\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}\operatorname{tg}x\right)$ терпит разрыв в точке $x = \pi/2$. Действительно, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0} F(x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}\operatorname{tg}x\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}(+\infty)=\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$,

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0} F(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0}\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}\operatorname{tg}x\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}(-\infty)=-\frac{\pi}{2\sqrt{3}}.$$

Это происходит по той причине, что делить числитель и знаменатель на $\cos^2 x$ также нельзя, т. к. на отрезке интегрирования имеется точка, где $\cos\frac{\pi}{2}=0$.

Обучающий пример 10. Вычислить $\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\cos x\ln\frac{1+x}{1-x}dx$.

Решение. Функция $f(x)=\cos x$ четная. Докажем, что функция

$\varphi(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}$ нечетная.

$$\varphi(-x)=\ln\frac{1-x}{1+x}=\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{-1}=-\ln\frac{1+x}{1-x}=-\varphi(x).$$

Таким образом, подынтегральная функция представляет собой произведение четной и нечетной функций, т. е. является нечетной функцией, поэтому $\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\cos x\ln\frac{1+x}{1-x}\,dx=0$.

Обучающий пример 11.

Вычислить $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\frac{2x^7+3x^6-10x^5-7x^3-12x^2+x+1}{x^2+2}dx$.

Решение. Представим интеграл в виде суммы двух интегралов таким образом, чтобы под знаком первого интеграла стояла нечетная функция, а под знаком второго интеграла – четная функция.

$$\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\frac{2x^7+3x^6-10x^5-7x^3-12x^2+x+1}{x^2+2}\,dx=$$

$$=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\frac{2x^7-10x^5-7x^3+x}{x^2+2}\,dx+\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\frac{3x^6-12x^2+1}{x^2+2}\,dx=$$

$$=0+\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\frac{3x^2\left(x^4-4\right)+1}{x^2+2}dx\;=\;2\int_0^{\sqrt{2}}\left(\frac{3x^2\left(x^4-4\right)}{x^2+2}+\frac{1}{x^2+2}\right)dx\;=$$

$$=2\int_0^{\sqrt{2}}\left(3x^2\left(x^2-2\right)+\frac{1}{x^2+2}\right)dx=6\int_0^{\sqrt{2}}\left(x^4-2x^2\right)dx+2\int_0^{\sqrt{2}}\frac{dx}{x^2+2}=$$

$$=\left(6\frac{x^5}{5}-4x^3+\frac{2}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{2}}=-\frac{16\sqrt{2}}{5}\;+\;\frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

4. Выполнить (самостоятельно, каждому свой вариант, два студента у доски выполняют свои задания).

Уровень 1

1) $\int_0^{\pi}\left(2x+\sin 2x\right)dx.$ *Ответ*: $\pi^2.$

2) $\int_0^{\lg 2}2^x5^x\,dx.$ *Ответ*: $\frac{1}{\ln 10}.$

3) $\int_2^5\frac{dx}{2x-3}.$ *Ответ*: $\frac{1}{2}\ln 7.$

4) $\int_1^5\frac{xdx}{1+x^2}.$ *Ответ*: $\frac{1}{2}\ln 13.$

5) $\int_1^2\frac{x+2}{3-x}dx.$ *Ответ*: $5\ln 2-1.$

6) $\int_0^1\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}dx.$ *Ответ*: $\frac{8}{3}.$

7) $\int_{\frac{1}{2}}^{1}\sqrt{4x-2}\,dx.$ *Ответ*: $\frac{\sqrt{2}}{3}.$

8) $\int_2^9\sqrt[3]{x-1}\,dx.$ *Ответ*: $\frac{45}{4}.$

9) $\int\limits_0^1 \left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}\right)dx$. *Ответ*: $\frac{19}{15}$.

10) $\int\limits_0^4 \left(1+e^{\frac{x}{4}}\right)dx$. *Ответ*: $4e$.

11) $\int\limits_{-1}^7 \frac{dx}{\sqrt{3x+4}}$. *Ответ*: $\frac{8}{3}$.

12) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{(2x+1)^3}dx$. *Ответ*: $\frac{2}{9}$.

13) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 xdx$. *Ответ*: $\frac{2}{3}$.

14) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 xdx$. *Ответ*: $\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}$.

15) $\int\limits_{-4}^{-2} \frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}$. *Ответ*: $\arcsin\frac{2}{3}$.

Уровень 2

Найти $\int\limits_0^2 f(x)dx$, если

1) $f(x)=\begin{cases} e^x, & 0\le x<1; \\ 2, & 1\le x\le 2. \end{cases}$. *Ответ*: e+1.

2) $\int\limits_{\pi}^{2\pi} \frac{x+\cos x}{x^2+2\sin x}dx$. *Ответ*: ln2.

3) $\int\limits_{-1}^0 \frac{3^x-2^x}{6^x}dx$. *Ответ*: $\frac{1}{\ln 2}-\frac{2}{\ln 3}$.

4) $\int\limits_0^2 \frac{xdx}{\sqrt{x+2}+\sqrt{3x+2}}$. *Ответ*: $\frac{20\sqrt{2}-24}{9}$.

5) $\int\limits_{1}^{\sqrt{3}} \frac{x^3+x+1}{x\left(x^2+1\right)}dx$. *Ответ*: $\sqrt{3}-1+\ln\frac{\sqrt{6}}{2}$.

6) $\int\limits_{2}^{4} |3-x|dx$. *Ответ*: 1.

7) $\int\limits_{0}^{\pi} \sqrt{\frac{1-\cos 2x}{2}}dx$. *Ответ*: 2.

8) $\int\limits_{-5}^{5} \frac{x^5\sin^2 x}{x^4+2x^2+1}dx$. *Ответ*: 0.

9) $\int\limits_{-\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{8}} x^8\sin^9 xdx$. *Ответ*: 0.

10) $\int\limits_{-7}^{7} \frac{x^4\sin x}{x^6+2}dx$. *Ответ*: 0.

11) $\int\limits_{-2}^{2} \frac{x^5+7x^4+x^3-5x^2-2}{x^3+x}\,dx$. *Ответ*: $\frac{16}{3}$.

12) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} x^7\cdot\cos 2x\,dx$. *Ответ*: 0.

13) $\int\limits_{1}^{-1} x^8\arcsin x\,dx$. *Ответ*: 0.

14) $\int\limits_{-2,7}^{2,7} \frac{x^2\sin 2,7x}{x^2+3}\,dx$. *Ответ*: 0.

15) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\cdot\ln\frac{2+x}{2-x}\,dx$. *Ответ*: 0.

Уровень 3

1) Найти пределы сумм:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\ldots+\frac{n-1}{n^2}\right)$. *Ответ*: 1/2.

Указание. Сумму $S_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \ldots + \frac{n-1}{n^2} = \frac{1}{n}\left(\frac{0}{n} + \frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \ldots + \frac{n}{n}\right)$ можно рассматривать как интегральную сумму для функции $f(x) = x$ на отрезке $[0,1]$.

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_0^1 x\,dx.$$

Отметим, что этот предел может быть вычислен и по-другому:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \ldots + \frac{n-1}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\ldots+n-1}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1+n-1}{2}\cdot(n-1)}{n^2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\frac{n-1}{n} = \frac{1}{2}.$$

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+n}\right).$ *Ответ*: $\ln 2$.

Указание. Сумму можно рассматривать как интегральную сумму $S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+n} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+1/n} + \frac{1}{1+2/n} + \ldots + \frac{1}{1+n/n}\right)$ для функции $f(x) = \frac{1}{1+x}$ на отрезке $[0,1]$, где точки деления имеют вид $x_k = \frac{k}{n}(k = 1,2,..,n)$.

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + ..+ \frac{n}{n^2+n^2}\right).$ *Ответ*: $\frac{\pi}{4}$.

Указание. Выражение $S_n = \frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + ..+ \frac{n}{n^2+n^2} =$

$$= \frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+(1/n)^2} + \frac{1}{1+(2/n)^2} + ..+ \frac{1}{1+(n/n)^2}\right)$$

можно рассматривать как интегральную сумму для функции $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ на отрезке $[0;1]$.

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int\limits_0^{x^2}\sin\sqrt{x}dx}{x^3}$. *Ответ*: $\dfrac{2}{3}$.

Указание. Применить правило Лопиталя и теорему о производной интеграла по верхнему пределу:

$$\left(\int\limits_0^{x^2}\sin\sqrt{x}dx\right)'_x=\left.\left(\int\limits_0^{x^2}\sin\sqrt{x}dx\right)'\right|_{x^2}\cdot\left(x^2\right)'_x=\sin x\cdot 2x.$$

д) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\int\limits_0^{x}e^{x^2}dx\right)^2}{\int\limits_0^{x}e^{2x^2}dx}$. *Ответ*: 0.

е) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int\limits_0^{x}\left(\operatorname{arctg}x\right)^2dx}{\sqrt{x^2+1}}$. *Ответ*: $\dfrac{\pi^2}{4}$.

ж) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\pi}{n}\left(\sin\dfrac{\pi}{n}+\sin\dfrac{2\pi}{n}+..+\sin\dfrac{(n-1)\pi}{n}\right)$. *Ответ*: 2.

Указание. Если к указанной сумме присоединить слагаемое $\sin\dfrac{\pi n}{n}=0$, то она будет являться интегральной для функции $f(x)=\sin x$ на отрезке $[0;\pi]$.

з) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\pi}{2n}\left(1+\cos\dfrac{\pi}{2n}+\cos\dfrac{2\pi}{2n}+..+\cos\dfrac{(n-1)\pi}{2n}\right)$. *Ответ*: 1.

Домашнее задание

1) Изучить теоретический материал по теме «Интегрирование по частям. Замена переменных в определенном интеграле».

2) Вычислить исходя из определения определенного интеграла $\int\limits_0^1(x+1)dx$. Ответ: $\dfrac{3}{2}$.

3) Используя формулу Ньютона – Лейбница, вычислить

а) $\int\limits_0^1 \left(x^2 - 2x + 3\right)dx$. *Ответ*: $\frac{7}{3}$.

б) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2 + 4x + 5}$. *Ответ*: $\mathrm{arctg}\,3 - \mathrm{arctg}\,2$.

в) $\int\limits_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln x}$. *Ответ*: $\ln 2$.

г) $\int\limits_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$. *Ответ*: $\frac{\pi}{4}$.

д) $\int\limits_1^2 \frac{x^4 + 1}{x^3(x^2 + 1)} dx$. *Ответ*: $\ln\frac{5}{4} + \frac{3}{8}$.

II. Интегрирование по частям и замена переменных в определенном интеграле

1. На доске записаны примеры, которые необходимо вычислить устно:

а) $\int\limits_0^1 x^2 dx$; в) $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \frac{dx}{\cos^2 x}$; д) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx$;

б) $\int\limits_0^{\pi} \sin x dx$; г) $\int\limits_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1 + x^2}$; е) $\int\limits_1^{e} \frac{\cos(\ln x)}{x} dx$.

2. Обратить внимание, что пример е) можно вычислить и подведением под знак дифференциала и методом замены переменной в определенном интеграле.

Пусть для вычисления интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$ от непрерывной функции сделана подстановка $x = \varphi(t)$. Каким условием должна удовлетворять эта функция?

Если функция $x = \varphi(t)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $\varphi(t)$ – непрерывная однозначная функция, заданная на отрезке $[\alpha;\beta]$ и имеющая в нем непрерывную производную $\varphi'(t)$;

2) значение функции $x=\varphi(t)$ при изменении t на отрезке $[\alpha;\beta]$ не выходит за пределы отрезка $[a;b]$;

3) $\varphi(\alpha)=a$ и $\varphi(\beta)=b$, то для любой непрерывной на отрезке $[a;b]$ функции $f(x)$ справедлива формула замены переменной (подстановки) в определенном интеграле.

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \tag{II.1}$$

При этом функцию $x=\varphi(t)$ следует подобрать так, чтобы, подставив ее вместо x в подынтегральное выражение, получить более простой интеграл.

Часто вместо подстановки $x=\varphi(t)$ применяют обратную подстановку $t=\psi(x)$. В этом случае пределы α и β определяются непосредственно из равенств $\alpha=\psi(a)$ и $\beta=\psi(b)$. На практике замену переменной обычно производят с помощью монотонных непрерывно дифференцируемых функций. При этом замену пределов интегрирования удобно записывать в виде таблицы $\boxed{\begin{array}{ccc} x & a & b \\ t & \alpha & \beta \end{array}}$.

Обучающий пример 1. Вычислить $\int_1^9 \frac{dx}{5+2\sqrt{x}}$ с помощью замены переменных.

Решение. $$\int_1^9 \frac{dx}{5+2\sqrt{x}}=\left|\begin{array}{l} \sqrt{x}=t\Rightarrow x=t^2 \\ dx=2tdt \\ \boxed{\begin{array}{ccc} x & 1 & 9 \\ t & 1 & 3 \end{array}} \end{array}\right|=\int_1^3 \frac{2tdt}{5+2t}=\int_1^3 \frac{2t+5-5}{2t+5}dt=$$

$$=\int_1^3\left(1-\frac{5}{2t+5}\right)dt=t\Big|_1^3-5\cdot\frac{1}{2}\ln|2t+5|\Big|_1^3=3-1-\frac{5}{2}(\ln 11-\ln 7)=2-\frac{5}{2}\ln\frac{11}{7}.$$

Обучающий пример 2. Вычислить $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3+2\cos x}$ с помощью подстановки.

Решение. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3+2\cos x} = \left| \begin{array}{l} \mathrm{tg}\dfrac{x}{2} = t \Rightarrow x = 2\,\mathrm{arctg}\, t \\ dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}, \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ \boxed{\begin{array}{ccc} x & 0 & \dfrac{\pi}{2} \\ t & 0 & 1 \end{array}} \end{array} \right| = \int_0^1 \frac{\dfrac{2dt}{1+t^2}}{3+\dfrac{2\left(1-t^2\right)}{1+t^2}} =$$

$$= \int_0^1 \frac{2dt}{t^2+5} = \frac{2}{\sqrt{5}}\,\mathrm{arctg}\frac{t}{\sqrt{5}}\Bigg|_0^1 = \frac{2}{\sqrt{5}}\,\mathrm{arctg}\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Замечание II.1. Законность подстановки обеспечивается монотонностью функции $\mathrm{tg}\frac{x}{2} = t$ на отрезке $[0;\frac{\pi}{2}]$.

Обучающий пример 3. Вычислим интеграл $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{5-2\cos x}$.

Решение. Применив подстановку $\mathrm{tg}\frac{x}{2} = t$, будем иметь

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{5-2\cos x} = \int_0^0 \frac{2dt}{\left(1+t^2\right)\left(5-\dfrac{2\left(1-t^2\right)}{1+t^2}\right)} = 0$$

Результат явно неверный, т. к. подынтегральная функция положительная, а следовательно, интеграл от этой функции не может быть равен 0.

В чем ошибка?

Ответ. Подстановку $\mathrm{tg}\frac{x}{2} = t$ в данном случае использовать нельзя, т. к. эта функция разрывная при $x = \pi$.

Обучающий пример 4. Вычислить $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$.

Решение. Применим подстановку $x = \sin t$ (данная функция не является монотонной), $dx = \cos t\, dt$. Новые пределы t_1 и t_2 находим из уравнений $\dfrac{1}{2}=\sin t$ и $\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sin t$; можно принять $t_1=\dfrac{\pi}{6}$ и $t_2=\dfrac{\pi}{3}$, но можно так же выбрать и другие значения, например, $t_1=\dfrac{5\pi}{6}$ и $t_2=\dfrac{2\pi}{3}$.

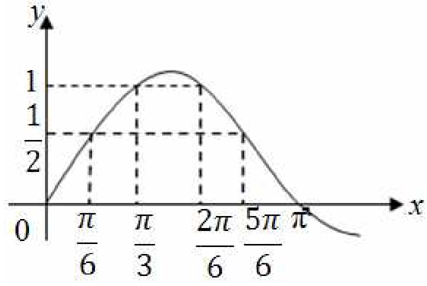


Рис. II.1

В обоих случаях переменная $x=\sin t$ пробегает весь отрезок $\left[\dfrac{1}{2};\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right]$, причем функция $\sin t$ монотонна и на отрезке $\left[\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{3}\right]$, и на отрезке $\left[\dfrac{2\pi}{3};\dfrac{5\pi}{6}\right]$ (рис. II.1).

Покажем, что результаты интегрирования совпадают. В самом деле,

$$\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos t\,dt}{\sin t\cos t}=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{dt}{\sin t}=\ln|\operatorname{tg}\frac{t}{2}|\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=\ln\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}-\ln\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}=\ln\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}.$$

С другой стороны, учитывая, что на отрезке $\left[\dfrac{2\pi}{3};\dfrac{5\pi}{6}\right]$ функция $\cos t$ принимает отрицательные значения, получим

$$\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}=\int\limits_{\frac{5\pi}{6}}^{\frac{2\pi}{3}}\frac{\cos t\,dt}{\sin t(-\cos t)}=\int\limits_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{6}}\frac{dt}{\sin t}=\ln\left|\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right|\Bigg|_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{6}}=\ln\frac{\operatorname{tg}\frac{5\pi}{12}}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}}=\ln\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}.$$

Замечание II.2. Следует подчеркнуть, что нельзя брать $t_1=\dfrac{5\pi}{6}$ и $t_2=\dfrac{\pi}{3}$, т. к. при изменении t на отрезке $\left[\dfrac{\pi}{3};\dfrac{5\pi}{6}\right]$ значение функции $x=\sin t$ выходит за пределы отрезка $\left[\dfrac{1}{2};\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right]$.

Обучающий пример 5 (повышенный уровень). Вычислить

$$I=\int\limits_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx.$$

Решение. Представим этот интеграл в виде суммы двух интегралов:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx=I_1+I_2.$$

К интегралу $I_2=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$ применим подстановку $x=\pi-t$.

$$I_2=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx=\left|\begin{array}{ll}x=\pi-t,\, dx=-dt & \\ x=\dfrac{\pi}{2} & \Rightarrow\ t=\dfrac{\pi}{2}, \\ x=\pi & \Rightarrow\ t=0.\end{array}\right|=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{(\pi-t)\sin(\pi-t)}{1+\cos^2(\pi-t)}dt=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\pi-t)\sin t}{1+\cos^2 t}dt=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{1+\cos^2 t}dt-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{t\sin t}{1+\cos^2 t}dt.$$

Следовательно,

$$I=I_1+I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x\sin x dx}{1+\cos^2 x}+\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t dt}{1+\cos^2 t}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{t\sin t dt}{1+\cos^2 t}.$$

Так как первый и третий интегралы отличаются только обозначениями переменной интегрирования, то

$$I=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t\, dt}{1+\cos^2 t}=\left|\begin{array}{l}\cos t=z,\, -\sin t=dz \\ t=0\ \Rightarrow\ z=1, \\ t=\dfrac{\pi}{2}\ \Rightarrow\ z=0.\end{array}\right|=-\pi\int_1^0\frac{dz}{1+z^2}=-\pi\int_1^0\frac{du}{1+u^2}=\frac{\pi^2}{4}.$$

Замечание II.3. Неопределенный интеграл $\int\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$ не выражается в элементарных функциях. Однако данный определенный интеграл вычисляется, если прибегнуть к искусственному приему, который представлен выше.

Обучающий пример 6 (повышенный уровень). Доказать, что всегда можно подобрать линейную подстановку $x=kt+c$ (k, c – постоянные) так, чтобы любой данный интеграл с конечными пределами a и b преобразовать в интеграл с пределами 0 и 1.

Решение. Прежде всего отметим, что подстановка $x = kt + c$ удовлетворяет условиям теоремы о замене переменной. Так как при $x = a$ должно быть $t = 0$ и при $x = b$ должно быть $t = 1$, то для определения величин k и c имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} a = k \cdot 0 + c \\ b = k \cdot 1 + c \end{cases} \Rightarrow c = a,\ k = b - a .$$

Следовательно,

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\int_0^1 f\big((b-a)t + a\big)dt .$$

Обучающий пример 7 (повышенный уровень). Доказать, что интеграл $\int_0^{\pi} \frac{\sin 2kx}{\sin x}dx$ при целом k равен 0.

Решение.

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin 2kx}{\sin x}dx = \left| \begin{array}{l} x = \pi - t,\ dx = -dt \\ x = 0 \ \Rightarrow\ t = \pi, \\ x = \pi \ \Rightarrow\ t = 0. \end{array} \right| = -\int_{\pi}^{0} \frac{\sin 2k(\pi - t)}{\sin(\pi - t)}dt = -\int_0^{\pi} \frac{\sin 2kt}{\sin t}dt = -I .$$

Так как определенный интеграл не зависит от обозначения переменных интегрирования, то $I = -I$, откуда $I = 0$.

Обучающий пример 8 (повышенный уровень). Вычислить интеграл $\int_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}} \frac{\sin 2x}{\cos^4 x + \sin^4 x}dx$.

Решение. Подынтегральная функция является периодической функцией с периодом π, т. к.

$$f(x+\pi) = \frac{\sin 2(x+\pi)}{\cos^4(x+\pi) + \sin^4(x+\pi)} = \frac{\sin 2x}{\cos^4 x + \sin^4 x} = f(x).$$

Поэтому можно от верхнего и нижнего пределов интегрирования отнять число π.

$$\int_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}} \frac{\sin 2x}{\cos^4 x + \sin^4 x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x}{\cos^4 x + \sin^4 x}dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg} x dx}{\cos^2 x\left(1 + tg^4 x\right)} =$$

$$=\left|\begin{array}{l}\operatorname{tg} x=t,\ \dfrac{1}{\cos^2 x}=dt\\ x=0\ \Rightarrow\ t=0,\\ x=\dfrac{\pi}{4}\ \Rightarrow\ t=1.\end{array}\right|=\int\limits_0^1\frac{2tdt}{1+t^4}=\operatorname{arctg} t^2\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}.$$

Обучающий пример 9. Решить уравнение $\int\limits_{\ln 2}^{x}\frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}=\frac{\pi}{6}$.

Решение. Вычислим интеграл в левой части

$$\int\limits_{\ln 2}^{x}\frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}=\left|\begin{array}{l}\sqrt{e^x-1}=t\ \Rightarrow\ e^x=t^2+1\\ x=\ln\left(t^2+1\right),\ dx=\dfrac{2tdt}{1+t^2}.\\ x=\ln 2\ \Rightarrow t=1\\ x=x\ \Rightarrow t=\sqrt{e^x-1}\end{array}\right|=\int\limits_1^{\sqrt{e^x-1}}\frac{dt}{1+t^2}=2\operatorname{arctg} t\Big|_1^{\sqrt{e^x-1}}=$$

$$=2\operatorname{arctg}\sqrt{e^x-1}-2\operatorname{arctg}1=2\operatorname{arctg}\sqrt{e^x-1}-2\frac{\pi}{4}=2\operatorname{arctg}\sqrt{e^x-1}-\frac{\pi}{2}.$$

Имеем уравнение

$2\operatorname{arctg}\sqrt{e^x-1}-\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{\pi}{6}$;

$2\operatorname{arctg}\sqrt{e^x-1}=\dfrac{2\pi}{3}$;

$\operatorname{arctg}\sqrt{e^x-1}=\dfrac{\pi}{3}$;

$\sqrt{e^x-1}=\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{3}$;

$\sqrt{e^x-1}=\sqrt{3}$;

$e^x-1=3$;

$e^x=4$;

$x=\ln 4$.

3. Выполнить (самостоятельно каждому свой вариант, два студента у доски выполняют свои задания из 1-го и 2-го уровня).

Уровень 1

1) $\int_{3}^{8}\frac{xdx}{\sqrt{1+x}}$. *Ответ*: $\frac{32}{3}$.

2) $\int_{0}^{1}\frac{dx}{x^2+4x+5}$. *Ответ*: $\operatorname{arctg}3-\operatorname{arctg}2$.

3) $\int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$. *Ответ*: $\frac{\pi}{6}$.

4) $\int_{0}^{1}\frac{dx}{e^x+e^{-x}}$. *Ответ*: $\operatorname{arctg}e-\frac{\pi}{4}$.

5) $\int_{1}^{16}\frac{dx}{x+\sqrt[4]{x}}$. *Ответ*: $\frac{4}{3}\ln\frac{9}{2}$.

6) $\int_{-1}^{1}\frac{xdx}{\sqrt{5-4x}}$. *Ответ*: $\frac{1}{6}$.

7) $\int_{-1}^{7}\frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$. *Ответ*: $3\ln 3$.

8) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 xdx$. *Ответ*: $\frac{2}{3}$.

9) $\int_{2}^{3,5}\frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}$. *Ответ*: $\frac{\pi}{6}$.

10) $\int_{1}^{2}\frac{dx}{x^2+2x}$. *Ответ*: $\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$.

11) $\int_{-2}^{1}\frac{dx}{x^2+4x+13}$. *Ответ*: $\frac{\pi}{12}$.

12) $\int_{\frac{1}{2}}^{1}x\sqrt[4]{2x-1}dx$. *Ответ*: $\frac{14}{45}$.

13) $\int_{0}^{3}x^2\sqrt{9-x^2}dx$. *Ответ*: $\frac{81}{16}\pi$.

14) $\int\limits_1^9 \frac{xdx}{\sqrt{2x+7}}$. *Ответ*: $\frac{28}{3}$.

15) $\int\limits_2^3 x(3-x)^7\,dx$. *Ответ*: $\frac{19}{27}$.

Уровень 2

1) Можно ли интеграл $\int\limits_0^3 2x\sqrt[3]{4-x^2}dx$ вычислить с помощью подстановки $x=2\cos t$? *Ответ*: нет.

2) Можно ли интеграл $\int\limits_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{x^2+1}dx$ вычислить с помощью подстановки $x=\frac{1}{\sin t}$? *Ответ*: нет.

3) Можно ли интеграл $\int\limits_0^2 \sqrt[3]{1-x^2}dx$ вычислить с помощью подстановки $x=\cos t$? *Ответ*: нет.

4) $\int\limits_0^1 \frac{x^2\,dx}{(x+1)^4}$. *Ответ*: $\frac{1}{24}$.

Указание. $x+1=t$.

5) $\int\limits_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}\,dx$. *Ответ*: $\frac{4-\pi}{2}$.

Указание. $e^x-1=t^2$.

6) $\int\limits_{\sqrt{3}}^{\sqrt{7}} \frac{x^3\,dx}{\sqrt[3]{\left(x^2+1\right)^2}}$. *Ответ*: 3.

Указание. $x^2+1=t$.

7) $\int\limits_{-3}^{3} x^2\sqrt{9-x^2}\,dx$. *Ответ*: $\frac{81\pi}{8}$.

8) $\int\limits_5^1 \frac{t\,dt}{\sqrt{5+4t}}$. *Ответ*: $-\frac{17}{6}$.

9) $\int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$. *Ответ*: $\frac{3}{2}(\ln 4-1)$.

10) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \sqrt{\cos x}\, dx$. *Ответ*: $\frac{8}{21}$.

11) $\int\limits_{1}^{64} \frac{2+\sqrt[3]{x}}{\left(\sqrt[6]{x}+2\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}\right)\sqrt{x}}\, dx$. *Ответ*: $30\ln\frac{3}{2}-6$.

12) $\int\limits_{1}^{4} \frac{(x-1)\,dx}{\sqrt[3]{(3x-4)^2}-\sqrt[3]{3x-4}+1}$. *Ответ*: $2\frac{1}{4}$.

13) $\int\limits_{3}^{6} \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^4}\, dx$. *Ответ*: $\frac{\sqrt{3}}{72}$.

14) $\int\limits_{0}^{3} \sqrt{\frac{x}{6-x}}\, dx$. *Ответ*: $\frac{3(\pi-2)}{2}$.

Указание. $x=6\sin^2 t$.

15) $\int\limits_{0}^{1} \sqrt{\frac{x}{4-x}}\, dx$. *Ответ*: $\frac{2}{3}\pi-\sqrt{3}$.

Указание. $x=4\sin^2 t$.

Уровень 3

1) Вычислить $\int\limits_{0}^{50} f(z)\, dz : \int\limits_{0}^{1} f(50z)\, dz$. *Ответ*: 50.

Указание. В первом интеграле перейти к пределам интегрирования от 0 до 1, используя формулу $x=kt+c$ из обучающего примера 5.

2) Решить уравнение:

$\int\limits_{\sqrt{2}}^{x} \frac{dt}{t\sqrt{t^2-1}}=\frac{\pi}{12}$. *Ответ*: $x=2$.

3) Вычислить сумму интегралов

$\int\limits_{-4}^{-5} e^{(x+5)^2}\, dx+3\int\limits_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} e^{9\left(x-\frac{2}{3}\right)^2}\, dx$. *Ответ*: 0.

Указание. Преобразуйте каждый из интегралов в интеграл с пределами от 0 до 1. Заметим, что каждый из интегралов $\int e^{(x+5)^2}dx$ и $\int e^{9\left(x-\frac{2}{3}\right)^2}dx$ в отдельности не берется в элементарных функциях.

4) $\int\limits_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx$. *Ответ*: $\frac{\pi}{8}\ln 2$.

Указание. а) примените подстановку $x=\mathrm{tg}\,t$;

б) преобразуйте сумму $1+\mathrm{tg}\,t=\dfrac{\sqrt{2}\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos t}$;

в) к интегралу $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos t\,dt$ примените подстановку $t=\frac{\pi}{4}-z$.

Этот пример, как и предыдущий, интересен тем, что неопределенный интеграл $\int\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx$ не выражается в элементарных функциях.

4. Отметить, что если для нахождения первообразной применяется метод подстановки, то можно в полученной первообразной не возвращаться к прежней переменной, но тогда **обязательно** надо определить пределы интегрирования новой переменной.

Однако при возникновении затруднений с определением пределов интегрирования новой переменной, можно первообразную выразить через исходную переменную, а затем применить формулу Ньютона – Лейбница с пределами интегрирования.

Например: $\int\limits_1^4\frac{dx}{x+\sqrt{x}}$.

$$\int\frac{dx}{x+\sqrt{x}}=\begin{vmatrix}x=t^2, t=\sqrt{x}\\ dx=2tdt\end{vmatrix}=\int\frac{2tdt}{t^2+t}=2\int\frac{tdt}{t(t+1)}=2\int\frac{dt}{t+1}=2\ln|t+1|+C=$$
$$=2\ln\left|\sqrt{x}+1\right|+C.$$

$$\int\limits_1^4\frac{dx}{x+\sqrt{x}}=2\left(\ln\left|\sqrt{x}+1\right|\right)\Big|_1^4=2\left(\ln\left|\sqrt{4}+1\right|-\ln\left|\sqrt{1}+1\right|\right)=2\ln\frac{3}{2}.$$

5. Сформулировать теорему **интегрирования по частям** в определенном интеграле: если функции $u=u(x)$ и $v=v(x)$ имеют непрерывные производные на отрезке $[a;b]$, то имеет место формула

$$\boxed{\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du}.$$

Заметить, что формулу Ньютона – Лейбница можно применять к каждому слагаемому в отдельности, не дожидаясь нахождения всей первообразной.

Обучающий пример 10. Вычислить $\int_1^e (x+1)\ln x\,dx$.

Решение. Применим формулу интегрирования по частям.

$$\int_1^e (x+1)\ln x\,dx = \left|\begin{array}{l} \ln x = u \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x}dx = du \\ (x+1)dx = dv \Rightarrow v = \int (x+1)dx = \\ \qquad\qquad = \frac{x^2}{2}+x \end{array}\right| = \left(\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\ln x\right)\Bigg|_1^e -$$

$$-\int_1^e \left(\frac{x^2}{2}+x\right)\frac{dx}{x} = \frac{e^2}{2}+e-0-\left(\frac{x^2}{4}+x\right)\Bigg|_1^e = \frac{e^2}{2}+e-\frac{e^2}{4}-e+\frac{1}{4}+1=\frac{e^2+5}{4}.$$

Обучающий пример 11. Вычислить $J=\int_0^{\frac{\pi}{b}} e^{ax}\sin bx\,dx$.

Решение. $J=\int_0^{\frac{\pi}{b}} e^{ax}\sin bx\,dx = \left|\begin{array}{l} u=\sin bx \quad \Rightarrow \quad du = b\cos bx\,dx \\ e^{ax}dx = dv \Rightarrow \quad v=\frac{1}{a}e^{ax} \end{array}\right| = \frac{1}{a}e^{ax}\sin bx\Big|_0^{\frac{\pi}{b}} -$

$$-\frac{b}{a}\int_0^{\frac{\pi}{b}} e^{ax}\cos bx\,dx = -\frac{b}{a}\int_0^{\frac{\pi}{b}} e^{ax}\cos bx\,dx = -\frac{b}{a}J_1.$$

Применим теперь формулу интегрирования по частям к интегралу J_1.

$$J_1=\int_0^{\frac{\pi}{b}} e^{ax}\cos bx\,dx = \left|\begin{array}{l} u=\cos bx \quad \Rightarrow \quad du=-b\sin bx dx \\ e^{ax}dx=dv \quad \Rightarrow \quad v=\frac{1}{a}e^{ax} \end{array}\right| = \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx\Big|_0^{\frac{\pi}{b}} +$$

$$+\frac{b}{a}\int_0^{\frac{\pi}{b}} e^{ax}\sin bx\,dx = -\frac{e^{\frac{a\pi}{b}}}{a}-\frac{1}{a}+\frac{b}{a}\,J\,.$$

Тогда $$J=-\frac{b}{a}\,J_1=\frac{be^{\frac{a\pi}{b}}}{a^2}+\frac{b}{a^2}-\frac{b^2}{a^2}\,J\,.$$

Отсюда $$J+\frac{b^2}{a^2}\,J=\frac{b\left(e^{\frac{a\pi}{b}}+1\right)}{a^2},\quad J\left(\frac{a^2+b^2}{a^2}\right)=\frac{b\left(e^{\frac{a\pi}{b}}+1\right)}{a^2},$$

$$J=\frac{b\left(e^{\frac{a\pi}{b}}+1\right)}{a^2+b^2}.$$

В частности, при $a=b=1$ получаем

$$\int_0^{\pi} e^x\sin x\,dx=\frac{1}{2}\left(e^{\pi}+1\right).$$

6. Выполнить (самостоятельно, каждому свой вариант, два студента у доски выполняют свои задания).

Уровень 1

1) $\displaystyle\int_0^{e-1}\ln(x+1)\,dx$. *Ответ*: 1.

2) $\displaystyle\int_0^1 x\,e^{-x}\,dx$. *Ответ*: $1-\dfrac{2}{e}$.

3) $\displaystyle\int_1^2 x\ln x\,dx$. *Ответ*: $2\ln 2-\dfrac{3}{4}$.

4) $\displaystyle\int_0^{\pi} x\sin x\,dx$. *Ответ*: π.

5) $\displaystyle\int_{-1}^{0} x\,e^{-x}\,dx$. *Ответ*: – 1.

6) $\displaystyle\int_0^2\ln\left(x^2+4\right)dx$. *Ответ*: $\pi-4+6\ln 2$.

7) $\int_1^e \frac{\ln^3 x}{x^2}\,dx$. *Ответ*: $\frac{6e-16}{e}$.

8) $\int_0^1 \operatorname{arctg} x\,dx$. *Ответ*: $\frac{\pi-\ln 4}{4}$.

9) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x^2 \sin 2x\,dx$. *Ответ*: $\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}$.

10) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx$. *Ответ*: $\frac{\pi}{2}-1$.

11) $\int_1^e \ln x\,dx$. *Ответ*: 1.

12) $\int_0^1 x\,e^{2x}\,dx$. *Ответ*: $\frac{e^2+1}{4}$.

13) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin 2x\,dx$. *Ответ*: $\frac{\pi}{4}$.

14) $\int_0^{2\pi} x\cos^2 x\,dx$. *Ответ*: π^2.

15) $\int_0^{\pi} x\cos\frac{x}{2}\,dx$. *Ответ*: $2\pi-4$.

Уровень 2

1) $\int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \sin\sqrt{x}\,dx$. *Ответ*: 2.

2) $\int_0^9 e^{\sqrt{x}}\,dx$. *Ответ*: $4e^3+2$.

3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\cos x\,dx$. *Ответ*: $\frac{e^{\frac{\pi}{2}}-1}{2}$.

4) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\cos x}{\sin^2 x}\,dx$. *Ответ*: $\dfrac{\ln 3-\pi}{2}+\dfrac{2\pi\sqrt{3}}{9}$.

5) $\displaystyle\int_0^3 \frac{x^2 e^x}{(x+2)^2}\,dx$. *Ответ*: $\dfrac{e^3}{5}+1$.

6) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{x+1}}\,dx$. *Ответ*: $\pi\sqrt{2}-4$.

7) $\displaystyle\int_0^1 \operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx$. *Ответ*: $\dfrac{\pi}{2}-1$.

8) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x\,dx}{\sin^2 x}$. *Ответ*: $\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\sqrt{3}}{9}\pi+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{3}{2}$.

9) $\displaystyle\int_0^1 x\ln\left(1+x^2\right)dx$. *Ответ*: $\ln 2-\dfrac{1}{2}$.

10) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\operatorname{tg} x)\,dx$. *Ответ*: $\dfrac{\pi}{8}\ln 2$.

11) $\displaystyle\int_1^{e^{\frac{\pi}{2}}} \cos(\ln x)\,dx$. *Ответ*: $\dfrac{e^{\frac{\pi}{2}}-1}{2}$.

12) $\displaystyle\int_0^1 (\arcsin x)^2\,dx$. *Ответ*: $\dfrac{\pi^2-8}{4}$.

13) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x\sin x}{\cos^2 x}\,dx$. *Ответ*: $2\left(\dfrac{2\pi}{3}-\ln\operatorname{tg}\dfrac{5\pi}{12}\right)$.

14) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\operatorname{arctg}(\sin x)\,dx$. *Ответ*: $\dfrac{\pi}{2}-1$.

15) $\displaystyle\int_1^{16} \operatorname{arctg}\sqrt{\sqrt{x}-1}\,dx$. *Ответ*: $\dfrac{16\pi}{3}-2\sqrt{3}$.

Домашнее задание

1) Изучить теоретический материал по теме «Несобственные интегралы».

2) Вычислить:

а) $\int\limits_{1}^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$. *Ответ*: 2.

б) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x - \cos^3 x}\, dx$. *Ответ*: $\frac{4}{3}$.

в) $\int\limits_{0}^{4} \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}$. *Ответ*: $2-\ln 2$.

г) $\int\limits_{0}^{2} \sqrt{4-x^2}\, dx$. *Ответ*: π.

д) $\int\limits_{0}^{5} \frac{dx}{2x+\sqrt{3x+1}}$. *Ответ*: $\frac{1}{5}\ln 112$.

е) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} x \ln^2 x\, dx$. *Ответ*: $\frac{1}{4}\left(e^2-1\right)$.

ж) $\int\limits_{0}^{\pi^2} \cos\sqrt{x}\, dx$. *Ответ*: – 4.

з) $\int\limits_{0}^{1} x^2 e^x\, dx$. *Ответ*: $e-2$.

III. Несобственные интегралы. Сходимость, вычисление

1. В начале занятия выяснить вопросы по выполнению домашнего задания и, в случае необходимости, разобрать решение задачи на доске.

Затем выполнить упражнение:

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} = \int\limits_{-1}^{1} x^{-2} dx = -\frac{1}{x}\Bigg|_{-1}^{1} = -1-1=-2.$$

Ответ неверен, почему? Обратить внимание, что при введении определенного интеграла предполагалось, что выполняются условия: 1) пределы интегрирования a и b являются конечными; 2) подынтегральная функция $f(x)$ ограничена на отрезке $[a;b]$. В этом случае определенный интеграл называется собственным. Если хотя бы одно из указанных условий не выполняется, то интеграл называется несобственным.

2. Рассмотреть интегралы с бесконечными пределами (I рода). Пусть функция $f(x)$ непрерывна при $x \in [a;+\infty)$. Тогда несобственный интеграл от функции $f(x)$ в пределах от a до $+\infty$ определяется равенством:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx. \qquad \text{(III.1)}$$

Если предел в правой части равенства (III.1) существует и конечен, то несобственный интеграл называется сходящимся, если же этот предел не существует или бесконечен, то интеграл называется расходящимся. Геометрически несобственный интеграл от неотрицательной функции $\left(f(x)\ge 0\right)$ выражает площадь бесконечной криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком функции $y = f(x)$, слева – отрезком прямой $x = a$, снизу – осью Ox (рис. III.1).

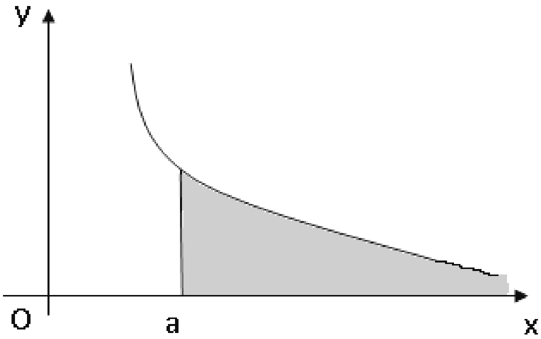


Рис. III.1

В случае сходящегося интеграла эта площадь будет конечной, расходящегося – бесконечной.

Если $F(x)$ – первообразная для $f(x)$, то

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\left(F(b)-F(a)\right) = F(+\infty)-F(a), \quad \text{(III.2)},$$

где $F(+\infty) = \lim\limits_{b\to\infty} F(b)$;

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\left(F(b)-F(a)\right) = F(b)-F(-\infty), \quad \text{(III.3)},$$

где $F(-\infty) = \lim\limits_{a\to-\infty} F(a)$.

Аналогично определяется несобственный интеграл с обоими бесконечными пределами:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int\limits_{c}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_{a}^{c} f(x)dx + \lim_{b\to+\infty}\int\limits_{c}^{b} f(x)dx, \quad \text{(III.4)}$$

где c – любая точка из интервала $(-\infty;+\infty)$.

Несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ называется сходящимся, если сходятся оба интеграла в правой части равенства (III.4), или расходящимся, если хотя бы один из них не сходится.

Обучающий пример 1. Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость.

а) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}dx$.

Решение. Подынтегральная функция непрерывна на промежутке $[0;+\infty)$. Следовательно, по определению

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}dx = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_{0}^{b} \operatorname{arctg} x d(\operatorname{arctg} x) = \lim_{b\to+\infty} \left.\frac{\operatorname{arctg}^2 x}{2}\right|_0^b =$$

$$\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{2}\left(\operatorname{arctg}^2 b - \operatorname{arctg}^2 0\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = \frac{\pi^2}{8}.$$

Интеграл сходится.

б) $\int\limits_{0}^{+\infty} \cos x dx.$

Решение.

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \cos x dx = \lim_{b\to\infty}\int\limits_{0}^{b} \cos x dx = \lim_{b\to+\infty} \sin x\Big|_0^b = \lim_{b\to\infty}(\sin b - \sin 0) = \lim_{b\to+\infty} \sin b,$$

т. е. предел не существует. Следовательно, несобственный интеграл расходится.

в) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{2xdx}{x^2+1}$.

Решение. Представим исходный интеграл в виде суммы двух интегралов, получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2xdx}{x^2+1}=\int_{-\infty}^{0}\frac{2xdx}{x^2+1}+\int_{0}^{+\infty}\frac{2xdx}{x^2+1}=\lim_{a\to-\infty}\int_a^0\frac{d\left(x^2+1\right)}{x^2+1}+\lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{d\left(x^2+1\right)}{x^2+1}=$$

$$=\lim_{a\to-\infty}\left(\ln(x^2+1)\right)\Big|_a^0+\lim_{b\to+\infty}\left(\ln(x^2+1)\right)\Big|_0^b=$$

$$=-\lim_{a\to-\infty}\left(\ln\left(a^2+1\right)\right)+\lim_{b\to+\infty}\left(\ln\left(b^2+1\right)\right)=-\infty+\infty.$$

Исходный интеграл расходится, т. к. расходится каждый из интегралов в правой части последнего равенства, а достаточно расходимости только одного из них.

Обучающий пример 2. Исследовать сходимость интеграла $\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}$.

Решение. По определению

$$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b x^{-\alpha}dx=\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{-\alpha+1}x^{-\alpha+1}\right)\Big|_a^b=\frac{1}{-\alpha+1}\left(\lim_{b\to+\infty}b^{-\alpha+1}-a^{-\alpha+1}\right).$$

Допустим, что $\alpha>1$, тогда $\lim\limits_{b\to+\infty}b^{-\alpha+1}=\lim\limits_{b\to+\infty}\frac{1}{b^{\alpha-1}}=0$, т. к. $\alpha-1>0$. Значит, при $\alpha>1$ интеграл сходится. Пусть $\alpha<1$, тогда $\lim\limits_{b\to+\infty}b^{-\alpha+1}=\infty$, т. е. при $\alpha<1$ интеграл расходится. Если α = 1, то $\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x}=\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b\frac{dx}{x}dx=$

$=\lim\limits_{b\to+\infty}\ln|x|\Big|_a^b=\lim\limits_{b\to+\infty}\left(\ln|b|-\ln|a|\right)=+\infty$, т. е. расходится.

Обучающий пример 3. Исследовать сходимость $\int_{-\infty}^{0}x\cdot\cos x\,dx$.

Решение. По определению

$$\int_{-\infty}^{0}x\cdot\cos x\,dx=\lim_{a\to-\infty}\int_a^0 x\cdot\cos x\,dx=\begin{vmatrix}u=x & du=dx\\ dv=\cos x\,dx & v=\sin x\end{vmatrix}=$$

$$=\lim_{a\to-\infty}\left(x\cdot\sin x\Big|_a^0+\cos x\Big|_a^0\right)==0-\lim_{a\to-\infty}a\sin a+1-\lim_{a\to-\infty}\cos a.$$

Интеграл расходится, т. к. $\lim\limits_{a\to-\infty}\cos a$, $\lim\limits_{a\to-\infty}\sin a$ не существуют.

Обучающий пример 4 (повышенный уровень). Исследовать, сходится ли несобственный интеграл $\int_0^{+\infty}\frac{x^2dx}{(1+x)^6}$.

Решение. Преобразуя подынтегральную функцию, получим

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^2dx}{(1+x)^6}=\int_0^{+\infty}\frac{\left(x^2+2x+1\right)-2x-1}{(1+x)^6}dx=\lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{(x+1)^2-2(x+1)+1}{(1+x)^6}dx=$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{d(x+1)}{(1+x)^4}-2\lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{d(x+1)}{(1+x)^5}+\lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{d(x+1)}{(1+x)^6}=$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{-1}{3(1+x)^3}\Bigg|_0^b+\frac{2}{4(1+x)^4}\Bigg|_0^b-\frac{1}{5(1+x)^5}\Bigg|_0^b\right)=$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{-1}{3(1+b)^3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2(1+b)^4}-\frac{1}{2}-\frac{1}{5(1+b)^5}+\frac{1}{5}\right)==\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}=\frac{1}{30}.$$

3. На доске студенты выполняют задания.

Вычислить:

3.1. $\int_{-\infty}^{1}\frac{dx}{x^2}$. *Ответ*: – 1.

3.2. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4x+9}$. *Ответ*: $\frac{\pi}{\sqrt{5}}$.

4. Рассмотреть признаки сходимости интегралов с бесконечными пределами:

1^0. Пусть для $x\in[a;+\infty)$ $0\le f(x)\le g(x)$. Если $\int_a^{+\infty}g(x)dx$ сходится, то сходится и $\int_a^{+\infty}f(x)dx$, причем $\int_a^{+\infty}f(x)dx\le\int_a^{+\infty}g(x)dx$. Если расходится $\int_a^{+\infty}f(x)dx$, то расходится $\int_a^{+\infty}g(x)dx$ (признак сравнения).

2^0. Если для $x\in[a;+\infty)$ $f(x)>0, g(x)>0$ и существует конечный предел $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}\ne 0$, то интегралы $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ и $\int_a^{+\infty}g(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно (предельный признак сравнения).

3^0. Если $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ сходится, то сходится и $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ (последний в этом случае называется абсолютно сходящимся).

4^0. Если при $x \to +\infty$ функция $f(x) > 0$ является бесконечно малой, порядка α по сравнению с $\frac{1}{x}$, то интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha < 1$ или $\alpha = 1$.

Замечание III.1. Как ранее было показано (обучающий пример 2), интеграл $\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha < 1$ или $\alpha = 1$.

Обучающий пример 5. Исследовать на сходимость

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{3 + 2x^2 + 5x^4}.$$

Решение.

Применив признак сравнения для $x \geq 1$, имеем $3 + 2x^2 + 5x^4 > x^4$, откуда $\frac{1}{3 + 2x^2 + 5x^4} < \frac{1}{x^4}$.

Так как $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^4}$ сходится $(\alpha = 4 > 1)$, то по признаку сравнения сходится и исходный интеграл.

Обучающий пример 6. Исследовать на сходимость $\int\limits_1^{\infty} \frac{\sin x dx}{x^2}$.

Решение. Применим признаки 1^0 и 3^0. Имеем $f(x) = \frac{\sin x}{x^2}$,

$f(x) = \frac{\sin x}{x^2} \leq \frac{|\sin x|}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$.

Так как $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ сходится $(\alpha = 2 > 1)$, то, согласно признаку сравнения, сходится и интеграл $\int\limits_1^{\infty} \frac{|\sin x|}{x^2} dx$. Следовательно, на основании признака 3^0 сходится интеграл $\int\limits_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$.

Обучающий пример 7. Исследовать на сходимость $\int\limits_1^{\infty} \left(1 - \cos\frac{2}{x}\right) dx$.

Решение. Подынтегральная функция $f(x)=1-\cos\frac{2}{x}=2\sin^2\frac{1}{x}$ положительна и непрерывна при $x\geq 1$. Рассмотрим функцию $g(x)=\frac{1}{x^2}$, интеграл от которой $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$ сходится $(\alpha=2>1)$, а так как существует предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2\sin^2\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}}=2\neq 0$, то исходный интеграл $\int\limits_1^{\infty}\left(1-\cos\frac{2}{x}\right)dx$ также сходится (предельный признак сравнения).

Обучающий пример 8. Исследовать на сходимость $\int\limits_2^{+\infty}\frac{\sqrt[7]{3+2x^2}}{\sqrt[5]{x^3-1}}dx$.

Решение. Подынтегральная функция непрерывна и положительна при $x\geq 2$. Определим порядок ее малости α относительно $\frac{1}{x}$ при $x\to+\infty$

$$\frac{\sqrt[7]{3+2x^2}}{\sqrt[5]{x^3-1}}=\frac{\sqrt[7]{x^2\left(\frac{3}{x^2}+2\right)}}{\sqrt[5]{x^3\left(1-\frac{1}{x^3}\right)}}=\frac{x^{\frac{2}{7}}\sqrt[7]{\frac{3}{x^2}+2}}{x^{\frac{3}{5}}\sqrt[5]{1-\frac{1}{x^3}}}=\frac{1}{x^{\frac{11}{35}}}\frac{\sqrt[7]{\frac{3}{x^2}+2}}{\sqrt[5]{1-\frac{1}{x^3}}}.$$

Здесь второй множитель имеет предел $\sqrt[7]{2}$ при $x\to+\infty$, а $\alpha=\frac{11}{35}<1$, следовательно, данный интеграл расходится.

5. У доски студенты выполняют задание – исследовать сходимость интегралов:

а) $\int\limits_2^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-2)}}$. *Ответ*: *сходится*.

б) $\int\limits_1^{\infty}\frac{\left(x+\sqrt{x+1}\right)}{x^2+2\sqrt[5]{x^4+1}}dx$. *Ответ*: *расходится*.

в) $\int\limits_1^{\infty}\frac{1-4\sin 2x}{x^3+\sqrt[3]{x}}dx$. *Ответ*: *сходится, причем абсолютно*.

6. Рассмотреть интегралы от неограниченных функций (II рода).

Если функция $f(x)$ непрерывна для $x \in [a;b)$ и в точке $x = b$ имеет бесконечный разрыв, то по определению полагают

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx. \qquad \text{(III.5)}$$

Если существует конечный предел в правой части формулы (III.5), то несобственный интеграл называется сходящимся; если этот предел не существует или бесконечен, то интеграл называется расходящимся.

Геометрически несобственный интеграл в случае $f(x) > 0$ представляет собой площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = f(x)$, прямой $x = a$ и вертикальной асимптотой $x = b$.

Если функция $f(x)$ непрерывна для $x \in (a;b]$ и в точке $x = a$ имеет бесконечный разрыв, то

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx. \qquad \text{(III.6)}$$

Если предел в правой части формулы (III.6) существует и конечен, то несобственный интеграл называется сходящимся.

Если функция $f(x)$ имеет бесконечный разрыв в точке $c \in [a;b]$ и непрерывна при $x \in [a\,;c) \cup (c;b]$, то по определению

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon_1 \to 0} \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \lim_{\varepsilon_2 \to 0} \int_{c+\varepsilon_2}^{b} f(x)dx. \qquad \text{(III.7)}$$

Несобственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ ($f(c) = \infty$, $a < c < b$) называется сходящимся, если оба предела в правой части равенства (III.7) существуют и конечны.

Признаки сходимости несобственных интегралов второго рода по формулировке совпадают с признаками сходимости несобственных интегралов первого рода, только сравнение идет с эталонами в окрестности точек разрыва. В качестве интегралов-эталонов выступают интегралы вида

$\int_a^b \frac{dx}{|x-c|^m}$, которые при $\begin{bmatrix} m < 1, & \text{Н.И.} & \text{сходятся} \\ m \geq 1, & \text{Н.И.} & \text{расходятся} \end{bmatrix}$, где $c \in [a;b]$.

Обучающий пример 9. Вычислить Н.И. $\int\limits_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$ или установить его расходимость.

Решение. Подынтегральная функция терпит разрыв при $x=3$ $\left(\lim\limits_{x\to 3}\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}=+\infty\right)$. Согласно формуле (III.5) имеем $\int\limits_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}=$ $=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_0^{3-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\arcsin\frac{x}{3}\Big|_0^{3-\varepsilon}=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left(\arcsin\frac{3-\varepsilon}{3}-0\right)=\frac{\pi}{2}$. Таким образом, интеграл сходится.

Обучающий пример 10. Вычислить $\int\limits_0^1 \ln x\,dx$.

Решение. При $x\to 0$ функция $\ln x\to -\infty$. По формуле (III.6) имеем

$$\int\limits_0^1 \ln x\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{0+\varepsilon}^1 \ln x\,dx=\left|\begin{matrix}\ln x=u,\ du=\frac{1}{x}dx\\ dx=dv,\ \ v=x\end{matrix}\right|=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(x\ln x\Big|_{0+\varepsilon}^1-x\Big|_{0+\varepsilon}^1\right)=$$

$$=-1-\lim_{\varepsilon\to 0}(\varepsilon\ln\varepsilon-\varepsilon)=-1-0=-1,\text{ т. к. }\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\ln\varepsilon=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\ln\varepsilon}{\frac{1}{\varepsilon}}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\frac{1}{\varepsilon}}{-\frac{1}{\varepsilon^2}}=$$

$=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}(-\varepsilon)=0$. Интеграл сходится и равен -1.

Обучающий пример 11. Вычислить $\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$.

Решение. По формуле (III.7) имеем

$$\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}=\int\limits_{-1}^0 \frac{dx}{x^2}+\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2}=\lim_{\varepsilon_1\to 0}\int\limits_{-1}^{0-\varepsilon_1}\frac{dx}{x^2}+\lim_{\varepsilon_2\to 0}\int\limits_{0+\varepsilon_2}^1\frac{dx}{x^2}=$$

$$=\lim_{\varepsilon_1\to 0}\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_{-1}^{-\varepsilon_1}+\lim_{\varepsilon_2\to 0}\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_{\varepsilon_2}^{1}=\lim_{\varepsilon_1\to 0}\frac{1}{\varepsilon_1}-1+\lim_{\varepsilon_2\to 0}\frac{1}{\varepsilon_2}-1=\infty.$$

Интеграл расходится.

Обучающий пример 12. Исследовать на сходимость $\int\limits_0^1 \frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{\left(1-x^2\right)^2}}dx$.

Решение. Функция $f(x)=\dfrac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{\left(1-x^2\right)^2}}$ терпит бесконечный разрыв в точке $x = 1$. Перепишем ее в виде $f\left(x\right)=\dfrac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{\left(1+x\right)^2}}\cdot\dfrac{1}{\left(1-x\right)^{\frac{2}{3}}}$ и сравним с функцией $g\left(x\right)=\dfrac{1}{\left(1-x\right)^{\frac{2}{3}}}$.

Интеграл $\int\limits_0^1\dfrac{dx}{\left(1-x\right)^{\frac{2}{3}}}$ сходится $\left(m=\dfrac{2}{3}<1\right)$ как эталонный интеграл.

Так как $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{\left(1+x\right)^2}}\cdot\dfrac{1}{\left(1-x\right)^{\frac{2}{3}}}\cdot\dfrac{\left(1-x\right)^{\frac{2}{3}}}{1}=$ $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{\left(1+x\right)^2}}=\dfrac{\cos^2 1}{\sqrt[3]{4}}\left(\neq0,\neq\infty\right)$, то, согласно предельному признаку сравнения, исходный интеграл тоже сходится.

Обучающий пример 13. Исследовать на сходимость $\int\limits_0^1\dfrac{dx}{3x^2+\sqrt[3]{x}}$.

Решение. Подынтегральная функция $f\left(x\right)=\dfrac{dx}{3x^2+\sqrt[3]{x}}$ терпит разрыв в точке $x = 0$. Сравним ее с функцией $g\left(x\right)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$. Здесь $\dfrac{dx}{3x^2+\sqrt[3]{x}}<\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$, но несобственный интеграл $\int\limits_0^1\dfrac{dx}{\sqrt[3]{x}}$ сходится как эталонный ($m=\dfrac{1}{3}<1$).

Следовательно, интеграл $\int\limits_0^1\dfrac{dx}{3x^2+\sqrt[3]{x}}$ по признаку сравнения, также сходится.

Обучающий пример 14 (повышенный уровень). Исследовать на сходимость $\int\limits_0^2\dfrac{\ln\left(1+\sqrt[5]{x^3}\right)}{e^{\sin x-1}}dx$.

Решение. Подынтегральная функция $f(x)=\dfrac{\ln\left(1+\sqrt[5]{x^3}\right)}{e^{\sin x-1}}$ положительна на интервале (0;2) и не определена при $x = 0$. Покажем, что $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)=\infty$.

Действительно, поскольку $e^{\sin x}-1\sim\sin x\sim x, \ln\left(1+\sqrt[5]{x^3}\right)\sim\sqrt[5]{x^3}$ при $x\to 0$, то $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+\sqrt[5]{x^3}\right)}{e^{\sin x-1}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[5]{x^3}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt[5]{x^2}}=\infty$.

Одновременно мы показали, что $f(x)\sim\dfrac{1}{\sqrt[5]{x^2}}$ при $x\to 0$, т.е. что $f(x)$ является бесконечно большой порядка $m=\dfrac{2}{5}<1$ по сравнению с $\dfrac{1}{x}$. Следовательно, заданный интеграл сходится.

7. На доске студенты выполняют задания:

Вычислить следующие Н.И. (или доказать их расходимость):

7.1. $\int\limits_0^1\dfrac{dx}{x}$. *Ответ*: интеграл расходится.

7.2. $\int\limits_{-1}^2\dfrac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$. *Ответ*: $3\left(\sqrt[3]{2}+1\right)$.

7.3. $\int\limits_2^3\dfrac{xdx}{\sqrt{x^2-4}}$. *Ответ*: $\dfrac{2}{3}\sqrt[4]{125}$.

7.4. $\int\limits_{-1}^1\dfrac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}}dx$. *Ответ*: $\dfrac{102}{7}$.

7.5. $\int\limits_1^3\dfrac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}}$. *Ответ:* π.

Указание. Подынтегральная функция неограниченна в окрестности точек $x = 1$ и $x = 3$. Поэтому по определению

$$\int\limits_1^3\frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}}=\int\limits_1^2\frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}}+\int\limits_2^3\frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}}.$$

Вместо точки $x = 2$ можно взять любую другую внутреннюю точку на отрезке $[1;3]$.

Самостоятельная работа студентов

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость.

Вариант 1

а) $\int\limits_0^{\infty}\frac{dx}{(x+1)^6}$. *Ответ*: $\frac{1}{5}$.

б) $\int\limits_1^{-1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. *Ответ*: π.

в) $\int\limits_0^1\frac{\sin 2x}{\sqrt[3]{x^2}}dx$. *Ответ*: сходится.

Вариант 2

а) $\int\limits_0^{\infty}\frac{dx}{(x+1)^4}$. *Ответ*: $\frac{1}{3}$.

б) $\int\limits_0^1\frac{x^2dx}{1-x^2}$. *Ответ*: расходится.

в) $\int\limits_0^7\frac{dx}{\sqrt{x}+2\sqrt[3]{x}+3\sqrt[4]{x}}$. *Ответ*: сходится.

Вариант 3

а) $\int\limits_0^{\infty}\frac{dx}{(x+1)^3}$. *Ответ*: $\frac{1}{2}$.

б) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 t}{\cos t}dt$. *Ответ*: расходится.

в) $\int\limits_0^1\frac{\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt[3]{x}}dx$. *Ответ*: сходится.

Вариант 4

а) $\int\limits_0^{\infty}\frac{dx}{(x+1)^2}$. *Ответ*: 1.

б) $\int\limits_0^1\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$. *Ответ*: $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

в) $\int\limits_0^{2/\sqrt{\pi}}\sin\frac{1}{x^2}\cdot\frac{dx}{x^3}$. *Ответ*: расходится.

Вариант 5

а) $\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{(x+1)^5}$. *Ответ*: $\frac{1}{4}$.

б) $\int\limits_0^{0,4} \frac{dx}{\sqrt{2-5x}}$. *Ответ*: $\frac{2\sqrt{2}}{5}$.

в) $\int\limits_0^{1} \frac{\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt[3]{x}}dx$. *Ответ*: сходится.

Вариант 6

а) $\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{(x+1)^7}$. *Ответ*: $\frac{1}{6}$.

б) $\int\limits_0^{1} x\ln x dx$. *Ответ*: $-\frac{1}{4}$.

в) $\int\limits_2^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$. *Ответ*: сходится.

Вариант 7

а) $\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{(x+1)^8}$. *Ответ*: $\frac{1}{7}$.

б) $\int\limits_0^{\frac{1}{4}} \frac{dx}{x\ln x}$. *Ответ*: расходится.

в) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}dx$. *Ответ*: сходится.

Вариант 8

а) $\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{(x+1)^9}$. *Ответ*: $\frac{1}{8}$.

б) $\int\limits_1^{3} \frac{dx}{3-x}$. *Ответ*: $2\sqrt{2}$.

в) $\int\limits_0^{1} \frac{dx}{5x^2+\sqrt{x}}$. *Ответ*: сходится.

Вариант 9

а) $\int\limits_0^{\infty}\frac{dx}{(x+1)^{10}}$. *Ответ*: $\frac{1}{9}$.

б) $\int\limits_2^{5}\frac{dx}{(x-4)^{2}}$. *Ответ*: расходится.

в) $\int\limits_0^{1}\frac{dx}{x^2+\sqrt[3]{x}}$. *Ответ*: сходится.

Вариант 10

а) $\int\limits_0^{\infty}\frac{dx}{(x+1)^{11}}$. *Ответ*: $\frac{1}{10}$.

б) $\int\limits_2^{4}\frac{dx}{\sqrt[3]{(3-x)^2}}$. *Ответ*: 6.

в) $\int\limits_0^{1}\frac{dx}{3x^3+\sqrt{x}}$. *Ответ*: сходится.

Вариант 11

а) $\int\limits_0^{\infty}\frac{dx}{(x+1)^{12}}$. *Ответ*: $\frac{1}{11}$.

б) $\int\limits_0^{4}\frac{dx}{\sqrt{x}}$. *Ответ*: 4.

в) $\int\limits_0^{1}\frac{dx}{5x^2+\sqrt{x}}$. *Ответ*: сходится.

Вариант 12

а) $\int\limits_0^{\infty}\frac{dx}{(x+1)^{13}}$. *Ответ*: $\frac{1}{12}$.

б) $\int\limits_0^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$. *Ответ*: $\frac{3}{2}$.

в) $\int\limits_0^{1}\frac{dx}{7x^2+\sqrt[3]{x^2}}$. *Ответ*: сходится.

Вариант 13

а) $\int\limits_0^{\infty}\frac{dx}{(x+1)^{14}}$. *Ответ*: $\frac{1}{13}$.

б) $\int\limits_{0}^{0,5} \frac{dx}{x\ln^2 x}$. *Ответ*: $\frac{1}{\ln 2}$.

в) $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{5x^3+\sqrt{x}}$. *Ответ*: сходится.

Вариант 14

а) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{dx}{(x+1)^{15}}$. *Ответ*: $\frac{1}{14}$.

б) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x^3}$. *Ответ*: расходится.

в) $\int\limits_{0}^{1} \frac{\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{\sqrt[4]{x}}dx$. *Ответ*: сходится.

Вариант 15

а) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{dx}{(x+1)^{16}}$. *Ответ*: $\frac{1}{15}$.

б) $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{x^2-1}$. *Ответ*: расходится.

в) $\int\limits_{0}^{1} \frac{\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}{\sqrt[5]{x}}dx$. *Ответ*: сходится.

Уровень 2

1) Исследовать сходимость интегралов:

а) $\int\limits_{0}^{1} \frac{e^x}{\sqrt{1-\cos x}}dx$. *Ответ*: расходится.

б) $\int\limits_{0}^{1} \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[5]{1-x^3}}dx$. *Ответ*: сходится.

Указание. Запишите подынтегральную функцию в виде

$f(x) = \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[5]{1+x+x^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x}}$.

Определите ее порядок по сравнению с $\dfrac{1}{1-x}$.

в) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[3]{16-x^4}}dx$. *Ответ*: сходится.

Указание. Определите порядок бесконечно большой функции $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[3]{16-x^4}}$ в окрестности точки $x = 2$ относительно $\dfrac{1}{2-x}$.

г) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt[4]{x}-\sin x}dx$. *Ответ*: сходится.

Указание. Запишите подынтегральную функцию в виде $f(x)=\dfrac{\cos x}{\sqrt[4]{x}\left(1-\dfrac{\sin x}{\sqrt[4]{x}}\right)}$ оцените ее и определите порядок по сравнению с $\dfrac{1}{x}$.

д) $\displaystyle\int_0^2 \frac{\ln\left(\sqrt[4]{x}+1\right)}{e^{tgx}-1}dx$. *Ответ*: сходится.

е) при каких значениях m интеграл $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos x}{x^m}dx$ сходится?

Ответ: сходится при $m<3$, расходится при $m>3$.

Указание. Воспользоваться эквивалентностью $1-\cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$ при $x\to 0$.

ж) при каких k интеграл $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{dx}{(\sin x)^k}$ сходится?

Ответ: сходится, если $k<1$; и расходится, если $k\ge 1$.

Указания. Представить $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{dx}{(\sin x)^k}$ в виде суммы двух интегралов $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(\sin x)^k}+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{dx}{(\sin x)^k}$; подстановкой $x=\pi-t$ второй интеграл свести к первому и воспользоваться эквивалентностью $\sin x \sim x$ при $x\to 0$.

Домашнее задание

1. Изучить теоретический материал по теме «Вычисление площадей плоских фигур».

2. Исследовать на сходимость.

1) $\int\limits_0^\infty e^{-3x}dx$. *Ответ*: $\dfrac{1}{3}$.

2) $\int\limits_e^\infty \dfrac{dx}{x\ln^3 x}$. *Ответ*: $\dfrac{1}{2}$.

3) $\int\limits_0^\infty x\cos x dx$. *Ответ*: расходится.

4) $\int\limits_{01}^\infty \dfrac{\sin\frac{1}{x}}{2+x\sqrt{x}}dx$. *Ответ*: сходится.

5) $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{x^2+x^4}$. *Ответ*: расходится.

6) $\int\limits_0^2 \dfrac{xdx}{\left(x^2-1\right)^{\frac{4}{5}}}$. *Ответ*: $\dfrac{5}{2}\left(\sqrt[5]{3}+1\right)$.

7) $\int\limits_0^{\sqrt{\frac{2}{\pi}}} \cos\dfrac{1}{x^2}\cdot\dfrac{dx}{x^2}$. *Ответ*: расходится.

8) $\int\limits_0^1 \dfrac{\ln\left(1+\sqrt[3]{x^2}\right)}{e^x-1}dx$. *Ответ*: сходится.

IV. Вычисление площадей плоских фигур

1. Указать подстановку для интегралов:

а) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\, dx$; в) $\int\limits_2^6 \sqrt{x-2}\, dx$;

б) $\int\limits_0^1 \dfrac{x^2\,dx}{\sqrt{x^6+4}}$; г) $\int\limits_1^e \dfrac{\sin(\ln x)}{x}\, dx$.

2. Беглый просмотр выполнения домашнего задания.

3. Обратить внимание на то, что понятие определенного интеграла вследствие его абстрактности широко применяется для вычисления различных геометрических и физических величин. Рассмотреть различные случаи вычисления площадей плоских фигур с помощью определенного интеграла.

1. Площадь плоской фигуры, ограниченной непрерывной линией $y=f(x)$ ($f(x)\geq 0$ для $x\in[a;b]$), прямыми $x=a$, $x=b$ и отрезком оси абсцисс (рис. IV.1), выражается интегралом

$$S=\int_a^b f(x)\,dx. \qquad \text{(IV.1)}$$

Если $f(x)\leq 0$ при $x\in[a;b]$, то

$$S=-\int_a^b f(x)\,dx. \qquad \text{(IV.2)}$$

2. Площадь криволинейной трапеции, ограниченной прямыми $y=c$, $y=d$, непрерывной кривой $x=g(y)$ ($g(y)\geq 0$ для $y\in[c;d]$) и осью *Oy* (рис. IV.2), выражается интегралом

$$S=\int_c^d g(y)\,dy. \qquad \text{(IV.3)}$$

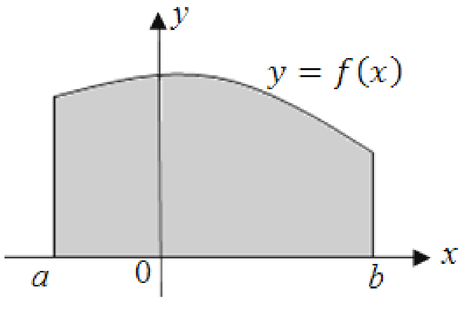


Рис. IV.1

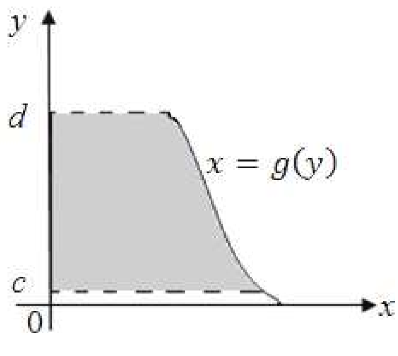


Рис. IV.2

3. Площадь плоской фигуры, ограниченной прямыми $x=a$, $x=b$ и двумя непрерывными кривыми $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$ ($f_1(x)\leq f_2(x)$) для $x\in[a;b]$ (рис. IV.3), вычисляется по формуле

$$S=\int_a^b \left(f_2(x)-f_1(x)\right)dx. \qquad \text{(IV.4)}$$

4. Если фигура ограничена прямыми $y=c$, $y=d$ и кривыми $x=g_1(y)$, $x=g_2(y)$ ($g_1(y)\le g_2(y)$ для $y\in[c;d]$) (рис. IV.4), то ее площадь определяется формулой

$$S=\int_c^d\left(g_2(y)-g_1(y)\right)dy. \qquad \text{(IV.5)}$$

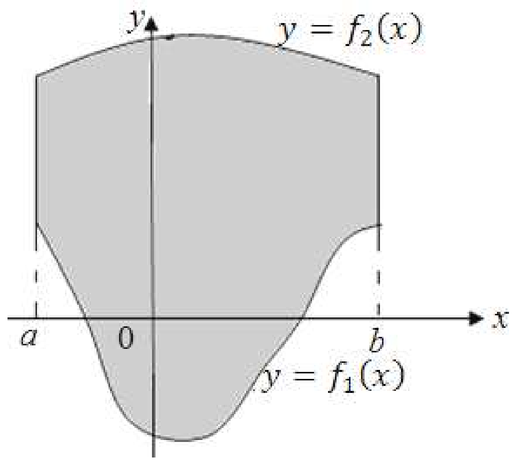


Рис. IV.3

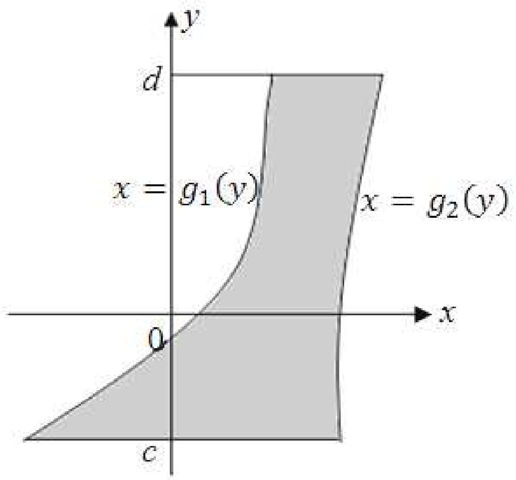


Рис. IV.4

5. Если кривая задана параметрическими уравнениями $\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t).\end{cases}$ $y(t)\ge 0$, $t\in[t_1,t_2]$, то площадь криволинейной трапеции, ограниченной прямыми $x=a$, $x=b$, осью абсцисс и кривой, находится по формуле

$$S=\int_{t_1}^{t_2} y(t)\,x'(t)dt, \qquad \text{(IV.6)}$$

где t_1 и t_2 определяются из условий $x(t_1)=a$, $x(t_2)=b$.

6. Площадь криволинейного сектора, ограниченного кривой, заданной в полярных координатах уравнением $\rho=\rho(\varphi)$ и двумя полярными радиусами $\varphi=\alpha$, $\varphi=\beta$ ($\alpha<\beta$) (рис. IV.5), выражается формулой

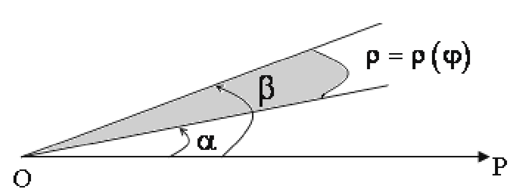


Рис. IV.5

$$S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)\,d\varphi. \qquad \text{(IV.7)}$$

7. Если фигура ограничена двумя полярными радиусами $\varphi=\alpha$, $\varphi=\beta$ и кривыми $\rho=\rho_1(\varphi)$, $\rho=\rho_2(\varphi)$, где $\rho_1(\varphi)\le\rho_2(\varphi)$ для $\varphi\in[\alpha,\beta]$ (рис. IV.6), то ее площадь находится по формуле

$$S=\frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta}\left(\rho_2^2(\varphi)-\rho_1^2(\varphi)\right)d\varphi. \qquad \text{(IV.8)}$$

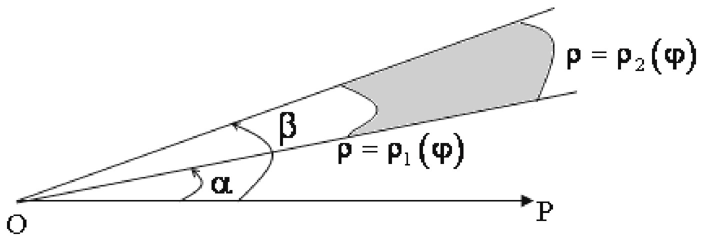


Рис. IV.6

Обучающая задача 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболами $y=4-x^2$ и $y=x^2-2x$.

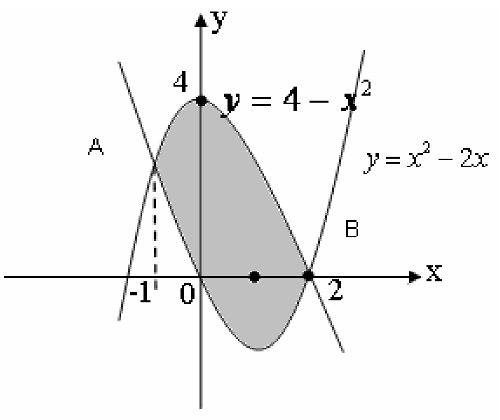


Рис. IV.7

Решение. Найдем точки пересечения данных кривых. Для этого решим систему уравнений:

$$\begin{cases} y=4-x^2, \\ y=x^2-2x. \end{cases} \Rightarrow \quad x^2-2x=4-x^2,$$

$$2x^2-2x-4=0,$$

$$x^2-x-2=0$$

$$x_1=2,\quad x_2=-1.$$

Определив точки пересечения парабол $A(-1;3)$ и $B(2;0)$, построив эти точки и параболы (рис. IV.7), видим, что $4-x^2\ge x^2-2x$ при $x\in[-1;2]$. Площадь данной фигуры находим по формуле

$$S=\int\limits_a^b\left(f_2(x)-f_1(x)\right)dx.$$

$$S=\int\limits_{-1}^{2}\left(\left(4-x^2\right)-\left(x^2-2x\right)\right)dx=$$

$$\int\limits_{-1}^{2}\left(4+2x-2x^2\right)dx==\left(4x+x^2-\frac{2}{3}x^3\right)\Bigg|_{-1}^{2}=9\ (\text{ед}^2.).$$

Обучающая задача 2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболами $x=-2y^2$, $x=1-3y^2$.

Решение. Решая систему уравнений, построим эти параболы (рис. IV.8)

$\begin{cases} x=-2y^2, \\ x=1-3y^2. \end{cases}$ Найдем ординаты точек пересечения кривых $y_1=-1$, $y_2=1$.

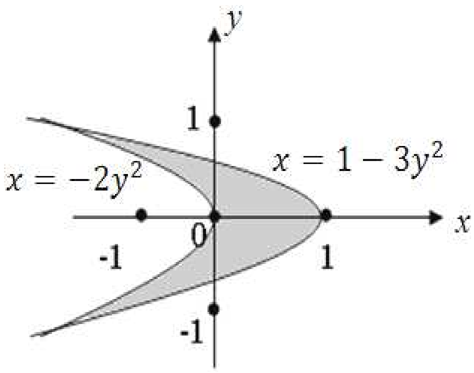


Рис. IV.8

Так как $1-3y^2 \geq -2y^2$ при $y\in[-1;1]$, то воспользовавшись формулой $S=\int\limits_c^d \left(g_2(y)-g_1(y)\right)dy$, получим

$$S=\int\limits_{-1}^{1}\left(\left(1-3y^2\right)-\left(-2y^2\right)\right)dy=\int\limits_{-1}^{1}\left(-y^2+1\right)dy=2\int\limits_{0}^{1}\left(-y^2+1\right)dy=$$

$$=2\left(-\frac{y^3}{3}+y\right)\Bigg|_0^1=\frac{4}{3}\ (\text{ед}^2.).$$

Обучающая задача 3. Найти площадь фигуры (рис. IV.9), ограниченной эллипсом $\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=b\sin t. \end{cases}$

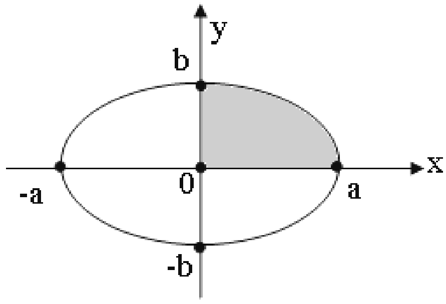


Рис. IV.9

Решение. Оси координат совпадают с осями симметрии данного эллипса (см. рис. IV.9), поэтому они делят его на четыре одинаковые части. Четвертую часть искомой площади *S*, расположенную в первом квадранте, найдем как площадь криволинейной трапеции, прилежащей к оси *Ox*.

Находим $\frac{1}{4}S$ по формуле $S=\int\limits_{t_1}^{t_2} y(t)\,x'(t)dt$. Если $x=0$, то $t=\frac{\pi}{2}$; если $x=a$, то $t=0$. Будем иметь

$$\frac{1}{4}S\ =\ \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0} b\sin t(-a\sin t)\,dt\ =\ ab\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\,dt\ =\ ab\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 2t}{2}\,dt\ =$$

$$=\frac{ab}{2}\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}\ =\ \frac{ab}{2}\left(\frac{\pi}{2}-0\right)\ =\ \frac{\pi ab}{4}\ (\text{ед}^2.).$$

Тогда искомая площадь

$$S = 4 \cdot \frac{1}{4} S = 4 \cdot \frac{\pi ab}{4} = \pi ab.$$

Отсюда при $a = b$ получается формула для площади круга

$$S = \pi a^2.$$

Обучающая задача 4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной лемнискатой Бернулли $\rho = a\sqrt{2\cos 2\varphi}$.

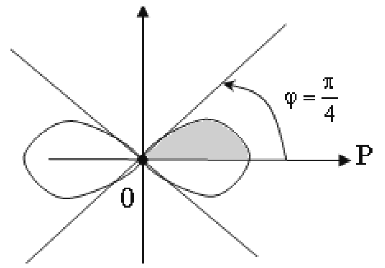


Рис. IV.10

Решение. Искомая фигура изображена на рис. IV.10.

Применяя формулу $S = \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi)\, d\varphi$, и учитывая, что фигура состоит из четырех одинаковых частей, имеем

$$S = 4 \cdot \frac{1}{2} \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \left(a\sqrt{2\cos 2\varphi}\right)^2 d\varphi = 2a^2 \cdot 2\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\varphi\, d\varphi = 2a^2 \sin 2\varphi \Big|_{0}^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$= 2a^2 \sin\frac{\pi}{2} = 2a^2 \text{ (ед}^2\text{.)}.$$

Обучающая задача 5. Найти площадь фигуры, вырезаемой окружностью $\rho = \sqrt{3}\sin\varphi$ из кардиоиды $\rho = 1 + \cos\varphi$ (рис. IV.11).

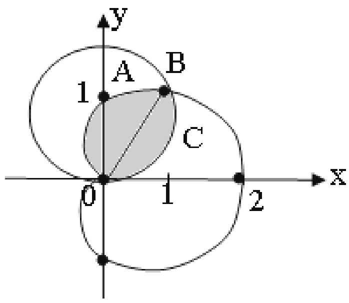


Рис. IV.11

Решение. Найдем сначала точки пересечения этих кривых. Для этого решим систему

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{3}\sin\varphi, \\ \rho = 1 + \cos\varphi, \end{cases} \quad \text{откуда } \varphi_1 = \frac{\pi}{3}, \qquad \varphi_2 = \pi.$$

Площадь заданной фигуры равна сумме двух площадей, одна из которых представляет круговой сегмент, а другая сегмент кардиоиды, причем сегменты примыкают друг к другу по лучу $\varphi = \frac{\pi}{3}$. Дуга BAO описывается концом полярного радиуса ρ кардиоиды при изменении полярного угла φ от $\frac{\pi}{3}$ до π, а дуга OCB – концом полярного радиуса ρ окружности при $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{3}$.

Поэтому $S=\dfrac{1}{2}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}}3\sin^2\varphi\,d\varphi+\dfrac{1}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\left(1+\cos\varphi\right)^2 d\varphi=$

$$=\frac{3}{4}\left(\varphi-\frac{\sin 2\varphi}{2}\right)\Bigg|_{0}^{\frac{\pi}{3}}+\frac{1}{2}\left(\varphi+2\sin\varphi+\frac{\varphi}{2}+\frac{\sin 2\varphi}{4}\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}=\frac{3}{4}\left(\pi-\sqrt{3}\right)\ (\text{ед}^2.).$$

4. У доски студенты решают задачи:

4.1. Найти площадь между параболой $y=-x^2-2x+3$, касательной в точке $M(2;-5)$ и осью ординат.

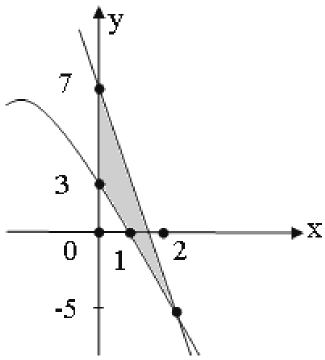


Рис. IV.12

Решение. Уравнение касательной в точке $M(2;-5)$ имеет вид $y+5=-6(x-2)$ или $y=7-6x$. Ветви параболы направлены вниз, поэтому парабола лежит под касательной, т. е. $7-6x\geq -x^2-2x+3$ на отрезке $[0;2]$ (рис. IV.12).

Следовательно,

$$S=\int\limits_{0}^{2}\Big((7-6x)-\left(-x^2-2x+3\right)\Big)dx=\int\limits_{0}^{2}\left(x^2-4x+4\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}-2x^2+4x\right)\Bigg|_{0}^{2}=\frac{8}{3}.$$

4.2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной осью Ox и одной арки циклоиды $\begin{cases}x=a(t-\sin t),\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$ (рис. IV.13).

Ответ: $3\pi a^2$ (ед^2.).

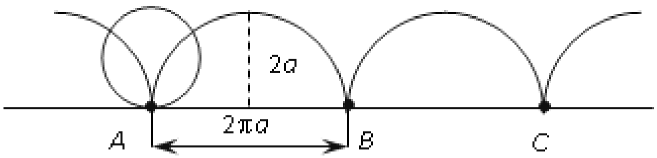


Рис. IV.13

Указание. Находим площадь фигуры по формуле $S=\int\limits_{t_1}^{t_2}y(t)\,x'(t)\,dt$.

Если $x=0$, то $t=0$; если $x=2\pi a$, то $t=2\pi$.

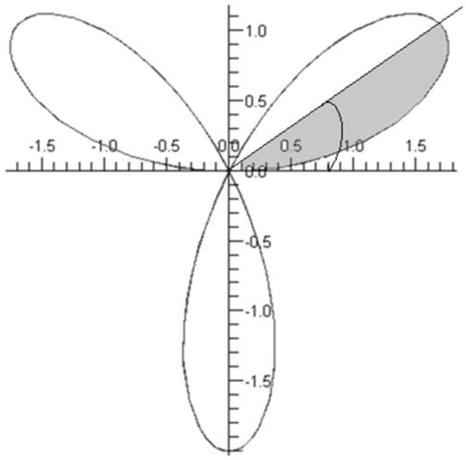


Рис. IV.14

4.3. Найти площадь фигуры, ограниченной «трехлепестковой розой» $\rho = a\sin 3\varphi$.

Ответ: $\dfrac{\pi a^2}{4}$.

Указание. Используя формулу $S = \dfrac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta}\rho^2(\varphi)\,d\varphi$, найдите шестую часть искомой площади (выделена на рис. IV.14).

Домашнее задание

1. Изучить темы «Вычисление длины дуги кривой», «Вычисление объемов тел и площадей поверхностей вращения».
2. Найти площади фигур, ограниченных данными линиями:

а) $y = 2x - x^2$, $y = -x$. *Ответ*: $4\dfrac{1}{2}$.

б) осью Ox и одной аркой циклоиды

$$\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t). \end{cases}$$

Ответ: 12.

в) одним лепестком «розы» $\rho = a\cos 2\varphi$, $a > 0$. *Ответ*: $\dfrac{\pi a^2}{8}$.

Повышенный уровень.

г) $\left(x^2 + y^2\right)^3 = a^2x^2y^2$. *Ответ*: $\dfrac{\pi a^2}{8}$.

V. Вычисление длин дуг кривых. Вычисление объемов тел и площадей поверхностей вращения

1. Выяснить вопросы по выполнению домашнего задания и в случае надобности решить вызвавшие затруднения задачи на доске. Рассмотреть формулы вычисления длины дуги кривой.

1. Если дуга кривой задана уравнением $y = f(x)$ в промежутке $[a;b]$ и функция $y = f(x)$ имеет непрерывную производную в указанном проме-

жутке, то длина дуги кривой, содержащейся между двумя точками с абсциссами $x=a$, $x=b$, определяется по формуле

$$l = \int_a^b \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx = \int_a^b \sqrt{1+\left(y'\right)^2}\,dx \qquad \text{(V.1)}$$

2. Если кривая задана уравнением $x=g(y)$ в промежутке $[\,c;d\,]$ и функция $x=g(y)$ имеет непрерывную производную в этом промежутке, то длина дуги кривой определяется по формуле

$$l=\int_c^d \sqrt{1+\left(g'(y)\right)^2}\,dy. \qquad \text{(V.2)}$$

3. Если кривая задана параметрическими уравнениями $x=x(t)$, $y=y(t)$, $t\in[t_1;t_2]$, где $x(t)$, $y(t)$ – непрерывно дифференцируемые функции, то длина дуги кривой вычисляется по формуле

$$l=\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2}\,dt. \qquad \text{(V.3)}$$

Если дуга – пространственная кривая $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$ $t\in[t_1;t_2]$, то ее длина определяется формулой

$$l=\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2+\left(z'(t)\right)^2}\,dt. \qquad \text{(V.4)}$$

4. Если задано полярное уравнение кривой $\rho=\rho(\varphi)$, $\varphi\in[\alpha;\beta]$, где $\rho(\varphi)$ и $\rho'(\varphi)$ непрерывны на отрезке $[\alpha;\beta]$, то длина дуги кривой вычисляется по формуле

$$l=\int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\rho(\varphi)\right)^2+\left(\rho'(\varphi)\right)^2}\,d\varphi. \qquad \text{(V.5)}$$

Обучающая задача 1. Вычислить длину дуги полукубической параболы $y^2=(x-1)^3$ между точками $A(2;-1)$ и $B(5;-8)$.

Решение. Разрешаем данное уравнение относительно y и находим y':

$$y=\pm(x-1)^{\frac{3}{2}}; \qquad y'=\pm\frac{3}{2}(x-1)^{\frac{1}{2}}.$$

Знаки $\pm$ в выражении y указывают, что кривая симметрична оси Ox; точки A и B, имеющие отрицательные ординаты, лежат на той ветке кривой, которая расположена ниже оси Ox.

Подставляя в формулу $I=\int\limits_a^b\sqrt{1+(y')^2}\,dx$, получим

$$l=\int\limits_{x_A}^{x_B}\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\int\limits_2^5\sqrt{1+\frac{9}{4}(x-1)}\,dx=\frac{1}{2}\int\limits_2^5\sqrt{9x-5}\,dx=$$

$$=\frac{1}{18}\int\limits_2^5(9x-5)^{\frac{1}{2}}\,d(9x-5)=\frac{1}{27}(9x-5)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_2^5\approx 7{,}63 \text{ (ед. длины)}.$$

Обучающая задача 2. Вычислить длину дуги развертки окружности

$$\begin{cases} x=a(\cos t+t\sin t),\\ y=a(\sin t-t\cos t).\end{cases}\quad \text{от } t=0 \text{ до } t=2\pi.$$

Решение. Дифференцируя по t, получим

$$x'_t=\big(a(\cos t+t\sin t)\big)'=a(-\sin t+\sin t+t\cos t)=at\cos t,$$

$$y'_t=\big(a(\sin t-t\cos t)\big)'=a(\cos t-\cos t+t\sin t)=at\sin t,$$

откуда

$$l=\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{\big(x'(t)\big)^2+\big(y'(t)\big)^2}\,dt=\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{a^2t^2\cos^2 t+a^2t^2\sin^2 t}\,dt=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}at\sqrt{\cos^2 t+\sin^2 t}\,dt=\int\limits_0^{2\pi}at\,dt=a\frac{t^2}{2}\Bigg|_0^{2\pi}=\frac{4\pi^2a}{2}=2\pi^2a \text{ (ед. длины)}.$$

Обучающая задача 3. Вычислить длину дуги кривой $\rho=a\cos^3\frac{\varphi}{3}$.

Решение. Половина этой кривой (рис. V.1) описывается концом полярного радиуса при изменении φ от 0 до $\frac{3}{2}\pi$.

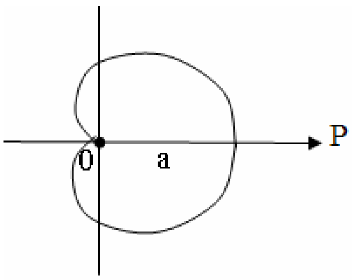


Рис. V.1

Из данного уравнения кривой $\rho=a\cos^3\frac{\varphi}{3}$ находим производную

$$\rho'(\varphi)=3a\cos^2\frac{\varphi}{3}\left(-\sin\frac{\varphi}{3}\right)\cdot\frac{1}{3}=-a\cos^2\frac{\varphi}{3}\sin\frac{\varphi}{3}$$

и дифференциал ее дуги

$$dl=\sqrt{\rho^2+(\rho')^2}\,d\varphi=\sqrt{a^2\cos^6\frac{\varphi}{3}+a^2\cos^4\frac{\varphi}{3}\sin^2\frac{\varphi}{3}}\,d\varphi=a\cos^2\frac{\varphi}{3}d\varphi.$$

Тогда длина всей кривой

$$l=2a\int_0^{\frac{3}{2}\pi}\cos^2\frac{\varphi}{3}d\varphi=a\int_0^{\frac{3}{2}\pi}\left(1+\cos\frac{2\varphi}{3}\right)d\varphi=$$

$$=a\left(\varphi+\frac{3}{2}\sin\frac{2\varphi}{3}\right)\Bigg|_0^{\frac{3}{2}\pi}=\frac{3}{2}a\pi \text{ (ед. длины).}$$

2. У доски студенты решают задачи.

2.1. Вычислить длину дуги кривой $y=\ln\sin x$ от $x_1=\dfrac{\pi}{3}$ до $x_2=\dfrac{2}{3}\pi$.

Указание. Воспользоваться формулой

$l=\int\limits_a^b\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx=\int\limits_a^b\sqrt{1+(y')^2}\,dx$. *Ответ*: $2\ln\sqrt{3}$.

2.2. Найти длину астроиды $\begin{cases}x=a\cos^3 t,\\ y=a\sin^3 t.\end{cases}$ *Ответ*: $6a$ ед. длины.

Указание. Воспользовавшись формулой $l=\int\limits_{t_1}^{t_2}\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2}\,dt$, найдите в силу симметрии фигуры $\dfrac{1}{4}$ длины кривой $t\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

2.3. Найти длину кардиоиды $\rho=a(1+\cos\varphi)$.

Указание. В силу симметрии фигуры найдите половину длины кривой $\varphi\in[0;\pi]$.

Ответ: $8a$.

Обучающая задача 4. Найти длину петли кривой $x=\sqrt{3}t^2$, $y=t-t^3$.

Решение. Найдем пределы интегрирования. Проведем анализ расположения кривой. Обе функции $x(t)$ и $y(t)$ определены при всех значениях *t*. Так как функция $x=\sqrt{3}t^2\ge 0$, то кривая лежит в правой полуплоскости. При изменении знака параметра *t* величина $x(t)$ не изменяется, а $y(t)$ меняет знак. Значит, кривая симметрична относительно оси *Ox*. Кроме того,

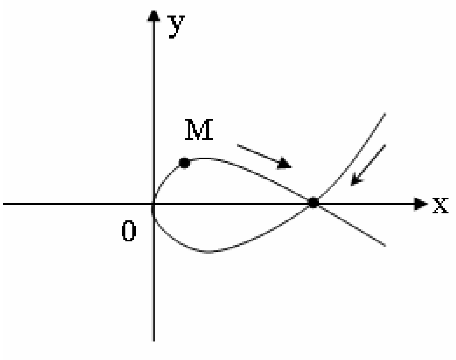


Рис. V.2

функция $x(t)$ принимает одно и тоже значение не более чем два раза. Отсюда следует, что точки самопересечения кривой лежат на оси Ox, т. е. их можно определить из уравнения $y = 0$ (рис. V.2).

На рисунке стрелками показано то направление, в котором текущая точка $M(x, y)$ пробегает кривую при изменении t от $-\infty$ до ∞. Но $y = 0$ при $t_1 = 0$, $t_2 = 1$, $t_3 = -1$. Так как $x(t_2) = x(t_3) = \sqrt{3}$, то точка $(\sqrt{3}; 0)$ является единственной точкой самопересечения кривой. Следовательно, мы должны интегрировать в пределах от $t_2 = -1$ до $t_3 = 1$.

Дифференцируя параметрические уравнения кривой по t, получим $x'_t = 2\sqrt{3}t$, $y'_t = 1 - 3t^2$, откуда

$$dl = \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2}\,dt = \sqrt{12t^2 + 1 - 6t^2 + 9t^4}\,dt = \sqrt{9t^4 + 6t^2 + 1}\,dt =$$

$$= \sqrt{\left(3t^2 + 1\right)^2}\,dt = \left(3t^2 + 1\right)dt.$$

Следовательно,

$$l = \int_{-1}^{1} \left(1 + 3t^2\right)dt = \left(t + t^3\right)\Big|_{-1}^{1} = 4 \text{ (ед. длины)}.$$

3. Вычисление объемов тел и площадей боковых поверхностей тел вращения. Рассмотреть вычисление объемов тел с помощью определенного интеграла.

1^0. Если площадь $S(x)$ сечения тела плоскостью, перпендикулярной к оси Ox, является непрерывной функцией на отрезке $[a; b]$, то объем части тела, заключенный между плоскостями $x = a$ и $x = b$, перпендикулярными к оси Ox (рис.V.3), находится по формуле

$$V = \int_a^b S(x)\,dx. \qquad \text{(V.6)}$$

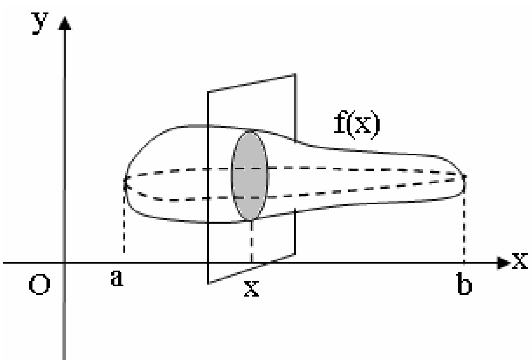


Рис. V.3

2^0. Объем тела вращения, образованного вращением вокруг оси Ox (или оси Oy) криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$, осью Ox и двумя вертикалями $x = a$ и $x = b$, выражается соответственно формулами:

$$V_x = \pi\int_a^b y^2\,dx. \tag{V.7}$$

$$V_y = 2\pi\int_a^b xy\,dx. \tag{V.8}$$

3^0. Если фигура, ограниченная кривыми $y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x)$ $\left(0 \le f_1(x) \le f_2(x)\right)$ и прямыми $x = a$, $x = b$, вращается вокруг оси Ox, то объем тела вращения

$$V_x = \pi\int_a^b \left(y_2{}^2 - y_1{}^2\right)dx. \tag{V.9}$$

4^0. Если тело образовано при вращении вокруг оси Oy криволинейной трапеции, ограниченной $x = \varphi(y)$ ($\varphi(y) \ge 0$) и прямыми $x = 0$, $y = c$, $y = d$, то объем тела вращения равен:

$$V_y = \pi\int_c^d x^2\,dy. \tag{V.10}$$

5^0. Если криволинейная трапеция ограничена кривой, заданной параметрически $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases}$, где $t \in [t_1; t_2]$, то объем тела вращения вокруг оси Ox находится по формуле

$$V_x = \pi\int_{t_1}^{t_2} \left(y(t)\right)^2 x'(t)dt. \tag{V.11}$$

6^0. Если криволинейный сектор, ограниченный кривой $r = r(\varphi)$ и лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$, вращается вокруг полярной оси, то объем тела вращения равен

$$V = \frac{2}{3}\pi\int_\alpha^\beta \rho^3 \sin\varphi\, d\varphi. \tag{V.12}$$

Обучающая задача 5. Найти объем тела, ограниченного двумя цилиндрами $x^2 + y^2 = a^2$ и $x^2 + z^2 = a^2$.

Решение. Изобразим на рисунке восьмую часть тела, расположенную в I октанте (рис. V.4). В поперечном сечении (перпендикулярном оси Ox)

тела получится квадрат. Его сторона равна ординате точки $M(x;y)$, лежащей на окружности $x^2+y^2=a^2$, т. е. $y=\sqrt{a^2-x^2}$. Следовательно, площадь сечения равна

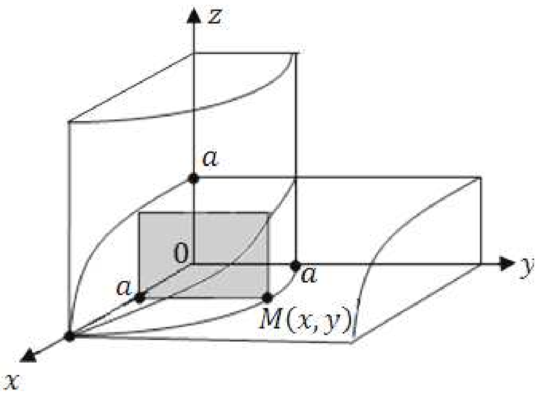


Рис. V.4

$$S(x)=y^2=\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)^2=a^2-x^2, 0\le x\le a.$$

Используя формулу $V=\int\limits_a^b S(x)\,dx$, находим

$$\frac{1}{8}V=\int\limits_0^a\left(a^2-x^2\right)dx=\left.\left(a^2x-\frac{x^3}{3}\right)\right|_0^a=\frac{2}{3}a^3, \text{ т. е. } V=\frac{16}{3}a^3 \text{ (ед}^3\text{).}$$

Обучающая задача 6. Найти объем тела вращения около оси *Ox* фигуры, образованной линиями $y=x^2$, $x=y^2$.

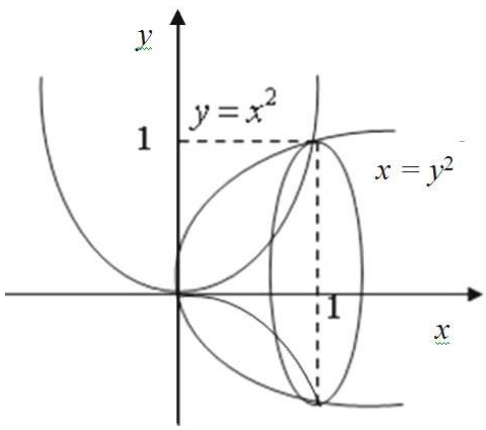


Рис. V.5

Решение. Тело вращения (рис. V.5) можно рассматривать как разность двух тел вращения криволинейных трапеций, ограниченных параболами $x=y^2$, $y=x^2$ на отрезке $[0;1]$, $x=1$ – абсцисса точки пересечения парабол.

Тогда объем тела вращения, как разность объемов указанных тел, будет

$$V_x=\pi\int\limits_0^1\left(\left(\sqrt{x}\right)^2-\left(x^2\right)^2\right)dx=\pi\int\limits_0^1\left(x-x^4\right)dx=\pi\left.\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^5}{5}\right)\right|_0^1=$$

$$=\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)=0,3\pi \text{ (ед}^3\text{.).}$$

Обучающая задача 7. Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линией $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$, вокруг оси *Ox* (рис. V.6).

Решение. Фигура, ограниченная астроидой (см. рис. V.6), при вращении вокруг оси *Ox* образует тело вращения, объем которого определяется формулой $V_x = \pi\int\limits_{t_1}^{t_2} \left(y(t)\right)^2 x'(t)\,dt$. Исходя из данных параметрических уравнений астроиды $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, имеем

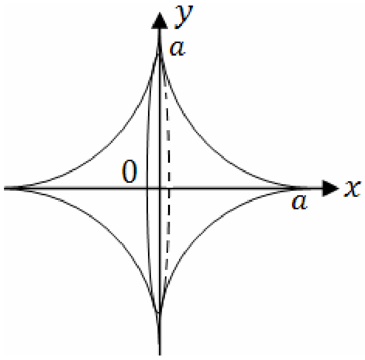


Рис. V.6

$$y^2 = a^2 \sin^6 t, \qquad dx = -3a\cos^2 t \sin t\,dt;$$

$$t = \frac{\pi}{2} \text{ при } x = 0, \qquad t = 0 \text{ при } x = a.$$

Тогда

$$V_x = 2\pi\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0} a^2 \sin^6 t(-3a)\cos^2 t \sin t\,dt = 6a^3\pi\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0}\left(1-\cos^2 t\right)^3 \cos^2 t\,d(\cos t) =$$

$$= 6a^3\pi\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0}\left(\cos^2 t - 3\cos^4 t + 3\cos^6 t - \cos^8 t\right)d(\cos t) =$$

$$= 6a^3\pi\left(\frac{\cos^3 t}{3} - \frac{3}{5}\cos^5 t + \frac{3}{7}\cos^7 t - \frac{1}{9}\cos^9 t\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{0} = \frac{32}{105}\pi a^3.$$

Обучающая задача 8. Кардиоида $\rho = a(1-\cos\varphi)$ вращается вокруг полярной оси. Найти объем тела вращения.

Решение. Воспользуемся формулой $V = \frac{2}{3}\pi\int\limits_{\alpha}^{\beta}\rho^3 \sin\varphi\,d\varphi$.

$$V = \frac{2}{3}\pi\int\limits_{0}^{\pi} a^3(1-\cos\varphi)^3 \sin\varphi\,d\varphi = \frac{2}{3}\pi a^3\int\limits_{0}^{\pi}(1-\cos\varphi)^3 d\left((1-\cos\varphi)\right) =$$

$$= \frac{2}{3}\pi a^3 \frac{(1-\cos\varphi)^4}{4}\Bigg|_{0}^{\pi} = \frac{8}{3}\pi a^3 \text{ (ед}^3\text{)}.$$

4. Преподаватель вместе со всей аудиторией решает на доске задачи.

4.1. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси *Oy* фигуры, лежащей в плоскости *Oxy* и ограниченной линиями $y^2 = 4 - x$, $x = 0$.

Решение. Изобразим тело на рисунке V.7.

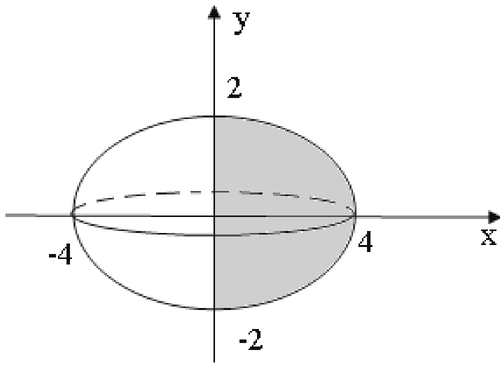


Рис. V.7

Очевидно, что

$$V_y=\pi\int_c^d x^2\,dy=\pi\int_{-2}^{2}\left(4-y^2\right)^2 dy=2\pi\int_0^2\left(4-y^2\right)^2 dy=2\pi\int_0^2\left(16-8y^2+y^4\right)dy=$$

$$=2\pi\left(16y-\frac{8}{3}y^3+\frac{y^5}{5}\right)\Bigg|_0^2=2\pi\left(32-\frac{64}{3}+\frac{32}{5}\right)=\frac{512\pi}{15}.$$

4.2. Найти объем части цилиндра, отсеченной плоскостью, которая проходит через диаметр $2R$ его основания под углом α к плоскости основания.

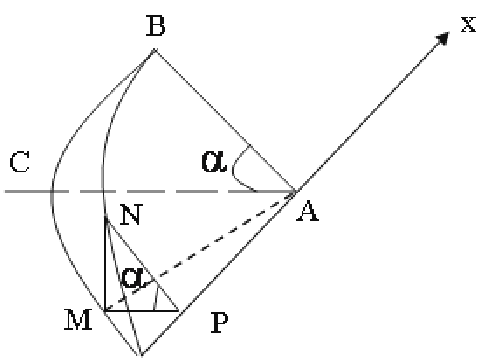


Рис. V.8

Решение. Изобразив половину данного тела (рис. V.8), замечаем, что всякое сечение его плоскостью, параллельной плоскости *ABC*, представляет прямоугольный треугольник.

Из прямоугольного треугольника *AMP* имеем

$$MP^2=MA^2-AP^2=R^2-(R-x)^2.$$

Из прямоугольного треугольника *PMN* имеем

$$MN=MP\cdot\operatorname{tg}\alpha.$$

Площадь сечения $S(x)$ как прямоугольного треугольника с катетами *MP* и *MN*:

$$S(x)=\frac{1}{2}MP\cdot MN=\frac{1}{2}MP^2\cdot\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}\left(R^2-(R-x)^2\right)\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}\left(2Rx-x^2\right)\operatorname{tg}\alpha.$$

Тогда, используя формулу $V=\int_a^b S(x)\,dx$, получим

$$V=\int_a^b S(x)\,dx=\int_0^{2R}\frac{1}{2}\left(2Rx-x^2\right)\operatorname{tg}\alpha\,dx=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{2}\int_0^{2R}\left(2Rx-x^2\right)dx=$$

$$=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{2}\left(Rx^2-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^{2R}=\frac{2}{3}R^3\operatorname{tg}\alpha\ \text{(ед}^3\text{)}.$$

4.3. Студенты самостоятельно выполняют задание.

Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $2y=x^2$, $2x+2y-3=0$, вокруг оси Ox.

Ответ: $\frac{91}{3}\pi$.

5. Рассмотрим правила вычисления площади боковой поверхности тела вращения.

1. Если дуга кривой, заданная неотрицательной функцией $y = f(x)$, $x \in [a;b]$, вращается вокруг оси *Ox*, то площадь боковой поверхности тела вращения вычисляется по формуле

$$\sigma_x = 2\pi \int_a^b |y| \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, dx, \tag{V.13}$$

где a и b – абсциссы начала и конца дуги.

2. Если дуга кривой, заданная неотрицательной функцией $x = \varphi(y)$, $y \in [c;d]$, вращается вокруг оси *Oy*, то площадь поверхности вращения вычисляется по формуле

$$\sigma_y = 2\pi \int_c^d |x| \sqrt{1 + \left(\varphi'(y)\right)^2}\, dy, \tag{V.14}$$

где c и d – ординаты начала и конца дуги.

3. Если дуга кривой задана параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases} \quad t \in [t_1;t_2], \text{ причем } y(t) \geq 0, \text{ то}$$

$$\sigma_x = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y(t) \sqrt{\left(x'_t\right)^2 + \left(y'_t\right)^2}\, dt. \tag{V.15}$$

4. Если дуга задана в полярных координатах $\rho = \rho(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha;\beta]$, то

$$\sigma_x = 2\pi \int_\alpha^\beta \rho |\sin\varphi| \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}\, d\varphi. \tag{V.16}$$

Обучающая задача 9. Найти площадь поверхности шара радиуса *R*, рассматривая его как тело вращения.

Решение. а) Поверхность шара (сферы) может быть образована вращением дуги кривой $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ (полуокружности), где $-R \leq x \leq R$, вокруг оси *Ox* (или дуги $x = \sqrt{R^2 - y^2}$ вокруг оси *Oy*). Применим формулу

$$\sigma_x = 2\pi \int_a^b |y| \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, dx.$$

$$y = \sqrt{R^2 - x^2}, \quad y' = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}}, \quad \sqrt{1 + (y')^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}.$$

$$\sigma_x = 2\pi \int\limits_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}} dx = 2\pi \int\limits_{-R}^{R} R\, dx = 2\pi R(x)\Big|_{-R}^{R} = 4\pi R^2.$$

б) Если окружность задана параметрическими уравнениями: $\begin{cases} x = R\cos t, \\ y = R\sin t, \end{cases}$ то, применив формулу $\sigma_x = 2\pi \int\limits_{t_1}^{t_2} y(t)\sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2}\, dt$, находим

$$\frac{1}{2}\sigma_x = 2\pi \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} R\sin t \sqrt{\left((R\cos t)'_t\right)^2 + \left((R\sin t)'_t\right)^2}\, dt =$$

$$= 2\pi \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} R\sin t \cdot \sqrt{(-R\sin t)^2 + (R\cos t)^2}\, dt = 2\pi \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} R\sin t \sqrt{R^2\left(\sin^2 t + \cos^2 t\right)}\, dt =$$

$$= 2\pi \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} R^2 \sin t\, dt = 2\pi R^2(-\cos t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi R^2.$$

Следовательно, $\sigma_x = 4\pi R^2$.

в) Если окружность задана в полярных координатах уравнением $\rho = R$, то, применяя формулу $\sigma_x = 2\pi \int\limits_{\alpha}^{\beta} \rho |\sin\varphi| \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}\, d\varphi$, находим

$$\frac{1}{2}\sigma_x = 2\pi \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} R\sin\varphi \sqrt{R^2 + (R')^2}\, d\varphi = 2\pi \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} R\sin\varphi \cdot R d\varphi = 2\pi R^2 \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi d\varphi =$$

$$= 2\pi R^2(-\cos\varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi R^2, \text{ т. е.}$$

$$\sigma_x = 4\pi R^2.$$

Обучающая задача 10. (повышенный уровень сложности). Найти площадь поверхности тела, образованного вращением вокруг оси *Oy* петли кривой $9ax^2 = y(3a - y)^2$.

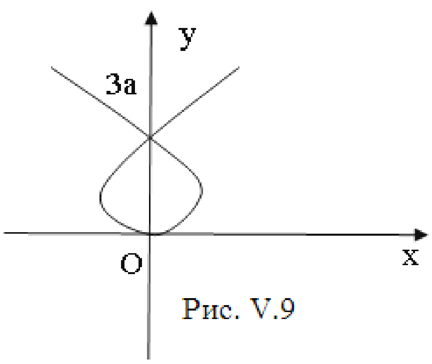


Рис. V.9

Решение. Петля данной кривой (рис. V.9) описывается текущей точкой при изменении переменной y от 0 до $3a$. Поэтому, дифференцируя по переменной y обе части ее уравнения, получим

$$18a\,x\,x'=(3a-y)^2-2y(3a-y),\ 18a\,x\,x'=(3a-y)(3a-y-2y),$$

$$18a\,x\,x'=3(3a-y)(a-y),$$

$$x\,x'=\frac{3(3a-y)(a-y)}{18a}=\frac{(3a-y)(a-y)}{6a}.$$

И, подставляя в формулу $\sigma_y=2\pi\int\limits_c^d|x|\sqrt{1+(\varphi'(y))^2}\,dy$, имеем

$$\sigma_y=2\pi\int\limits_0^{3a}x\sqrt{1+(x'_y)^2}\,dy=2\pi\int\limits_0^{3a}\sqrt{x^2+(xx')^2}\,dy=$$

$$=2\pi\int\limits_0^{3a}\sqrt{\frac{y(3a-y)^2}{9a}+\frac{(3a-y)^2(a-y)^2}{36a^2}}\,dy=2\pi\int\limits_0^{3a}\frac{3a-y}{6a}\sqrt{4ay+(a-y)^2}\,dy=$$

$$=\frac{\pi}{3a}\int\limits_0^{3a}(3a-y)\sqrt{2ay+a^2+y^2}\,dy=\frac{\pi}{3a}\int\limits_0^{3a}(3a-y)\sqrt{(a+y)^2}\,dy=$$

$$=\frac{\pi}{3a}\int\limits_0^{3a}(3a-y)(a+y)\,dy=\frac{\pi}{3a}\int\limits_0^{3a}\left(3a^2+2ay-y^2\right)dy=$$

$$=\frac{\pi}{3a}\left(3a^2y+ay^2-\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^{3a}=\frac{\pi}{3a}\left(9a^3+9a^3-9a^3\right)=3\pi a^2.$$

6. На доске одновременно три студента решают задачи. Студент, соответствующий II уровню обучения, с помощью преподавателя и аудитории решает задачу 6.1. Студенты, соответствующие III уровню обучения, задачи 6.2 и 6.3 решают самостоятельно. Решение этих задач обсуждается после решения задачи 6.1.

6.1. Найти площадь боковой поверхности тела, полученного вращением фигуры, ограниченной линиями $y^2=4ax$, $x=0$, $x=3a$, вокруг оси абсцисс (рис. V.10).

Указание. Примените формулу $\sigma_x=2\pi\int\limits_a^b|y|\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$, где $y=2\sqrt{ax}$, $y'=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{x}}$.

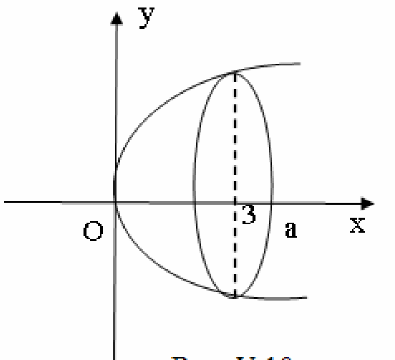


Рис. V.10

Ответ: $\dfrac{56}{3}\pi a^2$.

6.2. Найти площадь поверхности тела, образованного вращением вокруг оси Ox одной арки циклоиды $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t. \end{cases}$

Указание. Примените формулу $\sigma_x = 2\pi \int\limits_{t_1}^{t_2} y(t)\sqrt{\left(x_t'\right)^2 + \left(y_t'\right)^2}\, dt$.

Ответ: $\frac{64}{3}\pi$.

6.3. Найти площадь поверхности тела, образованного вращением кардиоиды $\rho = 2a(1 + \cos\varphi)$ вокруг полярной оси.

Ответ: $\frac{128}{5}\pi a^2$.

Домашнее задание

1. Изучить теоретический материал по теме «Физические и механические приложения определенного интеграла».

2. Найти длину дуги кривой:

а) $y^2 = x^3$ от $x = 0$ до $x = 1$ ($y \geq 0$).

Ответ: $\frac{8}{27}\left(\frac{13}{8}\sqrt{13} - 1\right)$.

б) одной арки циклоиды $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$ $t \in [0; 2\pi]$.

Ответ: $8a$.

в) длину первого витка логарифмической спирали $\rho = e^{\varphi}$.

Ответ: $\sqrt{2}\left(e^{2\pi} - 1\right)$.

3. а) Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной кривой $y^2 = (x-1)^3$ и прямой $x = 2$.

Ответ: $\frac{\pi}{4}$.

б) Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox арки циклоиды $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$, $t \in [0; 2\pi]$.

Ответ: $5\pi^2 a^3$.

4. а) Найти площадь боковой поверхности тела, образованного вращением кривой $x^2 = y + 2$, $y = 1$ вокруг оси Oy.

Ответ: $\frac{\pi}{6}\left(13\sqrt{13} - 1\right)$.

б) Найти площадь поверхности тела, образованного вращением окружности $\rho = 2\cos\varphi$ вокруг полярной оси.

Ответ: 4π.

в) (повышенный уровень сложности). Найти площадь поверхности тела, образованного вращением вокруг оси Oy дуги окружности $x^2 + (y - b)^2 = R^2$ между ее точками, где $y = y_1$ и $y = y_2$.

Указание. Воспользоваться формулой $\sigma_y = 2\pi \int\limits_{y_1}^{y_2} x\sqrt{1 + (x')^2}\,dy$, предварительно отыскав x, x'.

Ответ: $2\pi R(y_2 - y_1)$.

VI. Физические (механические) приложения определенного интеграла

1. В начале занятия выяснить вопросы по выполнению домашнего задания и, в случае необходимости, разобрать решения задачи на доске.

2. Рассмотреть физические (механические) приложения определенного интеграла.

2.1. Путь, пройденный точкой. Если точка движется по некоторой кривой и абсолютная величина ее скорости $V = v(t)$ есть известная функция времени t, то путь, пройденный точкой за промежуток времени $[t_1, t_2]$, равен

$$S = \int\limits_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt. \qquad \text{(VI.1)}$$

2.2. Работа переменной силы, заданной функцией $F = F(x)$ и направленной вдоль оси Ox на отрезке $[a, b]$, равна интегралу

$$A = \int\limits_{a}^{b} F(x)\,dx. \qquad \text{(VI.2)}$$

2.3. Давление жидкости на горизонтальную пластину равно весу столба этой полуплоскости (закон Паскаля), т. е.

$$P = gSh\gamma, \qquad \text{(VI.3)}$$

где g – ускорение свободного падения; γ – плотность жидкости; S – площадь пластинки; h – глубина ее погружения.

Давление жидкости на вертикальную пластину, ограниченную линиями $x = a$, $x = b$, $y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x)$ (рис VI.1), вычисляется по формуле

$$P = g\int_a^b \gamma\left(f_2(x) - f_1(x)\right)x\,dx. \qquad \text{(VI.4)}$$

2.4 Статическим моментом относительно оси u материальной точки A, имеющей массу m и отстоящей от оси u на расстоянии d, называется число $M_u = md$.

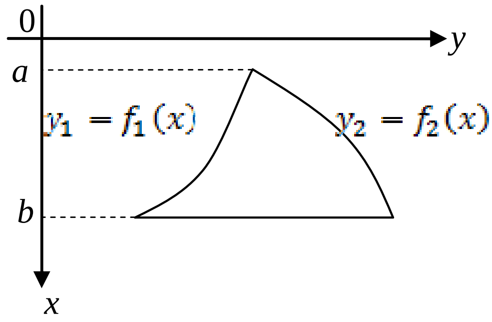


Рис. VI.1

Если дуга плоской материальной кривой задана уравнением $y = f(x)$, где $x \in [a;b]$, и имеет плотность $\gamma = \gamma(x)$, то статические моменты этой дуги M_x и M_y относительно координатных осей Ox и Oy находят по формулам:

$$M_x = \int_a^b \gamma(x) f(x)\,dl = \int_a^b \gamma(x) f(x)\sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\,dx, \qquad \text{(VI.5)}$$

$$M_y = \int_a^b \gamma(x)\,x\,dl = \int_a^b \gamma(x)\,x\sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\,dx, \qquad \text{(VI.6)}$$

где $dl = \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\,dx$,

$dl = \sqrt{\left(x'_t\right)^2 + \left(y'_t\right)^2}\,dt$, $dl = \sqrt{\rho^2 + \left(\rho'_\varphi\right)^2}\,d\varphi$ – дифференциал дуги.

Моментом инерции относительно оси u материальной точки массой m, отстоящей от оси u на расстоянии d, называется число:

$$I_u = md^2.$$

Моменты инерции дуги плоской материальной кривой $y = f(x)$, где $x \in [a;b]$, с заданной плотностью $\gamma = \gamma(x)$, равны соответственно

$$I_x = \int_a^b \gamma(x)\left(f(x)\right)^2\sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\,dx, \qquad \text{(VI.7)}$$

$$I_y = \int_a^b \gamma(x)\,x^2\sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\,dx. \qquad \text{(VI.8)}$$

Координаты центра масс дуги плоской материальной кривой $y = f(x)$, где $x \in [a;b]$, с плотностью $\gamma = \gamma(x)$ вычисляют по формулам:

$$x_c = \frac{M_y}{m} = \frac{\int\limits_a^b \gamma(x) x \sqrt{1+\left(f^{/}(x)\right)^2}\,dx}{m}, \tag{VI.9}$$

$$y_c = \frac{M_x}{m} = \frac{\int\limits_a^b \gamma(x)\, f(x) \sqrt{1+\left(f^{/}(x)\right)^2}\,dx}{m}, \tag{VI.10}$$

где m – массу дуги находим по формуле

$$m = \int\limits_a^b \gamma(x) \sqrt{1+\left(f^{/}(x)\right)^2}\,dx. \tag{VI.11}$$

2.5. Для плоской фигуры, ограниченной кривыми $y = f_1(x),\ y = f_2(x),\ f_1(x) \le f_2(x)$ и прямыми $x = a,\ x = b,\ (a \le x \le b)$ статические моменты выражаются формулами:

$$M_x = \frac{1}{2}\int\limits_a^b \gamma(x)\left(f_2^2(x) - f_1^2(x)\right)dx, \tag{VI.12}$$

$$M_y = \int\limits_a^b x\,\gamma(x)\left(f_2(x) - f_1(x)\right)dx. \tag{VI.13}$$

Координаты центра масс плоской фигуры вычисляются по формулам:

$$x_c = \frac{M_y}{m} = \frac{\frac{1}{2}\int\limits_a^b x\,\gamma(x)\left(f_2(x) - f_1(x)\right)dx}{\int\limits_a^b \gamma(x)\left(f_2(x) - f_1(x)\right)dx}, \tag{VI.14}$$

$$y_c = \frac{M_x}{m} = \frac{\frac{1}{2}\int \gamma(x)\left(f_2^2(x) - f_1^2(x)\right)dx}{\int\limits_a^b \gamma(x)\left(f_2(x) - f_1(x)\right)dx}. \tag{VI.15}$$

Обучающая задача 1. Материальная точка M движется прямолинейно со скоростью $v(t) = 3t^2 + 2t + 2$ (м/с). Найти путь, пройденный точкой за промежуток времени $[0;3]$. Чему равна средняя скорость движения за этот промежуток?

Решение. Согласно формуле (VI.1) имеем

$$S = \int\limits_0^3 (3t^2 + 2t + 2)dt = (t^3 + t^2 + 2t)\Big|_0^3 = 27 + 9 + 6 = 42\ (\text{м}),$$

$$v_{cp} = \frac{S}{t} = \frac{42}{3} = 14\,(\text{м/с}).$$

Обучающая задача 2. Котел имеет форму параболоида вращения. Радиус его основания R = 3м, глубина H = 5м. Котел наполнен жидкостью, плотность которой $\gamma = 0{,}8$ (г/см^3). Вычислить работу, которую нужно затратить, чтобы выкачать жидкость из котла.

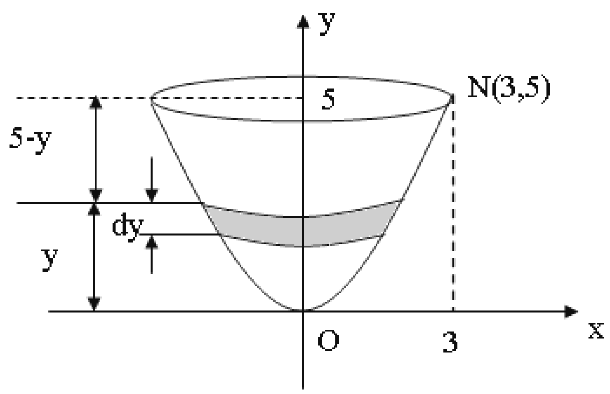


Рис. VI.2

Решение. Сечение котла плоскостью Oxy есть парабола (рис. VI.2), уравнение которой $y = ax^2$. Точка $N(3;5)$ принадлежит параболе, поэтому ее координаты удовлетворяют уравнению параболы, т. е. $5 = a \cdot 3^2$, отсюда $a = \frac{5}{9}$.

Тогда $y = \frac{5}{9}x^2$ – уравнение параболы.

Работа, затрачиваемая на поднятие тела весом P на высоту h, равна Ph. Но различные слои жидкости в котле находятся на различных глубинах и высота поднятия до края котла различных слоев неодинакова. Для решения задачи применяем так называемый «метод дифференциалов» (общая схема II).

1. Работа, затрачиваемая на выкачивание слоя жидкости, толщиной y, $y \in [0; H]$, есть функция от y, т. е. $A = A(y)$.

2. Находим главную часть приращения A при изменении y на величину dy, т. е. находим дифференциал dA функции $A(y)$.

Ввиду малости dy считаем, что «элементарный слой» жидкости находится на одной глубине $(5 - y)$ от края котла (см. рис. VI.2).

Тогда $$dA = dP(5 - y), \quad dP = \gamma g dV,$$

где dP – вес этого слоя; g – ускорение свободного падения; γ – плотность жидкости, dV – объем «элементарного слоя» жидкости.

Очевидно, $dV = \pi x^2 dy$, т. к. элементарный слой представляет собой цилиндр с высотой dy, радиусом основания x.

Так как из уравнения параболы $x^2 = \frac{9}{5}y$, то $dV = \pi\frac{9}{5}ydy$.

Тогда $dP = \gamma g\frac{9\pi}{5}ydy$, а $dA = \gamma g\frac{9\pi}{5}y(5 - y)dy$.

Учитывая, что $0 \le y \le 5$, получим

$$A=\int_0^5 \gamma g\frac{9\pi}{5}y(5-y)dy=\frac{9\pi}{5}\gamma g\int_0^5\left(5y-y^2\right)dy=\frac{9\pi}{5}\gamma g\left(\frac{5y^2}{2}-\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^5=$$

$$=\frac{9\pi}{5}\gamma g\left(\frac{125}{2}-\frac{125}{3}\right)=\frac{9\cdot125}{5}\pi\gamma g\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)=\frac{75}{2}\pi\gamma g\,.$$

Подставив вместо γ = 800 кг/м^3, g = 9,8 м/с^2, получим

$$A=\frac{75}{2}\pi\cdot800\cdot9{,}8=30000\cdot9{,}8\pi\approx294300(\text{Дж}).$$

Обучающая задача 3. Найти давление воды (плотность γ) на вертикальный прямоугольный шлюз с основанием 18 м и высотой 6 м.

Решение. Введем систему координат, как указано на рис. VI.3.

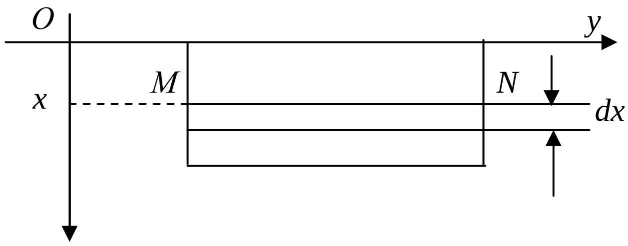


Рис. VI.3

Давление жидкости на различные слои шлюза разное: зависит от глубины погружения *x*. Для решения задачи применим «метод дифференциала» (общая схема II).

1. Пусть часть искомой величины P есть функция от *x*: $P=P(x)$ – давление на часть прямоугольника, соответствующая отрезку $[0;x]$, $x\in[0;6]$.

2. Дадим аргументу приращение *dx*. Функция $P(x)$ получит приращение *dP* (на рис. VI.3 это полоска – слой толщиной *dx*). Найдем дифференциал *dP* этой функции. Ввиду малости *dx* будем приближенно считать полоску прямоугольником, все точки которого находятся на одной глубине *x*. Тогда по закону Паскаля $dP=\gamma g\underbrace{MN\cdot dx}_{S}\cdot\underbrace{x}_{h}=\gamma g\cdot18xdx$.

3. Интегрируя полученное равенство в пределах от *x* = 0 до *x* = 6, получим

$$P=\int_0^6\gamma g18xdx=18\gamma g\int_0^6 xdx=18\gamma g\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^6=9\gamma g\,x^2\Big|_0^6=324\gamma g(\text{кН}).$$

Обучающая задача 4. При условиях предыдущей задачи найти, на какой глубине $x = c$ надо разделить шлюз горизонтальной прямой, чтобы давление воды на верхние и нижние части шлюза было одинаково.

Решение. Определим давление воды на каждую часть шлюза, интегрируя dp в пределах от 0 до c и в пределах от c до 6, затем приравниваем интегралы друг другу:

$$18\gamma g\int_0^c xdx = 18\gamma g\int_c^6 xdx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^c = \left.\frac{x^2}{2}\right|_c^6 \text{; получим уравнение } \left.x^2\right|_0^c = \left.x^2\right|_c^6.$$

Отсюда $c^2 = 36 - c^2, 2c^2 = 36, c^2 = 18, c = 3\sqrt{2} \approx 4{,}23(\text{м})$.

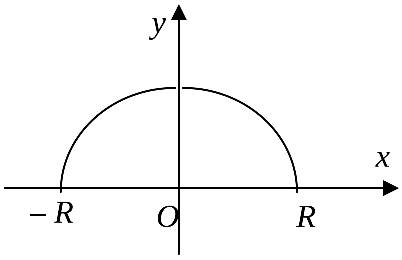


Рис. VI.4

Обучающая задача 5. Найти координаты центра масс однородной дуги полуокружности и момент инерции относительно оси Ox (рис. VI.4).

Решение. Применим формулу (VI.10), учитывая, что $\gamma(x) = 1$. Согласно формуле (VI.5), имеем

$$M_x = \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}\sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}}dx = R\int_{-R}^{R} dx = Rx\Big|_{-R}^{R} = 2R^2.$$

Так как l – длина дуги полуокружности с радиусом R, то $l = \pi R$, а т. к. $\gamma = 1$, то $m = l$.

Тогда $y_c = \frac{M_x}{m} = \frac{2R^2}{\pi R} = \frac{2R}{\pi}$, $x_c = 0$, т. к. центр масс находится на оси симметрии, а осью симметрии является ось Oy. Находим момент инерции дуги относительно оси Ox по формуле (VI.7)

$$I_x = \int_{-R}^{R}\left(R^2 - x^2\right)\sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}}\,dx = R\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2 - x^2}\,dx = 2R\int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}\,dx =$$

$$= \left|\begin{array}{l} x = R\sin t, \\ dx = R\cos t\,dt, \\ x_1 = 0,\ x_2 = R \\ t_1 = 0,\ t_2 = \dfrac{\pi}{2} \end{array}\right| = 2R\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{R^2 - R^2\sin^2 t}\cdot R\cos t\,dt = 2R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt =$$

$$= R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1 + \cos 2t\right)dt = R^2\left.\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\right|_0^{\frac{\pi}{2}} = R^2\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\sin\pi\right) = \frac{\pi R^2}{2}.$$

Обучающая задача 6. Найти центр тяжести фигуры, расположенной в первой четверти и ограниченной эллипсом $4x^2+9y^2=36$ и окружностью $x^2+y^2=9$ (рис. VI.5). Положить, что $\gamma(x)=1$.

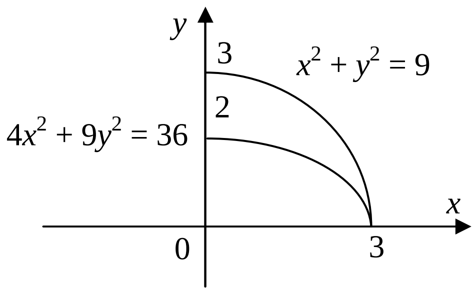


Рис. VI.5

Решение. Вычислим сначала статические моменты по формулам (VI.12), (VI.13), учитывая, что $\gamma(x)=1$.

$$M_x=\frac{1}{2}\int_0^3\left(f_2^2(x)-f_1^2(x)\right)dx=\frac{1}{2}\int_0^3\left(\left(9-x^2\right)-\frac{4}{9}\left(9-x^2\right)\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^3\left(5-\frac{5}{9}x^2\right)dx=\frac{1}{2}\left(5x-\frac{5}{27}x^3\right)\Bigg|_0^3=\frac{5}{2}\left(x-\frac{x^3}{27}\right)\Bigg|_0^3=5,$$

$$M_y=\int_0^3 x\left(f_2(x)-f_1(x)\right)dx=\int_0^3 x\left(\sqrt{9-x^2}-\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}\right)dx=\frac{1}{3}\int_0^3 x\sqrt{9-x^2}\,dx=$$

$$=-\frac{1}{6}\int_0^3\left(9-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}d\left(9-x^2\right)=-\frac{1}{6}\cdot\frac{2\left(9-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{3}\Bigg|_0^3=-\frac{1}{9}\cdot\left(9-x^2\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^3=3.$$

Так как $\gamma(x)=1$, то масса фигуры численно совпадает с ее площадью.

Площадь четверти круга радиуса 3 равна $\frac{9\pi}{4}$, а площадь четверти эллипса с полуосями a = 3 и b = 2 равна $\frac{1}{4}\pi ab=\frac{3\pi}{2}$, поэтому площадь рассматриваемой фигуры $S=\frac{9\pi}{4}-\frac{3\pi}{2}=\frac{3\pi}{4}$. Таким образом,

$$x_c=\frac{M_y}{m}=\frac{3}{\frac{3\pi}{4}}=\frac{4}{\pi};\qquad y_c=\frac{M_x}{m}=\frac{5}{\frac{3\pi}{4}}=\frac{20}{3\pi}.$$

Обучающая задача 7. Водопроводная труба имеет диаметр 6 см, один ее конец соединен с баком, в котором уровень воды на 100 см выше верхнего края трубы, а другой закрыт заслонкой. Найти полное давление на заслонку.

Решение. Заслонка представляет собой круг радиусом 3 см. Разобьем площадь этого круга на элементы – полоски, параллельные поверхности воды. Площадь одного такого элемента, находящегося на расстоянии y от центра, равна (с точностью до бесконечно малых высшего порядка) $dS = 2\sqrt{9-y^2}dy$. Найдем силу давления, испытываемую этим элементом:

$$dP = 2\gamma g\left(103-y\right)\sqrt{9-y^2}dy = 1960\left(103-y\right)\cdot\sqrt{9-y^2}dy$$

(здесь $\gamma = 1$ г/см^3).

Следовательно,

$$P = 1960\int_{-3}^{3}\left(103-y\right)\sqrt{9-y^2}dy = 1960\left(103\left(\frac{y}{2}\sqrt{9-y^2}+\frac{9}{2}\arcsin\frac{y}{3}\right)+\right.$$

$$\left.\left.+103\left(\frac{y}{2}\sqrt{9-y^2}+\frac{9}{2}\arcsin\frac{y}{3}\right)+\frac{1}{3}\left(9-y^2\right)^{\frac{3}{2}}\right)\right|_{-3}^{3} = 980\cdot 927\pi \approx 0{,}09\pi\ .$$

Ответ: $\approx 0{,}09\pi\left(\text{Дж}\right)$.

Обучающая задача 8 (повышенный уровень). Найти давление воды на поверхность шара диаметром 4 м, если его центр находится на глубине 3 м от поверхности воды.

Решение. Проведем через центр шара вертикальную плоскость и выберем на ней прямоугольную систему координат *Оху*, как показано на рис. VI.6.

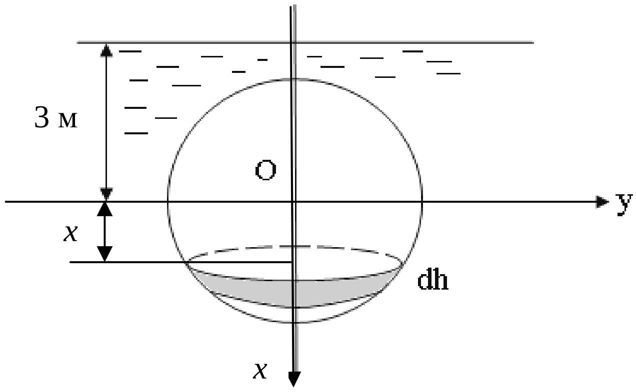


Рис. VI.6

Рассечем шар на глубине h горизонтальной плоскостью. Тогда давление воды на отсеченную часть поверхности шара будет некоторой функцией $P(h)$.

При изменении h на величину dh площадь S отсеченной поверхности шара как площадь поверхности вращения вокруг оси Oy изменится на величину $dS = 2\pi y dl$, где dl – дифференциал дуги окружности, а давление $p(h)$ изменится на величину $dp = 2\pi h y dl$.

Выразив dp через одну переменную x и интегрируя в пределах от $x=-2$ до $x=2$, найдем давление воды на всю поверхность шара. Из уравнения окружности $x^2+y^2=4$ найдем $y'=-\frac{x}{y}$ и затем

$$dl=\sqrt{1+(y')^2}dx=\sqrt{1+\frac{x^2}{y^2}}dx=\sqrt{\frac{x^2+y^2}{y^2}}\,dx=\frac{2}{y}\,dx;$$

Из рисунка находим $h=3+x$. Следовательно,

$$p=2\pi\int_{-2}^{2}(3+x)\,y\cdot\frac{2}{y}dx=4\pi\int_{-2}^{2}(3+x)dx=2\pi(3+x)^2\Big|_{-2}^{2}\approx 470880\pi(\text{Н}).$$

Давление на верхнюю половину поверхности шара получим, интегрируя dp в пределах от -2 до 0:

$$p_1=2\pi(3+x)^2\Big|_{-2}^{0}\approx 156960\pi(\text{Н}).$$

Давление на нижнюю половину поверхности будет

$$p_2=2\pi(3+x)^2\Big|_{0}^{2}\approx 313920\pi(\text{Н}).$$

Обучающая задача 9 (повышенный уровень). Шар лежит на дне бассейна глубиной H = 14 дм. Найти работу, необходимую для извлечения шара из воды, если его радиус R = 3 дм, а удельный вес δ = 2.

Решение. При подъеме шара до поверхности воды сила P_1, совершающая работу, постоянна и равна разности между весом шара и весом вытесняемой им воды:

$$P_1=\frac{4}{3}\pi R^3\delta-\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi R^3(\delta-1).$$

Поэтому работа A_1, необходимая для поднятия шара до поверхности воды, определяется элементарным путем, как произведение силы P_1 на высоту подъема $(H-2R)$:

$$A_1=P_1(H-2R)=\frac{4}{3}\pi R^3(\delta-1)(H-2R).$$

При дальнейшем подъеме шара сила P, совершающая работу, будет изменяться в зависимости от высоты x надводной части шара (рис VI.7):

$$P(x)=P_ш-P_в,$$

где $P_ш$ – вес шара; $P_в$ – вес воды, вытесняемой подводной частью шара, численно равный объему шарового сегмента с высотой h = $2R-x$.

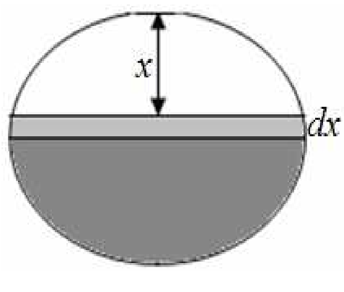


Рис. VI.7

Так как объем шарового сегмента вычисляется по формуле:

$$V=\pi H^2\left(R-\frac{1}{3}H\right),$$

то в нашем случае

$$P_в=\pi H^2\left(R-\frac{1}{3}H\right)=\frac{\pi}{3}(2R-x)^2(R+x)=\frac{\pi}{3}\left(x^3-3Rx^2+4R^3\right).$$

Очевидно и работа, совершаемая силой $P(x)$, будет некоторой функцией $A(x)$. Допуская, что при подъеме шара еще на малую высоту dx сила $P(x)$ остается неизменной, найдем приближенную величину приращения работы:

$$dA=P(x)dx=(P_ш-P_в)dx=\frac{\pi}{3}\left(4R^3(\delta-1)-x^3+3Rx^2\right)dx.$$

Интегрируя dA в пределах от $x=0$ до $x=2R$, найдем работу A_2, которую надо совершить, чтобы шар, поднятый со дна бассейна до поверхности, полностью извлечь из воды:

$$A_2=\frac{\pi}{3}\int_0^{2R}\left(4R^3(\delta-1)-x^3+3Rx^2\right)dx=\frac{\pi}{3}\left(4R^3(\delta-1)x-\frac{x^4}{4}+Rx^3\right)\Bigg|_0^{2R}=$$

$$=\frac{4}{3}\pi R^4(2\delta-1).$$

Вся искомая работа:

$$A=A_1+A_2=\frac{4}{3}\pi R^3\left(R+(\delta-1)H\right)=$$

$$=\frac{4}{3}\pi\cdot 27\left(0{,}3+(2-1)\cdot 1{,}4\right)\approx 600{,}4\pi \text{ (Дж)}.$$

Обучающая задача 10 (повышенный уровень). Прямоугольный резервуар с площадью горизонтального сечения $S=6м^2$ наполнен водой до высоты $H=5$ м. Определить время, в течение которого вся вода вытечет из резервуара через небольшое отверстие в его дне площадью $S_1=0{,}01$ м^2, если принять, что скорость истечения воды равна $0{,}6\sqrt{2gh}$, где h – высота уровня воды над отверстием; g – ускорение силы тяжести.

Решение. Согласно общей схеме I, разобьем искомое время T на большое число маленьких промежутков Δt_1, Δt_2, …, Δt_n и пусть за каждый такой промежуток уровень воды в резервуаре понижается на величину $\Delta x = \frac{H}{n}$ (рис. VI.8).

Если допустить, что в течение каждого малого промежутка времени Δt_i скорость истечения воды через отверстие в дне остается постоянной, равной ее значению в начале промежутка $0{,}6\sqrt{2g(H-x_i)}$, то прибавление в объеме воды, вытекающей с такой скоростью через отверстие в дне за промежуток Δt_i, равно объему опорожнившейся за этот же промежуток части резервуара, получим приближенно равенство

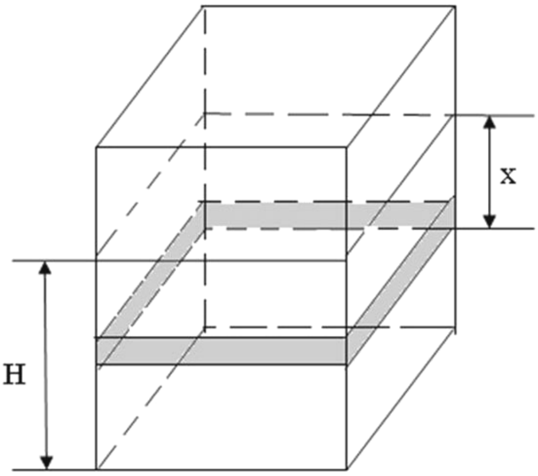


Рис. VI.8

$$0{,}6S_1\sqrt{2g(H-x_i)}\Delta t_i \approx S\Delta x.$$

Откуда $\Delta t_i \approx \dfrac{S\Delta x}{0{,}6S_1\sqrt{2g(H-x_i)}}$.

Приближенное значение всего искомого времени T_n будет равно сумме

$$T_n = \sum_{i=1}^{n}\Delta t_i \approx \sum_{i=1}^{n}\frac{S\Delta x}{0{,}6\sqrt{2g(H-x_i)}}, \qquad (*)$$

где по условию задачи точки x_i заключены на отрезке $[0;H]$.

Убедившись, что с возрастанием n погрешность полученного приближенного значения T стремится к нулю, найдем точное значение T как предел интегральной суммы (*) при $n \to +\infty$, т. е. как соответствующий определенный интеграл:

$$T = \frac{S}{0{,}6S_1\sqrt{2g}}\int_0^H (H-x)^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{2S}{0{,}6S_1\sqrt{2g}}(H-x)^{\frac{1}{2}}\Big|_H^0 = \frac{S}{0{,}6S_1}\sqrt{\frac{2H}{g}}.$$

Подставляя числовые значения параметров $S = 6$, $H = 5$, $S_1 = 0{,}01$, $g = 9{,}81$, получим Т ≈ 1019 с ≈ 16,99 мин.

Если бы убыль воды в резервуаре постоянно возмещалась, т. е. если бы уровень воды в нем оставался неизменным, то и скорость истечения воды была бы постоянной, равной $0{,}6\sqrt{2gh}$. В этом случае в каждую секунду через отверстие в дне резервуара будет вытекать объем воды $0{,}6\sqrt{2gH}$.

Поэтому при указанном предположении объем воды, вмещающийся в резервуаре, вытечет из него за время $T_1 = \dfrac{1}{2}\dfrac{S}{0,6S_1}\sqrt{\dfrac{2H}{g}}$.

Сопоставление этого результата с предыдущим показывает, что время истечения T без возмещения убыли воды в резервуаре, в два раза больше времени истечения T_1 при постоянном возмещении убыли воды; $T = 2T_1$.

Обучающая задача 11. Цилиндр высотой H = 1,5 м и радиусом R = 0,4 м наполнен газом под атмосферным давлением (10330 кг/м^2) и закрыт поршнем. Определить работу, затрачиваемую на изотермическое сжатие газа при перемещении поршня на расстояние h = 1,2 м внутрь цилиндра.

Решение. При изотермическом изменении состояния газа, когда его температура остается неизменной, зависимость между объемом V и давлением p газа выражается формулой $pV = c = const$ (Закон Бойля – Мариотта) рис. VI.9.

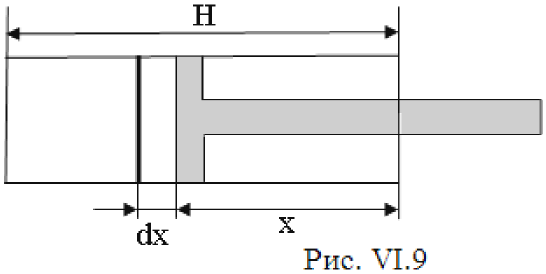


Рис. VI.9

Поэтому, если поршень будет вдвинут на x м внутрь цилиндра (см. рис. VI.9), то давление $p(x)$ газа на единицу площади поршня будет

$$p(x) = \frac{c}{V(x)} = \frac{c}{S(H-x)},$$

а давление на всю площадь S поршня будет

$$P(x) = Sp(x) = \frac{c}{H-x}.$$

Полагая, что работа, затрачиваемая при продвижении поршня на x м есть некоторая функция $A(x)$, и допуская, что при дальнейшем продвижении поршня на малое расстояние dx испытываемое им давление $p(x)$ остается неизменным, найдем дифференциал функции $A(x)$:

$$dA \approx p(x)dx = \frac{c}{H-x}dx.$$

Всей искомой работе A соответствует изменение x от 0 до h, поэтому

$$A = c\int_0^h \frac{dx}{H-x} = -c\ln|H-x|\Big|_0^h = c\ln\left|\frac{H}{H-h}\right|.$$

При H = 1,5 м, R = 0,4 м, h = 1,2 м, $p_0 = 10330$ кг/м^2 найдем

$$V_0 = \pi R^2 H = 0,24\pi\text{ м}^3;\;\; c = p_0 \cdot V_0 = 2479,2\pi.$$

$$A \approx 122951,7 \text{ (Дж)}.$$

3. На доске одновременно три студента решают задачи. Студент с помощью преподавателя и аудитории решает задачу 3.1. Студенты творческого уровня обучения задачи 3.2 и 3.3 решают самостоятельно. Решение этих задач обсуждается после решения задачи 3.1.

3.1. Найти работу, затраченную на выкачивание воды из корыта, имеющего форму полуцилиндра, длина которого *a*, радиус *r* (рис. VI.10).

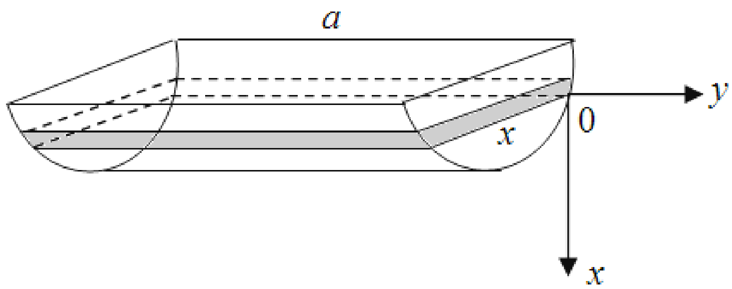


Рис. VI.10

Ответ: $\frac{2}{3}\gamma g a r^3$.

3.2. Найти давление бензина, находящегося в цилиндрическом баке высотой h = 3,5 м и радиусом основания r = 1,5 м, на его стенки, если γ = 900кг/м^3.

Ответ: 161700 π (Н).

3.3. Вертикальная плотина имеет форму трапеции, верхнее основание которой равно a = 70м, нижнее b = 50м, а высота h = 20м. Найти силу давления воды на плотину (рис. VI.11).

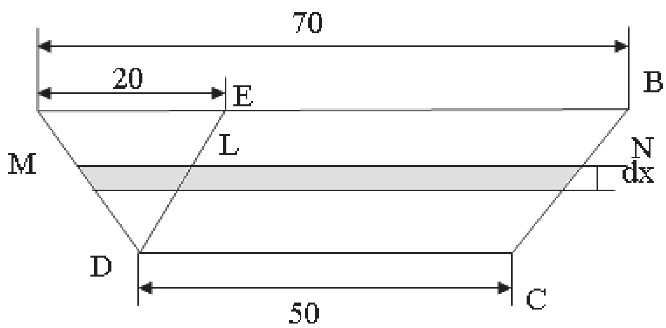


Рис. VI.11

Ответ: $P = \frac{(a+2b)h^2}{6} \approx 110853000\ (H)$.

4. Преподаватель у доски решает следующие задачи:

4.1. **(повышенный уровень)**. Какую работу затрачивает подъемный кран при извлечении железобетонной надолбы со дна реки глубиной 5 м, Если надолба имеет форму правильного тетраэдра с ребром 1 м, а плотность железобетона 2500 кг/м^3 (рис. VI.12).

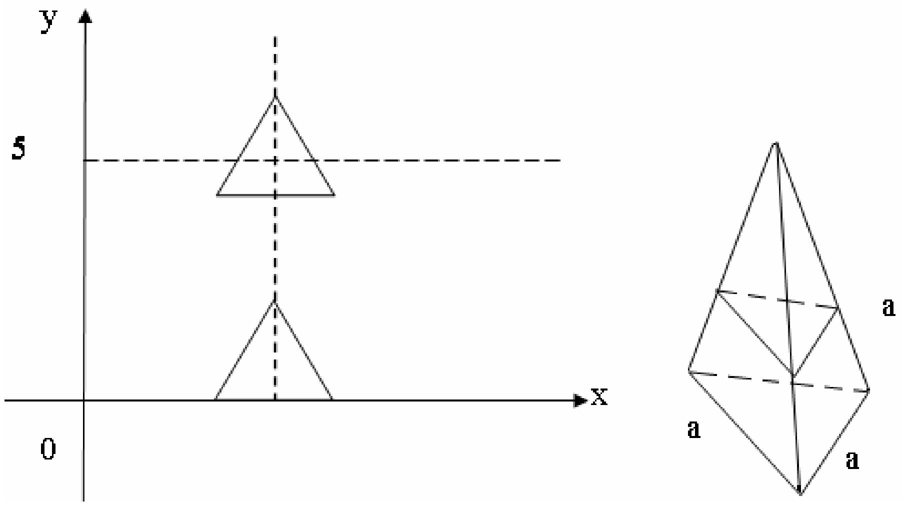


Рис. VI.12

Решение. Высота тетраэдра $h=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ м, объем тетраэдра $V=\dfrac{\sqrt{2}}{12}$ м^3. Вес надолбы в воде

$$P_1=\frac{1}{12}\sqrt{2}\cdot 2500\cdot 9{,}8-\frac{1}{12}\sqrt{2}\cdot 1000\cdot 9{,}8=1225\sqrt{2}\text{ (Н)},$$

поэтому работа на извлечение надолбы до момента появления на поверхности воды ее вершины составляет

$$A_1=1225\sqrt{2}\left(5-h\right)=1225\sqrt{2}\left(5-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)\approx 7247{,}5\text{ (Дж)}.$$

Теперь найдем работу A_2 на извлечение надолбы из воды. Пусть вершина тетраэдра вышла на высоту $(5 + y)$, тогда объем малого тетраэдра, вышедшего из воды $\dfrac{\sqrt{3}y^3}{8}$, а вес тетраэдра

$$P_2=\frac{2500\cdot 9{,}8}{12}\sqrt{2}-\left(\frac{1}{12}\sqrt{2}-\frac{1}{8}y^3\sqrt{3}\right)\cdot 1000\cdot 9{,}8\text{ (Н)}.$$

Следовательно,

$$A_2=\int\limits_0^h\left(\frac{24500}{12}\sqrt{2}-\frac{9800}{12}\sqrt{2}+\frac{9800}{8}y^3\sqrt{3}\right)dy=\int\limits_0^{\frac{\sqrt{6}}{3}}\left(1225\sqrt{2}+1225\sqrt[3]{3}y^3\right)dy=$$

$$= \left(1225\sqrt{2}y + \frac{1225}{4}\sqrt{3}y^4 \right) \Bigg|_0^{\frac{\sqrt{6}}{3}} \approx 1650,26 \text{ (Дж).}$$

Тогда $A = A_1 + A_2 = 7247,5 + 1650,26 = 8897,76$ (Дж).

4.2. Вычислить координаты центра тяжести однородной плоской фигуры, ограниченной линиями $y = 6 - x^2$, $y = 2$.

Решение. Изобразим фигуру на рис. VI.13.

Указание. Из однородности и симметричности данной фигуры следует, что $x_c = 0$. Для определения $y_c = 0$ воспользуйтесь формулой VI.15.

Ответ: $x_c = 0, y_c = 3,6$.

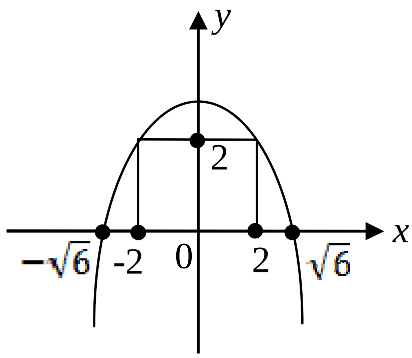


Рис. VI.13

Домашнее задание

1. Решить задачи.

а) Скорость тела меняется по закону $v = 0,03t^2$ м/с. Какой путь пройдет тело за 10 с? Чему равна средняя скорость движения?

Ответ: 10 м, 1 м/с.

б) Какую работу затрачивает подъемный кран при извлечении медного конуса из морской воды? Конус с вертикальной осью погружен в воду так, что его вершина находится на поверхности воды. Высота конуса H = 1 м, радиус основания R = 1 м, плотность меди γ_1 = 8900 кг/м^3, а морской воды γ_2 = 1020кг/м^3.

Ответ: $\frac{1}{3}\pi R^2 H^2 \left(\gamma_1 - \frac{3}{4}\gamma_2 \right) \approx 8519\pi(\text{Дж})$.

2. Выполнить задания из внеаудиторной контрольной работы.

VII. Решение нулевого варианта из внеаудиторной контрольной работы

1. Вычислить с точностью до двух знаков после запятой:

а) $\int\limits_1^{\sqrt{3}} \frac{x^2 dx}{1 + x^6}$.

Решение. Для вычисления первообразной подынтегральной функции воспользуемся методом подведения под знак дифференциала, получим

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{x^2dx}{1+x^6} = \frac{1}{3}\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx^3}{1+(x^3)^2} = \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\, x^3\,\Big|_1^{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}(\operatorname{arctg} 3\sqrt{3} - \operatorname{arctg} 1) = 0,20\,.$$

Ответ: 0,20.

б) $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} xe^{-2x}dx$.

Решение. Применим формулу интегрирования по частям $\int udv = uv - \int vdu$. Тогда

$$\int_0^{\frac{1}{2}} xe^{-2x}dx = \left|\begin{matrix} u = x, \quad du = dx, \\ dv = e^{-2x}dx,\; v = -\frac{1}{2}e^{-2x} \end{matrix}\right| = -\frac{1}{2}xe^{-2x}\Bigg|_0^{\frac{1}{2}} + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}e^{-2x}dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{e} + \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)e^{-2x}\Bigg|_0^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{4e} - \frac{1}{4e} + \frac{1}{4} = -\frac{1}{2e} + \frac{1}{4} = 0,07\,.$$

Ответ: 0,07.

2. Вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость.

а) $\int\limits_{-\frac{3}{4}}^{0} \frac{dx}{\sqrt{4x+3}}$.

Решение. Подынтегральная функция имеет точку разрыва второго рода при $x = -\frac{3}{4}$. Таким образом, имеем несобственный интеграл от неограниченной функции, вычислим его по определению:

$$\int_{-\frac{3}{4}}^{0} \frac{dx}{\sqrt{4x+3}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\frac{3}{4}+\varepsilon}^{0} \frac{dx}{\sqrt{4x+3}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{4}\int_{-\frac{3}{4}+\varepsilon}^{0} \frac{d(4x+3)}{\sqrt{4x+3}} =$$

$$= \frac{2}{4}\lim_{\varepsilon\to 0}\sqrt{4x+3}\,\Bigg|_{-\frac{3}{4}+\varepsilon}^{0} = \frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}(\sqrt{3}+4\varepsilon) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ответ: интеграл сходится.

б) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$

Решение. Заданный интеграл является интегралом по бесконечному промежутку. Для его вычисления разобьем отрезок интегрирования на два промежутка и воспользуемся определениями Н.И. первого рода:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}=\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{x^2+2x+2}+\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}=$$

$$=\lim_{A\to-\infty}\int_{A}^{0}\frac{dx}{x^2+2x+2}+\lim_{B\to\infty}\int_{0}^{B}\frac{dx}{x^2+2x+2}=$$

$$\lim_{A\to-\infty}\int_{A}^{0}\frac{dx}{(x+1)^2+1}+\lim_{B\to\infty}\int_{0}^{B}\frac{dx}{(x+1)^2+1}=$$

$$=\left|\begin{matrix}x+1=t,\ x=t-1,\ dx=dt,\\ \alpha_1=A+1, \beta_1=1, \alpha_2=1,\\ \beta_2=B+1\end{matrix}\right| = \lim_{A\to-\infty}\int_{A+1}^{0}\frac{dt}{t^2+1}+\lim_{B\to\infty}\int_{1}^{B+1}\frac{dt}{t^2+1}=$$

$$=\lim_{A\to-\infty}(\operatorname{arctg}\ t\Big|_{A+1}^{1})+\lim_{B\to\infty}(\operatorname{arctg}\ t\Big|_{1}^{B+1})=$$

$$=\lim_{A\to-\infty}(\frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}A+1)+\lim_{B\to\infty}(\operatorname{arctg}B+1-\frac{\pi}{4})=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\pi.$$

Ответ: интеграл сходится.

3. Вычислить (с точностью до двух знаков после запятой) площадь фигуры, ограниченной указанными линиями: $y^2=9x,\ y=3x$. Построить схематически фигуру.

Решение. Изобразим фигуру, ограниченную линиями: $y^2=9x$, $y=3x$ (рис. VII.1).

Найдем пределы интегрирования, для этого решим уравнение

$$9x=9x^2\Rightarrow 9x-9x^2=0\Rightarrow 9x(1-x)=0.$$

Отсюда будем иметь $x=0$ или $x=1$.

Вычислим площадь фигуры. Для этого воспользуемся формулой $S=\int\limits_a^b\left[y_2(x)-y_1(x)\right]dx$.

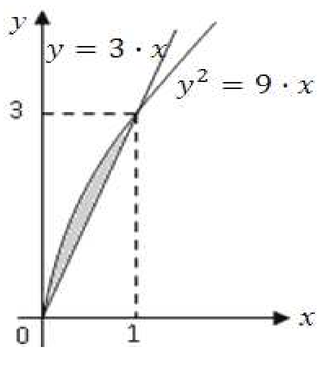


Рис. VII.1

Будем иметь

$$S=\int_0^1(\sqrt{9x}-3x)dx=3\int_0^1\sqrt{x}dx-3\int_0^1 xdx=3(\frac{2\sqrt{x^3}}{3}\Big|_0^1-\frac{x^2}{2}\Big|_0^1)=3(\frac{2}{3}-\frac{1}{2})=\frac{1}{2}.$$

Ответ: 1/2.

4. Вычислить (с точностью до двух знаков после запятой) объем тела, полученного вращением фигуры $\Phi: \begin{cases} x = 7\cos^3 t \\ y = 7\sin^3 t, \end{cases}$ вокруг оси Oy. Сделать схематический рисунок.

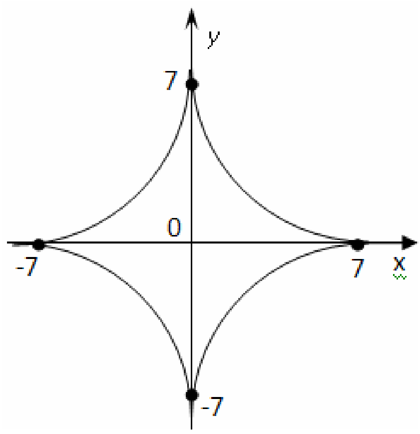


Рис. VII.2

Решение. Изобразим схематически заданную фигуру – астроиду (рис. VII.2).

Для нахождения объема полученной фигуры воспользуемся следующей формулой: $V_y = \pi \int\limits_{t_2}^{t_1} (x(t))^2 dy$. В нашем случае имеем

$$\left(x(t)\right)^2 = 49\cos^6 t, \quad dy = 7 \cdot 3\sin^2 t \cdot \cos t dt = 21\sin^2 t \cdot \cos t dt,$$

$$x = 0, \Rightarrow t = \pi/2; \;\; x = 7, \Rightarrow t = 0.$$

Значит,

$$V_y = -2\pi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 49\cos^6 t \cdot 21 \cdot \sin^2 t \cdot \cos t dt = -2058\pi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 t)^3 \sin^2 t d(\sin t) =$$

$$= -2058\pi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - 3\sin^2 t + 3\sin^4 t - \sin^6 t)\sin^2 t d(\sin t) =$$

$$= -2058\pi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 t - 3\sin^4 t + 3\sin^6 t - \sin^8 t) d(\sin t) =$$

$$= -2058\pi (\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 t d(\sin t) - 3\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^4 t d(\sin t) + 3\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^6 t d(\sin t) - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^8 t d(\sin t)) =$$

$$= -2058\pi (\frac{\sin^3 t}{3}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{3}{5}\sin^5 t\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{3}{7}\sin^7 t\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\sin^9 t}{9}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}) =$$

$$= -2058\pi (-\frac{1}{3} + \frac{3}{5} - \frac{3}{7} + \frac{1}{9}) = -2058\pi (-\frac{16}{315}) \approx 328{,}40.$$

Ответ: 328,40 ед^3.

5. Вычислить силу давления воды на вертикальную треугольную пластину (треугольник равнобедренный) с основанием 2 м, высотой H = 1 м, опущенную в воду вершиной вниз так, что основание находиться на поверхности воды (γ = 9,81 кН/м^3). Изобразить графически.

Решение. Изобразим схематически пластину (рис. VII.3).

Рассмотрим горизонтальную полоску на произвольной глубине x, имеющую толщину, равную dx. Для удобства рассуждений рассмотрим еще один схематический чертеж (рис. VII.4). Так как dx достаточно мало, то, приближенно принимая эту полоску за прямоугольник, находим дифференциал площади $dS = MN \cdot dx$. Выразим ширину элемента разбиения MN через x и данные задачи.

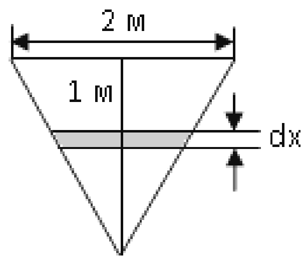


Рис. VII.3

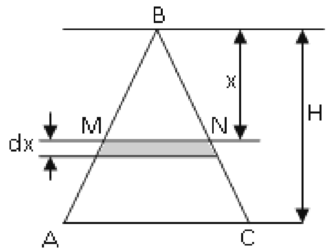


Рис. VII.4

Из подобия треугольников ΔBMN и ΔABC получаем $\dfrac{MN}{2} = \dfrac{x}{1}$, $MN = 2x$, тогда $dS = 2xdx$. Вычислим элементарную силу давления воды на эту полоску, воспользуемся при этом формулой $P = gSh\gamma$. Будем иметь $dP = \gamma g dS \cdot x = \gamma g \cdot 2xdx \cdot x$. Тогда

$$P = 2\gamma g \int_0^1 x^2 dx = 2\gamma g\left(\frac{x^3}{3}\bigg|_0^1\right) = \frac{2}{3}\gamma g.$$ Отсюда $P = \dfrac{2}{3}\gamma g = \dfrac{2}{3} 9{,}81^2 = 64{,}16$.

Ответ: 64,16 Н.

6. Найти координаты центра масс однородной плоской фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt{x+1}$, $y = 0$, $x = 0$. Построить схематически чертеж.

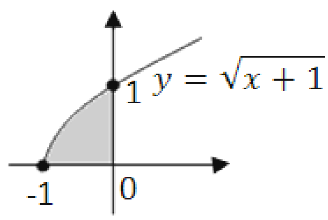


Рис. VII.5

Решение. По условию задачи изобразим схематически заданную фигуру – рис. VII.5.

Массу пластины найдем из формулы $m = \int_a^b \gamma[f_1(x) - f_2(x)]dx$. Подставляя данные задачи, будем иметь

$$m = \int_{-1}^{0} \gamma(\sqrt{x+1} - 0)dx = \gamma\int_{-1}^{0}\sqrt{x+1}\,d(x+1) = \gamma\sqrt{(x+1)^3}\cdot\frac{2}{3}\bigg|_{-1}^{0} = \gamma\frac{2}{3}.$$

Формула координаты x центра масс имеет вид $x_c = \dfrac{\int\limits_a^b \gamma x[f_1(x) - f_2(x)]dx}{m}$.

В нашем случае

$$x_c = \frac{3}{2}\int\limits_{-1}^{0} x\sqrt{x+1}dx = \left| \begin{array}{l} u = x,\ du = dx \\ dv = \sqrt{x+1}dx \\ v = \frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} \end{array} \right| = x\sqrt{(x+1)^3}\Big|_{-1}^{0} - \int\limits_{-1}^{0}\sqrt{(x+1)^3}dx =$$

$$= -\frac{2}{5}\sqrt{(x+1)^5}\Big|_{-1}^{0} = -\frac{2}{5}.$$

Формула координаты y центра масс имеет вид

$$y_c = \frac{\int\limits_a^b \gamma[f_1(x) + f_2(x)]\cdot[f_1(x) - f_2(x)]dx}{2m}.$$

Тогда $y_c = \dfrac{3}{4}\displaystyle\int\limits_{-1}^{0}\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{x+1}dx = \dfrac{3}{4}\int\limits_{-1}^{0}(x+1)dx = \dfrac{3}{4}(\int\limits_{-1}^{0} xdx + \int\limits_{-1}^{0} dx) =$

$$= \frac{3}{4}(\frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{0} + x\Big|_{-1}^{0}) = \frac{3}{4}(-\frac{1}{2} + 1) = \frac{3}{8}.$$

Ответ: $\left(-\dfrac{2}{5}; \dfrac{3}{8}\right)$.

7. Найти длину кривой, заданной уравнениями $y = \ln\sin x$ $(\dfrac{\pi}{3} \le x \le \dfrac{\pi}{2})$.

Решение. Длину кривой найдем из формулы $l = \displaystyle\int\limits_a^b \sqrt{1 + (y')^2}dx$. Вычислим $y' = (\ln\sin x)' = \dfrac{1}{\sin x}\cos x = \operatorname{ctg} x$. Отсюда будем иметь

$$l = \int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 x}dx = \int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{1}{\sin^2 x}}dx = \int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x}dx = \ln(\operatorname{tg}\frac{x}{2})\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \ln(\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}) - \ln(\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}) = \ln 1 - \ln\frac{\sqrt{3}}{3} = -\ln\frac{\sqrt{3}}{3} = -\ln\frac{1}{\sqrt{3}} = \ln\sqrt{3} = \frac{1}{2}\ln 3.$$

Ответ: $\dfrac{1}{2}\ln 3$.

8. Найти неопределенные интегралы:

а) $\int \frac{x^2}{1+3x^3}dx$.

Решение. Воспользуемся методом подведения под знак дифференциала, получим: $\int \frac{x^2}{1+3x^3}dx = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\int \frac{d(3x^3+1)}{1+3x^3} = \frac{1}{9}\ln(1+3x^3)+C$.

б) $\int \arcsin 2x dx$.

Решение. Воспользуемся формулой интегрирования по частям $\int u dv = uv - \int v du$. Для заданного интеграла будем иметь

$$\int \arcsin 2x dx = \left| \begin{array}{l} u = \arcsin 2x, du = \dfrac{2dx}{\sqrt{1-4x^2}}, \\ dv = du, \quad v = x \end{array} \right| = x\cdot\arcsin 2x - \int \frac{x\cdot 2dx}{\sqrt{1-4x^2}} =$$

$$= x\cdot\arcsin 2x + \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{2}\int \frac{d(1-4x^2)}{\sqrt{1-4x^2}} = x\cdot\arcsin 2x + \frac{1}{2}\sqrt{1-4x^2} + C.$$

в) $\int \cos^2 3x dx$.

Решение. В подынтегральном выражении понизим степень, получим

$$\int \cos^2 3x dx = \int \frac{1+\cos 6x}{2}dx = \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}\int \cos 6x d6x = \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}\sin 6x + C.$$

г) $\int \frac{x^2+23}{(x+1)(x^2+6x+13)}dx$.

Решение. Разложим подынтегральную функцию на простейшие дроби:

$$\frac{x^2+23}{(x+1)(x^2+6x+13)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+6x+13} \quad (D = -16 < 0).$$

Определим произвольные постоянные. Составим уравнение $x^2+23 = A(x^2+6x+13)+(Bx+C)(x+1)$. Отсюда, придавая переменной значения $x=-1$, $x=0$ и приравнивая коэффициенты при x^2 в левой и правой частях равенства, будем иметь

$$\begin{array}{l|l} x=-1 & 24=8A, A=3 \\ x=0 & 23=13A+C, C=23-13\cdot 3=-16 \\ x^2 & 1=A+B, B=1-A=1-3=-2. \end{array}$$

Таким образом, $\frac{x^2+23}{(x+1)(x^2+6x+13)} = \frac{3}{x+1} - \frac{2x+16}{x^2+6x+13}$.

Вычислим далее интегралы от найденных дробей:

$$\int \frac{3}{x+1}dx - \int \frac{2x+16}{(x+3)^2-9+13}dx = \left| \begin{array}{l} x+3=t, \\ x=t-3, \\ dx=dt \end{array} \right| = 3\int \frac{d(x+1)}{x+1} - \int \frac{2(t-3)+16}{t^2+4}dt =$$

$$= 3\ln|x+1| - \frac{2}{2}\int \frac{d(t^2+4)}{t^2+4} - 10\int \frac{dt}{t^2+4} = 3\ln|x+1| - \ln\left|t^2+4\right| - 5\operatorname{arctg}\frac{t}{2} =$$

$$= 3\ln|x+1| - \ln\left|x^2+6x+13\right| - 5\operatorname{arctg}\frac{x+3}{2} + C.$$

Задания к зачету
(нулевой вариант)

1. Вычислить $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, если $f(x,y) = e^{\frac{y}{x}} + \cos 2xy + 9x^7y^2$.

2. Вычислить:

а) $\int \cos^2 7x dx$; $\int \sin^2 7x dx$; $\int \cos^3 5x dx$; $\int \sin^5 4x dx$;

б) $\int \dfrac{dx}{7+9x^2}$; $\int \dfrac{dx}{7-9x^2}$; $\int \dfrac{dx}{\sqrt{7+9x^2}}$; $\int \dfrac{dx}{\sqrt{7-9x^2}}$; $\int \dfrac{dx}{\sqrt{9x^2-7}}$; $\int \dfrac{xdx}{\sqrt{9x^2-7}}$;

в) $\int xe^{-3x}dx$; $\int x \cdot \ln 5x dx$; $\int x \cdot \cos 3x dx$; $\int x \cdot \sin 7x dx$;

г) $\int \dfrac{dx}{7+9x}$; $\int \sin\left(3-\dfrac{x}{2}\right)dx$; $\int \dfrac{dx}{(7+9x)^{2011}}$; $\int \operatorname{tg}(3-2x)dx$;

д) $\int_0^1 x^2 \cdot 5^{3x^3}dx$; $\int_0^1 \arcsin x dx$; $\int_0^1 x^2 \cdot 5^{3x^3}dx$; $\int_0^1 \dfrac{\sqrt{x+15}-2}{\sqrt[4]{x+15}}dx$.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Вычисление определенных и несобственных интегралов с помощью математических пакетов Maple и MathCAD

Предлагаемые программы помогут Вам при проверке домашнего задания или, при необходимости, предоставят возможность быстрого вычисления определенных и несобственных интегралов.

Рассмотрим вычисление определенных и несобственных интегралов с помощью математического пакета **Maple.** Maple имеет несколько функций для интегрирования выражений пользователя: Int, Doubleint, Tripleint, Lineint.

Интегрирование выражений по заданной переменной осуществляется командой int(), которая имеет отложенную форму Int(). Эта команда позволяет вычислять как неопределенный интеграл от выражения с использованием следующего синтаксиса команды int (выражение, переменная), так и определенный интеграл с помощью следующего синтаксиса команды int (выражение, переменная = a...b), где a и b являются пределами интегрирования, причем эти пределы могут быть и аналитическими выражениями.

Для вычисления определенного интеграла Вам необходимо задать подынтегральную функцию.

Например, $f := x^2 \cdot \sin x;$

Нужно помнить, что в выбранной программе очень важное место занимают операторы «:» – присвоить, «;» – окончание предложения.

$\mathrm{Int}\left(f, x = 0..Pi\right);$ – проверка интеграла

$\mathrm{int}\left(f, x = 0..Pi\right);$ – непосредственное вычисление (Ответ – число).

Решение приведено на рис. П.1.

Если с помощью Maple невозможно найти замкнутую форму выражения для определенного интеграла, то команда интегрирования возвращает просто вызов самой себе. В подобных случаях можно вычислить значение определенного интеграла численным способом с помощью команды evalf().Синтаксис указанной программы – evalf(int (выражение, переменная = a...b)).

Особенностью предложенной программы являются графические возможности (позволяют быстро и сравнительно легко построить любые графики функций как на плоскости так и в пространстве, пересечение графиков функций), поэтому Вы можете построить необходимые графики функций и с помощью выше описанных команд вычислить площадь фигуры, объем тела или длину кривой.

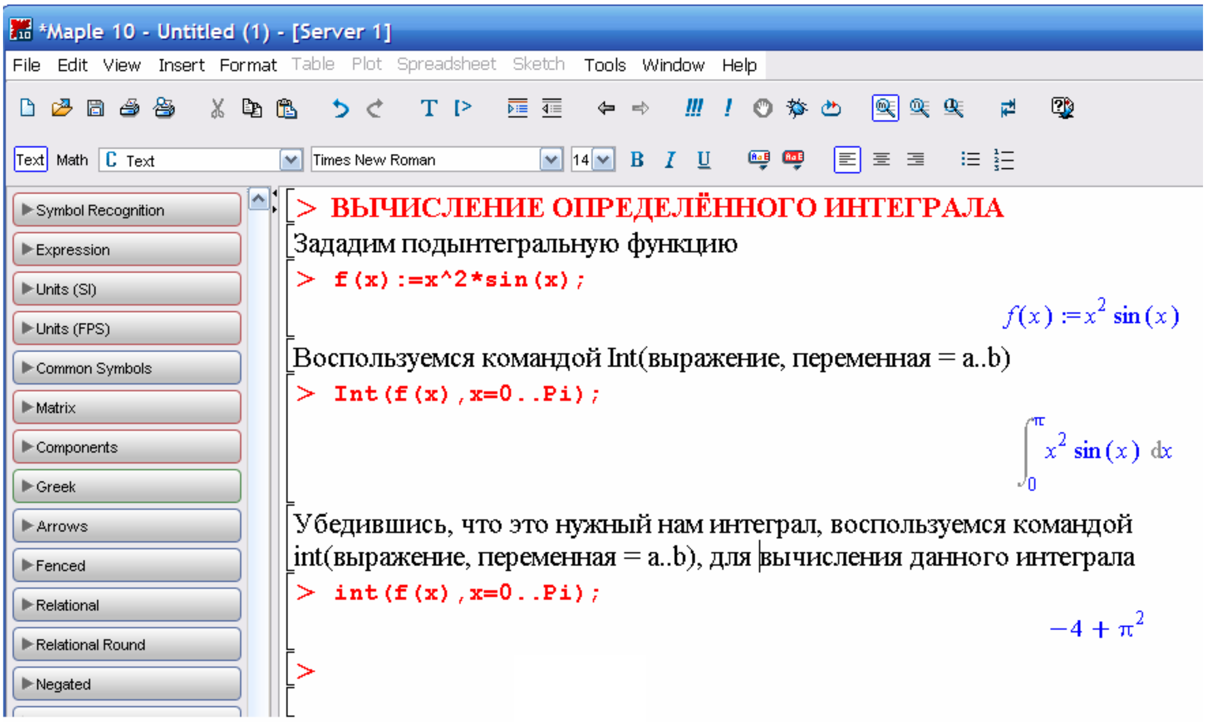


Рис. П.1

Отметим, что, используя математический пакет Maple, Вы можете произвести вычисление несобственного интеграла, как в представленном примере (рис. П.2).

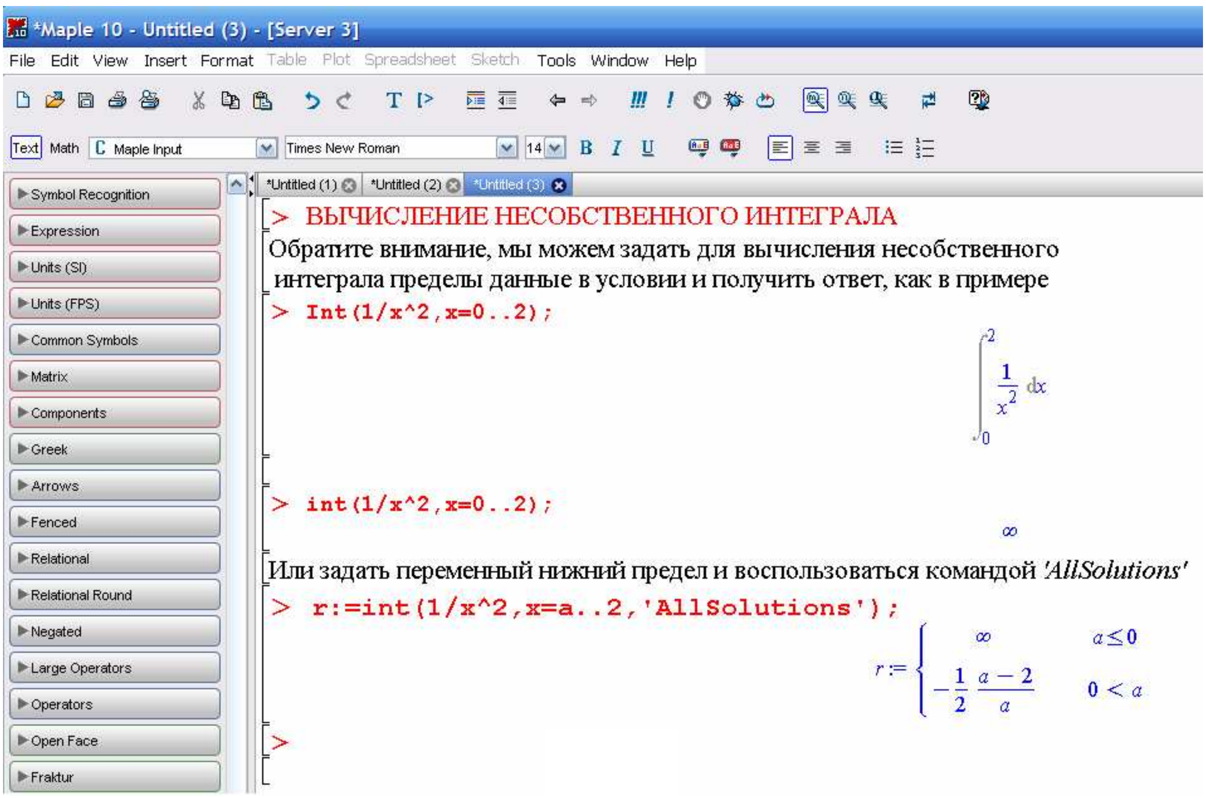


Рис. П.2

Более подробно с работой предлагаемой программы Вы можете ознакомиться на практических занятиях или воспользоваться соответствующей литературой (например, [5]).

Рекомендуем с помощью математического пакета Maple самостоятельно вычислить следующие определенные и несобственные интегралы:

1. $\int_0^{\pi} e^{2x} \cdot \sin(2x+4)dx$;
2. $\int_0^{\pi^2} \sin^2(2x+4) \cdot \frac{x^3+x}{4} dx$;
3. $\int_a^b \frac{1}{x} dx, \ \forall a, \ b$;
4. $\int_{-4}^b \frac{1}{x^3} dx, \ \forall b$;
5. вычислить площадь фигуры ограниченной кривыми $y=\sqrt{x}, \ y=x^3$.

Рассмотрим один из наиболее популярных математических пакетов MathCAD.

Чтобы вычислить определенный интеграл, следует напечатать его обычную математическую форму в документе. Делается это с помощью панели **Calculus (вычисления)** нажатием кнопки со значком интеграла:

1. Выберите на панели вкладку ВИД → ПАНЕЛИ ИНСТРУМЕНТОВ →МАТЕМАТИЧЕСКАЯ (рис. П.3)

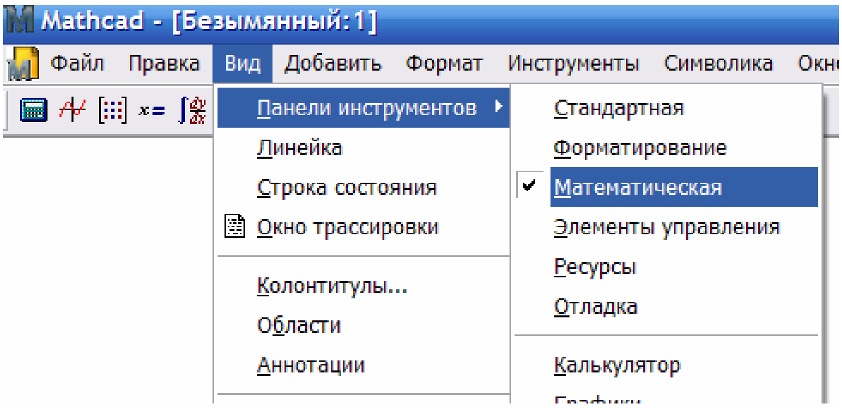


Рис. П.3

2. Далее появится панель, представленная на рис. П.4.
3. Выберете на ней панель вычисления как на рис. П.5.
4. На панели вычисления выберите вкладку определенного интеграла (рис. П.6).

Рис. П.4

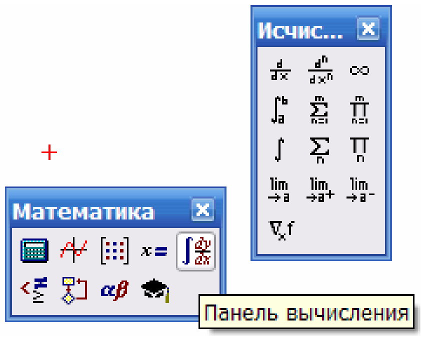


Рис. П.5

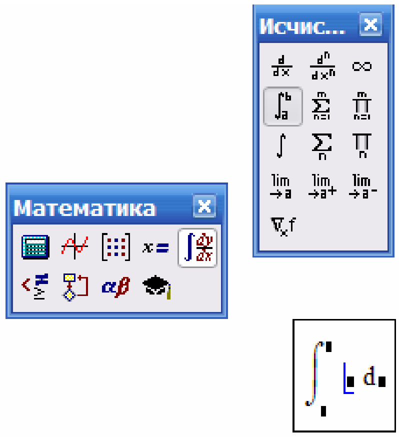


Рис. П.6

Появится символ интеграла с несколькими место заполнителями, в которые нужно ввести нижний и верхний пределы интегрирования, подынтегральную функцию и переменную интегрирования. После этого выберите панель калькулятора и с ее помощью введите подынтегральную функцию (рис. П.7).

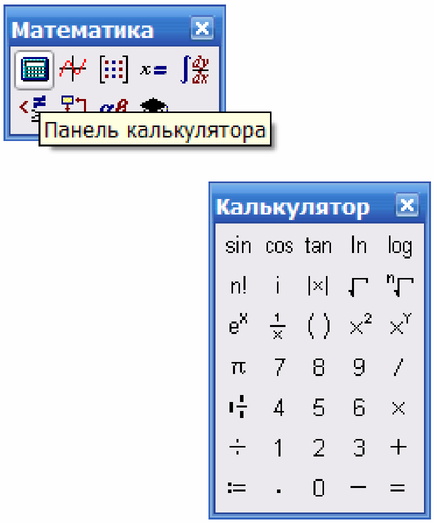


Рис. П.7

Символ интеграла Вы можете вызвать и другим способом: щелкните в свободном месте и наберите знак **&**.

Обратите внимание на то, что оператор определенного интеграла содержит четыре маркера, которые следует заполнить в соответствии с математической формулой. Чтобы получить результат интегрирования, следует ввести знак равенства или символьного равенства: $\int_{\blacksquare}^{\blacksquare} \blacksquare \, d\blacksquare$.

Например, определенный интеграл $x \cdot \ln(x)$ от 0 до 1 может быть вычислен следующим образом:

1. После появления символа интеграла щелкните на поле внизу и наберите 0. Щелкните на верхнем поле и нажмите клавишу 1. Так задаются верхний и нижний пределы интегрирования.

$$\int_{0}^{1} \blacksquare \, d\blacksquare$$

2. Щелкните на поле между знаком интеграла и d. Затем напечатайте подынтегральное выражение $x \cdot \ln(x)$:

$$\int_0^1 x \cdot \ln(x+1)\, d\blacksquare$$

3. Щелкните на поле и наберите x – это переменная интегрирования. Затем нажмите знак «=», чтобы увидеть результат:

$$\int_0^1 x \cdot \ln(x+1)\, dx = 0.25$$

Замечание. В отличие от неопределенного интеграла, определенный интеграл может быть вычислен как аналитически, так и численно.

Возможности математического пакета MathCAD позволяют вычислять объем тела, площадь фигуры и находить длину кривой (рис. П.8).

Применяя графические возможности, представляемого математического пакета, строим два графика функций. После анализа полученного изображения вычисляем площадь требуемой фигуры.

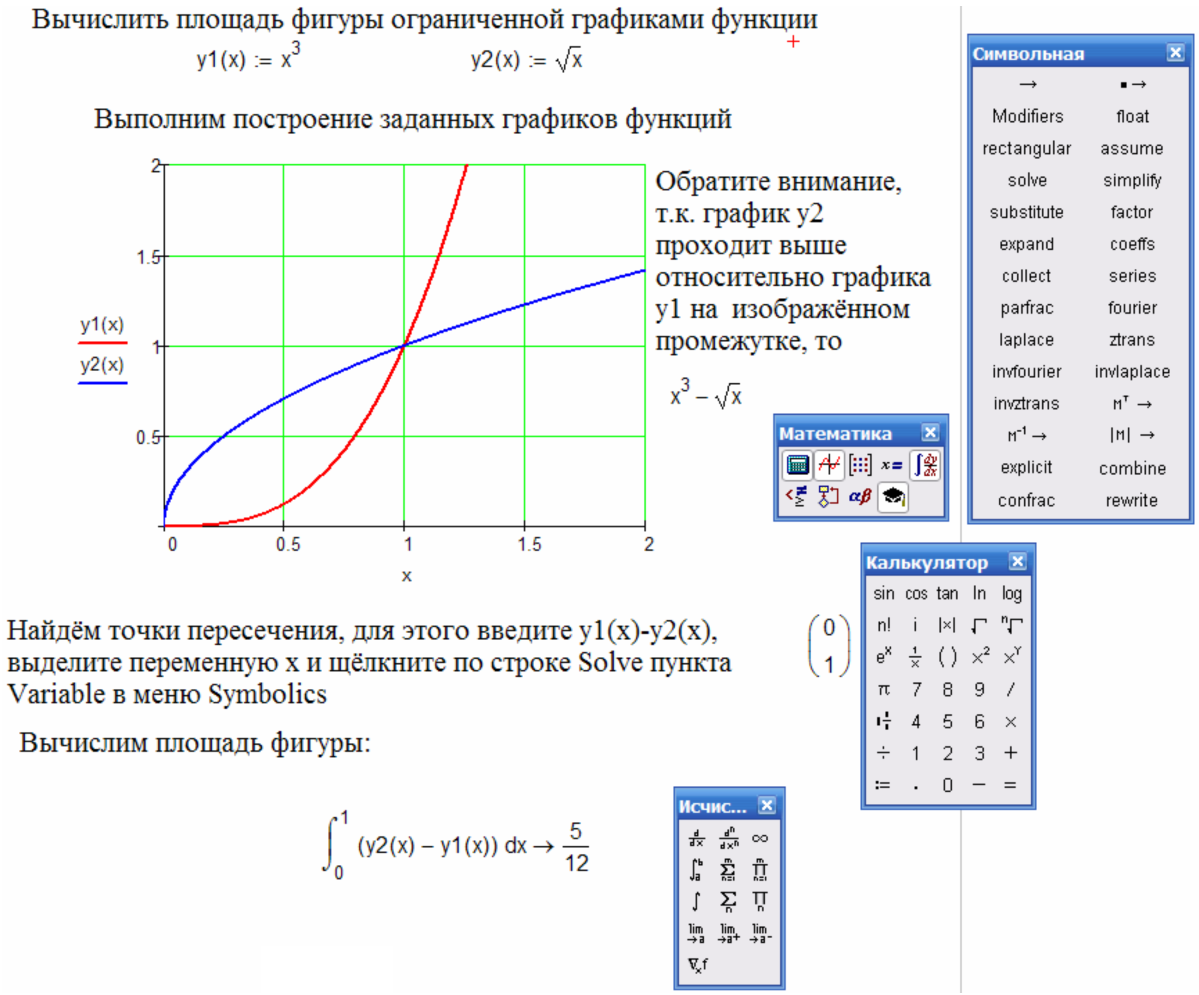


Рис. П.8

В рамках математического пакета MathCAD имеется возможность вычисления несобственных интегралов (рис. П.9). Для получения необходимого результата нужно указать заданные пределы интегрирования и способ вычисления (аналитически или численно).

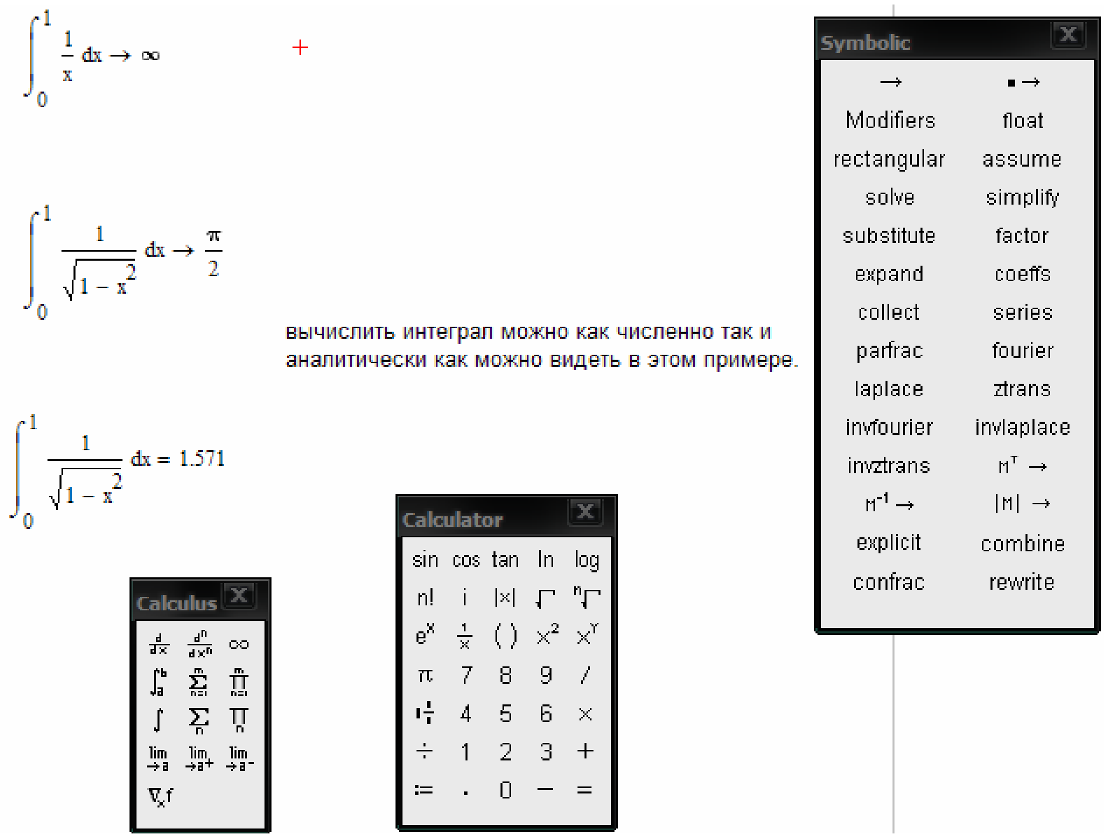


Рис. П.9

Представленная программа обладает также и другими возможностями, ознакомиться с которыми можно либо на занятиях, либо изучая специальную литературу.

Далее приведены задания, которые Вам необходимо выполнить самостоятельно и представить отчет об их выполнении:

1. Вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость: $\int\limits_{-3/4}^{0} \frac{dx}{\sqrt{4x+3}}$; $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{\sqrt{4x^2+2x-10}}$.

2. Вычислить с точностью до 5 знаков после запятой $\int\limits_{1}^{\sqrt{3}} \frac{x^3}{1+x^6}dx$.

3. Вычислить с точностью до двух знаков после запятой площадь фигуры, ограниченной указанными линиями $y=5x$, $y^2=15x$. Сделать чертеж.

4. Найти длину кривой, заданной уравнениями $y=\ln\cos 4x$ $\left(\frac{\pi}{3}\le x\le\frac{\pi}{2}\right)$. Сделать чертеж.

УЧЕБНЫЙ МОДУЛЬ 8
ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Введение

В данном учебном модуле рассматриваются функции нескольких переменных (ФНП). Вводятся понятия ФНП, ее области определения и графика. Изложены основы нахождения предела ФНП, исследования ее на непрерывность. Дано понятие частных производных ФНП, приведены условия дифференцируемости. С понятием частных производных тесно связано понятие полного дифференциала ФНП и его использование в приближенных вычислениях. Рассмотрены характеристики скалярных и векторных полей – градиент и производная по направлению. Приведены геометрические приложения ФНП. Детально изучены вопросы локального экстремума, условного экстремума ФНП, изложен алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значений ФНП в замкнутой области.

ДИДАКТИЧЕСКИЕ ЦЕЛИ ОБУЧЕНИЯ

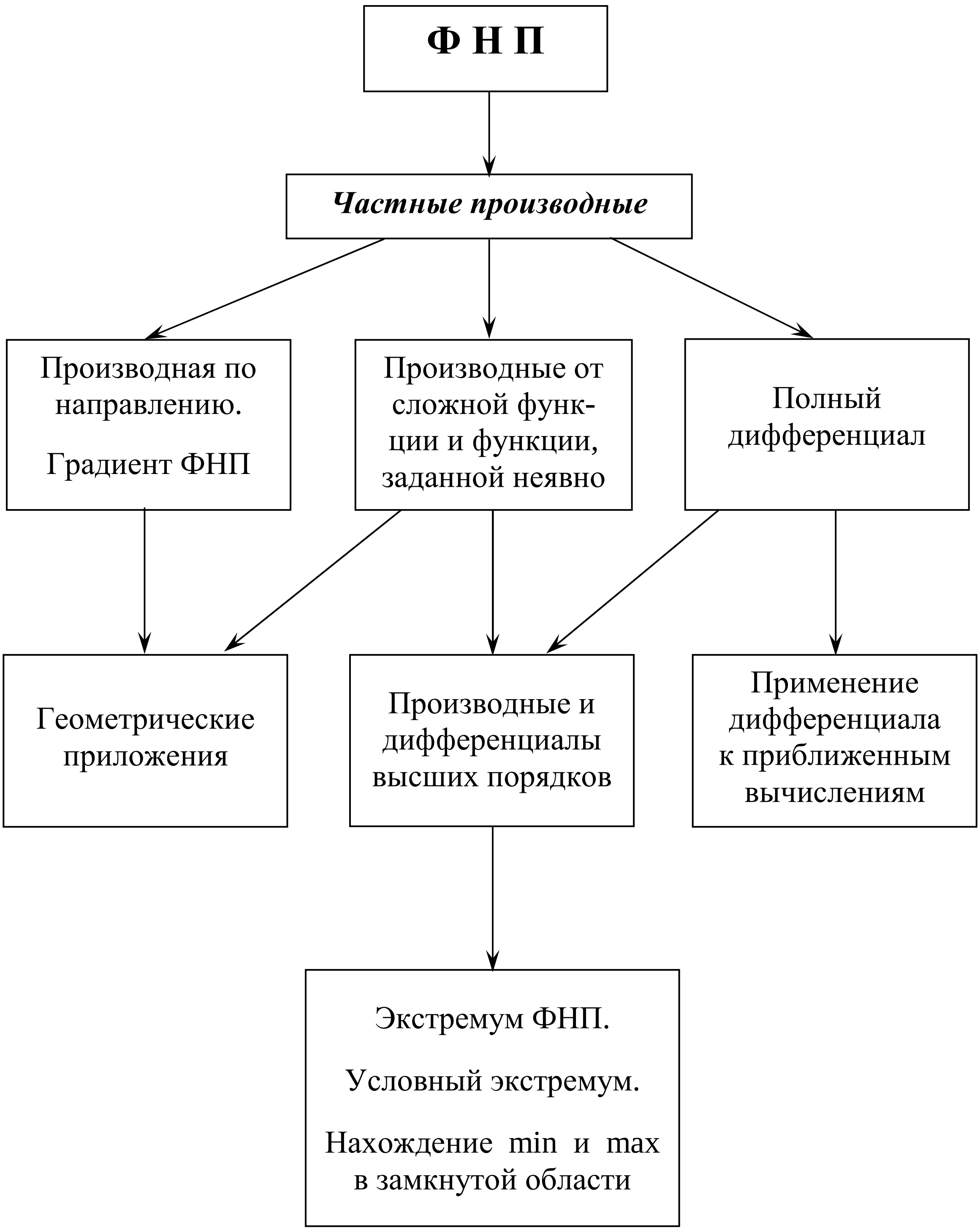
Студент должен знать	*Студент должен уметь*
– основные определения, связанные с понятием ФНП; – линии и поверхности уровня; – графики простейших функций двух переменных; – понятие предела и непрерывности ФНП в точке; – определение частных производных, их геометрический смысл; – определение полного дифференциала ФНП, его применение к приближенным вычислениям; – правила дифференцирования сложных функций ФНП, заданных неявно; – производные и дифференциалы высших порядков; – производную по направлению и градиент ФНП; – экстремум, условный экстремум, правило нахождения наименьшего и наибольшего значений ФНП в замкнутой области	– находить область определения ФНП; – рисовать линии, поверхности уровня; – находить предел, исследовать ФНП на непрерывность; – находить частные производные; – находить полный дифференциал, применять его в приближенных вычислениях; – находить частные производные и дифференциалы высших порядков; – дифференцировать сложные функции и функции, заданные неявно; – написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности; – находить производную по направлению и градиент ФНП; – исследовать функцию на экстремум; – находить условный экстремум; – находить наименьшее и наибольшее значения ФНП в замкнутой области

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА МОДУЛЯ

Название вопросов, которые изучаются на лекции	Номер практического занятия	Наглядные методические пособия	Формы контроля знаний
1. Понятие ФНП, область определения и график ФНП. Примеры графиков простейших функций двух переменных. Предел и непрерывность ФНП в точке. Частные и полные приращения ФНП. Частные производные и их геометрический смысл	I	1, 2, 4, 5, 6	ОЛ, ВДз
2. Дифференцируемость ФНП. Полный дифференциал ФНП, его применение в приближенных вычислениях. Дифференцирование сложных функций. Инвариантность формы первого дифференциала ФНП. Производная от ФНП, заданной неявно. Производные и дифференциалы высших порядков	II, III	1, 2, 4, 5, 6	ОЛ, ВДз
3. Производная по направлению. Градиент. Геометрические приложения ФНП. Экстремум ФНП. Условный экстремум. Нахождение наибольшего и наименьшего значений ФНП в замкнутой области	III, IV	1, 2, 4, 5, 6	Опрос, ПДз

Принятые сокращения:
ОЛ – опрос на лекции;
ВДз – выдача домашнего задания;
ПДз – проверка домашнего задания.

ГРАФИЧЕСКАЯ СХЕМА МОДУЛЯ



ИНФОРМАЦИОННАЯ ТАБЛИЦА «ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ»

Переменная величина u называется ***функцией*** *от* ***нескольких переменных*** $x_1, x_2, \ldots, x_n$, если указан закон (правило), по которому каждой совокупности переменных $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ некоторого множества становится в соответствие единственный элемент того же или другого множества.

Если $n = 2$, то функция $z = f(x, y)$ называется ***функцией двух переменных***.

Область определения функции двух переменных представляет собой некоторое множество точек плоскости.

Графиком функции $z = f(x, y)$ называется множество точек $N(x, y, f(x, y))$, т. е. некоторое множество точек пространства.

Полное приращение функции двух переменных $z = f(x, y)$ определяется формулой

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y),$$

а ее ***частные приращения***

$$\Delta_x z = f(x+\Delta x, y) - f(x, y),$$

$$\Delta_y z = f(x, y+\Delta y) - f(x, y).$$

Число A называется ***пределом*** функции $u = f(M)$ при $M \to M_0$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ r > 0$, что при всех M, расстояние от которых до точки M_0 $|M_0M| < r$, выполняется неравенство $|f(M) - A| < \varepsilon$.

Функция $u = f(M)$ называется ***непрерывной*** в точке M_0, если

$$\lim_{M \to M_0} f(M) = f(M_0).$$

Частные производные для функции $z = f(x, y)$ по x и y соответственно определяются формулами:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

Функция, обладающая непрерывными частными производными, имеет ***полный дифференциал***

$dz = \dfrac{\partial z}{\partial x}dx + \dfrac{\partial z}{\partial y}dy$. $\Delta z \approx dz$, или $f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) \approx$

$\approx f(x_0, y_0) + \dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\Delta y$ – формула приближенного вычисления значений функции двух переменных.

Частными производными 2-го порядка называются соответствующие частные производные от ее первых частных производных:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \left(f'_x(x, y)\right)'_x = f''_{xx}(x, y)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \left(f'_y(x, y)\right)'_y = f''_{yy}(x, y)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \left(f'_x(x, y)\right)'_y = f''_{xy}(x, y)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \left(f'_y(x, y)\right)'_x = f''_{yx}(x, y)$$

Если функция $z = f(x, y)$ и ее смешанные производные z''_{xy}, z''_{yx} определены в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ и непрерывны в этой точке, то $z''_{xy}(x_0, y_0) = z''_{yx}(x_0, y_0)$.

Аналогично находятся $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^3}, \dfrac{\partial^3 z}{\partial y^3}, \dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}, \ldots$

Полным дифференциалом 2-го порядка некоторой функции называется полный дифференциал от ее первого дифференциала.

$$d^2 z = d(dz) = z''_{xx}dx^2 + 2z''_{xy}dxdy + z''_{yy}dy^2$$

….

$$d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n z.$$

Если $z = F(u, v)$, где $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, то z – ***сложная функция*** и ее частные производные по x и y находятся по формулам:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Если $z = F(x, y, u, v)$, где $y = y(x)$, $u = u(x)$, $v = v(x)$, то ***полная производная*** этой функции

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{du}{dx}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dx}.$$

Частная производная функции, заданной ***неявно*** уравнением $F(x, y)=0$,

$$y'_x=-\frac{F'_x}{F'_y},\quad \left(F'_y\neq 0\right).$$

Если функция двух переменных задана ***неявно*** уравнением $F(x, y, z) = 0$, то ее частные производные $z'_x=-\dfrac{F'_x}{F'_z}$, $z'_y=-\dfrac{F'_y}{F'_z}$, $\left(F'_z\neq 0\right)$.

Производная по направлению вектора $\overline{S}$ функции $u = f(x, y, z)$ в точке M_0

$$\frac{\partial u}{\partial S}=\frac{\partial u(M_0)}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u(M_0)}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u(M_0)}{\partial z}\cos\gamma,$$

где $\overline{S}_0=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ – единичный вектор, соответствующий $\overline{S}$.

Градиентом дифференцируемой функции $u = f(x, y, z)$ в точке M называется вектор, имеющий координаты $\dfrac{\partial u(M)}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u(M)}{\partial y}$, $\dfrac{\partial u(M)}{\partial z}$ и обозначаемый $\overline{\operatorname{grad}}\,u(M)$.

$$\boxed{\overline{\operatorname{grad}}\,u(M)=\frac{\partial u(M)}{\partial x}i+\frac{\partial u(M)}{\partial y}j+\frac{\partial u(M)}{\partial z}k}.$$

Таким образом, $\dfrac{\partial u}{\partial S}=\overline{\operatorname{grad}}\,u(M)\cdot\overline{S}_0$.

Если $\overline{\operatorname{grad}}\,u(M)\neq\overline{0}$, то производная $\dfrac{\partial u(M)}{\partial S}$ принимает максимальное значение, если направление $\overline{S}$ совпадает с направлением градиента функции $u(M)$.

Пусть поверхность S определяется уравнением $F(x, y, z) = 0$. Тогда вектор $\overline{n}=\overline{\operatorname{grad}}\,u(N_0)=\left.\left(\dfrac{\partial F}{\partial x},\dfrac{\partial F}{\partial y},\dfrac{\partial F}{\partial z}\right)\right|_{N_0}$ является вектором нормали к этой поверхности в точке N_0 и *уравнение касательной плоскости*, проведенной в точке $N_0\in S$, имеет вид

$$F'_x(N_0)(x-x_0)+F'_y(N_0)(y-y_0)+F'_z(N_0)(z-z_0)=0.$$

Уравнения нормали в каноническом виде $\dfrac{x-x_0}{F'_x(N_0)}=\dfrac{y-y_0}{F'_y(N_0)}=\dfrac{z-z_0}{F'_z(N_0)}$.

Если поверхность задана уравнением $z = f(x, y)$, то

$z-z_0=f'_x(N_0)(x-x_0)+f'_y(N_0)(y-y_0)$ – *уравнение касательной плоскости*,

а *канонические уравнения нормали* $\dfrac{x-x_0}{f'_x(N_0)}=\dfrac{y-y_0}{f'_y(N_0)}=\dfrac{z-z_0}{-1}$.

Максимумом (***минимумом)*** функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ называется такое ее значение $f(x_0, y_0)$, которое больше (меньше) всех других ее значений, принимаемых в точках $M(x, y)$, достаточно близких к точке M_0 и отличных от нее.

Максимум и минимум функции называется ее ***экстремумом***.

Необходимые условия экстремума
В точках экстремума дифференцируемой ФНП частные производные равны нулю.
Для $z = f(x, y)$ $f'_x(x_0, y_0) = 0$, $f'_y(x_0, y_0) = 0$.

Достаточные условия экстремума:
Пусть точка $M_0(x_0, y_0)$ – критическая точка функции $z = f(x, y)$.
1) если $d^2 f(x_0, y_0) < 0$ (при $dx^2 + dy^2 > 0$), то $f(x_0, y_0)$ – максимум функции $z = f(x, y)$.
2) если $d^2 f(x_0, y_0) > 0$ (при $dx^2 + dy^2 > 0$), то $f(x_0, y_0)$ – минимум функции $z = f(x, y)$.

Достаточные условия эквивалентны следующим:
Пусть $A = f''_{xx}(x_0, y_0)$, $B = f''_{xy}(x_0, y_0)$, $C = f''_{yy}(x_0, y_0)$, $\Delta = AC - B^2$, тогда

1) если $\Delta > 0$, то функция $f(x, y)$ имеет экстремум в точке M_0: максимум при $A < 0$ ($C < 0$), минимум при $A > 0$ ($C > 0$);
2) если $\Delta < 0$, экстремума в точке M_0 нет;
3) если $\Delta = 0$, нужны дополнительные исследования.

Условный экстремум
Если разыскивается экстремум ФНП, которые связаны между собой дополнительными условиями, то говорят об ***условном экстремуме***. При решении задачи можно пользоваться методом неопределенных множителей Лагранжа.

Чтобы найти условный экстремум функции $z = f(x, y)$, при наличии уравнения связи $\varphi(x, y) = 0$ составляют *функцию Лагранжа* $\boxed{F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)}$, где λ – неопределенный постоянный множитель, и ищут ее экстремум.

Необходимыми условиями экстремума будет система трех уравнений с тремя неизвестными x, y и λ.

$$\begin{cases} F'_x = 0, \\ F'_y = 0, \\ F'_\lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'_x + \lambda\varphi'_x = 0, \\ f'_y + \lambda\varphi'_y = 0, \\ \varphi(x, y) = 0. \end{cases}$$

Наибольшее и наименьшее значения ФНП в замкнутой области D
Сравнив наибольшее и наименьшее значения функции f в критических точках внутри области с наибольшим и наименьшим значениями функции f на границе области, найдем искомый максимум и минимум функции f в области D.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА

8.1. Понятие ФНП, область определения и график ФНП. Линии уровня. Примеры графиков простейших функций двух переменных

Пусть D – некоторое множество точек $M(x, y)$ плоскости.

Определение 8.1.1. Правило f, ставящее в соответствие точке $(x,y)\in D$ определенное число z, называется ***функцией двух переменных*** и обозначается $z=f(x,y)$ или $z=f(M)$. Множество D при этом называется областью определения функции и обозначается $D(f)$. Число $z=f(M)$ или $z=f(x,y)$ называется значением функции в точке $M(x, y)$. Множество

$$E(f)=\{z\in R \mid z=f(x,y);(x,y)\in D\}$$

называется областью или множеством значений функции f.

Пример 8.1.1. Правило $f:(x,y)\to x+y$, ставящее в соответствие каждой паре чисел x и y их сумму $x + y$, определяет функцию $f(x,y)=x+y$. Очевидно, $D(f)=R^2$, а $E(f)=R$.

Пример 8.1.2. Для функции $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ областью определения является множество $D(f)=\{(x,y)\mid 1-x^2-y^2\geq 0\}$, т. е. круг $x^2+y^2\leq 1$, а областью значений – отрезок [0, 1].

Аналогично определяется функция $u=f(x,y,z)$ трех независимых переменных x, y и z: это правило f, ставящее каждой упорядоченной тройке $(x,y,z)\in D\subset R^3$ число u.

Подобным образом определяется в общем случае и функция $u=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ от n независимых переменных.

Как и в случае функции одной переменной, функции двух переменных можно изобразить графически. Для этого в каждой точке $(x,y)\in D$ вычисляется значение функции. Тогда тройка чисел $(x,y,z)=(x,y,f(x,y))$ определяет в системе координат $Oxyz$ некоторую точку P. Совокупность точек $P=(x,y,f(x,y))$ образует график функции $z=f(x,y)$, являющийся некоторой поверхностью в пространстве R^3. Будем говорить, что задана поверхность $z = f(x, y)$, имея в виду график, определяемый этой функцией.

Пример 8.1.3. Графиком функции $z = 2x - 3y + 5$ является плоскость.

Пример 8.1.4. Графиком функции $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ является верхняя полусфера с центром в начале координат и радиусом 3.

Пример 8.1.5. Графиком функции $z = x^2 + y^2$, как известно из аналитической геометрии, является параболоид вращения (рис. 8.1.1).

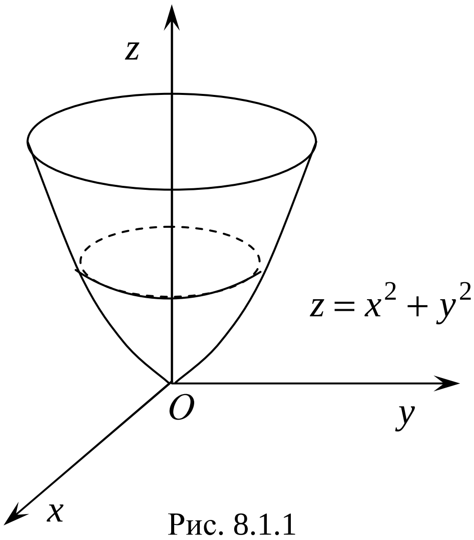


Рис. 8.1.1

Замечание 8.1.1. Функцию трех или более переменных изобразить с помощью графика в пространстве невозможно.

В некоторых случаях наглядное представление о функции двух или трех переменных может дать картина ее линий или поверхностей уровня.

Линией уровня функции $z = f(x, y)$ называется множество точек (x, y) плоскости xOy, удовлетворяющих равенству

$$f(x, y) = C,$$

где C – постоянная.

Пример 8.1.6. Для функции $z = x^2 + y^2$ линиями уровня являются окружности $x^2 + y^2 = C$, $C \geq 0$.

Линия уровня $f(x, y) = C$ является проекцией на плоскость xOy линии пересечения поверхности $z = f(x, y)$ с плоскостью $z = C$.

Линии уровня используются в картографии. Так, например, на топографических картах рисуют линии равной высоты над уровнем моря. На метеорологических картах изображают линии одинакового давления – изобары.

Поверхностью уровня функции $u = f(x, y, z)$ называется множество точек (x, y, z) пространства, удовлетворяющих равенству $f(x, y, z) = C$, где C – постоянная.

П р и м е р 8.1.7. Поверхностями уровня для функции $u = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2}$ будут эллипсоиды $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = C$ $(C \geq 0)$, «вложенные» друг в друга.

В физике примером поверхностей уровня могут служить эквипотенциальные поверхности, поверхности одинакового давления, температуры и др.

8.2. Предел ФНП в точке. Непрерывность ФНП

Введем одно важное вспомогательное понятие – понятие окрестности данной точки на плоскости.

О п р е д е л е н и е 8.2.1. Окрестностью радиуса r точки $M_0(x_0, y_0)$ называется совокупность всех точек (x, y), удовлетворяющих неравенству

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)} < r,$$

т. е. совокупность всех точек, лежащих внутри круга радиуса r с центром в точке $M_0(x_0, y_0)$.

Пусть дана функция $z = f(x, y)$, определенная в некоторой области D или на ее границе (рис. 8.1.2).

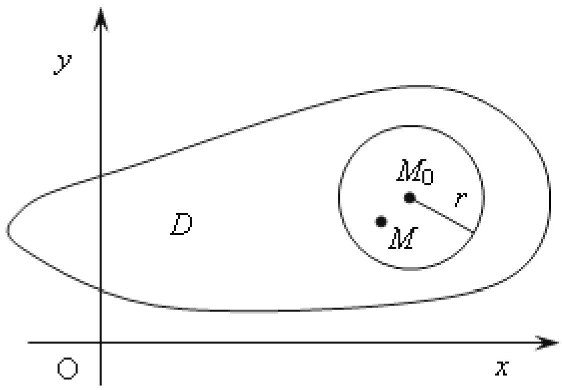


Рис. 8.1.2

О п р е д е л е н и е 8.2.2. Число A называется ***пределом*** функции f (x, y) при стремлении точки M(x, y) к точке $M_0(x_0, y_0)$, если для каждого числа $\varepsilon > 0$ найдется число $r > 0$, что для всех точек M(x, y), для которых выполняется неравенство $|MM_0| < r$, имеет место неравенство $|f(x, y) - A| < \varepsilon$.

Если число A является пределом функции f (x, y) при $M(x, y) \to M_0(x_0, y_0)$, то обозначают

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = A.$$

О п р е д е л е н и е 8.2.3. Пусть точка $M_0(x_0, y_0)$ принадлежит области определения функции $f(x, y)$. Функция $z = f(x, y)$ называется непрерывной в точке $M_0(x_0, y_0)$, если

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0), \tag{8.2.1}$$

причем точка $M(x, y)$ стремится к точке $M_0(x_0, y_0)$ произвольным образом, оставаясь в области определения функции.

Если обозначить $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$, то равенство (8.2.1) можно переписать так

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0)$$

или

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \left(f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \right) = 0. \tag{8.2.2}$$

Обозначим $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$. При $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$ также и $\rho \to 0$, и обратно, если $\rho \to 0$, то $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$.

Заметим, что выражение, стоящее в круглых скобках в равенстве (8.2.2), есть полное приращение функции Δz, равенство (8.2.2) можно переписать в виде

$$\lim_{\rho \to 0} \Delta z = 0. \tag{8.2.3}$$

Функция, непрерывная в каждой точке некоторой области, называется непрерывной в этой области.

Если в некоторой точке $N(x_0, y_0)$ не выполняется условие (8.2.1), то эта точка называется ***точкой разрыва*** функции $z = f(x, y)$. Условие (8.2.1) может не выполняться, например, в случаях:

1) $z = f(x, y)$ определена во всех точках некоторой окрестности точки $N(x_0, y_0)$ за исключением самой точки $N(x_0, y_0)$;

2) функция $z = f(x, y)$ определена во всех точках окрестности точки $N(x_0, y_0)$, но не существует $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y)$;

3) функция определена во всех точках окрестности $N(x_0, y_0)$ и $\exists$ $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y)$, но $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) \neq f(x_0, y_0)$.

Пример 8.2.1. Функция $z = x^2 + y^2$ непрерывна при любых значениях x и y.

Решение. Действительно, $\Delta z = \left((x + \Delta x)^2 + (y + \Delta y)^2 \right) - \left(x^2 + y^2 \right) =$

$= 2x\Delta x + 2y\Delta y + \Delta x^2 + \Delta y^2$, следовательно $\lim\limits_{\rho \to 0} \Delta z = 0$.

Приведем пример разрывной функции.

Пример 8.2.2. Функция $z = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ определена всюду, кроме точки $x = 0$, $y = 0$.

Решение. Рассмотрим значения z вдоль прямой $y = kx$ (k = const). Очевидно, вдоль этой прямой

$$z = \frac{kx^2}{x^2 + k^2 x^2} = \frac{k}{1 + k^2} = \text{const},$$

т. е. функция z вдоль всякой прямой, проходящей через начало координат, сохраняет постоянное значение, зависящее от углового коэффициента прямой. Поэтому, подходя к началу координат различными путями, будем получать различные предельные значения, а это значит, что $f(x, y)$ не имеет предела. Следовательно, функция разрывна в начале координат. Эту функцию нельзя доопределить в начале координат, чтобы она стала непрерывной. С другой стороны, легко заметить, что в остальных точках эта функция непрерывна.

8.3. Частные и полные приращения ФНП. Частные производные и их геометрический смысл

Рассмотрим функцию двух переменных. Дадим независимой переменной x приращение Δx, тогда z получит приращение, которое называют частным приращением z по x и обозначают через $\Delta_x z$, так что

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y). \tag{8.3.1}$$

Аналогично, если x сохраняет постоянное значение, а y получает приращение Δy, то z получает приращение, называемое ***частным приращением*** z по y

$$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y). \tag{8.3.2}$$

Приращение $\Delta_x z$ функция z получает вдоль линии пересечения поверхности $z = f(x, y)$ с плоскостью $y = \text{const}$, параллельной плоскости xOz, а приращение $\Delta_y z$ – вдоль линии пересечения данной поверхности с плоскостью $x = \text{const}$, параллельной плоскости yOz.

Наконец, придав аргументу x приращение Δx, а аргументу y – приращение Δy, получим для z новое приращение Δz, которое называется ***полным приращением*** функции z и определяется формулой

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y). \tag{8.3.3}$$

Надо заметить, что, вообще говоря, полное приращение $\Delta z \neq \Delta_x z + \Delta_y z$.

Аналогичным образом определяются частные и полное приращения функции любого числа переменных.

Так, для функции трех переменных $u = f(x, y, z)$ имеем

$$\Delta_x u = f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z),$$

$$\Delta_y u = f(x, y + \Delta y, z) - f(x, y, z),$$

$$\Delta_z u = f(x, y, z + \Delta z) - f(x, y, z),$$

$$\Delta u = f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y, z).$$

Определение 8.3.1. Частной производной по x от функции $z = f(x, y)$ называется предел отношения частного приращения $\Delta_x z$ по x к приращению Δx при стремлении Δx к нулю.

Частная производная по x обозначается одним из символов:

$$z'_x, \qquad f'_x(x, y), \qquad \frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Таким образом, по определению,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}.$$

Аналогично, частная производная по y

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

Могут использоваться и обозначения z'_y, $f'_y(x, y)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

Заметив, что $\Delta_x z$ вычисляется при неизменном y, а $\Delta_y z$ – при неизменном x, определения частных производных по x и y сформулируем следующим образом:

– частной производной по x от функции $z = f(x, y)$ называется производная по x, вычисленная в предположении, что y – постоянная;

– частной производной по y от функции $z = f(x, y)$ называется производная по y, вычисленная в предположении, что x – постоянная.

Из этого определения ясно, что правила вычисления частных производных совпадают с правилами, указанными для функции одной переменной.

Пример 8.3.1. $z = x^3 \cos y$. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Решение. $\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 \cos y$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -x^3 \sin y$.

Пример 8.3.2. $z = x^y$.

Решение. $\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x$.

Частные производные функции любого числа переменных определяются аналогично. Так, для функции четырех переменных

$$u = f(x, y, z, t):$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z, t) - f(x, y, z, t)}{\Delta x},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y, z, t) - f(x, y, z, t)}{\Delta y} \text{ и т.д.}$$

Пример 8.3.3. $u = x^2 + y^3 + xtz^5$. Найти все частные производные.

Решение. $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + tz^5$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 3y^2$, $\frac{\partial u}{\partial z} = 5xtz^4$, $\frac{\partial u}{\partial t} = xz^5$.

Выясним геометрический смысл частных производных функции двух переменных.

Пусть уравнение $z = f(x, y)$ есть уравнение поверхности, изображенной на рис. 8.3.1.

Проведем плоскость $x = \text{const}$. В сечении этой плоскости с поверхностью получится линия *PT*. При данном x рассмотрим на плоскости xOy некоторую точку M (x, y). Точке M соответствует точка P (x, y, z), принадлежащая поверхности $z = f(x, y)$. Оставляя x неизменным, дадим переменной y приращение $\Delta y = MN = PT'$. Тогда функция z получит приращение $\Delta_y z = TT'$ (точке $N(x, y+\Delta y)$ соответствует $T(x, y+\Delta y, z+\Delta z)$ на поверхности $z = f(x, y)$).

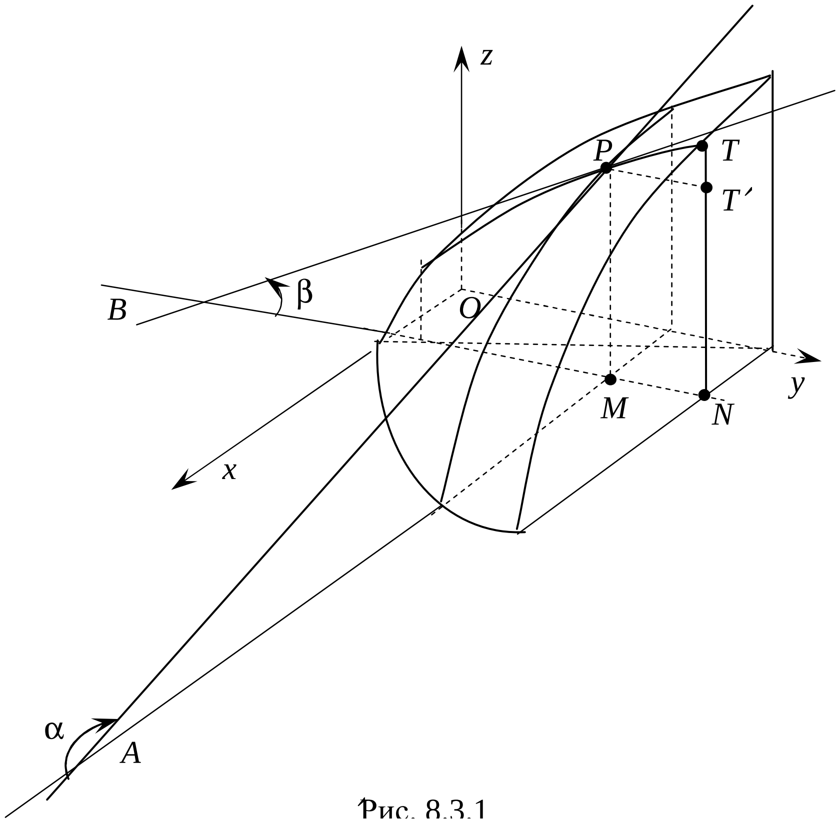


Рис. 8.3.1

Отношение $\dfrac{\Delta_y z}{\Delta y}$ равно тангенсу угла, образуемого секущей PT с положительным направлением оси Oy:

$$\frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \operatorname{tg}\angle TPT'.$$

Следовательно, $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{\Delta_y z}{\Delta y} = \dfrac{\partial z}{\partial y}$ равен тангенсу угла β, образованного касательной PB к кривой PT в точке P с положительным направлением оси Oy:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \operatorname{tg}\beta.$$

Итак, частная производная $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ численно равна тангенсу угла наклона касательной к кривой, получающейся в сечении поверхности $z = f(x, y)$ плоскостью $x = \text{const}$.

Аналогично, частная производная $\frac{\partial z}{\partial x}$ численно равна тангенсу угла наклона α касательной к сечению поверхности $z = f(x, y)$ плоскостью $y = \text{const}$.

8.4. Дифференцируемость ФНП

Определение 8.4.1. Функция $u = f(x, y, z)$ называется ***дифференцируемой*** в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, если в некоторой окрестности этой точки полное приращение функции можно представить в виде

$$\Delta u(M_0) = A\Delta x + B\Delta y + C\Delta z + O(\rho), \tag{8.4.1}$$

где A, B, C – некоторые постоянные, $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$, $\lim\limits_{\rho \to 0} \frac{O(\rho)}{\rho} = 0$.

Заметим, что ρ есть расстояние между точками $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и $M_0(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z)$.

ТЕОРЕМА 8.4.1. (необходимое условие дифференцируемости). Если функция $u = f(x, y, z)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, то в этой точке существуют частные производные по всем переменным, причем

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial x} = A, \quad \frac{\partial f(M_0)}{\partial y} = B, \quad \frac{\partial f(M_0)}{\partial z} = C. \tag{8.4.2}$$

Доказательство. Для точки $(x_0 + \Delta x, y_0, z_0)$ из выражения (8.4.1) $f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0) = A\Delta x + O(|\Delta x|)$. Отсюда

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta x} = \frac{\partial f(M_0)}{\partial x} = A.$$

Аналогично доказываются и остальные соотношения в (8.4.2).

Итак, из дифференцируемости функции f в точке M_0 следует существование в этой точке всех ее частных производных и для полного приращения имеет место формула

$$\Delta u(M_0) = \frac{\partial f(M_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(M_0)}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial f(M_0)}{\partial z}\Delta z + O(\rho). \tag{8.4.3}$$

Кроме того, из равенства (8.4.1) (или (8.4.3)) следует, что если $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$, $\Delta z \to 0$, то и $\Delta u \to 0$, т. е. ***дифференцируемая*** в точке M_0 функция f ***непрерывна*** в этой точке.

Однако как и для функции одной переменной, из непрерывности функции нескольких переменных в точке M_0, а также существования ее частных производных в этой точке, еще не следует дифференцируемость функции.

ТЕОРЕМА 8.4.2 (достаточные условия дифференцируемости). Если функция $u = f(x, y, z)$ в окрестности точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ имеет непрерывные частные производные $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ и $\frac{\partial f}{\partial z}$, то она дифференцируема в точке M_0.

8.5. Полный дифференциал ФНП, его применение в приближенных вычислениях

Определение 8.5.1. Если функция $u = f(x, y, z)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, то выражение $\frac{\partial f(M_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(M_0)}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial f(M_0)}{\partial z}\Delta z$, являющееся линейной функцией приращений Δx, Δy и Δz, называется ***полным дифференциалом*** или просто ***дифференциалом*** функции f в точке M_0 и обозначается $df(M_0)$ или $du(M_0)$.

Итак, по определению, дифференциал имеет вид

$$df(M_0) = \frac{\partial f(M_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(M_0)}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial f(M_0)}{\partial z}\Delta z \qquad (8.5.1)$$

и является линейной функцией Δx, Δy и Δz. Для независимых переменных x, y и z, как известно, $\Delta x = dx$, $\Delta y = dy$, $\Delta z = dz$. Тогда дифференциал (8.5.1) принимает вид

$$df(M_0) = \frac{\partial f(M_0)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(M_0)}{\partial y}dy + \frac{\partial f(M_0)}{\partial z}dz. \qquad (8.5.2)$$

Из формул (8.4.2) и (8.5.2) следует, что

$$\Delta u(M_0) = du(M_0) + O(\rho), \qquad (8.5.3)$$

т. е. полное приращение функции состоит из двух частей: главной части $du(M_0)$ и $O(\rho)$, являющейся бесконечно малой частью при $\rho \to 0$. Поэтому дифференциал в точке, если он отличен от нуля, является ***главной линейной частью*** полного приращения функции в этой точке.

Пример 8.5.1. Найти полный дифференциал функции $u = e^{x^2+y^2}\cos^2 z$.

Решение. Заметив, что частные производные $\frac{\partial u}{\partial x} = e^{x^2+y^2}\cdot 2x\cdot\cos^2 z$, $\frac{\partial u}{\partial y} = e^{x^2+y^2}\cdot 2y\cdot\cos^2 z$, $\frac{\partial u}{\partial z} = e^{x^2+y^2}\cdot 2\cos z(-\sin z)$ непрерывны при всех значениях *x*, *y* и *z*, находим

$$du = e^{x^2+y^2}\left(2x\cos^2 z\,dx + 2y\cos^2 z\,dy - \sin 2z\,dz\right).$$

Выражения $\frac{\partial f(M_0)}{\partial x}dx$, $\frac{\partial f(M_0)}{\partial y}dy$, $\frac{\partial f(M_0)}{\partial z}dz$ называются частными дифференциалами функции f в точке M_0 и обозначаются $d_x f(M_0)$, $d_y f(M_0)$, $d_z f(M_0)$ соответственно. Тогда полный дифференциал равен сумме частных дифференциалов:

$$df(M_0) = d_x f(M_0) + d_y f(M_0) + d_z f(M_0).$$

Формулу (8.5.3) можно использовать для приближенного вычисления значений функции. Имеет место приближенное равенство

$$\Delta u(M_0) \approx du(M_0)$$

или

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z) \approx f(x_0, y_0, z_0) + df(x_0, y_0, z_0). \quad (8.5.4)$$

Пример 8.5.2. Вычислить приближенно $\sqrt{4{,}05^2 + 3{,}07^2}$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$. Тогда искомое число можно рассматривать как значение этой функции при $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$, где $x_0 = 4$, $y_0 = 3$, $\Delta x = 0{,}05$, $\Delta y = 0{,}07$. Имеем

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} = \left.\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|_{\substack{x=4\\y=3}} = \frac{4}{5}; \qquad \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} = \left.\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|_{\substack{x=4\\y=3}} = \frac{3}{5}.$$

Теперь по формуле (8.5.4) получаем

$$\sqrt{4{,}05^2+3{,}07^2} \approx \sqrt{4^2+3^2} + \frac{4}{5}\cdot 0{,}05 + \frac{3}{5}\cdot 0{,}07 = 5{,}082.$$

8.6. Дифференцирование сложных функций

Пусть задана непрерывно дифференцируемая функция трех переменных $u = f(x, y, z)$, где, в свою очередь, x, y и z являются непрерывно дифференцируемыми функциями переменного t, т. е.

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad z = z(t).$$

Тем самым определена сложная функция одной переменной

$$u = f\left(x(t), y(t), z(t)\right) = F(t).$$

Найдем производную этой функции в точке t. Для этого придадим переменной t приращение $\Delta t \neq 0$, которое, в свою очередь, вызовет приращение функций

$$\Delta x = x(t+\Delta t) - x(t); \qquad \Delta y = y(t+\Delta t) - y(t); \Delta z = z(t+\Delta t) - z(t),$$

причем при $\Delta t \to 0$ также $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$, $\Delta z \to 0$ в силу дифференцируемости функций $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, а, значит, и $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2} \to 0$ при $\Delta t \to 0$.

В силу дифференцируемости функции $u = f(x, y, z)$ ее полное приращение

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\Delta z + O(\rho), \tag{8.6.1}$$

где $\lim\limits_{\rho \to 0} \dfrac{O(\rho)}{\rho} = 0$, а частные производные $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$, $\dfrac{\partial u}{\partial z}$ вычислены в точке $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$. Разделив все члены равенства (8.6.1) на Δt и перейдя в полученном выражении к пределу при $\Delta t \to 0$ в силу дифференцируемости x, y, z по t, получим

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{\partial u}{\partial x} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial u}{\partial y} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} + \frac{\partial u}{\partial z} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{O(\rho)}{\Delta t} =$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{O(\rho)}{\Delta t}. \tag{8.6.2}$$

Покажем, что $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{O(\rho)}{\Delta t} = 0$. В самом деле

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{O(\rho)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{O(\rho)}{\rho} \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\rho}{\Delta t} = \lim_{\rho \to 0} \frac{O(\rho)}{\rho} \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)^2} =$$

$$= 0 \cdot \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2} = 0.$$

Таким образом, равенство (8.6.2) принимает вид

$$\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt}. \tag{8.6.3}$$

Пример 8.6.1. $u=x^2+y^2+z^3$. Найти $\frac{du}{dt}$, если $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=\sin t\cos t$.

Решение. Так как $u'_x=2x$, $u'_y=2y$, $u'_z=3z^2$, $x'_t=-a\sin t$, $y'_t=a\cos t$, $z'_t=\cos 2t$, по формуле (8.6.3) получаем

$$u'_t=2x\cdot(-a\sin t)+2y\cdot a\cos t+3z^2\cos 2t=$$
$$=-2a^2\sin t\cos t+2a^2\sin t\cos t+3\sin^2 t\cdot\cos^2 t\cos 2t=$$
$$=\frac{3}{4}\sin^2 2t\cdot\cos 2t=\frac{3}{8}\sin 4t\cdot\sin 2t.$$

Пусть $u=f(x,y,z)$, где $y=y(x)$; $z=z(x)$. По формуле (8.6.3)

$$\frac{du}{dx}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dx}. \tag{8.6.4}$$

Формула (8.6.4) носит название ***полной производной***.

Пример 8.6.2. Дано $z=y^x$, $y=\sin^2 x$. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{dz}{dx}$.

Решение. Имеем $\frac{\partial z}{\partial x}=y^x\ln y$. Полную производную $\frac{dz}{dx}$ вычислим по формуле (8.6.4)

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}=y^x\ln y+xy^{x-1}\cdot\sin 2x=\sin^{2x}x\ln\sin^2 x+x\cdot\sin 2x\sin^{2x-2}x.$$

Пусть теперь задана непрерывно дифференцируемая функция $u=f(x,y,z)$, где в свою очередь $x=x(S,t)$, $y=y(S,t)$ и $z=z(S,t)$ – непрерывно дифференцируемые функции переменных S и t. Тем самым определена сложная функция двух переменных

$$u=f\big(x(S,t),y(S,t),z(S,t)\big)=\Phi(S,t).$$

Так как при вычислении частных производных одна из переменных фиксируется, то этот случай по сути дела сводится к рассмотренному выше, в силу чего формулы для вычисления $\frac{\partial u}{\partial S}$ и $\frac{\partial u}{dt}$ имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial S}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial S}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial S}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial S},$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial t}. \qquad (8.6.5)$$

Пример 8.6.3. Найти частные производные функции $u=x^2\cdot y^3$, где $x=S-t,\ y=S\cdot t$.

Решение. По формулам (8.6.5) имеем

$$\frac{\partial u}{\partial S}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial S}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial S}=2x\cdot y^3\cdot 1+3x^2y^2\cdot t=$$
$$=2(S-t)S^3t^3+3(S-t)^2S^2t^3.$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}=2xy^3(-1)+3x^2y^2\cdot S=$$
$$=-2(S-t)S^3t^3+3(S-t)^2S^3t^2.$$

Аналогичные формулы имеют место для сложных функций и большего числа независимых переменных.

8.7. Инвариантность формы первого дифференциала ФНП

Рассмотрим дифференциал сложной функции $u=f(x,y,z)$, где $x=x(S,t)$, $y=y(S,t)$, $z=z(S,t)$. Для функции $u=f\left(x(S,t),y(S,t),z(S,t)\right)$ ее дифференциал

$$du=\frac{\partial u}{\partial S}dS+\frac{\partial u}{\partial t}dt. \qquad (8.7.1)$$

Вычисляя $\frac{\partial u}{\partial S}$ и $\frac{\partial u}{\partial t}$ по формулам (8.6.5), получаем

$$du=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial S}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial S}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial S}\right)dS+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial t}\right)dt=$$
$$=\frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial S}dS+\frac{\partial x}{\partial t}dt\right)+\frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial S}dS+\frac{\partial y}{\partial t}dt\right)+\frac{\partial u}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial S}dS+\frac{\partial z}{\partial t}dt\right).$$

Выражения в круглых скобках последнего равенства представляют собой полные дифференциалы dx, dy, dz функций x, y и z соответственно. Тогда последнее равенство имеет вид

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz. \qquad (8.7.2)$$

Таким образом, полный дифференциал сохраняет свой вид независимо от того, являются ли функции x, y, z независимыми переменными или являются функциями других независимых переменных.

В этом и состоит свойство инвариантности первого дифференциала. Это свойство позволяет установить следующие правила вычисления дифференциалов:

$d(u \pm v) = du \pm dv$;

$d(uv) = udv + vdu$;

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2} \quad (v \neq 0).$$

Отметим, что для полных дифференциалов высших порядков свойство инвариантности не выполняется.

8.8. Производная от ФНП, заданной неявно

Пусть некоторая функция y от x определяется уравнением $F(x,y) = 0$.

Тогда имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 8.8.1. Пусть непрерывная функция y от x задается неявно уравнением

$$F(x,y) = 0, \tag{8.8.1}$$

где $F(x,y)$, $F'_x(x,y)$, $F'_y(x,y)$ – непрерывные функции в некоторой области D, содержащей точку (x,y), координаты которой удовлетворяют уравнению (8.8.1); кроме того, в этой точке $F'_y(x,y) \neq 0$. Тогда

$$y'_x = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}. \tag{8.8.2}$$

Доказательство. По правилу дифференцирования сложной функции из выражения (8.8.1) имеем

$$F'_x + F'_y \cdot y'_x = 0 \;\Rightarrow\; y'_x = -\frac{F'_x}{F'_y}.$$

Пример 8.8.1. Уравнение $x^2 + y^2 - R^2 = 0$ определяет y как неявную функцию от x. Здесь $F(x,y) = x^2 + y^2 - R^2$, $\frac{\partial F}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 2y$. По формуле (8.8.2)

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}.$$

Рассмотрим теперь уравнение вида

$$F(x, y, z) = 0. \qquad (8.8.3)$$

Если каждой паре чисел x и y из некоторой области соответствует одно или несколько значений z, удовлетворяющих уравнению (8.8.3), то это уравнение неявно определяет одну или несколько однозначных функций z от x и y.

Например, уравнение сферы $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$ неявно определяет две непрерывные функции:

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \quad \text{и} \quad z = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}.$$

Найдем частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ неявной функции z от x и y, определяемой уравнением (8.8.3).

Когда мы ищем $\frac{\partial z}{\partial x}$, то y считаем постоянным. Поэтому здесь применима формула (8.8.2), если независимой переменной считать x, а функцией z. Следовательно,

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z}.$$

Аналогично, $z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z}$. Предполагается, что $F'_z \neq 0$.

Аналогичным образом определяются неявные функции любого числа переменных и находятся их частные производные.

Пример 8.8.2. $e^z + x^2 y + z + 8 = 0$.

Решение. Здесь $F(x, y, z) = e^z + x^2 y + z + 8$,

$\frac{\partial F}{\partial x} = 2xy$, $\quad \frac{\partial F}{\partial y} = x^2$, $\quad \frac{\partial F}{\partial z} = e^z + 1$. Тогда

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2xy}{e^z + 1}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x^2}{e^z + 1}.$$

8.9. Производные и дифференциалы высших порядков

Если частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$ функции $u = f(x, y, z)$, в свою очередь, являются дифференцируемыми функциями, то можно находить их частные производные.

Для функции $v = \dfrac{\partial u}{\partial x}$ частные производные

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right); \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right); \qquad \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right),$$

называемые частными производными второго порядка, обозначаются $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial z \partial x}$ соответственно.

Точно так же определяются частные производные второго порядка от функций $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial u}{\partial z}$, где $u = f(x, y, z)$.

Например,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right), \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Аналогично вводятся частные производные третьего порядка. Например, $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)\right)$.

Частные производные высших порядков функции u по различным переменным называются смешанными производными. Производные высших порядков по одной переменной типа $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial x \partial x}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial y}$ и т.д. обозначаются $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ и т.д.

Можно обозначить $u'''_{x^2 y}$, $u^{\mathrm{IV}}_{x y^2 z}$, …

П р и м е р 8.9.1. Найти все частные производные второго порядка функции $u = \ln(5x - 3y)$.

Решение. $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{5}{5x - 3y}$; $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{-3}{5x - 3y}$. Далее

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{5}{5x - 3y}\right) = -\frac{25}{(5x - 3y)^2};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{5}{5x - 3y}\right) = \frac{15}{(5x - 3y)^2};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{3}{5x-3y}\right)=\frac{15}{(5x-3y)^2};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{3}{5x-3y}\right)=\frac{-9}{(5x-3y)^2}.$$

Заметим, что в примере оказались равными смешанные производные $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$. Этот факт не является случайным. Имеет место следующая теорема, которую мы приведем для функции двух переменных без доказательства.

ТЕОРЕМА 8.9.1. Если функция $z=f(x,y)$ имеет в точке $M(x,y)$ непрерывные частные производные второго порядка f''_{xy} и f''_{yx}, то

$$f''_{xy}=f''_{yx}. \tag{8.9.1}$$

Пусть функция $z=f(x,y)$ имеет непрерывные частные производные высших порядков. Тогда ее дифференциал первого порядка

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$$

является по существу функцией четырех переменных x, y, dx, dy. Можно поставить вопрос о нахождении второго дифференциала $d^2z=d(dz)$. Так как при вычислении частных производных по x и по y от dz переменные dx и dy считаются постоянными, то

$$d^2z=d(dz)=\frac{\partial}{\partial x}(dz)dx+\frac{\partial}{\partial y}(dz)dy=$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy\right)dx+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy\right)dy=$$

$$=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dx\,dy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2. \tag{8.9.2}$$

Здесь учтено, что $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, кроме того, $dx^2=dx\cdot dx$, $dy^2=dy\cdot dy$.

Аналогично находим

$$d^3z = d\left(d^2z\right) = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}dx^3 + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}dx^2dy + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}dx\,dy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}dy^3;$$

… и т.д.

$$d^nz = \frac{\partial^n z}{\partial x^n}dx^n + C_n^1\frac{\partial^n z}{\partial x^{n-1}\partial y}dx^{n-1}dy + C_n^2\frac{\partial^n z}{\partial x^{n-2}\partial y^2}dx^{n-2}dy^2 + \ldots +$$

$$+C_n^k\frac{\partial^n z}{\partial x^{n-k}\partial y^k}dx^{n-k}dy^k + \ldots + \frac{\partial^n z}{\partial y^n}dy^n,$$

где $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ – число сочетаний из n по k.

Это выражение можно символически записать в виде равенства

$$d^nz = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n z.$$

Полученные результаты обобщаются на функции любого числа независимых переменных. В частности, для функции $u = f(x,y,z)$ ее n-ный дифференциал

$$d^nu = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy + \frac{\partial}{\partial z}dz\right)^n u.$$

8.10. Производная по направлению

Рассмотрим в области D функцию $u = f(x,y,z)$ и точку $M(x,y,z)$. Проведем из точки M вектор $\bar{S}$, направляющие косинусы которого $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ (рис. 8.10.1).

На векторе $\bar{S}$ на расстоянии ΔS от его начала рассмотрим точку $M_1(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z)$. Таким образом,

$$\Delta S = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}.$$

Будем предполагать, что функция $u(x,y,z)$ непрерывна и имеет непрерывные производные по своим аргументам в области D.

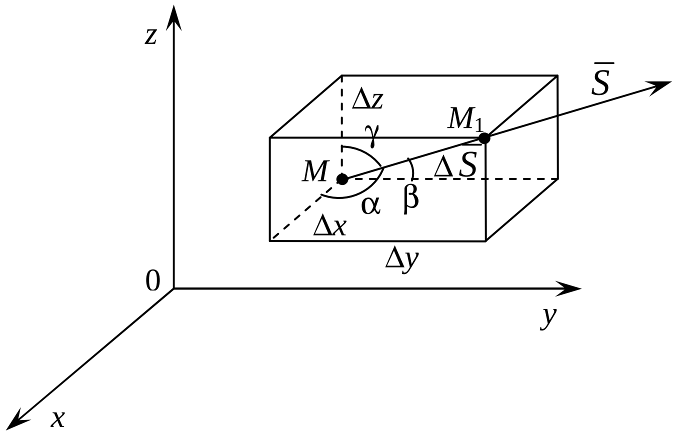


Рис. 8.10.1

Полное приращение функции представим в следующем виде

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\Delta z + 0(\Delta S), \qquad (8.10.1)$$

где $\lim\limits_{\Delta S \to 0} \frac{0(\Delta S)}{\Delta S} = 0$.

Разделим все члены равенства (8.10.1) на ΔS:

$$\frac{\Delta u}{\Delta S} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta S} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta S} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\Delta z}{\Delta S} + \frac{0(\Delta S)}{\Delta S}. \qquad (8.10.2)$$

Из рис. 8.10.1 видно, что

$$\frac{\Delta x}{\Delta S} = \cos\alpha, \qquad \frac{\Delta y}{\Delta S} = \cos\beta, \qquad \frac{\Delta z}{\Delta S} = \cos\gamma.$$

Следовательно, выражение (8.10.2) принимает вид

$$\frac{\Delta u}{\Delta S} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma + \frac{0(\Delta S)}{\Delta S}. \qquad (8.10.3)$$

Определение 8.10.1. Предел отношения $\frac{\Delta u}{\Delta S}$ при $\Delta S \to 0$ называется производной от функции $u = u(x, y, z)$ по направлению вектора $\overline{S}$ и обозначается $\frac{\partial u}{\partial S}$, т. е.

$$\lim_{\Delta S \to 0}\frac{\Delta u}{\Delta S} = \frac{\partial u}{\partial S}. \qquad (8.10.4)$$

Переходя к пределу в равенстве (8.10.3), получим

$$\frac{\partial u}{\partial S} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma. \qquad (8.10.5)$$

Сами частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$ – частный случай производной по направлению. Так, например, при $\alpha = 0$, $\beta = \frac{\pi}{2}$, $\gamma = \frac{\pi}{2}$ получаем

$$\frac{\partial u}{\partial S} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos 0 + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\frac{\pi}{2} + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\frac{\pi}{2} = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

П р и м е р 8.10.1. Дана функция $u = x^2 + y^2 + z^2$. Найти $\dfrac{\partial u}{\partial S}$ в точке $M(1, 1, 1)$ в направлении вектора $\bar{S} = i + j + k$.

Решение. Находим направляющие косинусы вектора $\bar{S}$:

$$\cos\alpha = \frac{S_x}{|\bar{S}|} = \frac{1}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \qquad \cos\beta = \frac{S_y}{|\bar{S}|} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \cos\gamma = \frac{S_z}{|\bar{S}|} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Частные производные $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = 2y$, $\dfrac{\partial u}{\partial z} = 2z$ в точке $M(1,1,1)$ равны 2.

Следовательно, $\dfrac{\partial u}{\partial S} = 2\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}} + 2\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}} + 2\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$.

8.11. Градиент

В каждой точке области D, в которой задана функция $u = f(x, y, z)$, определим вектор, проекциями которого на оси координат являются значения частных производных $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$, $\dfrac{\partial u}{\partial z}$ этой функции в соответствующей точке:

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x} i + \frac{\partial u}{\partial y} j + \frac{\partial u}{\partial z} k. \tag{8.11.1}$$

Этот вектор называется ***градиентом*** функции $u = f(x, y, z)$. Говорят, что в области D определено векторное поле градиентов.

Докажем теорему, устанавливающую связь между градиентом и производной по направлению.

ТЕОРЕМА 8.11.1. Пусть дано скалярное поле $u = u(x, y, z)$ и в нем определен градиент

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x} i + \frac{\partial u}{\partial y} j + \frac{\partial u}{\partial z} k.$$

Производная $\dfrac{\partial u}{\partial S}$ по направлению некоторого вектора $\bar{S}$ равняется проекции вектора $\operatorname{grad} u$ на вектор $\bar{S}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Рассмотрим единичный вектор $\overline{S}^0$, соответствующий вектору $\overline{S}$,

$$\overline{S}_0 = i\cos\alpha + j\cos\beta + k\cos\gamma .$$

Вычислим скалярное произведение векторов $\operatorname{grad} u$ и $\overline{S}^0$:

$$\operatorname{grad} u \cdot \overline{S}_0 = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma . \qquad (8.11.2)$$

Выражение, стоящее в правой части этого равенства, есть производная от функции $u(x, y, z)$ по направлению вектора $\overline{S}$, т. е.

$$\operatorname{grad} u \cdot \overline{S}_0 = \frac{\partial u}{\partial S} .$$

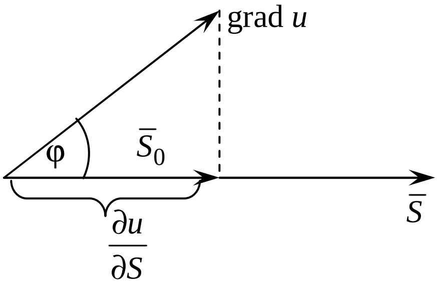


Рис. 8.11.1

Если обозначить угол между векторами grad u и $\overline{S}^0$ через φ (рис. 8.11.1), то можем записать

$$|\operatorname{grad} u|\cos\varphi = \frac{\partial u}{\partial S} \qquad (8.11.3)$$

или

$$np_{\overline{S}_0} \operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial S} . \qquad (8.11.4)$$

Теорема доказана.

Установим некоторые свойства градиента.

1. Производная в данной точке по направлению вектора $\overline{S}$ имеет наибольшее значение, если направление вектора $\overline{S}$ совпадает с направлением градиента; это наибольшее значение производной равно $|\operatorname{grad} u|$.

Доказательство следует из равенства (8.11.3): наибольшее значение $\frac{\partial u}{\partial S}$ будет при $\varphi = 0$ и в этом случае

$$\frac{\partial u}{\partial S} = |\operatorname{grad} u| .$$

2. Производная по направлению вектора, перпендикулярного к вектору grad u, равна нулю.

В этом случае $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\cos\varphi = 0$, $\frac{\partial u}{\partial S} = 0$.

П р и м е р 8.11.1. Дана функция $u = x^2 + y^2 + z^2$;

а) определим grad u в точке $M(1,1,1)$

$$\mathrm{grad}\, u = 2xi + 2yj + 2zk.$$

Следовательно, $\mathrm{grad}\, u\big|_M = 2i + 2j + 2k$,

$$\left|\mathrm{grad}\, u\big|_M\right| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2} = 2\sqrt{3};$$

б) определим производную функции u в точке $M(1,1,1)$ в направлении градиента

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Следовательно, $\dfrac{\partial u}{\partial S} = 2\dfrac{1}{\sqrt{3}} + 2\dfrac{1}{\sqrt{3}} + 2\dfrac{1}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$, то есть

$$\frac{\partial u}{\partial S} = |\mathrm{grad}\, u|.$$

8.12. Геометрические приложения ФНП

Пусть σ – поверхность, определяемая дифференцируемой функцией $z = f(x, y)$.

Касательной плоскостью к поверхности σ в ее точке N_0 называется плоскость, содержащая в себе все касательные к кривым, проведенным на поверхности через точку N_0 (рис. 8.12.1).

Поверхность $z = f(x, y)$ является поверхностью уровня $u = 0$ функции $u = z - f(x, y)$. Можно доказать, что вектор $\mathrm{grad}\, u(N_0)$ перпендикулярен к поверхности уровня $u = 0$, т. е. он перпендикулярен к любой касательной прямой, проведенной к поверхности σ в данной точке. Таким образом, вектор $\mathrm{grad}\, u(N_0)$ перпендикулярен к искомой плоскости.

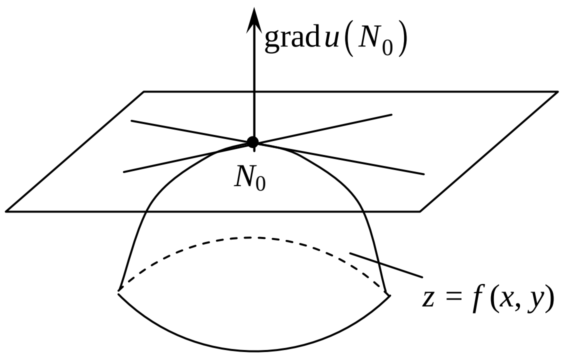


Рис. 8.12.1

Из аналитической геометрии известно, что уравнение плоскости, проходящей через точку $N_0(x_0, y_0, z_0) \perp \overline{n}(A, B, C)$, имеет вид

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \qquad (8.12.1)$$

В нашем случае

$$\overline{n}=\operatorname{grad}u\left(N_0\right)=\left(\frac{\partial u\left(N_0\right)}{\partial x},\frac{\partial u\left(N_0\right)}{\partial y},\frac{\partial u\left(N_0\right)}{\partial z}\right)=\left(-\frac{\partial f\left(x_0,y_0\right)}{\partial x};-\frac{\partial f\left(x_0,y_0\right)}{\partial y};1\right),$$

а $z_0=f\left(x_0,y_0\right)$. Тогда по формуле (8.12.1) уравнение касательной плоскости в точке $N_0\left(x_0,y_0,z_0\right)$ имеет вид

$$-\frac{\partial f\left(x_0,y_0\right)}{\partial x}\left(x-x_0\right)-\frac{\partial f\left(x_0,y_0\right)}{\partial y}\left(y-y_0\right)+1\left(z-z_0\right)=0$$

или

$$z-z_0=f_x'\left(x_0,y_0\right)\left(x-x_0\right)+f_y'\left(x_0,y_0\right)\left(y-y_0\right). \tag{8.12.2}$$

Нормалью к поверхности σ в точке N_0 называется прямая, перпендикулярная касательной плоскости и проходящая через точку N_0. Направляющим вектором нормали является вектор $\overline{a}=\overline{n}=\left(-\frac{\partial f\left(x_0,y_0\right)}{\partial x};-\frac{\partial f\left(x_0,y_0\right)}{\partial y};1\right)$.

В таком случае канонические уравнения нормали имеют вид

$$\frac{x-x_0}{-f_x'\left(x_0,y_0\right)}=\frac{y-y_0}{-f_y'\left(x_0,y_0\right)}=\frac{z-z_0}{1}. \tag{8.12.3}$$

Известно, что поверхность σ, определяемая уравнением $F\left(x,y,z\right)=0$, является поверхностью нулевого уровня функции $u=F\left(x,y,z\right)$. Тогда вектор

$$\overline{n}=\operatorname{grad}u\left(N_0\right)=\left.\left(\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial F}{\partial z}\right)\right|_{N_0} \tag{8.12.4}$$

является вектором нормали к этой поверхности в точке N_0, а уравнение касательной плоскости в точке $N_0\in\sigma$ имеет вид

$$F_x'\left(N_0\right)\left(x-x_0\right)+F_y'\left(N_0\right)\left(y-y_0\right)+F_z'\left(N_0\right)\left(z-z_0\right)=0, \tag{8.12.5}$$

Канонические уравнения нормали

$$\frac{x-x_0}{F_x'\left(N_0\right)}=\frac{y-y_0}{F_y'\left(N_0\right)}=\frac{z-z_0}{F_z'\left(N_0\right)}. \tag{8.12.6}$$

Пример 8.12.1. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z=x^2-2y^2$ в точке $N_0(2,0,4)$.

Решение. $z'_x = 2x$, $z'_x\big|_{x=2} = 4$; $z'_y = -4y$, $z'_y\big|_{y=0} = 0$. Тогда $z-4 = 4(x-2)+0(y-0)$ или $4x - z - 4 = 0$ – уравнение касательной плоскости, а канонические уравнения нормали будут $\dfrac{x-2}{-4} = \dfrac{y}{0} = \dfrac{z-4}{1}$.

8.13. Экстремум ФНП

Определение 8.13.1. Функция $z = f(x,y)$ имеет ***максимум*** в точке $M_0(x_0,y_0)$, если выполняется условие

$$f(x_0,y_0) > f(x,y)$$

для всех точек $M(x,y)$, достаточно близких к точке $M_0(x_0,y_0)$ и отличных от нее; функция $z = f(x,y)$ имеет ***минимум*** в точке $M_0(x_0,y_0)$, если

$$f(x_0,y_0) < f(x,y)$$

для всех точек $M(x,y)$, достаточно близких к точке $M_0(x_0,y_0)$ и отличных от нее.

Пример 8.13.1. Функция $z = x^2 + y^2 + 1$ имеет в точке $O(0,0)$ минимум. Действительно, $f(0,0) = 1$, а при $x \neq 0$, $y \neq 0$

$$x^2 + y^2 + 1 > 1 \quad \forall\, x, y.$$

Геометрическая картина, соответствующая данному случаю, изображена на рис. 8.13.1.

Положим $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$, тогда

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) = f(x_0+\Delta x,\, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) = \Delta f.$$

1) Если $\Delta f < 0$ при всех достаточно малых приращениях независимых переменных, то функция $f(x,y)$ достигает максимума в точке $M_0(x_0,y_0)$;

2) Если $\Delta f > 0$ при всех достаточно малых приращениях независимых переменных, то функция $f(x,y)$ достигает минимума в точке $M_0(x_0,y_0)$.

Эти формулировки переносятся без изменения на функции любого числа переменных.

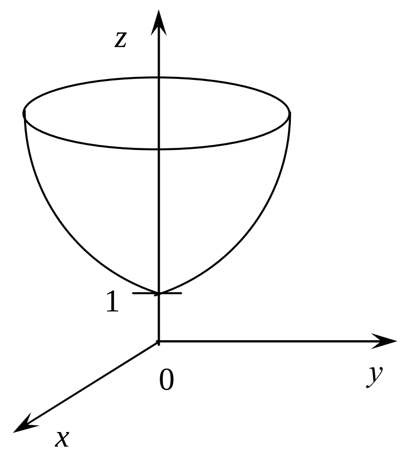


Рис. 8.13.1

ТЕОРЕМА 8.13.1 (необходимые условия экстремума). Если функция $z = f(x, y)$ достигает экстремума при $x = x_0$, $y = y_0$, то каждая частная производная первого порядка от z или обращается в нуль при этих значениях аргументов, или не существует.

Доказательство. Дадим переменной y определенное значение $y = y_0$. Тогда функция $f(x, y_0)$ будет функцией одной переменной x. Так как при $x = x_0$ она имеет экстремум, то, следовательно, $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}$ или равна нулю, или не существует. Совершенно аналогично можно доказать, что $\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}$ или равна нулю, или не существует.

Эта теорема не является достаточной для исследования вопроса об экстремальных значениях функции, но позволяет находить эти значения, когда мы заранее уверены в существовании экстремума.

Так, в примере 8.13.1 геометрически очевидно, что функция $z = x^2 + y^2 + 1$ имеет в точке $O(0,0)$ минимум.

Определение 8.13.2. Точки, в которых частные производные либо равны нулю, либо не существуют, называются ***критическими*** точками функции $z = f(x, y)$.

Пример 8.13.2. Найти критические точки функции $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Решение. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $\qquad \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

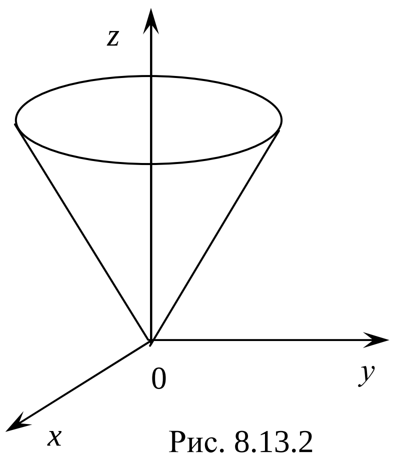


Рис. 8.13.2

При $x = 0$, $y = 0$ z'_x и z'_y не существуют, т. е. $O(0,0)$ – критическая точка. Геометрически уравнение $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ определяет коническую поверхность ($z > 0$). Очевидно, что в точке $O(0,0)$ функция имеет минимум (рис. 8.13.2).

Если функция достигает экстремума в какой-либо точке, то в силу теоремы 8.13.1 это может случиться только в критической точке.

ТЕОРЕМА 8.13.2 (достаточные условия экстремума). Пусть в некоторой области, содержащей точку $M_0(x_0, y_0)$, функция $f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные до третьего порядка включительно; пусть, кроме того, точка $M_0(x_0, y_0)$ является критической точкой функции $f(x, y)$. Введем следующие обозначения:

$$A = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{M_0}, \quad B = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{M_0}, \quad C = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{M_0}.$$

Тогда при $x = x_0$, $y = y_0$

1) $f(x, y)$ имеет максимум, если

$$AC - B^2 > 0 \text{ и } A < 0 \ (C < 0);$$

2) $f(x, y)$ имеет минимум, если

$$AC - B^2 > 0 \text{ и } A > 0 \ (C > 0);$$

3) $f(x, y)$ не имеет ни минимума, ни максимума, если

$$AC - B^2 < 0;$$

4) если $AC - B^2 = 0$, то экстремум может быть и может не быть (в этом случае нужны дополнительные исследования).

Пример 8.13.3. Исследовать на экстремум функцию

$$z = 3xy - x^3 - y^3.$$

Решение. Найдем критические точки. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 3y - 3x^2$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 3x - 3y^2$.

$$\begin{cases} 3y - 3x^2 = 0, \\ 3x - 3y^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y - x^2 = 0, \\ x - y^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = 1,\ y_1 = 1 \text{ и } x_2 = 0,\ y_2 = 0.$$

Найдем производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -6x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 3, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -6y.$$

1) Исследуем характер первой точки

$$A = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{\substack{x_1=1 \\ y_1=1}} = -6, \qquad B = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{\substack{x_1=1 \\ y_1=1}} = 3, \ C = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{\substack{x_1=1 \\ y_1=1}} = -6.$$

$$AC - B^2 = 36 - 9 = 27 > 0, \ A = -6 < 0.$$

Следовательно, в точке (1,1) данная функция имеет максимум

$$z_{\max} = 3 \cdot 1 \cdot 1 - 1^3 - 1^3 = 1.$$

2) Во второй точке $M_2(0, 0)$ имеем

$$A = 0, \quad B = 3, \quad C = 0; \qquad AC - B^2 = -9 < 0.$$

Следовательно, во второй критической точке функция не имеет ни максимума, ни минимума.

8.14. Условный экстремум

Во многих задачах на разыскание наибольших и наименьших значений функции вопрос сводится к разысканию максимумов и минимумов функции от нескольких переменных, которые не являются независимыми, а связаны друг с другом некоторыми дополнительными условиями.

Рассмотрим вопрос об условном экстремуме функции двух переменных, если эти переменные связаны одним условием.

Пусть требуется найти экстремум функции

$$z = f(x, y) \tag{8.14.1}$$

при условии, что x и y связаны уравнением

$$\varphi(x, y) = 0. \tag{8.14.2}$$

Если уравнение (8.14.2) разрешимо, например, относительно y, то, подставляя в (8.14.1) вместо y найденное выражение, получим функцию одной переменной x и сведем задачу к задаче об исследовании на экстремум функции одной независимой переменной.

Пример 8.14.1. Найти экстремум функции $z = x^2 + y^2$ при условии, что $x + y = 1$.

Решение. Из дополнительного условия $y = 1 - x$. Тогда

$$z = x^2 + y^2 = x^2 + (1-x)^2 = x^2 + 1 - 2x + x^2 = 2x^2 - 2x + 1,$$

$$\text{то есть } z = 2x^2 - 2x + 1, \quad z'_x = 4x - 2, \quad x_0 = \frac{1}{2}.$$

Это парабола с ветвями, направленными вверх, поэтому, очевидно, что $x_{\min} = \frac{1}{2}$, $y_{\min} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$; $z_{\min} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$.

Упражнение. Проиллюстрировать геометрически результаты примера.

Можно решить поставленную задачу, не разрешая уравнение (8.14.2) относительно x или y. При тех значениях x, при которых функция z может иметь экстремум, производная z по x должна обращаться в нуль.

Из (8.14.1) находим $\frac{dz}{dx}$, помня, что y есть функция от x.

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}.$$

Следовательно, в точках экстремума

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}=0. \qquad (8.14.3)$$

Из выражения (8.14.2) имеем

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\frac{\partial \varphi}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}=0. \qquad (8.14.4)$$

Умножив члены равенства (8.14.4) на неопределенный пока коэффициент λ и сложив их с соответствующими членами равенства (8.14.3), получим

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}\right)+\lambda\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\frac{\partial \varphi}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}\right)=0$$

или

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\frac{dy}{dx}=0. \qquad (8.14.5)$$

Подберем λ так, чтобы вторая скобка в равенстве (8.14.5) обратилась в нуль.

$$\frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y}=0.$$

Но тогда из этого же равенства следует, что

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x}=0.$$

Таким образом, получается, что в точках экстремума удовлетворяются три уравнения:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}+\lambda\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}=0,\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}+\lambda\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}=0,\\ \varphi(x,y)=0.\end{cases} \qquad (8.14.6)$$

с тремя неизвестными x, y, λ. Из этой системы определяем x, y и λ, которое играло вспомогательную роль и в дальнейшем не потребуется.

Из вывода следует, что уравнения (8.14.6) являются необходимыми условиями условного экстремума. Но не при всяких x и y (и λ), удовлетворяющих выражению (8.14.6), будет иметь место условный экстремум. Требуются дополнительные исследования характера критической точки.

Заметим, что левые части системы (8.14.6) суть частные производные некоторой вспомогательной функции

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y), \text{ т. е.}$$

$$\begin{cases} F'_x = 0, \\ F'_y = 0, \\ F'_\lambda = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'_x + \lambda\varphi'_x = 0, \\ f'_y + \lambda\varphi'_y = 0, \\ \varphi(x, y) = 0. \end{cases}$$

Введение вспомогательной функции $F(x, y, \lambda)$ называется методом условных множителей Лагранжа.

Рассмотренный метод распространяется на исследование условного экстремума функции любого числа переменных.

8.15. Нахождение наибольшего и наименьшего значений ФНП в замкнутой области

Пусть функция $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ определена и непрерывна в замкнутой ограниченной области D с границей Γ и дифференцируема во всех ее внутренних точках. Тогда в силу теоремы Вейерштрасса существуют точки M_1 и M_2, в которых функция f принимает наибольшее и наименьшее значения (глобальный экстремум), т. е.

$$f(M_1) = \max_{x \in D} f(x); \qquad f(M_2) = \min_{x \in D} f(x) \quad \left(x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)\right).$$

Точки M_1 и M_2 следует искать среди критических точек функции f внутри области D или среди точек, принадлежащих границе Γ. Сравнив наибольшее и наименьшее значения функции f в критических точках с наибольшим и наименьшим значениями этой функции на границе, найдем искомый максимум и минимум функции f в области D.

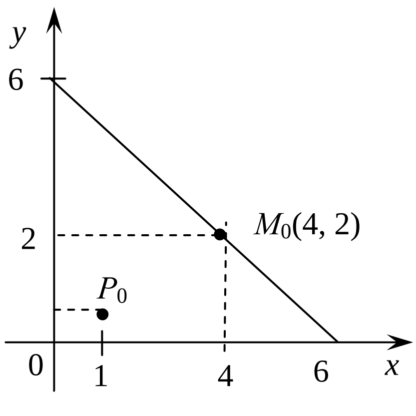


Рис. 8.15.1

Пример 8.15.1. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 y(2 - x - y)$ в треугольнике, ограниченном прямыми $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 6$ (рис. 8.15.1)

Решение. Найдем критические точки, лежащие внутри треугольника ($x > 0$, $y > 0$):

$$\left.\begin{aligned} z'_x &= 2xy(2-x-y)+x^2y(-1)=4xy-3x^2y-2xy^2,\\ z'_y &= x^2(2-x-y)+x^2y(-1)=2x^2-x^3-2xy^2. \end{aligned}\right. \Rightarrow$$

$$\begin{cases} xy(4-3x-2y)=0,\\ x^2(2-x-2y)=0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4-3x-2y=0,\\ 2-x-2y=0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0=1,\\ y_0=\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Итак, имеем единственную критическую точку $P_0\left(1,\dfrac{1}{2}\right)$, лежащую внутри треугольника. Вычислим значение функции в этой точке $z(P_0)=1^2\cdot\dfrac{1}{2}\left(2-1-\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{1}{4}$.

На сторонах треугольника $x = 0$ и $y = 0$ значения функции $z = 0$. Найдем наибольшее и наименьшее значения z на стороне

$$x+y=6 \Rightarrow y=6-x \ (0\le x\le 6) \Rightarrow$$

$$z=z(x)=x^2(6-x)(2-x-6+x)=-4x^2(6-x).$$

Имеем $z(0) = z(6) = 0$. $z'(x)=-48x+12x^2$,

$$-48x+12x^2=0 \Rightarrow x_0=4\in(0,6) \Rightarrow y_0=6-4=2.$$

Итак, $M_0(4, 2)$ – критическая точка на границе $x + y = 6$. $z(x_0)=z(4)=-128$.

Таким образом, глобальный экстремум функции z в данной области надо искать среди следующих значений:

$z=\dfrac{1}{4}$ – внутри треугольника в точке $P_0\left(1,\dfrac{1}{2}\right)$;

$z = 0$ – на сторонах $x = 0$, $y = 0$;

$z = -128$ – на стороне $x + y = 6$ в точке (4, 2),

Отсюда видно, что $\max z=\dfrac{1}{4}$, $\min z = -128$ в заданном треугольнике.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ПРОВЕДЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

Учебно-информационный блок для проведения практических занятий

Тема занятия	Тип занятия	Количество часов
I. Область определения ФНП. Линии и поверхности уровня. Предел и непрерывность ФНП. Техника нахождения частных производных	Повторение и обобщение старых знаний. Усвоение и закрепление изученного самостоятельно нового материала	2
II. Полное приращение и полный дифференциал. Применение дифференциала в приближенных вычислениях. Частные производные и дифференциалы высших порядков	Углубление и расширение полученных знаний. Усвоение нового материала. Предварительный контроль	2
III. Дифференцирование сложных функций. Дифференцирование неявных функций. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Производная по направлению и градиент	Углубление и расширение полученных знаний. Усвоение нового материала. Текущий контроль	2
IV. Экстремум ФНП. Условный экстремум. Нахождение наибольшего и наименьшего значений ФНП в замкнутой области	Углубление и расширение полученных знаний. Усвоение нового материала	2
V. Контрольная работа	Итоговый контроль	2

Основная и дополнительная литература

1. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. В 2 ч. Ч. 2 / Н.С. Пискунов. – М.: Наука, 1985.
2. Жевняк, Р.М. Высшая математика. В 4 ч. Ч. 2 / Р.М. Жевняк, А.А. Карпук. – Минск: Выш. шк., 1985.
3. Гусак, А.А. Справочник по высшей математике / А.А. Гусак, Г.М. Гусак. – Минск: Навука и тэхника, 1991.
4. Берман, Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Г.Н. Берман. – М.: Наука, 1971.
5. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 ч. Ч. 1 / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – М.: Высш. шк., 1980.
6. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике. В 4 ч. Ч. 2 / под общ. ред. А.П. Рябушко. – Минск: Выш. шк., 1991.

I. Область определения ФНП. Линии и поверхности уровня. Предел и непрерывность ФНП. Техника нахождения частных производных

1. Краткое повторение теоретического материала.

Если каждой упорядоченной паре чисел (x, y) из некоторой области D соответствует определенное число $z \in E \subset R$, то z называется функцией двух переменных x и y, D – областью определения или существования функции, а множество E всех значений функции – областью ее значений. Символическая запись $z = f(x, y)$.

Геометрически область определения функции D представляет собой некоторую часть плоскости xOy, ограниченную линиями, которые могут принадлежать или не принадлежать этой области. В первом случае область D называется замкнутой, во втором – открытой.

Линией уровня функции $z = f(x, y)$ называется линия $f(x, y) = C$ на плоскости xOy, в точках которой функция сохраняет постоянное значение $z = C$.

Поверхностью уровня функции $u = f(x, y, z)$ называется поверхность $f(x, y, z) = C$, в точках которой функция сохраняет постоянное значение $u = C$.

Число A называется ***пределом*** функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$, если $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ r > 0$ такое, что для всех точек $M(x, y)$, удовлетворяющих условию $|MM_0| < r$ $\left(\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)} < r\right)$, справедливо неравенство

$$\left|f(x, y) - A\right| < \varepsilon.$$

Обозначают $\qquad A = \lim\limits_{M \to M_0} f(x, y).$

Функция $z = f(x, y)$ называется ***непрерывной*** в точке $M_0(x_0, y_0)$, если $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$.

Функция, непрерывная в каждой точке некоторой области, называется непрерывной в этой области.

Если $\exists$ пределы:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x} = z'_x = f'_x(x, y) \quad \text{и} \quad \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \frac{\partial z}{\partial y} = z'_y = f'_y(x, y),$$

то они называются частными производными функции $z = f(x, y)$ по x и y соответственно.

Аналогично определяются частные производные функций любого числа независимых переменных.

Так как частная производная по любой переменной находится при условии, что остальные переменные – постоянны, то применимы все правила и формулы дифференцирования функции одной переменной.

2. Студенты работают с УМК, самостоятельно разбирают обучающую задачу.

***Обучающая задача* 1.** Найти область определения функции $z = \arcsin\frac{x}{y^2}$.

Решение. Эта функция определена, если $y \neq 0$ и $-1 \leq \frac{x}{y^2} \leq 1$, т. е. $-y^2 \leq x \leq y^2$. Областью определения функции является часть плоскости, заключенная между двумя параболами $y^2 = x$ и $y^2 = -x$ за исключением точки $O(0,0)$.

3. Преподаватель предлагает студентам нарисовать область определения в своих тетрадях.

4. У доски два студента решают следующие задания:
Найти область определения функций

Пример 1. $z = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$. *Ответ*: $x^2 + y^2 < 1$.

Пример 2. $u = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2 - z^2}$. *Ответ*: $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$.

5. Студенты самостоятельно решают следующие задания:
Найти область определения функций:

Пример 3. $z = \arcsin(x + y)$.

Ответ: Полоса между параллельными прямыми $x + y \leq 1$ и $x + y \geq -1$.

Пример 4. $u = \arcsin\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

Ответ: Часть пространства вне конуса $x^2 + y^2 - z^2 = 0$.

6. Студенты самостоятельно разбирают обучающие задачи.

Обучающая задача **2.** Найти линии уровня функции $z = x^2 + y^2$.

Решение. Уравнение семейства линий уровня имеет вид $x^2 + y^2 = C$ $(C > 0)$. Придавая C различные действительные значения, получим концентрические окружности с центром в начале координат.

Обучающая задача **3.** Найти поверхности уровня функции $u = x^2 + z^2 - y^2$.

Решение. Уравнение семейства поверхностей уровня имеет вид $x^2 + z^2 - y^2 = C$. Если $C = 0$, то получаем $x^2 + z^2 - y^2 = 0$ – конус; если $C > 0$, то $x^2 + z^2 - y^2 = C$ – семейство однополостных гиперболоидов; если $C < 0$, то $x^2 + z^2 - y^2 = C$ – семейство двуполостных гиперболоидов.

7. Два студента у доски решают примеры.

Найти линии или поверхности уровня функций:

Пример 5. $z = 2x + y$.

Ответ: семейство параллельных прямых $2x + y = C$.

Пример 6. $z = \dfrac{\sqrt{x}}{y}$. *Ответ*: семейство парабол $y = C\sqrt{x}$.

8. Студенты решают самостоятельно:

Пример 7. $u = x^2 - y^2 - z^2$.

Ответ: семейство двуполостных гиперболоидов $x^2 - y^2 - z^2 = C$ (при $C > 0$); семейство однополостных гиперболоидов (при $C < 0$); конус $x^2 - y^2 - z^2 = 0$ (при $C = 0$).

9. Преподаватель у доски решает обучающую задачу.

Обучающая задача **4.** Вычислить предел $A = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}$.

Решение. Имеем неопределенность $\left(\dfrac{0}{0}\right)$.

$$A = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\left(x^2 + y^2\right)\left(\sqrt{x^2 + y^2 + 1} + 1\right)}{\left(\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1\right)\left(\sqrt{x^2 + y^2 + 1} + 1\right)} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\left(x^2 + y^2\right)\left(\sqrt{x^2 + y^2 + 1} + 1\right)}{x^2 + y^2 + 1 - 1} =$$

$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \left(\sqrt{x^2 + y^2 + 1} + 1\right) = 2.$$

10. Студент у доски решает пример.

П р и м е р 8. Вычислить предел $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin\left(x^3+y^3\right)}{x^2+y^2}$. *Ответ*: 0.

11. Студенты самостоятельно разбирают обучающие задачи.

***Обучающая задача* 5.** Найти частные производные функции $z=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$.

Решение. Находим

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(\frac{y}{x}\right)'_x=\frac{y}{1+\dfrac{y^2}{x^2}}\left(\frac{1}{x}\right)'_x=\frac{y}{\dfrac{x^2+y^2}{x^2}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=-\frac{y}{x^2+y^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(\frac{y}{x}\right)'_y=\frac{x^2}{x^2+y^2}\cdot\frac{1}{x}\cdot y'_y=\frac{x}{x^2+y^2}.$$

***Обучающая задача* 6.** Найти частные производные функции $u=\ln^2\left(x^2+y^2+z^2\right)$.

Решение.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2\ln\left(x^2+y^2+z^2\right)\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\cdot 2x;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=2\ln\left(x^2+y^2+z^2\right)\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\cdot 2y;$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=2\ln\left(x^2+y^2+z^2\right)\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\cdot 2z.$$

12. Два студента у доски (параллельно) решают примеры:

П р и м е р 9. $u=x^2+2y^2-3xy-4x+2y+5$. Найти $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$.

Ответ: $\dfrac{\partial u}{\partial x}=2x-3y-4$; $\dfrac{\partial u}{\partial y}=4y-3x+2$.

П р и м е р 10. $u=e^{xyz}\cdot\sin\dfrac{y}{x}$. Найти $\dfrac{\partial u}{\partial y}$.

Ответ: $\dfrac{\partial u}{\partial y}=e^{xyz}\cdot xz\cdot\sin\dfrac{y}{x}+e^{xyz}\cos\dfrac{y}{x}\cdot\dfrac{1}{x}$.

13. Студенты решают самостоятельно следующие примеры:

Пример 11. $r = \rho^2 \sin^4 \theta$. Найти $\dfrac{\partial r}{\partial \rho}, \dfrac{\partial r}{\partial \theta}$.

Ответ: $\dfrac{\partial r}{\partial \rho} = 2\rho \sin^4 \theta$, $\dfrac{\partial r}{\partial \theta} = \rho^2 \cdot 4\sin^3 \theta \cdot \cos\theta$.

Пример 12. Показать, что функция $z = y\ln\left(y^2 - x^2\right)$ удовлетворяет уравнению $\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{1}{y}\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{z}{y^2}$.

Домашнее задание

1. Изучить тему «Полное приращение и полный дифференциал. Применение дифференциала в приближенных вычислениях. Частные производные и дифференциалы высших порядков».

2. Найти область определения функций:

а) $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$; *Ответ*: $x^2 + y^2 \geq 1$.

б) $z = \ln(-x + y)$; *Ответ*: $y > x$.

в) $u = \dfrac{1}{\ln\left(1 - x^2 - y^2 - z^2\right)}$; *Ответ*: $x^2 + y^2 + z^2 < 1$.

3. Найти линии уровня функций:

а) $z = \dfrac{x}{y}$; *Ответ*: $y = Cx$.

б) $z = e^{xy}$; *Ответ*: $xy = C$ $(C \neq 0)$; $x = 0, y = 0$.

4. Найти поверхность уровня функции $u = x^2 + y^2 + z^2$;

Ответ: $x^2 + y^2 + z^2 = C$.

5. Вычислить предел $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{\sqrt{x^2 y^2 + 1} - 1}{x^2 + y^2}$; *Ответ*: 0.

6. Решить следующие примеры:

а) $z = \dfrac{x^2}{y^2} - \dfrac{x}{y}$. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$.

Ответ: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{2x}{y^2} - \dfrac{1}{y}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{2x^2}{y^3} + \dfrac{x}{y^2}$.

б) Найти $\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix}$, если $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. *Ответ*: r.

в) $u = 2y\sqrt{x} + 3y^2\sqrt[3]{z^2}$. Найти $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$, $\dfrac{\partial u}{\partial z}$.

Ответ: $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{y}{\sqrt{x}}$; $\dfrac{\partial u}{\partial y} = 2\sqrt{x} + 6y\sqrt[3]{z^2}$; $\dfrac{\partial u}{\partial z} = \dfrac{2y^2}{\sqrt[3]{z}}$.

г) Показать, что функция $z = \dfrac{x^2}{2y} + \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}$ удовлетворяет уравнению $x^2\dfrac{\partial z}{\partial x} + y^2\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{x^3}{y}$.

II. Полное приращение и полный дифференциал. Применение дифференциала в приближенных вычислениях. Частные производные и дифференциалы высших порядков

1. Краткое повторение теоретического материала.

Полным приращением функции $z = f(x, y)$ называется разность

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Главная часть полного приращения функции $z = f(x, y)$, линейно зависящая от приращений независимых переменных Δx и Δy, называется ***полным дифференциалом*** функции и обозначается dz. Если функция имеет непрерывные частные производные, то полный дифференциал существует и равен

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy,$$

где $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$.

Для функции n переменных $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ полный дифференциал

$$dy = \frac{\partial y}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2}dx_2 + ... + \frac{\partial y}{\partial x_n}dx_n.$$

При достаточно малом $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ для дифференцируемой функции $z = f(x, y)$ справедливы приближенные равенства:

$$\Delta z \approx dz;$$

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\Delta y.$$

Частными производными второго порядка от функции $z = f(x, y)$ называются частные производные от ее частных производных первого порядка:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x, y); \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x, y);$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x, y); \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}(x, y).$$

Так называемые смешанные производные, отличающиеся друг от друга лишь последовательностью дифференцирования, равны между собой, если они непрерывны, например,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

Дифференциалом второго порядка от функции $z = f(x, y)$ называется дифференциал от ее полного дифференциала, т. е.

$$d^2 z = d(dz)$$

$$d^3 z = d\left(d^2 z\right),$$

и т. д.

$$\ldots,$$

$$d^n z = d\left(d^{n-1} z\right).$$

Имеют место формулы:

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx\, dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2;$$

$$d^3 z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} dx^3 + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} dx^2 dy + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} dx\, dy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} dy^3.$$

Вообще имеет место символическая формула

$$d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^n z,$$

которая формально раскрывается по биномиальному закону (см. теоретическую часть модуля 8).

2. Студенты работают с УМК, самостоятельно разбирают обучающую задачу.

***Обучающая задача* 1.** Найти полное приращение и полный дифференциал функции $z = x^2 - xy + y^2$.

Решение. По определению

$$\Delta z=(x+\Delta x)^2-(x+\Delta x)(y+\Delta y)+(y+\Delta y)^2-x^2+xy-y^2=$$

$$=x^2+2x\Delta x+\Delta x^2-xy-y\Delta x-x\Delta y-\Delta x\Delta y+y^2+2y\Delta y+\Delta y^2-x^2+xy-y^2=$$

$$=2x\Delta x-x\Delta y+2y\Delta y-y\Delta x+\Delta x^2-\Delta x\Delta y+\Delta y^2=$$

$$=(2x-y)\Delta x+(2y-x)\Delta y+\Delta x^2-\Delta x\Delta y+\Delta y^2.$$

Выражение $(2x-y)\Delta x+(2y-x)\Delta y$, линейное относительно Δx и Δy, есть дифференциал dz, а величина $\alpha=\Delta x^2-\Delta x\Delta y+\Delta y^2$ – бесконечно малая более высокого порядка по сравнению с $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$. Таким образом, $\Delta z=dz+\alpha$.

3. Два студента у доски (параллельно) решают следующий пример:

Пример 1. $z=\operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{x-y}$. Найти dz.

Ответ: $dz=\dfrac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$.

4. Студенты самостоятельно решают следующий пример:

Пример 2. $u=x^{y^2z}$. Найти du.

Ответ: $du=y^2z\cdot x^{y^2z-1}dx+2yz\cdot x^{y^2z}\ln x\,dy+y^2x^{y^2z}\ln x\,dz$.

5. Преподаватель у доски решает обучающую задачу.

***Обучающая задача* 2.** Вычислить приближенно $(1{,}02)^{3,01}$.

Решение. Рассмотрим функцию $z=x^y$. При $x_0=1$ и $y_0=3$ имеем $z_0=1^3=1$, $\Delta x=1{,}02-1=0{,}02$, $\Delta y=3{,}01-3=0{,}01$. Находим

$$dz=yx^{y-1}\Delta x+x^y\ln x\Delta y$$

и вычисляем его значение в точке (1, 3) при $\Delta x=0{,}02$, $\Delta y=0{,}01$:

$$dz=3\cdot1^2\cdot0{,}02+1^3\cdot\ln1\cdot0{,}01=0{,}06.$$

Тогда $z=(1{,}02)^{3,01}\approx z_0+dz=1+0{,}06=1{,}06$.

6. Студент у доски решает следующий пример:

Пример 3. Вычислить приближенно $\ln\left(0{,}09^3+0{,}99^3\right)$.

Ответ: –0,03.

7. Студенты решают самостоятельно.

Пример 4. Вычислить приближенно $\sqrt{5e^{0,02}+2,03^2}$.

Ответ: 3,037.

8. Два студента у доски (параллельно) решают примеры.

Пример 5. $z = y\ln x$. Найти частные производные второго порядка.

Ответ: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\dfrac{y}{x^2}$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{1}{x}$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

Пример 6. $z = \sin x \cdot \sin y$. Найти $d^2 z$.

Ответ: $d^2 z = -\sin x \sin y dx^2 + 2\cos x \cos y dx dy - \sin x \sin y dy^2$.

Пример 7. $z = x^2 y$. Найти $d^3 z$.

Ответ: $d^3 z = 6dx^2 dy$.

9. Студенты самостоятельно решают следующие примеры:

Пример 8. $z = \ln \operatorname{tg}(x+y)$. Найти $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

Ответ: $\dfrac{-4\cos(2x+2y)}{\sin^2(2x+2y)}$.

Пример 9. $z = \cos(x+y)$. Найти $d^2 z$.

Ответ: $-\cos(x+y)(dx+dy)^2$.

Пример 10. $z = x^2 y^3$. Проверить, что $\dfrac{\partial^5 z}{\partial x^2 \partial y^3} = \dfrac{\partial^5 z}{\partial y^3 \partial x^2}$.

Пример 11. Показать, что функция $z = \varphi(x) g(y)$ удовлетворяет уравнению $z\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial z}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial z}{\partial y}$.

Домашнее задание

1. Изучить тему «Дифференцирование сложных функций. Дифференцирование неявных функций. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Производная по направлению и градиент».

2. $z = e^x(\cos y + x\sin y)$. Найти dz.

Ответ: $dz = e^x\left((x\cos y - \sin y)dy + (\sin y + \cos y + x\sin y)dx\right)$

3. $u = e^{xyz}$. Найти du.

Ответ: $du = e^{xyz}\left(yzdx + xzdy + xydz\right)$.

4. Вычислить приближенно $\sqrt{1,04^{1,99} + \ln 1,02}$.

Ответ: 1,05.

5. $z = \sin\left(x + \cos y\right)$. Найти $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$.

Ответ: $\sin y \cdot \cos\left(x + \cos y\right)$.

6. $z = 0,5\ln\left(x^2 + y^2\right)$. Найти $d^2 z$.

Ответ: $\dfrac{x^2 - y^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2}\left(dy^2 - dx^2\right) - \dfrac{4xydxdy}{\left(x^2 + y^2\right)^2}$.

7. Показать, что функция $z = g\left(x\right) + yg'\left(x\right)$ удовлетворяет уравнению $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial y} + y\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

III. Дифференцирование сложных функций. Дифференцирование неявных функций. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Производная по направлению и градиент

1. Краткое повторение теоретического материала.

Пусть $z = f\left(x, y\right)$, где $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ и все функции дифференцируемы. Тогда производная сложной функции $z = f\left(\varphi\left(t\right), \psi\left(t\right)\right)$ вычисляется по формуле

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}.$$

Если $z = f\left(x, y\right)$, где $y = \varphi\left(x\right)$, то ***полная производная*** z по x

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Если же $z = f\left(u, v\right)$, где $u = \varphi\left(x, y\right)$, $v = \psi\left(x, y\right)$, то

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Производная неявной функции $y = y(x)$, заданной с помощью уравнения $F(x,y)=0$, где $F(x,y)$ – дифференцируемая функция, может быть найдена по формуле

$$y'_x=-\frac{F'_x}{F'_y}$$

при условии, что $F'_y \neq 0$.

Аналогично, частные производные неявной функции двух переменных $z=f(x,y)$, заданной с помощью уравнения $F(x,y,z)=0$, могут быть вычислены по формулам:

$$z'_x=-\frac{F'_x}{F'_z},\quad z'_y=-\frac{F'_y}{F'_z}\quad (F'_z\neq 0).$$

Если поверхность задана уравнением $F(x,y,z)=0$, то уравнение касательной плоскости в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$ поверхности имеет вид

$$\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{M_0}(x-x_0)+\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{M_0}(y-y_0)+\left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{M_0}(z-z_0)=0,$$

а канонические уравнения нормали

$$\frac{x-x_0}{\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{M_0}}=\frac{y-y_0}{\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{M_0}}=\frac{z-z_0}{\left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{M_0}}.$$

Если же уравнение поверхности задано явным образом $z=f(x,y)$, то уравнение касательной плоскости в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$ записывается в виде

$$z-z_0=\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0}(x-x_0)+\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{M_0}(y-y_0),$$

а канонические уравнения нормали

$$\frac{x-x_0}{\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0}}=\frac{y-y_0}{\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{M_0}}=\frac{z-z_0}{-1}.$$

Производной функции $z=f(x,y)$ в точке $M(x, y)$ в направлении вектора $\overline{S}=\overline{MM_0}$ называется предел

$$\frac{\partial z}{\partial S}=\lim_{|MM_0|\to 0}\frac{f(M_0)-f(M)}{|MM_0|}=\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta z}{\rho},$$

где $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$.

В случае функции трех переменных $u = f(x, y, z)$ производная в данном направлении определяется аналогично. Формула для ее практического вычисления имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial S} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma,$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – направляющие косинусы вектора $\overline{S}$.

Градиентом функции $u = f(x, y, z)$ в точке $M(x, y, z)$ называется вектор, выходящий из точки $M(x, y, z)$ и имеющий своими координатами частные производные функции u:

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x} i + \frac{\partial u}{\partial y} j + \frac{\partial u}{\partial z} k.$$

Градиент указывает направление наибыстрейшего роста функции в данной точке. Производная в направлении градиента имеет наибольшее значение, равное

$$\left(\frac{\partial u}{\partial S}\right)_{\text{наиб.}} = \left|\operatorname{grad} u\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}.$$

2. Студенты работают с УМК, самостоятельно разбирают обучающую задачу.

***Обучающая задача* 1.** $z = e^{x^2+y^2}$, где $x = a\cos t$, $y = a\sin t$. Найти $\dfrac{dz}{dt}$.

Решение. Имеем

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} = e^{x^2+y^2}\cdot 2x(-a\sin t) + e^{x^2+y^2}\cdot 2y(a\cos t) =$$

$$= 2ae^{x^2+y^2}\left(y\cos t - x\sin t\right).$$

***Обучающая задача* 2.** $z = \ln\left(x^2 + y^2\right)$, где $y = e^x$. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{dz}{dx}$.

Решение. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{2x}{x^2 + y^2}$. Для нахождения $\dfrac{dz}{dx}$ используем формулу полной производной

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{x^2 + y^2} + \frac{2y}{x^2 + y^2}\cdot e^x.$$

3. Два студента у доски решают параллельно.

Пример 1. $z=\arcsin\frac{u}{v}$, где $u=x^2+y^2$, $v=x^2-y^2$. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Ответ: $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x(v-u)}{v\sqrt{v^2-u^2}}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y(u+v)}{v\sqrt{v^2-u^2}}$.

4. Студенты решают самостоятельно.

Пример 2. $z=\frac{1}{2}\ln\frac{u}{v}$, где $u=\mathrm{tg}^2\,x$, $v=\mathrm{ctg}^2\,x$. Найти $\frac{dz}{dx}$.

Ответ: $\frac{4}{\sin 2x}$.

Пример 3. $z=\ln\left(u^2+v^2\right)$, где $u=xy$, $v=\frac{x}{y}$. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Ответ: $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2}{x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2\left(y^4-1\right)}{y\left(y^4+1\right)}$.

5. Преподаватель у доски решает.

***Обучающая задача* 3.** $xyz=x+y+z$. Найти dz.

Решение. Как известно, $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$. Пусть $F(x,y,z)=xyz-x-y-z$.

Тогда $F'_x=yz-1$, $F'_y=xz-1$, $F'_z=xy-1$, а $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z}=\frac{1-yz}{xy-1}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}=\frac{1-xz}{xy-1}$. Теперь

$$dz=\frac{1-yz}{xy-1}dx+\frac{1-xz}{xy-1}dy \quad (xy-1\neq 0).$$

6. Студенты самостоятельно решают примеры.

Пример 4. $x^3+y^3+z^3-3xyz=0$. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Ответ: $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{yz-x^2}{z^2-xy}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{xz-y^2}{z^2-xy}$.

Пример 5. $xy + xz + yz = 1$. Найти dz.

Ответ: $dz = -\dfrac{(y+z)dx + (x+z)dy}{x+y}$.

7. Студенты работают с УМК, самостоятельно разбирают обучающую задачу.

***Обучающая задача* 4.** Дана поверхность $z = x^2 - 2xy + y^2 - x + 2y$. Написать уравнение касательной плоскости и уравнения нормали к поверхности в точке $M_0(1, 1, 1)$.

Решение. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x - 2y - 1$, $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0} = 2 - 2 - 1 = -1$;

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -2x + 2y + 2, \ \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{M_0} = -2 + 2 + 2 = 2.$$

Уравнение касательной плоскости:

$$z - 1 = -(x-1) + 2(y-1), \quad \text{или} \quad x - 2y + z = 0.$$

Уравнения нормали:

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{-1}.$$

8. Студенты самостоятельно решают.

Пример 6. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $x^2 + y^2 - z^2 = -1$ в точке $M_0(2, 2, 3)$.

Ответ: $2x + 2y - 3z + 1 = 0$, $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-3}{-3}$.

9. Преподаватель у доски решает.

***Обучающая задача* 5.** Найти производную функции $u = xy^2z^3$ в точке $M(3, 2, 1)$ в направлении вектора $\overline{MN}$, где $N(5, 4, 2)$.

Решение. Найдем вектор $\overline{MN}$ и его направляющие косинусы:

$$\overline{MN} = \overline{S} = (5-3)i + (4-2)j + (2-1)k = 2i + 2j + k;$$

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{2}{3}; \quad \cos\beta = \frac{2}{3}; \quad \cos\gamma = \frac{1}{3}.$$

Вычислим значения частных производных в точке M:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^2z^3; \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 2xyz^3; \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = 3xy^2z^2.$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M = 4; \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M = 12; \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M = 36.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial u}{\partial S} = 4 \cdot \frac{2}{3} + 12 \cdot \frac{2}{3} + 36 \cdot \frac{1}{3} = 22\frac{2}{3}.$$

10. Студенты работают с УМК, самостоятельно разбирают обучающую задачу

***Обучающая задача* 6.** Найти величину и направление градиента функции $u = \operatorname{tg} x - x + 3\sin y - \sin^3 y + z + \operatorname{ctg} z$ в точке $M\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Решение. $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 3\cos y - 3\sin^2 y \cdot \cos y$, $\frac{\partial u}{\partial z} = 1 - \frac{1}{\sin^2 z}$.

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M = 2 - 1 = 1; \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M = 3 \cdot \frac{1}{2} - 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}; \quad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M = 1 - 1 = 0.$$

Следовательно, $\left.\operatorname{grad} u\right|_M = i + \frac{3}{8} j$; $\left|\operatorname{grad} u\right|\Big|_M = \sqrt{1^2 + \left(\frac{3}{8}\right)^2} = \frac{\sqrt{73}}{8}$;

$$\cos\alpha = \frac{1}{\frac{\sqrt{73}}{8}} = \frac{8}{\sqrt{73}}; \qquad \cos\beta = \sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{73}}.$$

***Обучающая задача* 7.** Найти производную функции $z = \ln\left(x^2 + y^2\right)$ в точке $M(3, 4)$ в направлении градиента z.

Решение. Здесь вектор $\overline{S}$ совпадает с градиентом функции в точке M и равен $\overline{S} = \operatorname{grad} z = \left.\frac{2x}{x^2 + y^2}\right|_M i + \left.\frac{2y}{x^2 + y^2}\right|_M j = \frac{6}{25} i + \frac{8}{25} j$.

Следовательно,

$$\frac{\partial z}{\partial S} = \left|\operatorname{grad} z\right| = \sqrt{\left(\frac{6}{25}\right)^2 + \left(\frac{8}{25}\right)^2} = \frac{2}{5}.$$

11. Студенты самостоятельно решают.

Пример 7. Найти производную функции $z = x^2 - xy + y^2$ в точке $M(1, 1)$ в направлении вектора $\overline{S} = 6i + 8j$.

Ответ: 1,4.

Пример 8. Найти величину и направление градиента функции $u = xyz$ в точке $M(2, 1, 1)$.

Ответ: $\left|\operatorname{grad} u\right|\big|_M = 3$, $\cos\alpha = \dfrac{1}{3}$, $\cos\beta = \cos\gamma = \dfrac{2}{3}$.

Домашнее задание

1. Изучить тему «Экстремум ФНП. Условный экстремум. Нахождение наибольшего и наименьшего значений ФНП в замкнутой области».

2. Показать, что функция $u = \ln\dfrac{1}{r}$, где $r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$, удовлетворяет уравнению $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

3. $x = z\ln\dfrac{z}{y}$. Найти dz.

Ответ: $dz = \dfrac{dx + \dfrac{z}{y}dy}{1 + \ln\dfrac{z}{y}}$.

4. Найти производную функции $u = \arcsin\dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ в точке $M(1,1,1)$ в направлении вектора $\overline{MN}$, где $N(3, 2, 3)$.

Ответ: $\dfrac{1}{6}$.

5. Найти величину и направление градиента функции $u = \dfrac{1}{r}$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

Ответ: $\left|\operatorname{grad} u\right|\big|_M = \dfrac{1}{r_0^2}$; $\cos\alpha = -\dfrac{x_0}{r_0}$, $\cos\beta = -\dfrac{y_0}{r_0}$, $\cos\gamma = -\dfrac{z_0}{r_0}$,

где $r = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}$.

6. Найти уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z = \sin x \cdot \cos y$ в точке $M\left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{1}{2}\right)$.

Ответ: $x - y - 2z + 1 = 0$, $\dfrac{x - \dfrac{\pi}{4}}{1} = \dfrac{y - \dfrac{\pi}{4}}{-1} = \dfrac{z - \dfrac{1}{2}}{-2}$.

IV. Экстремум ФНП. Условный экстремум. Нахождение наибольшего и наименьшего значений ФНП в замкнутой области

1. Краткое повторение теоретического материала.

Если функция $z = f(x, y)$ достигает экстремума в точке $M_0(x_0, y_0)$, то

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0$$

(необходимое условие экстремума).

Точки, в которых частные производные равны нулю или не существуют, называются ***критическими*** точками. Не всякая критическая точка является точкой экстремума.

Пусть $M_0(x_0, y_0)$ – критическая точка функции $z = f(x, y)$. Обозначим: $A = \dfrac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2}$, $B = \dfrac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y}$, $C = \dfrac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2}$ и составим дискриминант $\Delta = AC - B^2$. Тогда:

– если $\Delta > 0$, то функция имеет в точке M_0 экстремум, а именно: максимум при $A < 0$ (или $C < 0$) и минимум при $A > 0$ (или $C > 0$);

– если $\Delta < 0$, то в точке M_0 экстремума нет;

– если $\Delta = 0$, то требуется дополнительное исследование.

Это достаточные условия наличия или отсутствия экстремума.

Условным экстремумом функции $z = f(x, y)$ называется экстремум этой функции, достигнутый при условии, что переменные x и y связаны уравнением $\varphi(x, y) = 0$ (уравнение связи).

Отыскание условного экстремума можно свести к исследованию на обычный экстремум так называемой функции Лагранжа:

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y),$$

где λ – неопределенный постоянный множитель.

Необходимые условия экстремума функции $F(x, y, \lambda)$ имеют вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} \equiv \dfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} \equiv \dfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \\ \varphi(x, y) = 0. \end{cases}$$

Из этой системы трех уравнений можно найти неизвестные x, y, λ.

Для того чтобы найти наибольшее и наименьшее значения функции в замкнутой области, надо:

1) найти критические точки, расположенные в данной области, и вычислить значения функции в этих точках;

2) найти наибольшее и наименьшее значения функции на линиях, образующих границу области;

3) из всех найденных значений выбрать наибольшее и наименьшее.

2. Студенты работают с УМК, самостоятельно разбирают обучающую задачу.

***Обучающая задача* 1.** Найти экстремум функции

$$z = \frac{1}{2}xy + (47 - x - y)\left(\frac{x}{3} + \frac{y}{4}\right).$$

Решение. $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{12}y - \frac{2}{3}x + \frac{47}{3}$, $\quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{2}y - \frac{1}{12}x + \frac{47}{4}$.

Находим критические точки:

$$\begin{cases} -\frac{1}{12}y - \frac{2}{3}x + \frac{47}{3} = 0, \\ -\frac{1}{2}y - \frac{1}{12}x + \frac{47}{4} = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 8x + y = 188, \\ x + 6y = 141 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 21, \\ y = 20. \end{cases}$$

Критическая точка $M_0(21, 20)$.

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{M_0} = -\frac{2}{3}, \qquad \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{M_0} = -\frac{1}{12}, \quad \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{M_0} = -\frac{1}{2}.$$

Тогда $\qquad \Delta = AC - B^2 = \left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{1}{12}\right)^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{144} > 0.$

Так как $A = -\frac{2}{3} < 0$, то в точке $M_0(21, 20)$ функция имеет максимум: $z_{\max} = 282$.

3. Студент у доски решает.

Пример 1. Найти экстремум функции $z = xy^2(1 - x - y)$.

Ответ: $z_{\max} = \frac{1}{64}$ в точке $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$.

4. Преподаватель у доски решает обучающую задачу.

***Обучающая задача* 2.** Из всех прямоугольных треугольников с заданной площадью S найти такой, гипотенуза которого имеет наименьшее значение.

Решение. Пусть x и y – катеты треугольника, а z – гипотенуза. Так как $z^2 = x^2 + y^2$, то задача сводится к нахождению наименьшего значения функции $x^2 + y^2$ при условии, что x и y связаны уравнением $\frac{1}{2}xy = S$, т. е. $xy - 2S = 0$.

Рассмотрим функцию Лагранжа $F(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(xy - 2S)$ и найдем ее частные производные

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x + \lambda y, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y + \lambda x.$$

Так как $x > 0$, $y > 0$, то из системы уравнений:

$$\begin{cases} 2x + \lambda y = 0, \\ 2y + \lambda x = 0, \\ \frac{1}{2}xy = S \end{cases} \quad \text{получаем решение} \quad \lambda = -2, \quad y = x = \sqrt{2S}.$$

Таким образом, гипотенуза имеет наименьшее значение, если катеты треугольника равны между собой.

5. Студент у доски решает.

Пример 2. Найти экстремум $z = xy$ при условии, что x и y связаны уравнением $2x + 3y - 5 = 0$.

Ответ: $z_{\max} = \frac{25}{24}$ в точке $\left(\frac{5}{4}, \frac{5}{6}\right)$.

6. Студентам рекомендуется посмотреть решение задачи на отыскание наибольшего и наименьшего значений ФНП в замкнутой области в теоретической части модуля (5 минут).

7. Студенты работают с УМК, самостоятельно разбирают обучающую задачу

***Обучающая задача* 3.** Найти наименьшее и наибольшее значения функции $z = x^2 + y^2$ в круге $\left(x - \sqrt{2}\right)^2 + \left(y - \sqrt{2}\right)^2 \le 9$.

Решение. Здесь рассматривается область D, ограниченная окружностью радиуса $R = 3$ с центром в точке $C\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$, включая и точки окружности.

Найдем критические точки данной функции: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2y$;

$\Rightarrow$ $x = 0$, $y = 0$. $z = z(0,0) = 0$.

Исследуем на условный экстремум функцию $z = x^2 + y^2$, если x и y связаны соотношением $\left(x-\sqrt{2}\right)^2 + \left(y-\sqrt{2}\right)^2 = 9$.

$$F(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 + \lambda\left(\left(x-\sqrt{2}\right)^2 + \left(y-\sqrt{2}\right)^2 - 9\right).$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x + 2\lambda\left(x-\sqrt{2}\right), \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y + 2\lambda\left(y-\sqrt{2}\right).$$

Для определения x, y и λ получаем систему:

$$\begin{cases} x + \lambda\left(x-\sqrt{2}\right) = 0, \\ y + \lambda\left(y-\sqrt{2}\right) = 0, \\ \left(x-\sqrt{2}\right)^2 + \left(y-\sqrt{2}\right)^2 = 9. \end{cases}$$

Эта система имеет два решения: $x = y = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$, $\lambda = -\dfrac{5}{3}$ и $z = 25$;

$x = y = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\lambda = -\dfrac{1}{3}$ и $z = 1$.

Значит, наибольшее значение z принимает в точке $\left(\dfrac{5\sqrt{2}}{2}, \dfrac{5\sqrt{2}}{2}\right)$.

Итак, $z_{\text{наим.}} = 0$, $z_{\text{наиб.}} = 25$.

8. Студент у доски решает.

Пример 3. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $z = xy + x + y$ в квадрате, ограниченном прямыми x=1, x=2, y=2, y=3.

Ответ: $z_{\text{наим.}} = 5$ в точке (1,2),

$z_{\text{наиб.}} = 11$ в точке (2,3).

9. Студенты самостоятельно решают.

Пример 4. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $z = \sin x + \sin y + \sin(x+y)$ в области $0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}$, $0 \le y \le \dfrac{\pi}{2}$.

Ответ: $z_{\text{наим.}} = 0$, $z_{\text{наиб.}} = 1 + \sqrt{2}$.

Пример 5. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $z = xy$ в круге $x^2 + y^2 \le 1$.

Ответ: $z_{\text{наим.}} = -0{,}5$, $z_{\text{наиб.}} = 0{,}5$.

Пример 6. Из всех треугольников, вписанных в круг, найти тот, площадь которого наибольшая.

Ответ: равносторонний.

Домашнее задание

1. Найти экстремум функции $z = x^3 + y^3 - 15xy$.

Ответ: $z_{\min} = -125$.

2. Из всех треугольников, имеющих данный периметр, найти наибольший по площади.

Ответ: равносторонний.

3. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $z = x^2 - xy + y^2 - 4x$ в замкнутой области, ограниченной прямыми $x = 0$, $y = 0$, $2x + 3y - 12 = 0$.

Ответ: $z_{\text{наим.}} = -\dfrac{16}{3}$, $z_{\text{наиб.}} = 16$.

4. Подготовиться к контрольной работе по теме «ФНП»

V. Контрольная работа по теме «ФНП»

Выдается из тестов I уровня сложности (каждая задача или пример оценивается 1 баллом). Желающие могут дополнительно решать на выбор задания II уровня сложности (по 2 балла за каждое задание) или III уровня (за каждое задание от 3 до 5 баллов в зависимости от сложности задания).

ТРЕХУРОВНЕВЫЕ ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ к разделу «Функции нескольких переменных»

УРОВЕНЬ I

Вариант 1

1. Найти область определения функции $z = \dfrac{3xy}{2x-5y}$.
2. Найти частные производные функции $z = \ln\left(y^2 - e^{-x}\right)$.
3. Найти полный дифференциал функции $z = 2x^3y - 4xy^5$.
4. Вычислить значение производной сложной функции $u = u(x, y)$, где $x = x(t)$, $y = y(t)$ при $t = t_0$ с точностью до двух знаков после запятой.

$$u = e^{x-2y}, \quad x = \sin t, \quad y = t^3, \quad t_0 = 0.$$

Ответ: 1.

5. Вычислить значения частных производных функции $z(x, y)$, заданной неявно, в точке $M_0(x_0, y_0)$ с точностью до двух знаков после запятой.

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 4, \quad M_0(2, 1, 1).$$

Ответ: $z'_x(2, 1, 1) = 3$, $z'_y(2, 1, 1) = -1$.

6. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к заданной поверхности S в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

$$S\colon\ x^2 + y^2 + z^2 + 6z - 4x + 8 = 0, \quad M_0(2, 1, -1).$$

Ответ: $y + 2z + 1 = 0$.

7. Найти вторые частные производные указанной функции. Убедиться в том, что $z''_{xy} = z''_{yx}$.

$$z = e^{x^2 - y^2}.$$

8. Исследовать на экстремум следующую функцию:

$$z = y\sqrt{x} - 2y^2 - x + 14y.$$

Ответ: $z_{\max}(4, 4) = 28$.

9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = z(x, y)$ в области D, ограниченной заданными линиями.

$$z = 3x + y - xy, \quad D\colon\ y = x,\ y = 4,\ x = 0.$$

Ответ: $z_{\text{наиб.}}(2, 2) = 4$, $z_{\text{наим.}}(0, 0) = z(4, 4) = 0$.

Вариант 2

1. Найти область определения функции $z = \arcsin(x - y)$.
2. Найти частные производные функции $z = \arcsin\sqrt{xy}$.
3. Найти полный дифференциал функции $z = x^2 y \sin x - 3y$.
4. Вычислить значение производной сложной функции $u = u(x, y)$, где $x = x(t)$, $y = y(t)$ при $t = t_0$ с точностью до двух знаков после запятой.
$$u = \ln\left(e^x + e^{-y}\right),\quad x = t^2,\quad y = t^3,\quad t_0 = -1.$$
Ответ: – 2,5.
5. Вычислить значения частных производных функции $z(x, y)$, заданной неявно, в точке $M_0(x_0, y_0)$ с точностью до двух знаков после запятой.
$$x^2 + y^2 + z^2 - xy = 2,\qquad M_0(-1, 0, 1).$$
Ответ: $z'_x(-1, 0, 1) = 1$, $z'_y(-1, 0, 1) = -0{,}5$.
6. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к заданной поверхности S в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$.
$$S:\ x^2 + z^2 - 4y^2 = -2xy,\qquad M_0(-2, 1, 2).$$
Ответ: $x + 6y - 2z = 0$.
7. Найти вторые частные производные указанной функции. Убедиться в том, что $z''_{xy} = z''_{yx}$.
$$z = \operatorname{ctg}(x + y).$$
8. Исследовать на экстремум следующую функцию:
$$z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5.$$
Ответ: $z_{\min}(1; 0{,}5) = 4$.
9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = z(x, y)$ в области D, ограниченной заданными линиями.
$$z = xy - x - 2y,\qquad D:\ x = 3,\ \ y = x,\ \ y = 0.$$
Ответ: $z_{\text{наиб.}}(0, 0) = z(3, 3) = 0$, $z_{\text{наим.}}(3, 0) = -3$.

Вариант 3

1. Найти область определения функции $z = \sqrt{y^2 - x^2}$.
2. Найти частные производные функции $z = \operatorname{arctg}\left(x^2 + y^2\right)$.
3. Найти полный дифференциал функции $z = \operatorname{arctg} x + \sqrt{y}$.

4. Вычислить значение производной сложной функции $u = u(x, y)$, где $x = x(t)$, $y = y(t)$ при $t = t_0$ с точностью до двух знаков после запятой.

$$u = y^x, \quad x = \ln(t-1), \quad y = e^{\frac{t}{2}}, \quad t_0 = 2.$$

Ответ: 1.

5. Вычислить значения частных производных функции $z(x, y)$, заданной неявно, в точке $M_0(x_0, y_0)$ с точностью до двух знаков после запятой.

$$xy = z^2 - 1, \quad M_0(0, 1, -1).$$

Ответ: $z'_x(0, 1, -1) = -0{,}5$, $z'_y(0, 1, -1) = 0$.

6. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к заданной поверхности S в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

$$S:\ y^2 - z^2 + x^2 - 2xz + 2x = z, \quad M_0(1, 1, 1).$$

Ответ: $2x + 2y - 5z + 1 = 0$.

7. Найти вторые частные производные указанной функции. Убедиться в том, что $z''_{xy} = z''_{yx}$.

$$z = \ln\left(3x^2 - 2y^2\right).$$

8. Исследовать на экстремум следующую функцию:

$$z = 6(x - y) - 3x^2 - 3y^2.$$

Ответ: $z_{\max}(1, -1) = 6$.

9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = z(x, y)$ в области D, ограниченной заданными линиями.

$$z = x^2 + 2xy - 10, \quad D:\ y = 0,\ y = x^2 - 4.$$

Ответ: $z_{\text{наиб.}}\left(-\frac{4}{3}, -\frac{20}{9}\right) = -\frac{62}{27}$, $z_{\text{наим.}}(1, -3) = -15$.

Вариант 4

1. Найти область определения функции $z = \ln\left(4 - x^2 - y^2\right)$.
2. Найти частные производные функции $z = \cos\left(x^3 - 2xy\right)$.
3. Найти полный дифференциал функции $z = \arcsin(xy) - 3xy^2$.
4. Вычислить значение производной сложной функции $u = u(x, y)$, где $x = x(t)$, $y = y(t)$ при $t = t_0$ с точностью до двух знаков после запятой.

$$u = e^{y-2x+2}, \quad x = \sin t, \quad y = \cos t, \quad t_0 = \frac{\pi}{2}.$$

Ответ: -1.

5. Вычислить значения частных производных функции $z(x, y)$, заданной неявно, в точке $M_0(x_0, y_0)$ с точностью до двух знаков после запятой.

$$x^2 + y^2 + z^2 - 6x = 0, \quad M_0(1, 2, 1).$$

Ответ: $z'_x(1, 2, 1) = 2$, $z'_y(1, 2, 1) = -2$.

6. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к заданной поверхности S в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

$$S\colon\ x^2 + y^2 + 2yz - z^2 + y - 2z = 2, \quad M_0(1, 1, 1).$$

Ответ: $2x + 5y - 2z - 5 = 0$.

7. Найти вторые частные производные указанной функции. Убедиться в том, что $z''_{xy} = z''_{yx}$.

$$z = \operatorname{arcctg}(x - 3y).$$

8. Исследовать на экстремум следующую функцию:

$$z = 4(x - y) - x^2 - y^2.$$

Ответ: $z_{\max}(2, -2) = 8$.

9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = z(x, y)$ в области D, ограниченной заданными линиями.

$$z = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 1, \quad D\colon\ x = 0,\ y = 0,\ x + y - 3 = 0.$$

Ответ: $z_{\text{наиб.}}(0, 0) = -1$, $z_{\text{наим.}}(0, 3) = -19$.

Вариант 5

1. Найти область определения функции $z = \dfrac{2}{6 - x^2 - y^2}$.

2. Найти частные производные функции $z = \sin\sqrt{\dfrac{y}{x^3}}$.

3. Найти полный дифференциал функции $z = 5xy^4 + 2x^2y^7$.

4. Вычислить значение производной сложной функции $u = u(x, y)$, где $x = x(t)$, $y = y(t)$ при $t = t_0$ с точностью до двух знаков после запятой.

$$u = x^2e^y, \quad x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad t_0 = \pi.$$

Ответ: -1.

5. Вычислить значения частных производных функции $z(x, y)$, заданной неявно, в точке $M_0(x_0, y_0)$ с точностью до двух знаков после запятой.

$$e^{z-1} = \cos x \cos y + 1, \quad M_0\left(0, \frac{\pi}{2}, 1\right).$$

Ответ: $z'_x\left(0, \dfrac{\pi}{2}, 1\right) = 0$, $z'_y\left(0, \dfrac{\pi}{2}, 1\right) = -1$.

6. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к заданной поверхности S в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

$$S:\ x^2 + y^2 - xz - yz = 0,\ M_0(0, 2, 2).$$

Ответ: $x - y + z = 0$.

7. Найти вторые частные производные указанной функции. Убедиться в том, что $z''_{xy} = z''_{yx}$.

$$z = \arccos(2x + y).$$

8. Исследовать на экстремум следующую функцию:

$$z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1.$$

Ответ: $z_{\min}(-1, 1) = 0$.

9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = z(x, y)$ в области D, ограниченной заданными линиями.

$$z = 3x + 6y - x^2 - xy - y^2,\quad D:\ x = 0,\ x = 1,\ y = 0,\ y = 1.$$

Ответ: $z_{\text{наиб.}}(1, 1) = 6$, $z_{\text{наим.}}(0, 0) = 0$.

Вариант 6

1. Найти область определения функции $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 5}$.
2. Найти частные производные функции $z = \operatorname{tg}\left(x^3 + y^2\right)$.
3. Найти полный дифференциал функции $z = \cos\left(x^2 - y^2\right) + x^3$.
4. Вычислить значение производной сложной функции $u = u(x, y)$, где $x = x(t)$, $y = y(t)$ при $t = t_0$ с точностью до двух знаков после запятой.

$$u = \ln\left(e^x + e^y\right),\quad x = t^2,\quad y = t^3,\quad t_0 = 1.$$

Ответ: 2,5.

5. Вычислить значения частных производных функции $z(x, y)$, заданной неявно, в точке $M_0(x_0, y_0)$ с точностью до двух знаков после запятой.

$$\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z = \frac{3}{2},\quad M_0\left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right).$$

Ответ: $z'_x\left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) = -1$, $z'_y\left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) = 1$.

6. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к заданной поверхности S в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

$$S:\ x^2 + z^2 - 5yz + 3y = 46,\quad M_0(1, 2, -3).$$

Ответ: $x + 9y - 8z - 43 = 0$.

7. Найти вторые частные производные указанной функции. Убедиться в том, что $z''_{xy} = z''_{yx}$.

$$z = \arcsin(x - y).$$

8. Исследовать на экстремум следующую функцию:

$$z = 3x^3 + 3y^3 - 9xy + 10.$$

Ответ: $z_{\min}(1, 1) = 7$.

9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = z(x, y)$ в области D, ограниченной заданными линиями.

$$z = 2x^3 - xy^2 + y^2, \quad D: x = 0, x = 1, y = 0, y = 6.$$

Ответ: $z_{\text{наиб.}}(0, 6) = 36$, $z_{\text{наим.}}(0, 0) = 0$.

Вариант 7

1. Найти область определения функции $z = \arccos(x + y)$.
2. Найти частные производные функции $z = \operatorname{ctg}\sqrt{xy^3}$.
3. Найти полный дифференциал функции $z = \ln\left(3x^2 - 2y^2\right)$.
4. Вычислить значение производной сложной функции $u = u(x, y)$, где $x = x(t)$, $y = y(t)$ при $t = t_0$ с точностью до двух знаков после запятой.

$$u = x^y, \quad x = e^t, \quad y = \ln t, \quad t_0 = 1.$$

Ответ: 1.

5. Вычислить значения частных производных функции $z(x, y)$, заданной неявно, в точке $M_0(x_0, y_0)$ с точностью до двух знаков после запятой.

$$z^3 + 3xyz + 3y = 7, \quad M_0(1, 1, 1).$$

Ответ: $z'_x(1, 1, 1) = -0{,}5$, $z'_y(1, 1, 1) = -1$.

6. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к заданной поверхности S в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

$$S: x^2 + y^2 + z^2 - 6y + 4z + 4 = 0, \quad M_0(2, 1, -1).$$

Ответ: $2x - 2y + z - 1 = 0$.

7. Найти вторые частные производные указанной функции. Убедиться в том, что $z''_{xy} = z''_{yx}$.

$$z = \operatorname{arctg}(x + y).$$

8. Исследовать на экстремум следующую функцию:

$$z = 2x^3 + 2y^3 - 6xy + 5.$$

Ответ: $z_{\min}(1, 1) = 3$.

9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = z(x, y)$ в области D, ограниченной заданными линиями.

$$z = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 8, \quad D\text{: } x = 0,\ y = 0,\ x + y - 1 = 0.$$

Ответ: $z_{\text{наиб.}}(0, 0) = 8$, $z_{\text{наим.}}(0,5; 0,5) = 6,5$.

Вариант 8

1. Найти область определения функции $z = 3x + \dfrac{y}{2 - x + y}$.
2. Найти частные производные функции $z = e^{-x^2 + y^2}$.
3. Найти полный дифференциал функции $z = 5xy^2 - 3x^3y^4$.
4. Вычислить значение производной сложной функции $u = u(x, y)$, где $x = x(t)$, $y = y(t)$ при $t = t_0$ с точностью до двух знаков после запятой.

$$u = e^{y - 2x}, \quad x = \sin t, \quad y = t^3, \quad t_0 = 0.$$

Ответ: -2.

5. Вычислить значения частных производных функции $z(x, y)$, заданной неявно, в точке $M_0(x_0, y_0)$ с точностью до двух знаков после запятой.

$$x^2 + y^2 + z^2 - z - 4 = 0, \quad M_0(1, 1, -1).$$

Ответ: $z'_x(1, 1, -1) = 0,67$, $z'_y(1, 1, -1) = 0,67$.

6. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к заданной поверхности S в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

$$S\text{: } 2x^2 - y^2 + z^2 - 4z + y = 13, \quad M_0(2, 1, -1).$$

Ответ: $8x - y - 6z - 21 = 0$.

7. Найти вторые частные производные указанной функции. Убедиться в том, что $z''_{xy} = z''_{yx}$.

$$z = \sin\left(x^2 - y\right).$$

8. Исследовать на экстремум следующую функцию:

$$z = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 20.$$

Ответ: $z_{\min}(5, 6) = -86$.

9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = z(x, y)$ в области D, ограниченной заданными линиями.

$$z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x, \quad D\text{: } x - y + 1 = 0,\ x = 3,\ y = 0.$$

Ответ: $z_{\text{наиб.}}(3, 3) = 6$, $z_{\text{наим.}}(2, 0) = -4$.

Вариант 9

1. Найти область определения функции $z=\sqrt{9-x^2-y^2}$.
2. Найти частные производные функции $z=\ln\left(3x^2-y^4\right)$.
3. Найти полный дифференциал функции $z=\arcsin\left(x+y\right)$.
4. Вычислить значение производной сложной функции $u = u(x, y)$, где $x = x(t)$, $y = y(t)$ при $t = t_0$ с точностью до двух знаков после запятой.
$$u=x^2e^{-y},\quad x=\sin t,\quad y=\sin^2 t,\quad t_0=\frac{\pi}{2}.$$
Ответ: 0.
5. Вычислить значения частных производных функции $z(x, y)$, заданной неявно, в точке $M_0(x_0, y_0)$ с точностью до двух знаков после запятой.
$$e^z+x+2y+z=4,\quad M_0(1,1,0).$$
Ответ: $z'_x(1, 1, 0) = -0{,}5$, $z'_y(1, 1, 0) = -1$.
6. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к заданной поверхности S в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$.
$$S:\ x^2+y^2+z^2+6y+4x=8,\quad M_0(-1,1,2).$$
Ответ: $x+4y+2z-7=0$.
7. Найти вторые частные производные указанной функции. Убедиться в том, что $z''_{xy}=z''_{yx}$.
$$z=\cos\left(xy^2\right).$$
8. Исследовать на экстремум следующую функцию:
$$z=1+6x-x^2-xy-y^2.$$
Ответ: $z_{\max}(4, -2) = 13$.
9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=z\left(x,y\right)$ в области D, ограниченной заданными линиями.
$$z=5x^2-3xy+y^2,\quad D:\ x=0,\ x=1,\ y=0,\ y=1.$$
Ответ: $z_{\text{наиб.}}(1, 0) = 5$, $z_{\text{наим.}}(0, 0) = 0$.

Вариант 10

1. Найти область определения функции $z=\ln\left(x^2+y^2-3\right)$.
2. Найти частные производные функции $z=\arccos\left(\frac{y}{x}\right)$.

3. Найти полный дифференциал функции $z = \operatorname{arctg}(2x - y)$.

4. Вычислить значение производной сложной функции $u = u(x, y)$, где $x = x(t)$, $y = y(t)$ при $t = t_0$ с точностью до двух знаков после запятой.

$$u = \ln\left(e^{-x} + e^{y}\right), \quad x = t^2, \quad y = t^3, \quad t_0 = -1.$$

Ответ: 2,5.

5. Вычислить значения частных производных функции $z(x, y)$, заданной неявно, в точке $M_0(x_0, y_0)$ с точностью до двух знаков после запятой.

$$3x - 2y + z = xz + 5, \quad M_0(2,\ 1,\ -1).$$

Ответ: $z'_x(2, 1, -1) = 4$, $z'_y(2, 1, -1) = -2$.

6. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к заданной поверхности S в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

$$S\colon\ x^2 + y^2 + z^2 - xy + 3z = 7, \quad M_0(1,\ 2,\ 1).$$

Ответ: $3y + 5z - 11 = 0$.

7. Найти вторые частные производные указанной функции. Убедиться в том, что $z''_{xy} = z''_{yx}$.

$$z = \operatorname{tg}\frac{x}{y}.$$

8. Исследовать на экстремум следующую функцию

$$z = 1 + 15x - 2x^2 - xy - 2y^2.$$

Ответ: $z_{\max}(-4, -1) = -97$.

9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = z(x, y)$ в области D, ограниченной заданными линиями.

$$z = x^2 + 2xy - 4x + 8y, \quad D\colon\ x = 0,\ \ x = 1,\ \ y = 0,\ \ y = 2.$$

Ответ: $z_{\text{наиб.}}(1, 2) = 17$, $z_{\text{наим.}}(1, 0) = -3$.

УРОВЕНЬ II

Вариант 1

1. Проверить, удовлетворяет ли указанному уравнению данная функция u. $\quad x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad u = \dfrac{y}{x}.$

2. Вычислить приближенно $\sqrt{\sin^2 1{,}55 + 8e^{0{,}015}}$ $\left(x_0 = \dfrac{\pi}{2} = 1{,}571,\ y_0 = 0\right)$.

Ответ: 3,02.

3. Найти производную функции $z = x^2 - y^2$ в точке $M(1,\ 1)$ в направлении вектора $\overline{S}$, составляющем угол $\alpha = 60°$ с положительным направлением оси Ox.

Ответ: $-0{,}7$.

4. Найти экстремум функции $z = x^2 + y^2$, если x и y связаны уравнением $\dfrac{x}{4} + \dfrac{y}{3} = 1$.

Ответ: $z_{\min} = \dfrac{144}{25}$ в $\left(\dfrac{36}{25}, \dfrac{48}{25}\right)$.

Вариант 2

1. Проверить, удовлетворяет ли указанному уравнению данная функция u. $\quad x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = 3\left(x^3 - y^3\right)$, $\quad u = \ln\dfrac{x}{y} + x^3 - y^3$.

2. Вычислить приближенно $\quad \operatorname{arctg}\dfrac{1{,}02}{0{,}95}$.

Ответ: 0,82

3. Найти производную функции $u = \arcsin\dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ в точке $M(1,\ 1,\ 1)$ в направлении вектора $\overline{MN}$, где $N(3,\ 2,\ 3)$.

Ответ: $\dfrac{1}{6}$.

4. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $z = 1 - x^2 - y^2$ в круге $(x-1)^2 + (y-1)^2 \le 1$.

Ответ: $z_{\text{наим.}} = -2\left(\sqrt{2} + 1\right)$, $z_{\text{наиб.}} = 2\left(\sqrt{2} - 1\right)$.

Вариант 3

1. Проверить, удовлетворяет ли указанному уравнению данная функция u. $\quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, $\quad u = \ln\left(x^2 + (y+1)^2\right)$.

2. Вычислить приближенно $\quad 1{,}02^{4{,}05}$.

Ответ: 1,08.

3. Найти производную функции $u = \ln\left(x^2 + y^2 + z^2\right)$ в точке $M(1,\ 2,\ 1)$ в направлении вектора $\overline{r} = 2i + 4j + 4k$.

Ответ: 7/9.

4. Из всех прямоугольников с заданной площадью S найти такой, периметр которого имеет наименьшее значение.

Ответ: квадрат, $P_{\text{наим.}} = 4\sqrt{S}$.

Вариант 4

1. Проверить, удовлетворяет ли указанному уравнению данная функция u. $y\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = (1 + y\ln x)\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $u = x^y$.

2. Вычислить приближенно $\sqrt[3]{1{,}02^2 + 0{,}05^2}$.

Ответ: 1,013.

3. Найти величину и направление градиента функции $u = \dfrac{1}{r}$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

Ответ: $\left|\text{grad}\, u\right|_{M_0} = \dfrac{1}{r_0^{\,2}}$, $\cos\alpha = -\dfrac{x_0}{r_0}$, $\cos\beta = -\dfrac{y_0}{r_0}$, $\cos\lambda = -\dfrac{z_0}{r_0}$,

где $r_0 = \sqrt{x_0^{\,2} + y_0^{\,2} + z_0^{\,2}}$.

4. Найти размеры прямоугольного параллелепипеда, имеющего при данной полной поверхности S максимальный объем.

Ответ: куб с ребром $\sqrt{\dfrac{S}{6}}$.

Вариант 5

1. Проверить, удовлетворяет ли указанному уравнению данная функция u. $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = 2u$, $u = \dfrac{xy}{x+y}$.

2. Вычислить приближенно $\sqrt{1{,}04^{1{,}99} + \ln 1{,}02}$.

Ответ: 1,05.

3. Найти производную функции $u = \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} + \dfrac{z}{6}$ в направлении вектора $\overline{S} = 6i + 3j - 6k$ в произвольной точке.

Ответ: 1/3.

4. Определить размеры прямоугольного параллелепипеда данного объема V, имеющего поверхность наименьшей площади.

Ответ: куб с ребром $\sqrt[3]{V}$.

Вариант 6

1. Проверить, удовлетворяет ли указанному уравнению данная функция u. $$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\qquad u=e^{xy}.$$

2. Вычислить приближенно $\ln\left(\sqrt[3]{1,03}+\sqrt[4]{0,98}-1\right)$.

Ответ: 0,005.

3. Найти производную функции $u=xy^2+z^3-xyz$ в точке $M(1,\ 1,\ 2)$ в направлении, образующем с осями координат углы соответственно в $60°,\ 45°,\ 60°$.

Ответ: 5.

4. Исследовать на экстремум функцию $z=xy$ при условии $x^2+y^2=2a^2$.

Ответ: $z_{\max}=a^2$ в точках $(a,\ a)$ и $(-a,\ -a)$;
$z_{\min}=-a^2$ в точках $(a,\ -a)$ и $(-a,\ a)$.

Вариант 7

1. Проверить, удовлетворяет ли указанному уравнению данная функция u. $$a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\qquad u=\sin^2(x-ay).$$

2. Вычислить приближенно $1{,}04^{2{,}02}$.

Ответ: 1,08.

3. Найти производную функции $u=xyz$ в точке $A(5,\ 1,\ 2)$ в направлении, идущем от этой точки к точке $B(9,\ 4,\ 14)$.

Ответ: $\frac{98}{13}$.

4. Исследовать на экстремум функцию $z=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ при условии $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{1}{a^2}$.

Ответ: $z_{\max}=\frac{\sqrt{2}}{a}$ в точке $(a\sqrt{2},a\sqrt{2})$;
$z_{\min}=-\frac{\sqrt{2}}{a}$ в точке $(-a\sqrt{2},-a\sqrt{2})$.

Вариант 8

1. Проверить, удовлетворяет ли указанному уравнению данная функция u. $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$, $u=y\sqrt{\frac{y}{x}}$.

2. Вычислить приближенно изменение функции $z=\frac{x+3y}{y-3x}$ при изменении x от $x_1 = 2$ до $x_2 = 2{,}5$ и y от $y_1 = 4$ до $y_2 = 3{,}5$.

Ответ:7,5.

3. Найти производную функции $u=x^2y^2z^2$ в точке $A(1, -1, 3)$ в направлении, идущем от этой точки к точке $B(0, 1, 1)$.

Ответ: -22.

4. Разложить положительное число a на три положительных слагаемых так, чтобы произведение их было наибольшим.

Ответ: $x = y = z$.

Вариант 9

1. Проверить, удовлетворяет ли указанному уравнению данная функция u. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$, $u=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

2. Вычислить приближенно $\sqrt{4{,}05^2+3{,}07^2}$.

Ответ: 5,082.

3. Температура тела в пространстве задается функцией $T=x^2y+yz-e^{xy}$. Найти скорость изменения температуры в точке $M(1, 1, 1)$ в направлении от этой точки к началу координат.

Ответ: $\frac{2e-5}{\sqrt{3}}$.

4. Представить положительное число a в виде произведения четырех положительных множителей так, чтобы их сумма была наименьшей.

Ответ: все четыре множителя равны между собой.

Вариант 10

1. Проверить, удовлетворяет ли указанному уравнению данная функция u. $a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, $u=e^{-\cos(x+ay)}$.

2. Вычислить приближенно $\operatorname{arctg}\dfrac{1,02}{0,95}$.

Ответ: 0,82.

3. Найти производную функции $z=\operatorname{arctg}(xy)$ в точке $M(1,\ 1)$ в направлении биссектрисы первого координатного угла.

Ответ: $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

4. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $z=e^{-x^2-y^2}\left(2x^2+3y^2\right)$ в круге $x^2+y^2\le 4$.

Ответ: $z_{\text{наим.}}=0$ в точке $(0,\ 0)$; $z_{\text{наиб.}}=\dfrac{3}{e}$ в точках $(0,\ \pm1)$.

УРОВЕНЬ III

1. Доказать, что функция

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y}{x^6+y^2}, & \text{если } x^6+y^2\ne 0,\\ 0, & \text{если } x=y=0,\end{cases}$$

разрывна при $x=y=0$, но имеет частные производные в точке $O(0,\ 0)$.

2. Доказать, что для функции

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy\left(x^2-y^2\right)}{x^2+y^2}, & \text{если } x^2+y^2\ne 0,\\ 0, & \text{если } x=y=0,\end{cases}$$

выполняется неравенство $f''_{xy}(0,0)\ne f''_{yx}(0,0)$.

3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=|x+y|-\sqrt{1-x^2-y^2}$ в области ее непрерывности.

Ответ: $z_{\text{наим.}}=-1$, $z_{\text{наиб.}}=\sqrt{2}$.

4. Записать уравнение $yz''_{yy}+2z'_y=\dfrac{z}{x}$ в новых переменных $u=\dfrac{x}{y}$ и $v=x-y$.

Ответ: $\dfrac{u^2(u-1)}{v}z''_{uu}+2uz''_{uv}+\dfrac{v}{u-1}z''_{vv}-\dfrac{2u(u-1)}{v}z'_v-2z'_v=\dfrac{2(u-1)}{uv}$.

5. Записать в полярных координатах выражение $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

Ответ: $\frac{\partial^2 z}{\partial \rho^2}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial z}{\partial \rho}$.

6. Найти уравнение касательной плоскости к эллипсоиду $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, отсекающей на осях координат равные отрезки.

Ответ: $\pm x \pm y \pm z=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

7. Доказать, что касательная плоскость к поверхности $xyz=a^3$ в любой ее точке образует с координатными плоскостями тетраэдр постоянного объема. Вычислить этот объем.

Ответ: $V=\frac{9}{2}a^3$.

8. Найти стороны треугольника данного периметра $2p$, который при вращении вокруг одной из своих сторон образует тело наибольшего объема.

Ответ: $a=b=\frac{3p}{4}$, $c=\frac{p}{2}$.

9. На эллипсе $x^2+4y^2=4$ даны две точки $A\left(-\sqrt{3},\frac{1}{2}\right)$ и $B\left(1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Найти на этом эллипсе третью точку C, такую, чтобы треугольник ABC имел наибольшую площадь.

Ответ: $C\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2};\frac{-\sqrt{3}-1}{2}\right)$.

10. Найти условный экстремум функции $u=x+y+z$ при условиях $xyz=8$, $\frac{xy}{z}=8$.

Ответ: $x=y=2\sqrt[4]{6}$, $z=\sqrt{\frac{2}{3}}$.

11. Найти второй дифференциал d^2z в точке (2, 1, 2) для функции, заданной неявно уравнением $3x^2y^2+2xyz^2-2x^3z+4y^3z-4=0$.

Ответ: $-31{,}5dx^2+206dxdy-306dy^2$.

12. Квадратная доска состоит из 2 белых и 2 черных клеток, расположенных в шахматном порядке. Сторона каждой клетки равна единице длины. Рассмотрим прямоугольник со сторонами, параллельными сторонам доски, один из углов которого совпадает с черным углом доски, площадь S черной части этого прямоугольника является функцией длин его сторон x и y. Записать эту функцию аналитически.

$$\textit{Ответ}:\ S(x,y)=\begin{cases} xy, & \text{если } 0\le x\le 1,\quad 0\le y\le 1,\\ x, & \text{если } 0\le x\le 1,\quad 1\le y\le 2,\\ y, & \text{если } 1\le x\le 2,\quad 0\le y\le 1,\\ 1+(x-1)(y-1), & \text{если } 1\le x\le 2,\quad 1\le y\le 2. \end{cases}$$

13. Касательная плоскость к поверхности $\dfrac{x^2}{3}+y^2-z^2=-1$ проходит через точки $A(1, 0, 0)$ и $B(1, 1, 0)$. Записать уравнение этой плоскости.

Ответ: $x+2z-1=0$ или $x-2z-1=0$.

14. Найти производную функции $u = xyz$ вдоль винтовой линии $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=bt$ в точке M_0, соответствующей значению параметра $t=\dfrac{\pi}{2}$.

$$\textit{Ответ}: -\frac{\pi a^2 b}{2\sqrt{a^2+b^2}}.$$

15. Плотность распределения вещества в пространстве задается функцией $\rho=\dfrac{x^2+y^2}{1+z^2}$. В каком направлении плотность меняется быстрее всего в точке $M_0(-1, 3, 2)$? Определить скорость наибольшего изменения плотности в данной точке.

Ответ: В направлении вектора $\left(-\dfrac{2}{5},\dfrac{6}{5},-\dfrac{8}{5}\right)$ плотность возрастает максимально со скоростью $\left|\operatorname{grad}\rho(M_0)\right|=\dfrac{\sqrt{104}}{5}$.

ГЛОССАРИЙ

Новые понятия	Содержание
Функция нескольких переменных (ФНП)	функция, определенная на некотором множестве X арифметического n-мерного пространства $$u = f(x_1, x_2, ..., x_n).$$ $z = f(x, y)$ – функция двух переменных; $u = f(x, y, z)$ – функция трех переменных и т. д.
График функции двух переменных	называется множество точек $N(x, y, f(x, y))$ пространства.
Частное приращение	$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$; $\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$.
Полное приращение	$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$.
Предел ФНП	число A называется ***пределом*** функции $z = f(M)$ при $M \to M_0$, если для любого $\varepsilon > 0 \; \exists \; r > 0$, что для всех точек M, расстояние от которых до точки M_0 $\lvert MM_0 \rvert < r$, выполняется неравенство $\lvert f(x, y) - A \rvert < \varepsilon$.
Функция непрерывна	в точке M_0, если $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = f(M_0)$.
Частная производная	называется предел отношения соответствующего частного приращения этой функции к приращению данной переменной, когда последнее стремится к нулю. $\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}\right)$.
Полный дифференциал	$dz = \dfrac{\partial z}{\partial x} dx + \dfrac{\partial z}{\partial y} dy$.
Производная по направлению	для функции трех переменных $u = f(x, y, z)$ $$\frac{\partial u(M_0)}{\partial S} = \frac{\partial u(M_0)}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u(M_0)}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u(M_0)}{\partial z}\cos\gamma,$$ где $\overline{S}_0 = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ – единичный вектор, соответствующий вектору направления $\overline{S}$.

Новые понятия	Содержание
Градиент ФНП	называется вектор, имеющий координаты $\frac{\partial u(M)}{\partial x}$, $\frac{\partial u(M)}{\partial y}$, $\frac{\partial u(M)}{\partial z}$ и обозначаемый символом $\overline{\mathrm{grad}\, u}$. $\overline{\mathrm{grad}\, u} = \frac{\partial u(M)}{\partial x} i + \frac{\partial u(M)}{\partial y} j + \frac{\partial u(M)}{\partial z} k$. $\frac{\partial u(M)}{\partial S} = \overline{\mathrm{grad}\, u} \cdot \overline{S}_0$.
Экстремум функции	максимум и минимум ФНП.
Условный экстремум	если разыскивается экстремум ФНП, которые связаны между собой одним или несколькими уравнениями (число уравнений должно быть меньше числа переменных).
Функция Лагранжа (метод неопределенных множителей Лагранжа)	составляется, чтобы найти условный экстремум функции $z = f(x, y)$ при наличии уравнения связи $\varphi(x, y) = 0$; имеет вид $F(x, y) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$, где λ – неопределенный постоянный множитель. Необходимые условия экстремума: $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$, $\varphi(x, y) = 0$.
Линия уровня	линия, вдоль которой функция двух переменных $z = f(x, y)$ сохраняет постоянное значение, т. е. $f(x, y) = C$.
Поверхность уровня	поверхность, на которой функция трех переменных $f(x, y, z) = C$ (C = const).

Учебное издание

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ.

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Учебно-методический комплекс
для студентов технических специальностей

Редактор *О. П. Михайлова*
Дизайн обложки *В. А. Виноградовой*

Подписано в печать 28.03.11. Формат 60×84 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная.
Ризография. Усл. печ. л. 14,15. Уч.-изд. л. 11,42. Тираж 420 экз. Заказ № 505.

Издатель и полиграфическое исполнение:
учреждение образования «Полоцкий государственный университет».

ЛИ № 02330/0548568 от 26.06.2009   ЛП № 02330/0494256 от 27.05.2009

Ул. Блохина, 29, 211440, г. Новополоцк.