Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Полоцкий государственный университет»

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Учебно-методический комплекс
для студентов технических специальностей

Под общей редакцией
В.С. ВАКУЛЬЧИК

Новополоцк
ПГУ
2010

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73
Н52

Рекомендовано к изданию методической комиссией
радиотехнического факультета в качестве
учебно-методического комплекса (протокол № 3 от 17.11.2008)

АВТОРЫ:
В. С. Вакульчик, Ф. Ф. Яско, В. А. Жак,
Т. И. Завистовская, А. П. Мателёнок

РЕЦЕНЗЕНТЫ:
доктор физ.-мат. наук, профессор, зав. кафедрой алгебры и методики преподавания математики УО «ВГУ им. П.М. Машерова» Н. Т. ВОРОБЬЕВ;
канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры высшей математики
УО «ПГУ» А. В. КАПУСТО

Н52 **Неопределенный интеграл** : учеб.-метод. комплекс для студентов техн. специальностей / В. С. Вакульчик [и др.] ; под общ. ред. В. С. Вакульчик. – Новополоцк : ПГУ, 2010. – 168 с.
ISBN 978-985-531-006-9.

Изложены теоретические основы одного из важнейших разделов курса высшей математики для студентов технических специальностей – «Неопределенный интеграл»; спроектированы основные этапы практических занятий; предложено соответствующее дидактическое обеспечение: графические схемы, информационные таблицы, обучающие задачи, трехуровневые тесты, вопросы к экзамену, глоссарий.

Предназначен для преподавателей и студентов технических специальностей высших учебных заведений.

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73

ISBN 978-985-531-006-9

От авторов

Поскольку теоретическая часть в данном учебно-методическом комплексе (УМК) представлена в сокращенном виде, хотелось бы отметить, что более глубокое изучение теоретических выкладок студент может найти в учебниках, которые приведены в списке, используемой литературы. В учебно-методическом комплексе основное внимание уделено проектированию практической части, а также организации познавательной деятельности по усвоению и переработке математической информации в соответствии с тремя уровнями обучения.

Большую благодарность и глубокую признательность авторы выражают рецензентам данного издания доктору физико-математических наук, профессору, заведующему кафедрой алгебры и методики преподавания математики УО «ВГУ им. П.М. Машерова» Николаю Тимофеевичу Воробьеву, а также кандидату физико-математических наук, заведующей кафедрой высшей математики УО «ПГУ» Анне Владимировне Капусто за внимательное отношение к представленной работе и ценные замечания по улучшению ее содержания.

ВВЕДЕНИЕ

Учебно-методический комплекс является частью серии учебно-методических пособий, разрабатываемых кафедрой высшей математики УО «Полоцкий государственный университет» по курсу «Высшая математика» для студентов технических специальностей под руководством кандидата педагогических наук, доцента В. С. Вакульчик. Теоретические и дидактические принципы разработки таких пособий изложены в нулевом учебном модуле [5]. Мы надеемся, что наши читатели знакомы, а, точнее, изучили этот УМК, в противном случае, советуем ознакомиться хотя бы с его нулевым модулем. В основу проектирования практической части модуля «Неопределенный интеграл» положен многолетний опыт обучения математике старшего преподавателя кафедры высшей математики В. А. Жак.

В предлагаемом УМК, содержание которого представлено в виде графической схемы (рис. 1), авторами предпринята попытка спроектировать процесс обучения математике как систему целей, содержания, форм, методов и средств обучения, обеспечивающих в своем взаимодействии организацию познавательной деятельности студентов с учетом дифференциации студенческой аудитории. Дидактическую основу УМК составляет дифференцированный и деятельностный подход к обучению математике, а также дидактические принципы научности, системности, доступности. В применении к математике мы руководствуемся сформулированным А. А. Столяром исходным положением теории обучения математике «Обучение математике есть дидактически целесообразное сочетание обучения математическим знаниям и математической деятельности». Под дифференцированным подходом к обучению математике понимается такая его организация, при которой каждый студент, овладевая некоторым минимумом математических знаний и их практических приложений, получает право и возможность расширять и углублять свои математические знания на более высоких уровнях усвоения. Отдельное внимание необходимо обратить на наличие в УМК таких дидактических средств как графические схемы, информационные таблицы, глоссарий, обобщенные планы, алгоритмические указания, алгоритмическое выделение этапов познавательной деятельности, которые позволяют организовать мыслительную деятельность по переработке математической информации, помогают обучающемуся в логической организации, структурировании, систематизации математических знаний. Учебно-методический комплекс содержит в себе возможности самоконтроля, а также уровневого контроля знаний. Студенты, работающие на I уровне сложности, потенциально могут претендовать на получение на экзамене оценки «4» - «5»; работающие на II уровне – оценки «6» – «8»; работающие на III уровне – оценки «9» - «10». Информационное поле УМК позволяет студенту выбирать свою траекторию обучения в каждом модуле. Трехуровневая тестовая среда УМК создает условия для перехода студентов от заданий, требующих воспроизводящей мыслительной деятельности к заданиям, требующим познавательной деятельности преобразующе-воспроизводящего или творческого характера.

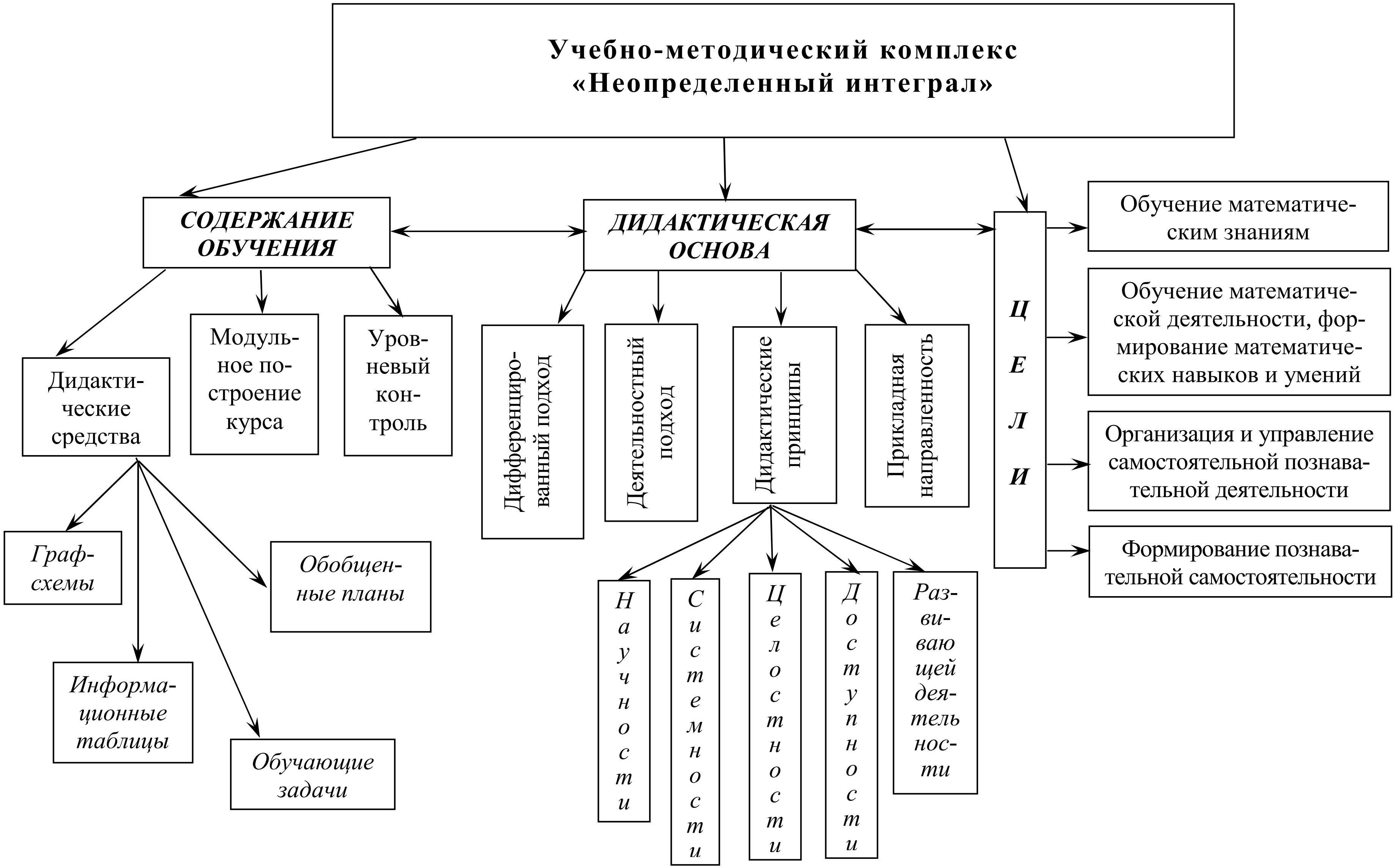

Учебно-методический комплекс «Неопределенный интеграл»
СОДЕРЖАНИЕ ОБУЧЕНИЯ
ДИДАКТИЧЕСКАЯ ОСНОВА
ЦЕЛИ
Обучение математическим знаниям
Обучение математической деятельности, формирование математических навыков и умений
Организация и управление самостоятельной познавательной деятельности
Формирование познавательной самостоятельности
Дидактические средства
Модульное построение курса
Уровневый контроль
Дифференцированный подход
Деятельностный подход
Дидактические принципы
Прикладная направленность
Граф-схемы
Обобщенные планы
Информационные таблицы
Обучающие задачи
Научности
Системности
Целостности
Доступности
Развивающей деятельности

Рис. 1.

УЧЕБНЫЙ МОДУЛЬ 6
НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Введение

Основной задачей дифференциального исчисления является *задача дифференцирования*, т. е. *задача нахождения скорости изменения определенного процесса*. Однако различные вопросы естествознания и техники приводят к необходимости решения обратной задачи: зная скорость изменения процесса (мгновенную скорость при неравномерном движении, скорость химической реакции, силу тока, плотность массы и т. п.), найти саму функциональную зависимость (закон неравномерного движения, закон химической реакции, заряд, массу и т. п.). В данном учебном модуле мы и будем решать задачу восстановления ***функции*** по ее ***производной или дифференциалу.*** Эта задача является основной задачей так называемого ***интегрального исчисления***. Изучение этого вопроса естественным образом приводит к понятиям ***первообразной*** и ***неопределенного интеграла***. В данном модуле изучим основные методы интегрирования и выделим классы функций, неопределенные интегралы от которых выражаются через элементарные функции.

ДИДАКТИЧЕСКИЕ ЦЕЛИ ОБУЧЕНИЯ

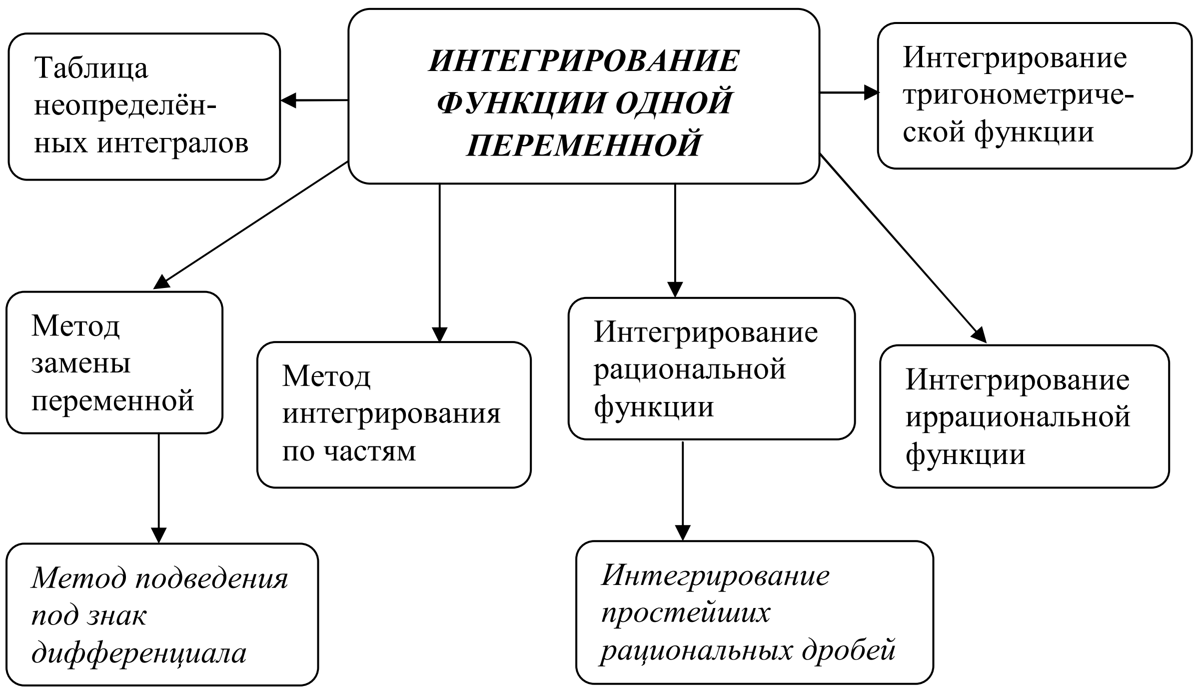
Студент должен знать	***Студент должен уметь***
– основные определения, связанные с понятием неопределенного интеграла; – основные свойства неопределенного интеграла; – таблицу интегрирования основных классов элементарных функций; – основные методы интегрирования: непосредственного интегрирования, подведения под знак дифференциала, замены переменной, интегрирования по частям; – методы интегрирования выражений, содержащих квадратный трехчлен; – методы интегрирования простейших рациональных дробей, рациональных функций; – методы интегрирования иррациональных функций; – методы интегрирования тригонометрических функций	– пользоваться основными свойствами неопределенного интеграла; – писать по памяти таблицу интегрирования основных классов элементарных функций; – применять к вычислению интегралов основные методы интегрирования; – применять к вычислению интегралов методы интегрирования выражений, содержащих квадратный трехчлен; – применять к вычислению интегралов методы интегрирования простейших рациональных дробей, рациональных функций; – применять к вычислению интегралов методы интегрирования иррациональных функций; – применять к вычислению интегралов методы интегрирования тригонометрических функций

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА МОДУЛЯ

Название вопросов, которые изучаются на лекции	Номер практического занятия	Наглядные и методические пособия	Формы контроля знаний
1. Первообразная. Неопределенный интеграл и его свойства. Таблица основных формул	I	2, 4, 7, 8	ИДЗ
2. Простейшие приемы интегрирования. Метод подведения под знак дифференциала. Замена переменной	II, III	2, 4, 7,8	ПДЗ, Опрос
3. Интегрирование выражений, содержащих квадратный трехчлен в знаменателе. Интегрирование по частям. Интегрирование простейших дробей	IV, V	2, 4, 7, 8	Р, ПДЗ
4. Интегрирование рациональных функций. Интегрирование некоторых иррациональных функций	VI	2, 4, 7, 8	Р, ПДЗ
5. Интегрирование выражений, содержащих тригонометрические функции. Тригонометрические подстановки. Использование справочников и таблиц интегралов	VII, VIII	2, 4, 7, 8	Опрос

Принятые сокращения:
ИДЗ – индивидуальное домашнее задание;
ПДЗ – проверка домашнего задания;
Р – разминка.

ГРАФИЧЕСКАЯ СХЕМА МОДУЛЯ



ИНФОРМАЦИОННАЯ ТАБЛИЦА *«НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ»*

$F(x)$ – ***первообразная*** для $f(x)$, если $F'(x)=f(x)$.

Неопределенный интеграл от $f(x)$ – множество всех первообразных: $\int f(x)dx=F(x)+C$.

Свойства неопределенных интегралов

1. $\left(\int f(x)dx\right)'=f(x)$;
2. $d\left(\int f(x)dx\right)=f(x)dx$;
3. $\int dF(x)=F(x)+C$;
4. $\int\left[f_1(x)\pm f_2(x)\right]dx=\int f_1(x)dx\pm\int f_2(x)dx$;
5. $\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$;
6. if $\int f(x)dx=F(x)+C$, $u=\varphi(x)$, то $\int f(u)du=F(u)+C$.

Таблица неопределенных интегралов

СТЕПЕННЫЕ

1. $\int 0\cdot dx=C$;
2. $\int u^{\lambda}du=\dfrac{u^{\lambda+1}}{\lambda+1}$, $\lambda\neq-1$;
   а) $\int du=u+C$;
   б) $\int u\,du=\dfrac{u^2}{2}+C$;
   в) $\int\dfrac{du}{u^2}=-\dfrac{1}{u}+C$;
   г) $\int\dfrac{du}{\sqrt{u}}=2\sqrt{u}+C$;
3. $\int\dfrac{du}{u}=\ln|u|+C$;

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ

4. $\int\sin u\,du=-\cos u+C$;
5. $\int\cos u\,du=\sin u+C$;
6. $\int\mathrm{tg}\,u\,du=-\ln|\cos u|+C$;
7. $\int\mathrm{ctg}\,u\,du=\ln|\sin u|+C$;
8. $\int\dfrac{du}{\sin u}=\ln\left|\mathrm{tg}\dfrac{u}{2}\right|+C$;
9. $\int\dfrac{du}{\cos u}=\ln\left|\mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{u}{2}\right)\right|+C$;
10. $\int\dfrac{du}{\cos^2 u}=\mathrm{tg}\,u+C$;
11. $\int\dfrac{du}{\sin^2 u}=-\mathrm{ctg}\,u+C$;

12. $\int e^u\,du = e^u + C$;

13. $\int a^u\,du = \dfrac{a^u}{\ln a} + C$;

ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ

14. $\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \arcsin\dfrac{u}{a} + C$;

15. $\int \dfrac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C$;

16. $\int \dfrac{du}{u^2+a^2} = \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{u}{a} + C$;

17. $\int \dfrac{du}{u^2-a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{u-a}{u+a}\right| + C$;

18. $\int \sqrt{a^2-u^2}\,du = \dfrac{u}{2}\sqrt{a^2-u^2} + \dfrac{a^2}{2}\arcsin\dfrac{u}{a} + C$;

19. $\int \sqrt{a^2+u^2}\,du = \dfrac{u}{2}\sqrt{a^2+u^2} + \dfrac{a^2}{2}\ln\left(u + \sqrt{a^2+u^2}\right) + C$;

20. $\int \sqrt{u^2-a^2}\,du = \dfrac{u}{2}\sqrt{u^2-a^2} - \dfrac{a^2}{2}\ln\left|u + \sqrt{u^2-a^2}\right| + C$;

СОДЕРЖАЩИЕ «u^2», «a^2»

21. $\int \operatorname{sh} u\,du = \operatorname{ch} u + C$;

22. $\int \operatorname{ch} u\,du = \operatorname{sh} u + C$;

23. $\int \dfrac{du}{\operatorname{sh}^2 u} = -\operatorname{cth} u + C$;

24. $\int \dfrac{du}{\operatorname{ch}^2 u} = \operatorname{th} u + C$.

ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ

Основные методы интегрирования

I. ***Непосредственное интегрирование***

Интегрирование выполняется с помощью таблиц, тождественных преобразований подынтегральных функций, свойств неопределенного интеграла.

II. ***Метод поднесения под знак дифференциала***

Основан на свойстве 6 (инвариантности неопределенного интеграла); свойство 6: если $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, то $\int f(u)du = F(u) + C$, где $u = \varphi(x)$.

Функция подносится под знак дифференциала по правилу: под знаком дифференциала записывается ее первообразная

$f(x)\,dx = dF(x)$.

III. ***Интегрирование заменой переменной***

С помощью замены переменной $x = \varphi(t)$ приводят интеграл к табличному или более простому $\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt$.

IV. ***Метод интегрирования по частям***

$\int u\,dv = uv - \int v\,du$.

Чаще всего применяется, когда $f(x)$ есть произведение разного класса функций, содержит логарифмы, иррациональные выражения или «аркфункции».

Для $\int u\,dv = uv - \int v\,du$ полезно помнить:

$u = x^k,\ k \in \mathrm{N}$		$u \neq x^k,\ k \in \mathrm{N}$	
$x^k \cos ax$	$x^k e^{ax}$	$x^k \arcsin x$	$x^k \operatorname{arctg} x$
$x^k \sin ax$	$x^k a^{mx}$	$x^k \arccos x$	$x^k \operatorname{arcctg} x$
			$x^k \log_a x$

V. ***Интегрирование выражений, содержащих квадратный трехчлен***

$$I_1 = \int \frac{dx}{ax^2+bx+c};\quad I_2 = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}};\quad I_3 = \int \frac{(Ax+B)\,dx}{ax^2+bx+c};$$

$$I_4 = \int \frac{(Ax+B)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}};\quad I_5 = \int \sqrt{ax^2+bx+c}\cdot dx.$$

1. *Выделением полного квадрата из квадратного трехчлена*

$\boxed{ax^2+bx+c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a}}$ и введением переменной $\boxed{x+\frac{b}{2a}=t}$,

$I_1, \ldots, I_5$ сводят к табличным или к более простым.

2. $\displaystyle\int \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^n} = \frac{1}{a^2}\left[\frac{2n-3}{2(n-1)}J_{n-1} + \frac{x}{2(n-1)\left(x^2+a^2\right)^{n-1}}\right].$

VI. ***Интеграл от дифференциального бинома***

$\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$ выражается через элементарные функции в трех случаях: 1) p – целое число; 2) $\frac{m+1}{n}$ – целое число $\Rightarrow$ $\boxed{a+bx^n = z^q}$, где q – знаменатель p; 3) $\left(\frac{m+1}{n}+p\right)$ – целое число $\Rightarrow$ $\boxed{a+bx^n = z^q\cdot x^n}$.

VII. ***Интегрирование некоторых тригонометрических выражений***

1. *Универсальная тригонометрическая подстановка*

$$\left|\begin{array}{l} \operatorname{tg}\frac{x}{2}=t;\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2};\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ x = 2\operatorname{arctg} t,\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} \end{array}\right|.$$

2. $\displaystyle\int \sin^{2m} x\cos^{2n} x\,dx = \left|\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2},\ \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2},\ \sin x\cdot\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x\right|.$

3. $$\int \sin^m x\cos^n x\,dx = \left|\begin{array}{l} if\ \ m+n=2k, \Rightarrow \operatorname{tg} x = t,\ x = \operatorname{arctg} t,\ dx = \frac{dt}{1+t^2}, \\ \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}},\ \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \end{array}\right|.$$

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА

6.1. Первообразная. Неопределённый интеграл. Основные понятия

Определение 6.1.1. Функция $F(x)$ называется ***первообразной*** для функции $f(x)$ на некотором множестве *X*, если для любого $x \in X$ функция $F(x)$ является ***дифференцируемой*** и выполняется равенство

$$\boxed{F'(x) = f(x)} \text{ или } \boxed{dF(x) = F'(x) \cdot dx}.$$

Определение 6.1.2. Множество всех первообразных для функции $f(x)$ называется ***неопределённым интегралом.***

Обозначается неопределённый интеграл: $\boxed{\int f(x)dx}$

Например, функции x^4, $x^4 + 7$ являются первообразными для функции $f(x) = 4 \cdot x^3$, функции $\sqrt{x}$, $\sqrt{x} + 5$ являются первообразными для функции $\dfrac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$. Таким образом, первообразная по производной восстанавливается не однозначно.

Кроме того, необходимо запомнить, что не все интегралы от элементарных функций могут быть выражены через элементарные функции. Такие интегралы называются ***неберущимися***. Примерами неберущихся интегралов являются

$$\int \frac{\sin t dt}{t}, \quad \int \frac{dx}{\cos\sqrt{x}}, \quad \int \frac{\ln t dt}{t}, \quad \int e^{-x^2} dx, \quad \int \frac{dx}{\sqrt[5]{x^7 + 8}} \text{ и др.}$$

ТЕОРЕМА 6.1.1. Любые две первообразные для функции $f(x)$ отличаются друг от друга на постоянную величину.

$$\text{Если} \quad \left.\begin{aligned} F_1'(x) = f(x) \\ F_2'(x) = f(x) \end{aligned}\right\} \Rightarrow F_1(x) - F_2(x) = \text{const}.$$

Доказательство. Пусть $F_1(x)$ и $F_2(x)$ – две первообразные для функции $f(x)$, заданной на отрезке $[a,b]$. Рассмотрим

$\varphi(x)=F_1(x)-F_2(x)$. Вычислим $\varphi'(x)=F_1'(x)-F_2'(x)=f(x)-f(x)=0$. Таким образом, $\varphi'(x)=0$. С другой стороны, функция $\varphi(x)$ удовлетворяет требованиям теоремы Лагранжа. Тогда по теореме Лагранжа будем иметь:

$$\varphi(x)-\varphi(a)=\varphi'(c)\cdot(x-a), c\in(x,a), x\in[a,b]\Rightarrow$$
$$\varphi(x)-\varphi(a)=0\Rightarrow\varphi(x)=\varphi(a)=\text{const}\Rightarrow$$
$$F_1(x)-F_2(x)=\text{const}.$$

Вывод: Множество всех первообразных можно представить через одну из них и произвольную постоянную, поэтому из определения 6.1.2 следует, что неопределённый интеграл для функции $f(x)$ есть множество $\{F_1(x)+C\}$, где $F_1'(x)=f(x)$.

Замечание. Геометрически неопределенный интеграл представляет собой ***семейство кривых,*** каждая из которых получается путем сдвига одной из кривых параллельно самой себе вдоль оси *Оу*.

Таким образом, неопределённый интеграл

$$\int f(x)dx=F(x)+C, \qquad (6.1.1)$$

где $f(x)dx$ – подынтегральное выражение;

$f(x)$ – подынтегральная функция.

Определение 6.1.3. Если для функции $f(x)$ ***на* [*a, b*] *существует первообразная***, а значит, и неопределённый интеграл, то она называется ***интегрируемой на* [*a, b*]**. Операция нахождения неопределённого интеграла называется ***интегрированием***.

ТЕОРЕМА 6.1.2. Если подынтегральная функция $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то на $[a,b]$ для $f(x)$ существует неопределённый интеграл.

Свойства неопределённого интеграла

ТЕОРЕМА 6.1.3. Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, а производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:

1. $d\left(\int f(x)dx\right)=f(x)dx$;

2. $\left(\int f(x)dx\right)'=f(x)$.

Доказательство. Воспользуемся свойствами и определением дифференциала, тогда будем иметь:

$$d\left(\int f(x)dx\right)=d\left(F(x)+C\right)=dF(x)+d(C)=F'(x)dx=f(x)dx.$$

Аналогично воспользуемся свойствами производной, получим

$$\left(\int f(x)dx\right)'=\left(F(x)+C\right)'=F'(x)+C'=f(x)+0=f(x).$$

ТЕОРЕМА 6.1.4. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной:

3. $\int dF(x)=F(x)+C.$

Доказательство.

В самом деле, $\int dF(x)=\int F'(x)dx=\int f(x)dx=F(x)+C.$

ТЕОРЕМА 6.1.5. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа непрерывных функций равен алгебраической сумме интегралов от слагаемых функций:

4. $\int[f_1(x)\pm f_2(x)]dx=\int f_1(x)dx\pm\int f_2(x)dx$.

Доказательство.

Пусть $F_1'(x)=f_1(x)$ и $F_2'(x)=f_2(x)$. Тогда

$$\int\left(f_1(x)\pm f_2(x)\right)dx=\int\left(F_1'(x)\pm F_2'(x)\right)dx=$$

$$\int\left(F_1(x)\pm F_2(x)\right)'dx=\int d\left(F_1(x)\pm F_2(x)\right)=F_1(x)\pm F_2(x)+C=$$

$$\left(F_1(x)+C_1\right)+\left(F_2(x)+C_2\right)=\int f_1(x)dx\pm\int f_2(x)dx.$$

5. $\int C\cdot f(x)dx=C\int f(x)dx$.

Например, $\int\frac{3x^2-7}{x}dx=3\int xdx-7\int\frac{1}{x}dx=3\cdot\frac{x^2}{2}-7\cdot\ln|x|+C$.

Упражнение. Свойство **5** доказать самостоятельно.

ТЕОРЕМА 6.1.6. (Свойство инвариантности): если $F'(x)=f(x)$, то

$$\int f(u)du=F(u)+C,$$

где $u=\varphi(x)$ – произвольная функция, имеющая непрерывную производную.

Доказательство. Пусть x – независимая переменная, $f(x)$ – непрерывная функция и $F(x)$ – ее первообразная. Тогда $\int f(x)dx = F(x) + C$. Пусть $u = \varphi(x)$ и $\varphi(x)$ имеет непрерывную производную. Рассмотрим теперь сложную функцию $F(u) = F(\varphi(x))$. Воспользуемся свойством инвариантности формы первого дифференциала, тогда будем иметь

$dF(u) = F'(u)du = f(u)du$. Тогда $\int f(u)du = \int dF(u) = F(u) + C$.

Вывод: Формула для неопределенного интеграла остается справедливой независимо от того, является ли переменная интегрирования независимой переменной или непрерывно-дифференцируемой функцией от нее.

Например, по определению неопределенного интеграла имеем

$$\int e^x dx = e^x + C.$$

Тогда, используя Т.6.1.6, можно найти множество первообразных и для некоторых других функций:

1) $\int e^{\cos x} d\cos x = e^{\cos x} + C$;

2) $\int e^{\arccos x} d\arccos x = e^{\arccos x} + C$ и т. д.

6.2. Таблица неопределенных интегралов

Пользуясь тем, что интегрирование есть действие обратное дифференцированию, можно получить таблицу основных интегралов путем обращения соответствующих формул дифференциального исчисления и использования определения первообразной и свойств неопределенных интегралов.

Например, т. к.:

1. $d(\cos u) = -\sin u \cdot du$, то $\int \sin u \cdot du = -\cos u + C$,

2. $d(5^u) = 5^u \ln 5 \cdot du$, то $\int 5^u \cdot du = \dfrac{5^u}{\ln 5} + C$,

3. $d(\arccos u) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot du$, то $\int \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot du = -\arccos u + C$,

4. $d(\ln u) = \dfrac{1}{u} \cdot du$, $d(\ln(-u)) = \dfrac{-1}{-u} \cdot du = \dfrac{1}{u} \cdot du$, то $\int \dfrac{1}{u} \cdot du = \ln|u| + \tilde{N}$ и т.д.

З а м е ч а н и е 6.2.1. Таблицу интегралов запоминать целесообразно в соответствии с классом функции.

З а м е ч а н и е 6.2.2. Интегрирование, как и всякая обратная операция, выполняется сложнее дифференцирования. Здесь нет простых и универсальных путей. Обратите внимание, что из алгебраических свойств здесь имеют место только свойства линейности. Для интегрирования произведений и частных придется проявлять изобретательность, конструкторские способности, творчество, специальные методы для того, чтобы свести искомый интеграл к табличным. Результативность этих действий напрямую зависит от степени свободного владения таблицей интегралов основных функций, а также наличия определенного опыта. Степень этой свободы будет достаточно высокой, если не просто **узнавать** табличные интегралы, а **записывать** их по памяти, в **соответствии с определенным классом функций**.

1. $\int 0 \cdot dx = C$.

Степенные функции:

2. $\int u^p du = \dfrac{u^{p+1}}{p+1} + C$, где $p \neq -1$:

а) $\int du = u + C$;

б) $\int u du = \dfrac{u^2}{2} + C$;

в) $\int \dfrac{du}{u^2} = -\dfrac{1}{u} + C$;

г) $\int \dfrac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C$.

3. $\int \dfrac{du}{u} = \ln|u| + C$.

Тригонометрические функции:

4. $\int \sin u du = -\cos u + C$.

5. $\int \cos u du = \sin u + C$.

6. $\int \dfrac{du}{\sin u} = \ln\left|\mathrm{tg}\dfrac{u}{2}\right| + C$.

7. $\int \dfrac{du}{\cos u} = \ln\left|\mathrm{tg}(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{u}{2})\right| + C$.

8. $\int \dfrac{du}{\sin^2 u} = -\mathrm{ctg}\, u + C$.

9. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C$.

10. $\int \operatorname{tg} u du = -\ln|\cos u| + C$.

11. $\int \operatorname{ctg} u du = \ln|\sin u| + C$.

Показательные функции:

12. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$.

13. $\int e^u du = e^u + C$.

Функции, содержащие u^2, a^2:

14. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C$.

15. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C$.

16. $\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C$.

17. $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{u - a}{u + a}\right| + C$.

18. $\int \sqrt{a^2 - u^2} du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{u}{a} + C$.

19. $\int \sqrt{u^2 \pm a^2} du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C$.

Гиперболические функции:

20. $\int \operatorname{sh} u du = \operatorname{ch} u + C$.

21. $\int \operatorname{ch} u du = \operatorname{sh} u + C$.

22. $\int \frac{du}{\operatorname{sh}^2 u} = -\operatorname{cth} u + C$.

23. $\int \frac{du}{\operatorname{ch}^2 u} = \operatorname{th} u + C$.

Пример. Докажем, что $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \ln\left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right) + C$.

Доказательство:

$$\left[\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})+C\right]' = \frac{1}{x+\sqrt{a^2+x^2}}\cdot(1+\frac{1\cdot 2x}{2\sqrt{a^2+x^2}}) =$$

$$= \frac{1}{(x+\sqrt{a^2+x^2})}\frac{(\sqrt{a^2+x^2}+x)}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}},$$

что и требовалось доказать.

Методы интегрирования

6.3. Непосредственное интегрирование

Суть метода: интегрирование выполняется с помощью таблиц, преобразования подынтегральных выражений, свойств неопределенного интеграла.

Пример 1.

$$\int\frac{dx}{\sin 2x} = \int\frac{dx}{2\sin x\cos x} = \frac{1}{2}\int\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\sin x\cos x}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\left(\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x\right)dx = \frac{1}{2}\int\operatorname{tg} xdx+\frac{1}{2}\int\operatorname{ctg} x = -\frac{1}{2}\ln\left|\cos x\right|+\frac{1}{2}\ln\left|\sin x\right|+C.$$

Пример 2.

$$\int 2^x 3^x dx = \int 6^x dx = \frac{6^x}{\ln 6}+C.$$

Пример 3.

$$\int\left(2\sqrt[5]{x}+\frac{3}{\sqrt[3]{x^7}}+4x^8-\frac{7}{x}\right)dx =$$

$$= 2\int x^{\frac{1}{5}}dx+3\int x^{-\frac{7}{3}}dx+4\int x^8 dx-7\int\frac{dx}{x} = 2\frac{x^{\frac{6}{5}}}{\frac{6}{5}}+3\frac{x^{-\frac{4}{3}}}{-\frac{4}{3}}+4\frac{x^9}{9}-7\ln\left|x\right|+C \;.$$

Пример 4.

$$\int\frac{dx}{4+x^2} = \int\frac{dx}{2^2+x^2} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C.$$

Пример 5.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4-3x^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{4}{3}-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin \frac{x\sqrt{3}}{2} + C;$$

Пример 6.

$$\int \sin(2x+3)\,dx = \frac{1}{2}\int \sin(2x+3)\,d(2x+3) = -\frac{1}{2}\cos(2x+3) + C\,.$$

Пример 7.

$$\int \frac{dx}{(x+4)\cdot x} = \frac{1}{4}\int \frac{(4+x)-x}{(x+4)\cdot x}dx =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\int \frac{dx}{x} - \int \frac{d(x+4)}{(x+4)} \right) = \frac{1}{4}\cdot \ln|x| - \frac{1}{4}\cdot \ln|x+4| + C.$$

Задания для систематизации, повторения (выполняются в диалоговом режиме со всей аудиторией):

1. $\int \sin^2 2x dx$; 2. $\int \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{x+1}{\sqrt[4]{x^3}} \right) dx$; 3. $\int \frac{x^3+2}{x} dx$; 4. $\int tg^2 3x dx$; 5. $\int \frac{dx}{\sqrt{4+3x^2}}$;

6. $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx$; 7. $\int \frac{3-2ctg^2 x}{\cos^2 x} dx$; 8. $\int \frac{2x^2+2x+5}{\left(x^2+2x+1\right)\cdot\left(x^2+4\right)} dx$.

6.4. Метод подведения под знак дифференциала

Суть метода основывается на свойстве инвариантности неопределенного интеграла: **если $F'(x) = f(x)$, то $\int f(u)du = F(u) + C$.**

Пример 1.

$$\int \frac{dx}{x-1} = \int \frac{d(x-1)}{x-1} = \ln|x-1| + C\ .$$

Пример 2.

$$\int \frac{xdx}{x^2+4} = \frac{1}{2}\int \frac{d\left(x^2+4\right)}{x^2+4} = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+4\right) + C\ .$$

Вывод: чтобы поднести под знак дифференциала функцию, **нужно записать под знаком дифференциала ее первообразную.**

Пример 3.

$$\int (2x+1)^{2009} dx = \frac{1}{2}\int (2x+1)^{2009} d(2x+1) = \frac{1}{2}\frac{(2x+1)^{2010}}{2010} + C\,.$$

Пример 4.

$$\int xe^{-x^2+7}dx = \left| xdx = d\frac{x^2}{2} = -\frac{1}{2}d\left(-x^2+7\right) \right| =$$

$$-\frac{1}{2}\int e^{-x^2+7}d\left(-x^2+7\right) = -\frac{1}{2}e^{-x^2+7} + C.$$

Пример 5.

$$\int \frac{\ln^{1997}x}{x}dx = \left| \frac{dx}{x} = d\ln x \right| = \int \ln^{1997}x d\ln x = \frac{\ln^{1998}x}{1998} + C \ .$$

Пример 6.

$$\int \frac{x^3dx}{x^8+7} = \frac{1}{4}\int \frac{d\left(x^4\right)}{x^8+7} = \frac{1}{4}\int \frac{d\left(x^4\right)}{\left(x^4\right)^2+7} = \frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{x^4}{\sqrt{7}} + C \ .$$

Пример 7.

$$\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx = 2\sin\sqrt{x} + C \ .$$

Пример 8 (*первый способ*).

$$\int \frac{dx}{e^x+1} = \int \frac{e^{-x}dx}{e^{-x}\left(e^x+1\right)} = \int \frac{e^{-x}dx}{1+e^{-x}} = -\int \frac{d\left(e^{-x}+1\right)}{e^{-x}+1} = -\ln\left(e^{-x}+1\right) + C =$$

$$= -\ln\left|\frac{1}{e^x}+1\right| + C = -\ln\left|\frac{e^x+1}{e^x}\right| + C = -\ln\left(e^x+1\right) + \ln e^x + C = x - \ln\left(e^x+1\right) + C \ .$$

Пример 8 (*второй способ*).

$$\int \frac{\left(1+e^x\right)-e^x}{e^x+1}dx = \int dx - \int \frac{e^xdx}{e^x+1} = x - \int \frac{d\left(e^x+1\right)}{e^x+1} = x - \ln\left|e^x+1\right| + C \ .$$

6.5. Метод замены переменной

Суть метода: метод замены переменной заключается во введении новой переменной с целью получения табличного интеграла или сводимого к табличным.

ТЕОРЕМА 6.5.1. Пусть дан интеграл $\int f(x)dx$, который не является табличным, но известно, что первообразная для $f(x)$ есть. Пусть $x = \varphi(t)$ – непрерывно-дифференцируемая функция, имеющая обратную функцию, которая также является дифференцируемой. Тогда с учетом $dx = \varphi'(t)dt$, будем иметь

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt. \tag{6.5.1}$$

Доказательство. Пусть $F(x)$ – первообразная для функции $f(x)$, т. е. $F'(x) = f(x)$. Тогда по свойству инвариантности неопределенного интеграла функция $F(\varphi(t))$ будет первообразной для функции $f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$:

$$\left(F(\varphi(t))\right)' = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t).$$

Следовательно, $\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + C = F(x) + C = \int f(x)dx$.

Замечание 6.5.1. Формулу (6.5.1) называют формулой замены переменной в неопределённом интеграле или методом подстановки.

Замечание 6.5.2. После нахождения интеграла в правой части формулы (6.5.1) необходимо вернуться к старой переменной.

Замечание 6.5.3. Замена переменной должна обеспечить приведение не табличного интеграла к табличному или более простому. Однако удачный выбор новой переменной часто довольно сложен и приобретается практикой.

Пример 1 (*первый способ*).

$$\int \frac{dx}{e^x + 1} = \left| \begin{matrix} e^x + 1 = t, & e^x = t - 1, \\ x = \ln(t-1), & dx = \dfrac{1}{t-1}dt \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{(t-1)t} = -\int \frac{(t-1) - t}{(t-1)t}dt =$$

$$= \int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t} \right) dt = -\int \frac{dt}{t} + \int \frac{d(t-1)}{t-1} = \ln(t-1) - \ln t + C =$$

$$= \ln\left(e^x\right) - \ln\left(e^x + 1\right) + C = x - \ln\left(e^x + 1\right) + C.$$

Пример 1 (*второй способ*).

$$\int \frac{dx}{e^x + 1} = \left| \begin{matrix} x = -\ln t, e^x = \dfrac{1}{t}, t = e^{-x}, \\ dx = -\dfrac{1}{t}dt, e^x + 1 = \dfrac{1+t}{t} \end{matrix} \right| = -\int \frac{dt}{t+1} = -\int \frac{d(t+1)}{(t+1)} = -\ln|t+1| + C =$$

$$=-\ln\left(e^{-x}+1\right)+C=-\ln\left|\frac{1}{e^x}+1\right|+C=-\ln\left|\frac{e^x+1}{e^x}\right|+C=$$

$$=-\ln\left(e^x+1\right)+\ln e^x+C=x-\ln\left(e^x+1\right)+C.$$

Упражнение. Вычислить $\int\frac{dx}{e^x+1}$ с помощью замены $x=\ln t$.

Сравните все способы вычисления $\int\frac{dx}{e^x+1}$ и выберите наиболее эффективный из них.

Пример 2.

$$\int\frac{dx}{2x^2-x+1}=\int\frac{dx}{2\left(x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)}=\int\frac{dx}{2\left(\left(x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{16}\right)-\frac{1}{16}+\frac{1}{2}\right)}=$$

$$=\int\frac{dx}{2\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{7}{8}}=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x-\frac{1}{4}\right)}{\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{4\left(x-\frac{1}{4}\right)}{\sqrt{7}}+C=\frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{4x-1}{\sqrt{7}}+C.$$

Пример 3.

$$\int\frac{(3x-2)dx}{2x^2-x+1}=\int\frac{(3x-2)dx}{2\left(\left(x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{16}\right)-\frac{1}{16}+\frac{1}{2}\right)}=\int\frac{(3x-2)dx}{2\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{7}{8}}=$$

$$=\left|\begin{matrix}x-\frac{1}{4}=t,\ x=\frac{1}{4}+t,\\ dx=dt\end{matrix}\right|=\int\frac{3\left(t+\frac{1}{4}\right)-2}{2t^2+\frac{7}{8}}dt=\int\frac{3t-\frac{5}{4}}{2t^2+\frac{7}{8}}dt=$$

$$=\frac{3}{2}\int\frac{tdt}{t^2+\frac{7}{16}}-\frac{5}{8}\int\frac{dt}{t^2+\frac{7}{16}}=\frac{3}{4}\ln\left(t^2+\frac{7}{16}\right)-\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{4t}{\sqrt{7}}+C=$$

$$=\frac{3}{4}\ln\left(\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{7}{16}\right)-\frac{5}{2\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{4\left(x-\frac{1}{4}\right)}{\sqrt{7}}+C=$$

$$=\frac{3}{4}\ln\left(\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{7}{16}\right)-\frac{5}{2\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{4x-1}{\sqrt{7}}+C.$$

Пример 4.

$$\int\sqrt{1-x^2}dx=\left|\begin{array}{l}\sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\sin^2 t}=\cos t,\\ x=\sin t,\ dx=\cos t\cdot dt\end{array}\right|=\int\cos t\cdot\cos t dt=$$

$$=\int\cos^2 dt=\int\frac{1+\cos 2t}{2}dt=\frac{1}{2}\int dt+\frac{1}{2}\int\cos 2t dt=$$

$$=\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sin 2t dt+C=\left|\begin{array}{l}t=\arcsin x,\\ \sin 2t=2\sin t\cos t=2x\sqrt{1-x^2}\end{array}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\arcsin x+\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+C\,.$$

Пример 5 (*первый способ*).

$$\int\operatorname{tg}xdx=\int\frac{\sin xdx}{\cos x}=\left|\cos x=t,\ dt=-\sin xdx\right|=-\int\frac{dt}{t}=-\ln|t|+C=-\ln|\cos x|+C\,.$$

Пример 5 (*второй способ*).

$$\int\operatorname{tg}xdx=\int\frac{\sin xdx}{\cos x}=-\int\frac{d\cos x}{\cos x}=-\ln|\cos x|+C\,.$$

Вывод: в данном случае выгоднее использовать метод подведения под знак дифференциала.

Пример 6.

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x+2}+3}=\left|\begin{array}{l}\sqrt{x+2}=t,\ x+2=t^2,\\ x=t^2-2,\ dx=2tdt\end{array}\right|=\int\frac{2tdt}{t+3}=2\int\frac{tdt}{t+3}=$$

$$=2\int\frac{(t+3)-3}{t+3}dt=2\int dt-6\int\frac{d(t+3)}{t+3}=2t-6\ln|t+3|+C=$$

$$=2\sqrt{x+2}-6\ln\left|\sqrt{x+2}+3\right|+C.$$

6.6. Интегрирование выражений, содержащих квадратный трёхчлен

$$I_1=\int\frac{dx}{ax^2+bx+c};\ I_2=\int\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx;$$

$$I_3=\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}};\ I_4=\int\frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}};\ I_5=\int\sqrt{ax^2+bx+c}.$$

Основная идея – интегралы I_1-I_5 сводят к табличным или к более простым выделением полного квадрата из квадратного трёхчлена:

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a}+\frac{c}{a}\right)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a},$$

и введением замены переменной.

Замечание. Интегралы I_2, I_4 могут вычисляться следующим образом. В числителе выделяют производную знаменателя

$$Ax+B=\frac{A}{2a}(2ax+b)-\frac{Ab}{2a}+B=\frac{A}{2a}(2ax+b)+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right),$$

затем интеграл $I_2=\int\frac{(Ax+B)dx}{ax^2+bx+c}$ разбивают на два интеграла, один из которых вычисляют поднесением под знак дифференциала, а второй – выделением полного квадрата в квадратном трёхчлене.

Первый способ:

$$\int\frac{3x-5}{5-4x-2x^2}dx=\int\frac{(3x-5)dx}{-2\left(\left(x^2+2x+1\right)-1-\frac{5}{2}\right)}=$$

$$=\int\frac{(3x-5)dx}{7-2(x+1)^2}=\begin{vmatrix}x+1=t,\ x=t-1\\ dx=dt\end{vmatrix}=\int\frac{3(t-1)-5}{7-2t^2}dt=3\int\frac{tdt}{7-2t^2}-8\int\frac{dt}{7-2t^2}=$$

$$-\frac{3}{4}\int\frac{d\left(-2t^2+7\right)}{-2t^2+7}+8\cdot\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2-\frac{7}{2}}=-\frac{3}{4}\ln\left|7-2t^2\right|+\frac{4\cdot\sqrt{2}}{2\sqrt{7}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{7/2}}{t+\sqrt{7/2}}\right|+C=$$

$$=-\frac{3}{4}\ln\left|5-4x-2x^2\right|+\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}}\ln\left|\frac{x+1-\sqrt{7/2}}{x+1+\sqrt{7/2}}\right|+C.$$

Второй способ:

$$\int \frac{3x-5}{5-4x-2x^2}dx = \left| \begin{array}{l} \left(5-4x-2x^2\right)' = -4x-4, \\ 3x-5 = -\frac{3}{4}(-4x-4)-3-5 == -\frac{3}{4}(-4x-4)-8 \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{-\frac{3}{4}(-4x-4)-8}{5-4x-2x^2}dx == -\frac{3}{4}\int \frac{(-4x-4)dx}{5-4x-2x^2} - 8\int \frac{dx}{5-4x-2x^2} =$$

$$-\frac{3}{4}\int \frac{d\left(5-4x-2x^2\right)}{5-4x-2x^2} - 8\int \frac{dx}{5-4x-2x^2} = -\frac{3}{4}\int \frac{d\left(5-4x-2x^2\right)}{5-4x-2x^2} - \frac{8}{2}\int \frac{d\left(x+1\right)}{\frac{7}{2}-\left(x+1\right)^2} =$$

$$-\frac{3}{4}\int \frac{d\left(5-4x-2x^2\right)}{5-4x-2x^2} + \frac{8}{2}\int \frac{d\left(x+1\right)}{\left(x+1\right)^2-\frac{7}{2}} =$$

$$= -\frac{3}{4}\ln\left|5-4x-2x^2\right| + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}}\ln\left|\frac{x+1-\sqrt{7/2}}{x+1+\sqrt{7/2}}\right| + C.$$

6.7. Метод интегрирования по частям

ТЕОРЕМА 6.7.1. Если функции $u(x)$ и $v(x)$ определены на некотором промежутке и имеют на этом промежутке непрерывные производные, то имеет место равенство:

$$\int u(x)dv(x) = u(x)\cdot v(x) - \int v(x)du(x) \quad \text{или}$$

$$\int udv = uv - \int vdu \qquad (6.7.1)$$

Доказательство. Запишем тождество $d(uv) = udv + vdu$ и проинтегрируем его. Тогда будем иметь:

$$\int d(uv) = \int udv + \int vdu \Rightarrow uv = \int udv + \int vdu \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int udv = uv - \int vdu \text{, что и требовалось доказать.}$$

Замечание 6.7.1. Формулу (6.7.1) называют ***формулой интегрирования по частям.***

Замечание 6.7.2. Суть метода интегрирования по частям состоит в том, что подынтегральное выражение заданного интеграла представляют в виде произведения двух сомножителей u и dv; затем, после нахождения du и v, используется формула (6.7.1). Иногда для достижения окончательного результата формулу интегрирования по частям приходится применять несколько раз.

Пример 1.

$$\int \operatorname{arctg} x dx = \left| \begin{aligned} & u = \operatorname{arctg} x,\ du = u' dx = \frac{1}{1+x^2} dx, \\ & dv = dx,\ v = x \end{aligned} \right| = \operatorname{arctg} x \cdot x - \int \frac{x}{1+x^2} dx =$$

$$= \operatorname{arctg} x \cdot x - \frac{1}{2} \int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x \cdot x - \frac{1}{2} \ln\left(1+x^2\right) + C.$$

Замечание 6.7.3. Метод применяется в тех случаях, когда подынтегральное выражение представлено произведением различного класса функций.

Замечание 6.7.4. Метод интегрирования по частям применяется в тех случаях, когда подынтегральное выражение можно представить как произведение udv, причем вычисление $\int vdu$ проще, чем вычисление $\int udv$.

Замечание 6.7.5. Полезно помнить, что для $k \in N$

$u = x^k$, *if*	$u \neq x^k$, *if*
$x^k \cos x$,	$x^k \arcsin x$, $x^k \arccos x$,
$x^k \sin x$, $x^k a^x$	$x^k \operatorname{arctg} x$, $x^k \log_a x$

Замечание 6.7.6. Формула интегрирования по частям может быть использована при интегрировании иррациональных выражений.

Замечание 6.7.7. Применять формулу (6.7.1) можно согласно следующему алгоритму:

1) выбрать u и dv;

2) найти $du = u'dx$;

3) найти $v = \int dv$;

4) подставить полученные результаты в формулу (6.7.1).

Пример 2.

$$\int x^3 \sin 3x dx = \left| \begin{aligned} & u = x^3,\ du = 3x^2 dx \\ & dv = \sin 3x dx,\ v = -\frac{1}{3}\cos 3x \end{aligned} \right| = -\frac{1}{3}\cos 3x \cdot x^3 + \frac{1}{3}\int \cos 3x \cdot 3x^2 dx =$$

$$=\left|\begin{matrix}u=x^2,\ du=2xdx\\ dv=\cos 3xdx,\ v=\frac{1}{3}\sin 3x\end{matrix}\right|=-\frac{1}{3}x^3\cdot\cos 3x+\left(\frac{1}{3}x^2\cdot\sin 3x-\frac{2}{3}\int x\sin 3xdx\right)=$$

$$=\left|\begin{matrix}u=x,\ du=dx\\ dv=\sin 3xdx,\ v=-\frac{1}{3}\cos 3x\end{matrix}\right|=-\frac{1}{3}x^3\cdot\cos 3x+\frac{1}{3}x^2\cdot\sin 3x-$$

$$-\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3}x\cos 3x+\frac{1}{3}\int\cos 3xdx\right)=-\frac{1}{3}x^3\cdot\cos 3x+\frac{1}{3}x^2\cdot\sin 3x+$$

$$+\frac{2}{9}x\cos 3x-\frac{2}{27}\cdot\sin 3x+C.$$

Пример 3.

$$\int x\ln xdx=\left|\begin{matrix}u=\ln x,\ du=\frac{1}{x}dx,\\ dv=xdx,\ v=\frac{x^2}{2}\end{matrix}\right|=\frac{x^2}{2}\cdot\ln x-\frac{1}{2}\int x^2\cdot\frac{1}{x}dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{1}{2}\frac{x^2}{2}+C=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}+C.$$

Пример 4.

$$\int\frac{\ln x}{x^3}dx=\left|\begin{matrix}u=\ln x,\ du=\frac{1}{x}dx,\\ dv=x^{-3}dx, v=\frac{x^{-2}}{-2}\end{matrix}\right|=\frac{x^{-2}}{-2}\cdot\ln x+\frac{1}{2}\int x^{-2}\cdot\frac{1}{x}dx=$$

$$=-\frac{x^{-2}}{2}\ln x-\frac{1}{2}\frac{x^{-2}}{2}+C=-\frac{1}{2x^2}\ln x-\frac{1}{4x^2}+C.$$

6.8. Циклическое интегрирование

Рассмотрим интегралы $\left[\int e^{ax}\cos bxdx\right]$, $\left[\int e^{ax}\sin bxdx\right]$, $\left[\int\sqrt{a^2-x^2}dx\right]$, где a и b = const.

Суть метода: применяя формулу интегрирования по частям достаточное число раз (но не менее двух), получают в правой части равенства интеграл, аналогичный интегралу в левой части равенства. Решая полученные уравнения относительно искомого, получают данный интеграл.

Пример 1.

$$J=\int e^{ax}\cos bx dx=\begin{vmatrix} u=e^{ax},\ du=a\cdot e^{ax}dx, \\ dv=\cos bx dx,\ v=\dfrac{1}{b}\sin bx \end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{b}\cdot e^{ax}\sin bx-\frac{a}{b}\int e^{ax}\sin bx dx=\begin{vmatrix} u=e^{ax},\ du=ae^{ax}dx, \\ dv=\sin bx dx,\ v=-\dfrac{1}{b}\cos bx \end{vmatrix}=$$

$$=\frac{e^{ax}\sin bx}{b}-\frac{a}{b}\left(-\frac{1}{b}\cos bx\cdot e^{ax}-\int\left(-\frac{a}{b}\right)e^{ax}\cdot\cos bx dx\right)=$$

$=\dfrac{e^{ax}\sin bx}{b}+\dfrac{a}{b^2}\cos bx\cdot e^{ax}-\dfrac{a^2}{b^2}\int e^{ax}\cos bx dx$, тогда получим уравнение

$$J=\frac{e^{ax}\left(b\sin bx+a\cos bx\right)}{b^2}-\frac{a^2}{b^2}J\Rightarrow\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)J=\frac{e^{ax}\left(b\sin bx+a\cos bx\right)}{b^2}.$$

Выражая из последнего уравнения исходный интеграл, получим

$$\int e^{ax}\cos bx dx=\frac{e^{ax}\left(b\sin bx+a\cos bx\right)}{b^2+a^2}+C.$$

Пример 2.

$$\int\sqrt{a^2-x^2}dx=\int\frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=a^2\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}-\int\frac{x\cdot xdx}{\sqrt{a^2-x^2}}=$$

$$=\begin{vmatrix} u=x, \qquad du=1\cdot dx, \\ dv=\dfrac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}},\ v=-\dfrac{1}{2}\displaystyle\int\frac{d\left(-x^2+a^2\right)}{\sqrt{a^2-x^2}}=-\sqrt{a^2-x^2} \end{vmatrix}=$$

$$=a^2\arcsin\frac{x}{a}-\left(-x\sqrt{a^2-x^2}+\int\sqrt{a^2-x^2}dx\right).$$

В результате получим уравнение относительно заданного интеграла

$$J=a^2\arcsin\frac{x}{a}+x\sqrt{a^2-x^2}-J.$$

Будем иметь $2J=a^2\arcsin\dfrac{x}{a}+x\sqrt{a^2-x^2}$ или

$$J=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C.$$

6.9. Рекуррентная формула для интеграла $J_n = \int \frac{dx}{\left(x^2 + a^2\right)^n}$

Преобразуем рассматриваемый интеграл так, чтобы степень знаменателя уменьшилась хотя бы на единицу:

$$J_n = \int \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^n} = \frac{1}{a^2}\int \frac{x^2+a^2-x^2}{\left(x^2+a^2\right)^n}dx = \frac{1}{a^2}\left[\int \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^{n-1}} - \int \frac{x\cdot xdx}{\left(x^2+a^2\right)^n}\right] =$$

$$= \left| \begin{array}{l} u = x, \qquad du = dx, \\ dv = \dfrac{xdx}{\left(x^2+a^2\right)^n},\ v = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int \frac{d\left(x^2+a^2\right)}{\left(x^2+a^2\right)^n} = \frac{1}{2}\frac{\left(x^2+a^2\right)^{-n+1}}{1-n} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{a^2}\left[J_{n-1} - \frac{x}{2}\cdot\frac{1}{(1-n)\left(x^2+a^2\right)^{n-1}} + \frac{1}{2(1-n)}\int \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^{n-1}}\right] =$$

$$= \frac{1}{a^2}\left[J_{n-1}\left(1 - \frac{1}{2(n-1)}\right) + \frac{x}{2(n-1)\left(x^2+a^2\right)^{n-1}}\right].$$

Окончательно будем иметь

$$J_n = \int \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^n} = \frac{1}{a^2}\left[\frac{2n-3}{2(n-1)}J_{n-1} + \frac{x}{2(n-1)\left(x^2+a^2\right)^{n-1}}\right]$$

Например, применим полученную рекуррентную формулу для вычисления

$$\int \frac{dx}{\left(x^2+7\right)^3} = \frac{1}{7}\left[\frac{3}{4}\int \frac{dx}{\left(x^2+7\right)^2} + \frac{x}{4\left(x^2+7\right)^2}\right] =$$

$$\frac{1}{7}\left[\frac{3}{4}\left[\frac{1}{7}\left(\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+7} + \frac{x}{2\left(x^2+7\right)}\right)\right] + \frac{x}{4\left(x^2+7\right)^2}\right] =$$

$$=\frac{1}{7}\left[\frac{3}{56}\cdot\frac{1}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{7}}+\frac{3x}{56\left(x^2+7\right)}+\frac{x}{4\left(x^2+7\right)^2}\right].$$

Примеры для систематизации, повторения:

Пример 1.

$$\int\sin(3-5x)dx=\frac{1}{5}\cos(3-5x)+C.$$

Пример 2.

$$\int x\cdot e^{-2x}dx=\left|u=x;\,du=dx;\,dv=e^{-2x}dx;\,v=-\frac{1}{2}e^{-2x}\right|=$$

$$=-\frac{1}{2}x\cdot e^{-2x}+\frac{1}{2}\int e^{-2x}dx=-\frac{1}{2}x\cdot e^{-2x}-\frac{1}{4}e^{-2x}+C.$$

Пример 3.

$$\int\cos^2(2+7x)dx=\frac{1}{2}\int\left(1+\cos(4+14x)\right)dx=\frac{1}{2}\left(x+\frac{\sin(4+14x)}{14}\right)+C\,.$$

Пример 4.

$$\int t(3t+7)^{2007}\,dt=\left|3t+7=y,\,t=\frac{y-7}{3},\,dt=\frac{1}{3}dy\right|=$$

$$=\frac{1}{3}\int\left(\frac{y}{3}-\frac{7}{3}\right)y^{2007}dy=\frac{1}{9}\left[\int y^{2008}dy-7\int y^{2007}dy\right]=$$

$$=\frac{1}{9}\cdot\frac{y^{2009}}{2009}-\frac{7}{9}\cdot\frac{y^{2008}}{2008}+C=\frac{1}{9}\cdot\frac{(3t+7)^{2009}}{2009}-\frac{7}{9}\cdot\frac{(3t+7)^{2008}}{2008}+C\,.$$

Пример 5.

$$\int\frac{du}{\sqrt{7+2u^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(\sqrt{2}u+\sqrt{7+2u^2}\right)+C\,.$$

Пример 6.

$$\int\frac{udu}{\sqrt{7+2u^2}}=\frac{1}{2}\sqrt{7+2u^2}+C\,.$$

6.10. Интегрирование правильной рациональной дроби

ТЕОРЕМА 6.10.1 (основная теорема алгебры). Всякий многочлен n-ной степени ($n > 0$) имеет по крайней мере один корень, действительный или комплексный.

ТЕОРЕМА 6.10.2. Всякий многочлен n-ой степени можно представить в виде $P_n(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n)$,
где $x_1, x_2, ..., x_n$ – корни многочлена, a_0 – коэффициент многочлена при старшей степени.

ТЕОРЕМА 6.10.3. Всякий многочлен n-ной степени с действительными коэффициентами можно разложить на линейные и квадратичные множители с действительными коэффициентами:

$$P_n(x) = a_0(x - x_1)^{k_1}(x - x_2)^{k_2}...(x - x_s)^{k_s} \times$$
$$\times\left(x^2 + p_1x + q_1x\right)^{l_1}...\left(x^2 + p_mx + q_mx\right)^{l_m}.$$

При этом $k_1 + k_2 + ... + k_s + 2(l_1 + l_2 + ... + l_m) = n$, а квадратичные трехчлены не имеют действительных корней.

Определение 6.10.1. Рациональной дробью или дробно-рациональной функцией называется функция, равная отношению двух многочленов:

$$f(x) = \frac{Q_r(x)}{P_n(x)}.$$

Определение 6.10.2. Рациональная дробь называется ***правильной,*** если степень числителя меньше степени знаменателя, в противном случае рациональная дробь называется ***неправильной***.

Определение 6.10.3. Правильные рациональные дроби вида

(I) $\dfrac{A}{(x-a)}$;

(II) $\dfrac{A}{(x-a)^k}$, $(k \geq 2, k \in \mathrm{N})$;

(III) $\dfrac{Mx + N}{x^2 + px + q}$, $\left(D = p^2 - 4q < 0\right)$;

(IV) $\dfrac{Mx + N}{\left(x^2 + px + q\right)^k}$, $\left(k \geq 2, D = p^2 - 4q < 0\right)$,

где A, a, M, N, p, q – действительные числа, называются ***простейшими рациональными дробями I, II, III и IV типов.***

ТЕОРЕМА 6.10.4. Пусть дана правильная рациональная дробь $\dfrac{Q_r(x)}{P_n(x)}$, где все коэффициенты – действительные числа, причем числитель и знаменатель не имеют одинаковых множителей.

Пусть знаменатель разложен на множители

$$P_n(x) = a_0(x-x_1)^{k_1}\ldots(x-x_s)^{k_s} \times \left(x^2+p_1x+q_1x\right)\ldots\left(x^2+p_mx+q_mx\right)^{l_m}.$$

Тогда дробь можно представить (единственным образом) в виде суммы простейших рациональных дробей:

$$\frac{Q_r(x)}{P_n(x)} = \frac{A_1}{(x-x_1)}+\ldots+\frac{A_{k_1}}{(x-x_1)^{k_1}}+\ldots+\frac{B_1}{(x-x_s)}+\ldots+\frac{B_{k_s}}{(x-x_s)^{k_s}}+$$

$$+\frac{M_1x+N_1}{\left(x^2+p_1x+q_1\right)}+\ldots+\frac{C_1x+D_1}{\left(x^2+p_mx+q_m\right)}+\ldots+\frac{C_{l_m}x+D_{l_m}}{\left(x^2+p_mx+q_m\right)^{l_m}}, \quad (6.10.1)$$

где $A_1,\ldots,A_{k_1},B_1,\ldots,B_{k_s}, M_1,N_1,\ldots,C_1,D_1,\ldots,C_{l_m},D_{l_m}$ – некоторые действительные коэффициенты.

З а м е ч а н и е 6.10.1. Коэффициенты в формуле (6.10.1) могут быть найдены следующим образом: правую часть разложения нужно привести к общему знаменателю; знаменатели левой и правой частей формулы будут одинаковые, значит, должны быть тождественно равны числители. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x слева и справа, получим столько уравнений, сколько неизвестных коэффициентов. Решив полученную систему, найдем эти коэффициенты.

З а м е ч а н и е 6.10.2. Если в знаменателе имеются действительные различные корни, то можно придать x значения действительных корней в тождестве числителей. Тем самым, также будет получено соответствующее количество уравнений. Для получения необходимой системы уравнений для подстановки в тождество числителей значений x можно использовать и другие числа.

З а м е ч а н и е 6.10.3. Простейшие дроби I, II типов интегрируются подведением под знак дифференциала; интегрирование простейших дробей III и IV было рассмотрено в п. 6.6.

Алгоритм интегрирования рациональных дробей:

1) если дробь неправильная, то, разделив числитель на знаменатель, нужно отделить целую часть и правильную рациональную дробь;

2) в правильной рациональной дроби знаменатель нужно разложить на множители;

3) правильную рациональную дробь представить в виде суммы простейших рациональных дробей;

4) проинтегрировать целый многочлен и сумму простейших рациональных дробей.

Пример 1.

$$\int \frac{x^4+2x^3+x^2+3x+1}{x^3+x}dx=\int (x+2)\,dx+\int \frac{x+1}{x^3+x}dx.$$

$$\frac{x+1}{x\left(x^2+1\right)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1},$$

$$x+1=A\left(x^2+1\right)+x(Bx+C).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, будем иметь

$$x^0\,\big|\,A=1.$$

$$x^2\,\big|\,0=A+B\Rightarrow B=-A,\ B=-1.$$

$$x\,\big|\,C=1.$$

Тогда заданный интеграл приводится к сумме:

$$\frac{x^2}{2}+2x+\int\frac{dx}{x}+\int\frac{-x+1}{x^2+1}dx=\frac{x^2}{2}+2x+\ln|x|-\int\frac{xdx}{x^2+1}+\int\frac{dx}{x^2+1}=$$

$$\frac{x^2}{2}+2x+\ln|x|-\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+1)}{x^2+1}+\operatorname{arctg}x=\frac{x^2}{2}+2x+\ln|x|-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+\operatorname{arctg}x+C.$$

6.11. Интегрирование иррациональных функций

Определение 6.11.1. Функция, содержащая в своем аналитическом выражении радикалы, называется ***иррациональной.***

Замечание 6.11.1. Не от всякой иррациональной функции интегралы выражаются через элементарные функции.

В тоже время интеграл от рациональной функции можно всегда представить в виде суммы элементарных функций.

Рассмотрим те иррациональные функции, для которых интегралы с помощью соответствующих подстановок сводятся к интегралам от рациональных функций.

$$\textbf{1.}\ \int R\left(x, x^{\frac{m_1}{n_1}}, x^{\frac{m_2}{n_2}}, \ldots, x^{\frac{m_k}{n_k}}\right)dx = \left|x = t^p,\ dx = pt^{p-1}dt\right|,$$

где $p = НОК\ (n_1, n_2, \ldots, n_k)$; $R(x)$ – рациональная функция.

Пример 1.

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x}} = \left|x = t^6;\ t = \sqrt[6]{x};\ dx = 6t^5 dt\right| = \int \frac{6t^5 dt}{t^4 - t^3} = 6\int \frac{t^5}{t^3(t-1)}dt =$$

$$= 6\int \frac{t^2}{t-1}dt = 6\int \frac{(t^2-1)+1}{t-1}dt = 6\left(\int (t+1)dt + \int \frac{d(t-1)}{(t-1)}\right) =$$

$$= 6\left(\frac{t^2}{2} + t + \ln|t-1|\right) + C = 6\left(\frac{\sqrt[3]{x}}{2} + \sqrt[6]{x} + \ln\left|\sqrt[6]{x} - 1\right|\right) + C.$$

$$\textbf{2.}\ \int R\left(\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_k}{n_k}}\right)dx =$$

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{ax+b}{cx+d} = t^p,\ ax+b = t^p(cx+d), \quad x\left(a - ct^p\right) = dt^p - b; \\ x = \dfrac{dt^p - b}{a - ct^p};\ \ dx = \left(\dfrac{dt^p - b}{a - ct^p}\right)' dt \end{array}\right| = \int R_1(t)\,dt,$$

где $p = НОК\ (n_1, n_2, \ldots, n_k)$; $R_1(x)$ – рациональная функция.

Пример 2.

$$\int \frac{\sqrt{2x+3} + \sqrt[3]{2x+3}}{\sqrt[4]{2x+3}}dx = \left|2x+3 = t^{12};\ x = \frac{t^{12}-3}{2};\ dx = \frac{1}{2}12t^{11}dt = 6t^{11}dt\right| =$$

$$= \int \frac{t^6 + t^4}{t^3}6t^{11}dt = 6\int t^8\left(t^6 + t^4\right)dt = 6\int\left(t^{14} + t^{12}\right)dt = 6\left(\frac{t^{15}}{15} + \frac{t^{13}}{13}\right) + C =$$

$$= \left|t = \sqrt[12]{2x+3}\right| = \frac{2}{5}\sqrt[12]{(2x+3)^{15}} + \frac{6}{13}\sqrt[12]{(2x+3)^{13}} + C =$$

$$= (2x+3)\left(\frac{2}{5}\sqrt[4]{2x+3} + \frac{6}{13}\sqrt[12]{2x+3}\right) + C.$$

Пример 3.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\left(1-x^2\right)} = \int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \cdot \frac{1}{\left(1-x^2\right)} dx .$$

Введем замену: $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = t, \frac{1+x}{1-x} = t^2, 1+x = t^2 - t^2 x, x\left(1+t^2\right) = t^2 - 1, x = \frac{t^2-1}{t^2+1},$

$$dx = \left(\frac{t^2-1}{t^2+1}\right)' dt = \frac{2t\left(t^2+1\right) - 2t\left(t^2-1\right)}{\left(t^2+1\right)^2} dt = \frac{2 \cdot 2tdt}{\left(t^2+1\right)^2},$$

$$1-x^2 = 1 - \frac{\left(t^2-1\right)^2}{\left(t^2+1\right)^2} = \frac{\left(t^2+1\right)^2 - \left(t^2-1\right)^2}{\left(t^2+1\right)^2} = \frac{2t^2 \cdot 2}{\left(t^2+1\right)^2} dt .$$

Заданный интеграл приводится к табличному:

$$\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \cdot \frac{1}{\left(1-x^2\right)} dx = \int t \cdot \frac{\left(t^2+1\right)^2}{4t^2} \cdot \frac{4t}{\left(t^2+1\right)^2} dt = \int dt = t + C = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + C.$$

6.12. Интегрирование дифференциальных биномов

Определение 6.12.1. Дифференциальным биномом называется выражение $x^m\left(a+bx^n\right)^p$, где m, n, p – рациональные числа; a, b – действительные числа.

ТЕОРЕМА 6.12.1 (*Чебышева*). Интеграл от дифференциального бинома $\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$ выражается через элементарные функции в следующих трёх случаях:

1) p – целое число $\Rightarrow \boxed{a+bx^n = z}$;

2) $\frac{m+1}{n}$ – целое число $\Rightarrow \boxed{a+bx^n = z^q}$, где q – знаменатель p;

3) $\left(\frac{m+1}{n} + p\right)$ – целое число $\Rightarrow \boxed{a+bx^n = z^q \cdot x^n}$, где q – знаменатель p.

Пример. $\int \frac{dx}{x\cdot\sqrt[3]{1+x^5}} = \int x^{-1}\left(1+x^5\right)^{-\frac{1}{3}}dx$

Для подынтегральной функции выполняется условие $\frac{m+1}{n}=0$. В соответствии с Т.6.12.1 введем замену:

$$\left|\begin{array}{l} 1+x^5=t^3,\ x^5=t^3-1, \\ x=\left(t^3-1\right)^{\frac{1}{5}},\ dx=\frac{1}{5}\left(t^3-1\right)^{-\frac{4}{5}}\cdot 3t^2dt \end{array}\right|.$$

Заданный интеграл принимает вид

$$\frac{3}{5}\int t^2\cdot\left(t^3-1\right)^{-\frac{4}{5}}\cdot\left(t^3-1\right)^{-\frac{1}{5}}\cdot t^{-1}dt=\frac{3}{5}\int t\left(t^3-1\right)^{-1}dt=\frac{3}{5}\int\frac{t}{t^3-1}dt=$$

$$=\left|\frac{t}{(t-1)\cdot\left(t^2+t+1\right)}=\frac{A}{t-1}+\frac{Bt+C}{t^2+t+1}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{t-1}-\frac{(t-1)}{t^2+t+1}\right)\right|=$$

$$=\frac{1}{5}\left[\int\frac{d(t-1)}{t-1}-\int\frac{(t-1)}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dt\right]=\left|\begin{array}{l} t+\frac{1}{2}=y,\ y-\frac{1}{2}=t, \\ dt=dy \end{array}\right|=$$

$$\frac{1}{5}\left[\ln|t-1|-\int\frac{y-\frac{3}{2}}{y^2+\frac{3}{4}}dy\right]=$$

$$=\frac{1}{5}\left[\ln|t-1|-\left(\frac{1}{2}\int\frac{d\left(y^2+\frac{3}{4}\right)}{y^2+\frac{3}{4}}-\frac{3}{2}\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2y}{\sqrt{3}}\right)+C\right]=$$

$$=\frac{1}{5}\left[\ln|t-1|-\frac{1}{2}\ln\left(y^2+\frac{3}{4}\right)+\frac{3}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right]+C=$$

$$=\frac{1}{5}\left[\ln\left|\sqrt[3]{1+x^5}-1\right|-\frac{1}{2}\ln\left|\left(\sqrt[3]{1+x^5}\right)^2+\sqrt[3]{1+x^5}+1\right|+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[3]{1+x^5}+1}{\sqrt{3}}\right]+C.$$

6.13. Интегрирование тригонометрических функций

ТЕОРЕМА 6.13.1. Интеграл $\int R(\sin x, \cos x)dx$ всегда может быть представлен в виде элементарных функций с помощью универсальной тригонометрической подстановки, где $R(x)$ – рациональная функция.

$$\boxed{\begin{array}{l} \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}=t,\ \ x=2\operatorname{arc}\operatorname{tg}t, \\ dx=\dfrac{2}{1+t^2}dt \end{array}} \Rightarrow \sin x=\frac{2t}{1+t^2},\ \ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\ \operatorname{tg}x=\frac{2t}{1-t^2}. \qquad (*)$$

Доказательство. Применим подстановку (*), получим

$$\int R(\sin x, \cos x)dx=\int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}=\int R_1(t)dt,$$

где подынтегральная функция представляет собой некоторую рациональную функцию относительно переменной t.

Поскольку рациональная дробь может быть проинтегрирована через рациональные функции, то интеграл от тригонометрической функции в конечном итоге будет выражен через элементарные функции.

Пример 1.

$$\int\frac{dx}{\sin x}=\left|\begin{array}{l} \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}=t,\ x=2\operatorname{arctg}t, \\ dx=\dfrac{2}{1+t^2}dt,\ \sin x=\dfrac{2t}{1+t^2} \end{array}\right|=\int\frac{2\dfrac{dt}{1+t^2}}{\dfrac{2t}{1+t^2}}=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|=\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C.$$

Частные случаи

1. $\int \sin^{2m}x\cos^{2n}xdx,\quad m,\quad n\in N$

$$\left|\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2};\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2};\sin x\cdot\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x\right|$$ **– понижаем степень.**

2.1. $\int R(\sin x, \cos x)dx$.

if $R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$ **– sin *x* в нечетной степени, то подводим под знак дифференциала функцию sin *x*** или вводим замену $\cos x=t$:

$$\left|\begin{array}{c} \sin xdx=-d\cos x,\quad \sin^2 x=1-\cos^2 x \\ \text{или}\quad \cos x=t,\quad dt=-\sin xdx \end{array}\right|$$

2.2. $\int R(\sin x, \cos x)dx$

if $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ **– cos *x* в нечетной степени, то подводим под знак дифференциала функцию cos *x*** или вводим замену $\sin x = t$:

$$\left| \begin{array}{l} \cos x dx = d\sin x, \quad \cos^2 x = 1 - \sin^2 x \\ \text{или} \quad \sin x = t, \quad dt = \cos x dx \end{array} \right|.$$

3. $\int R(\sin x, \cos x)dx$**.**

if $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$ – **функция четна относительно cos *x*, sin *x* одновременно, то** будет эффективной одна из замен:

а) если в знаменателе преобладает степень cos *x*:

$$\left| \begin{array}{l} \operatorname{tg} x = t, \quad x = \operatorname{arctg} t, \quad dx = \dfrac{1}{1+t^2}dt, \\ \sin x = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \cos x = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}; \end{array} \right|;$$

б) если в знаменателе преобладает sin *x*:

$$\left| \begin{array}{l} \operatorname{ctg} x = t, \quad x = \operatorname{arcctg} t, \quad dx = -\dfrac{1}{1+t^2}dt, \\ \sin x = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \cos x = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}. \end{array} \right|.$$

Замечание.

В интегралах вида $\int \frac{dx}{\sin^m x}$, где $m \geq 1$ и нечётные, выгодно использовать универсальную тригонометрическую подстановку $\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t\right|$.

Пример:

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x} = \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = t, x = 2\operatorname{arctg} t, \\ dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}, \sin x = \dfrac{2t}{1+t^2} \end{array} \right| = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{(2t)^3}{\left(1+t^2\right)^3}} = \frac{1}{4}\int \frac{\left(1+t^2\right)^2}{t^3}dt =$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{1+2t^2+t^4}{t^3}dt = \frac{1}{4}\left(\int t^{-3}dt + 2\int \frac{dt}{t} + \int t dt\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{t^{-2}}{-2} + 2\ln|t| + \frac{t^2}{2}\right) + C =$$

$$= -\frac{1}{8}\frac{1}{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} + \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + \frac{1}{8}\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} + C.$$

Если же в знаменателе находится cos x в нечётной степени, то эта подстановка становится не выгодной. В этом случае выгоднее использовать замену $\left|\sin x = t\right|$:

$$\int \frac{dx}{\cos^3 x} = \int \frac{\cos x dx}{\cos^4 x} = \int \frac{d\sin x}{\left(1-\sin^2 x\right)^2} = \left|\sin x = t\right| = \int \frac{dt}{\left(1+t\right)^2\left(1-t\right)^2};$$

$$\frac{dt}{\left(1+t\right)^2\left(1-t\right)^2} = \frac{A}{\left(1+t\right)} + \frac{B}{\left(1+t\right)^2} + \frac{C}{\left(1-t\right)} + \frac{D}{\left(1-t\right)^2}.$$

Сравним с выражением

$$\int \frac{dx}{\cos^3 x} = \left| \begin{matrix} \operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = t, x = 2\operatorname{arctg} t, \\ dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}, \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{matrix} \right| = \int \frac{\dfrac{2dt}{1+t^2}}{\dfrac{\left(1-t^2\right)^3}{\left(1+t^2\right)^3}} = 2\int \frac{\left(1+t^2\right)^2}{\left(1-t^2\right)^3} dt$$

$$\frac{\left(1+t^2\right)^2}{\left(1+t\right)^3\left(1-t\right)^3} = \frac{A}{\left(1+t\right)} + \frac{B}{\left(1+t\right)^2} + \frac{C}{\left(1+t\right)^3} + \frac{D}{\left(1-t\right)} + \frac{E}{\left(1-t\right)^2} + \frac{F}{\left(1-t\right)^3}.$$

4.1. $\int \sin mx \cdot \sin nx dx = \left| \sin mx \cdot \sin nx = \frac{1}{2}\left[\cos\left(m-n\right)x - \cos\left(m+n\right)x\right] \right|$;

4.2. $\int \sin mx \cdot \cos nx dx = \left| \sin mx \cdot \cos nx = \frac{1}{2}\left[\sin\left(m-n\right)x + \sin\left(m+n\right)x\right] \right|$;

4.3. $\int \cos mx \cdot \cos nx dx = \left| \cos mx \cdot \cos nx = \frac{1}{2}\left[\cos\left(m-n\right)x + \cos\left(m+n\right)x\right] \right|$.

Пример 1.

$$\int \frac{dx}{3+\cos x} = \left| \begin{matrix} \operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = t, x = 2\operatorname{arc}\operatorname{tg} t, \\ dx = \dfrac{2}{1+t^2}dt, \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{matrix} \right| = \int \frac{\dfrac{2}{1+t^2}dt}{3+\dfrac{1-t^2}{1+t^2}} =$$

$$= 2\int \frac{dt}{\left(1+t^2\right)\cdot\left(\dfrac{3+3t^2+1-t^2}{1+t^2}\right)} = 2\int \frac{dt}{2t^2+4} = \frac{2}{2}\int \frac{dt}{t^2+2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}} + C = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}{\sqrt{2}} + C.$$

Пример 2.

$$\int\frac{dx}{\sin^2 x-2\sin x\cos x+3\cos^2 x}=\int\frac{\frac{1}{\cos^2 x}dx}{\operatorname{tg}^2 x-2\operatorname{tg}x+3}=\int\frac{d\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}^2 x-2\operatorname{tg}x+3}=$$

$$=\int\frac{dt}{\left(t^2-2t+1\right)+2}=\int\frac{d(t-1)}{(t-1)^2+2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t-1}{\sqrt{2}}+C=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}x-1}{\sqrt{2}}+C$$

Пример 3.

$$\int\frac{\sin^3 xdx}{\cos^4 x}=-\int\frac{\left(1-\cos^2 x\right)d\cos x}{\cos^4 x}=$$

$$=-\int\frac{d\cos x}{\cos^4 x}+\int\frac{\cos^2 xd\cos x}{\cos^4 x}=-\frac{1}{3\cos^3 x}-\frac{1}{\cos x}+C.$$

Пример 4. $$\int\frac{dx}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}=$$

Первый способ:

$$\int\frac{4dx}{\sin^2 2x}=-2\operatorname{ctg}2x+C\,;$$

Второй способ:

ввести замену $\left|\operatorname{tg}x=t\right|$;

Третий способ:

$$-\int\frac{1}{\cos^2 x}d\operatorname{ctg}x=-\int\left(1+\operatorname{ctg}^{-2}x\right)d\operatorname{ctg}x=-\operatorname{ctg}x+\frac{1}{\operatorname{ctg}x}+C=-\operatorname{ctg}x+\operatorname{tg}x+C\,;$$

Четвертый способ:

$$\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}dx=\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{\sin^2 x}\right)dx=\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x+C\,.$$

6.14. Интегрирование выражений, содержащих квадратный трёхчлен, с помощью тригонометрических подстановок

Рассмотрим интеграл

$$\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx\,, \qquad (6.14.1)$$

где $R(x)$ – рациональная функция.

Интеграл (6.14.1)может быть вычислен с помощью следующего алгоритма:

1) *выделить полный квадрат в квадратном трёхчлене:*

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c;$$

2) *ввести замену* $\boxed{x+\dfrac{b}{2a}=t,\quad \dfrac{4ac-b^2}{4a}=m}$;

3) *интеграл (6.14.1) примет вид иррациональной функции от* t:

$$\int R(t,\sqrt{at^2+m})dt. \qquad (6.14.2)$$

Интеграл (6.14.2) можно преобразовать к одному из трёх видов:

$$1.\ \int R(t,\sqrt{k^2-t^2})dt,\quad 2.\ \int R(t,\sqrt{k^2+t^2})dt,\quad 3.\ \int R(t,\sqrt{t^2-k^2})dt.$$

1. $\int R(t,\sqrt{k^2-t^2})dt$ может быть вычислен с помощью одной из подстановок:

$$|t=k\sin y| \text{ или } |t=k\cos y|.$$

2. $\int R(t,\sqrt{k^2+t^2})dt$ может быть вычислен с помощью одной из подстановок:

$$|t=k\operatorname{tg} y| \text{ или } |t=k\operatorname{ch} y|.$$

3. $\int R(t,\sqrt{t^2-k^2})dt$ может быть вычислен с помощью одной из подстановок:

$$\left|t=\frac{k}{\cos y}\right|,\quad \left|t=\frac{k}{\sin y}\right|,\quad |t=k\operatorname{ch} t|.$$

Пример 1.

$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{3-x^2}}=\left|\begin{array}{l}x=\sqrt{3}\sin t,\quad dx=\sqrt{3}\cos t dt,\\ \sqrt{3-x^2}=\sqrt{3-3\sin^2 t}=\sqrt{3}\sqrt{\cos^2 t}=\sqrt{3}\cos t\end{array}\right|=$$

$$=\int\frac{\sqrt{3}\cos t dt}{3\sin^2 t\sqrt{3}\cos t}=\frac{1}{3}\int\frac{dt}{\sin^2 t}=-\frac{1}{3}\operatorname{ctg} t+C=-\frac{1}{3}\frac{\frac{\sqrt{3-x^2}}{\sqrt{3}}}{\frac{x}{\sqrt{3}}}+C=-\frac{1}{3}\frac{\sqrt{3-x^2}}{x}+C.$$

Пример 2. $\int\dfrac{dx}{\sqrt{(x-a)\cdot(b-x)}}$

Введем замену

$$x = a\cos^2 t + b\sin^2 t,\ dx = \left[2a\cos t\cdot(-\sin t) + 2b\sin t\cdot\cos t\right]dt = \sin 2t[b-a]dt.$$

Тогда $\sqrt{(x-a)\cdot(b-x)} = \sqrt{\left(a\cos^2 t + b\sin^2 t - a\right)\cdot\left(b - a\cos^2 t - b\sin^2 t\right)} =$

$$= \sqrt{\left(b\sin^2 t - a\sin^2 t\right)\cdot\left(b\cos^2 t - a\cos^2 t\right)} = \sqrt{(b-a)\sin^2 t\cdot(b-a)\cos^2 t} =$$

$$= (b-a)\frac{1}{2}\sin 2t.$$

С учетом всех полученных преобразований

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(x-a)\cdot(b-x)}} = \int\frac{(b-a)\sin 2t}{(b-a)\frac{1}{2}\sin 2t}dt = 2t + C = ?$$

Упражнение. В полученной первообразной вернуться к старой переменной.

Пример 3. $\int\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} =$

Первый способ:

$$= \left|\begin{array}{l} x = \sin^2 t, \quad dx = 2\sin t\cos t dt = \sin 2t dt, \\ \sqrt{x(1-x)} = \sqrt{\sin^2 t\left(1-\sin^2 t\right)} = \sin t\cdot\cos t = \frac{1}{2}\sin 2t \end{array}\right| =$$

$$= \int\frac{\sin 2t dt}{\frac{1}{2}\sin 2t} = 2t + C = \left|\begin{array}{l} \sin t = \sqrt{x} \\ t = \arcsin\sqrt{x} \end{array}\right| = 2\arcsin\sqrt{x} + C.$$

Второй способ:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x-x^2}} = \int\frac{dx}{\sqrt{-(x^2-x)}} = \int\frac{dx}{\sqrt{-\left(x-1/2\right)^2 + 1/4}} = \int\frac{dx}{\sqrt{1/4 - \left(x-1/2\right)^2}} =$$

$$= \left|x - \frac{1}{2} = t, x = \frac{1}{2} + t, dx = dt\right| = \int\frac{dt}{\sqrt{1/4 - t^2}} = \arcsin 2t + C = \arcsin(2x-1) + C.$$

Пример 4 *(первый способ).*

$$\int\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}dx = \left|\begin{array}{l} x = a\cos 2t, \quad dx = -2a\sin 2t dt, \\ \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} = \sqrt{\frac{a\cdot(1+\cos 2t)}{a\cdot(1-\cos 2t)}} = \sqrt{\frac{2\cos^2 t}{2\sin^2 t}} = \operatorname{ctg} t \end{array}\right| =$$

$$= -2a\int\operatorname{ctg} t\cdot 2\sin t\cdot\cos t dt = -4a\int\cos^2 t dt = -2a\int(1+\cos 2t)dt =$$

$$= -2a\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right) + C = -a\arccos\frac{x}{a} - \sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

Пример 4 *(второй способ).*

$$\int\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}dx = \int\frac{a+x}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = -a\arccos\frac{x}{a} - \sqrt{a^2-x^2} + C.$$

ВЫВОДЫ

Функция $F(x)$ называется ***первообразной*** для функции $f(x)$ на некотором множестве *X*, если для любого $x \in X$ функция $F(x)$ является ***дифференцируемой*** и выполняется равенство

$$F^{/}(x) = f(x) \text{ или } dF(x) = F'(x) \cdot dx.$$

Множество всех первообразных для функции $f(x)$ называется ***неопределённым интегралом.***

Действие нахождения первообразных называется интегрированием. В данном учебном модуле представлены основные методы нахождения первообразной (интегрирования) для заданной функции: непосредственное интегрирование, интегрирование поднесением под знак дифференциала, заменой переменной, интегрирование выражений, содержащих квадратный трехчлен, интегрирование по частям, интегрирование рациональных, иррациональных, тригонометрических функций. Геометрически неопределенный интеграл представляет собой ***семейство кривых,*** каждая из которых получается путем сдвига одной из кривых параллельно самой себе вдоль оси *Oy*.

Интегрирование, как и всякая обратная операция, выполняется сложнее дифференцирования. Здесь нет простых и универсальных путей. Так, из алгебраических свойств здесь имеют место только свойства линейности. Для интегрирования произведений и частных приходится проявлять изобретательность, конструкторские способности, творчество, специальные методы для того, чтобы свести искомый интеграл к табличным. При этом имеется множество функций, для которых невозможно найти первообразную, выраженную в элементарных функциях. Примерами неберущихся интегралов являются:

$$\int\frac{\sin t dt}{t},\quad \int\frac{dx}{\sin\sqrt{x}},\quad \int\frac{\ln t dt}{t},\quad \int e^{-x^2}dx \text{ и др.}$$

ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ

1. Первообразная. Неопределённый интеграл. Основные понятия.
2. Свойства неопределённого интеграла.
3. Таблица неопределенных интегралов.
4. Непосредственное интегрирование.
5. Метод поднесения под знак дифференциала.
6. Метод замены переменной.
7. Интегрирование выражений, содержащих квадратный трёхчлен.
8. Метод интегрирования по частям.
9. Циклическое интегрирование.
10. Рекуррентная формула для интеграла $J_n = \int \frac{dx}{\left(x^2 + a^2\right)^n}$.
11. Интегрирование правильной рациональной дроби.
12. Интегрирование иррациональных функций.
13. Интегрирование дифференциальных биномов.
14. Интегрирование тригонометрических функций.
15. Интегрирование выражений, содержащих квадратный трёхчлен, с помощью тригонометрических подстановок $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})dx$.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ПРОВЕДЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

Учебно-информационный блок для проведения практических занятий

Тема занятия	Тип занятия	Кол-во час
I. Комплексные числа. Основная теорема алгебры. Представление дроби в виде суммы простейших рациональных дробей	Повторение и обобщение имеющихся знаний. Усвоение и закрепление изученного на лекции нового материала	2
II. Таблица интегралов. Непосредственное интегрирование. Метод подведения под знак дифференциала	Углубление и расширение полученных знаний. Усвоение нового материала. Текущий контроль	2
III. Замена переменной. Интегрирование выражений, содержащих квадратный трехчлен в знаменателе	Усвоение и закрепление нового материала. Применение полученных знаний Текущий контроль	2
IV. Интегрирование по частям. Циклическое интегрирование	Усвоение и закрепление нового материала. Применение полученных знаний. Текущий контроль	2
V. Интегрирование простейших рациональных дробей. Интегрирование рациональных функций	Усвоение и закрепление нового материала. Применение полученных знаний. Текущий контроль	2
VI. Интегрирование некоторых иррациональных функций.	Усвоение и закрепление нового материала. Применение полученных знаний. Текущий контроль	2
VII. Интегрирование выражений, содержащих тригонометрические функции	Усвоение и закрепление нового материала. Применение полученных знаний. Текущий контроль	2
VIII. Интегрирование некоторых иррациональных функций с помощью тригонометрических подстановок. Итоговое повторение, вычисление интегралов от различных классов функций	Повторение Углубление и расширение полученных знаний. Обобщение, систематизация и применение полученных знаний. Текущий контроль	2
IX. Контрольная работа по теме «Неопределенный интеграл»	Итоговый контроль	2

Основная и дополнительная литература

1. Гусак, А. А. Справочник по высшей математике / А. А. Гусак, Г. М. Гусак. – Мн. : Навука и тэхника, 1991.

2. Богданова, Е.А. Методические указания к практическим, домашним и индивидуальным занятиям по теме «Комплексные числа» для сту-

дентов всех специальностей / Е.А.. Богданова, Л.А. Данилова. – Новополоцк: НПИ, 1992.

3. Индивидуальные задания по высшей математике / под общей редакцией А.П. Рябушко. – Минск: Выш. шк., 2004.

4. Мышкис, А. Д. Лекции по высшей математике / А. Д. Мышкис. – М.: Наука, 1973.

5. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление / Н.С. Пискунов. В 2 т. Т. 1. – М.: Наука, 1978.

6. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. В 3 ч. Ч. 1 / Д.Т. Письменный. – 2-е изд., испр. – М.: Айрис-пресс, 2002.

7. Сборник задач по математике для втузов. Линейная алгебра и основы математического анализа / под ред. А. В. Ефимова, Б. П. Демидовича. – М.: Наука, 1986.

I. Комплексные числа. Основная теорема алгебры. Представление дроби в виде суммы простейших рациональных дробей

Определение и изображение комплексных чисел

Комплексным числом z называется выражение вида $x + iy$, где x и y – действительные числа, а $i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица; x называется действительной, а y – мнимой частью комплексного числа z и обозначаются соответственно $\operatorname{Re} z = x$ и $\operatorname{Im} z = y$.

Действительные числа – частный случай комплексных чисел при $y = 0$. Комплексное число iy называют чисто мнимым. Первым, кто работал с корнями из отрицательных чисел, был Дж. Кардано, он показал, как они гармонично входят в теорию алгебраических уравнений. Он был одним из тех математиков, которые получили способы решения алгебраических уравнений третьей и четвертой степени.

В 1831 году К. Гаусс ввел название «комплексные числа», дал им геометрическую интерпретацию и, что самое главное, доказал основную теорему алгебры, утверждающую, что каждый многочлен имеет хотя бы один действительный или комплексный корень.

Чисто арифметическая теория комплексных чисел, как пар действительных чисел, была построена У. Гамильтоном (1837). Ему же принадлежит важное пространственное обобщение комплексного числа – кватернионы.

Комплексные числа $z = x + iy$ и $\bar{z} = x - iy$ называют ***комплексно-сопряженными.***

К комплексным числам не применимы понятия «больше» и «меньше». Представление комплексного числа в виде $z = x + iy$ называют ***алгебраической формой комплексного числа.***

Геометрическое изображение комплексных чисел

Комплексное число $z = x + iy$ изображается на плоскости с декартовыми прямоугольными координатами точкой z, имеющей координаты (x, y), как показано на рис. 1. Соответствие между комплексными числами и точками комплексной плоскости взаимно однозначно. Действительные числа изображаются точками оси абсцисс, а мнимые – точками оси ординат, поэтому ось абсцисс называют действительной осью, а ось ординат – мнимой осью. Точки $z = x + iy$ и $\bar{z} = x - iy$, изображающие комплексно-сопряженные числа, симметричны относительно действительной оси Ox, а точки $z = x + iy$ и $z = -x - iy$, изображающие противоположные комплексные числа, симметричны относительно точки O (начала координат).

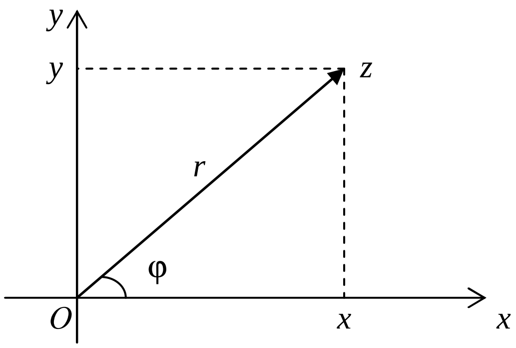


Рис. 1

Иногда комплексное число изображают вектором на комплексной плоскости с началом в точке O и концом в точке z с координатами (x, y).

Модулем комплексного числа $z = x + iy$ называют длину вектора, изображающего данное комплексное число, и обозначают $|z|$ или r:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}\,.$$

Аргументом комплексного числа $z = x + iy$ называют величину угла φ, образованного вектором $\overline{Oz}$ и положительным направлением оси Ox.

Аргумент комплексного числа z обозначают $\operatorname{Arg} z = \varphi$, при $z \neq 0$ аргумент φ имеет бесконечное множество значений, отличающихся друг от друга на число, кратное 2π. Аргумент не определен лишь для числа 0, модуль которого равен нулю. Среди значений аргумента комплексного числа $z \neq 0$ существует одно и только одно значение, заключенное между $-\pi$ и π, включая последнее значение. Его называют главным значением аргумента и обозначают $\arg z$.

Итак $\varphi = \operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi n \;\; (n = 0;\; \pm 1;\; \pm 2...)$, где $-\pi < \arg z \leq \pi$.

Тригонометрическая форма комплексного числа

Пусть задано комплексное число $z = x + iy$. Из определения модуля и аргумента данного числа z имеем $x = r \cdot \cos\varphi$; $y = r \cdot \sin\varphi$;

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad tg\varphi = \frac{y}{x},$$

а, следовательно,

$$z = r \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Представление комплексного числа z в виде $z = r \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)$ называют ***тригонометрической формой*** этого числа.

Операции над комплексными числами, заданными в алгебраической форме

Суммой двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$, заданных в алгебраической форме, называют комплексное число $z_3 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_{2)}$.

С геометрической точки зрения сумма двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ есть вектор $\overline{Oz_3} = \overline{Oz_1} + \overline{Oz_2}$ (рис. 2).

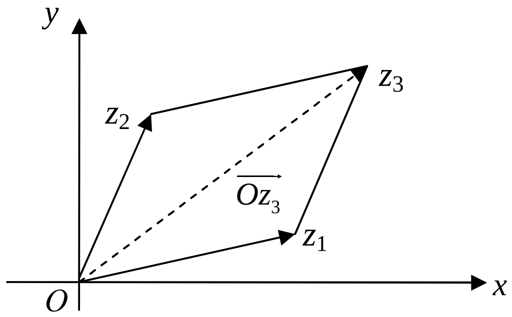


Рис. 2

Произведение двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + y_1 i$ и $z_2 = x_2 + y_2 i$ есть комплексное число z, которое находится по правилу умножения многочленов с учетом условия $i^2 = -1$.

Из определения имеем

$$z = z_1 \cdot z_2 = (x_1 + y_1 i) \cdot (x_2 + y_2 i) = x_1 x_2 + x_1 y_2 i + y_1 x_2 i + y_1 y_2 i^2 =$$

$$= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1) i,$$

т. е. $z = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1) i$.

В частности, если $z = x + iy$, то

$$z\bar{z} = (x + yi)(x - yi) = x^2 - i^2 y^2 = x^2 + y^2$$ – действительное число.

Частным от деления комплексного числа $z_1 = x_1 + y_1 \bar{i}$ на комплексное число $z_2 = x_2 + y_2 i \neq 0$ называется комплексное число $z_3 = x_3 + y_3 i$ такое, что $z_1 = z_2 \cdot z_3$, т. е.

$$x_1 + y_1 i = (x_2 + y_2 i) \cdot (x_3 + y_3 i)$$

или

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}i\,.$$

Правило деления комплексных чисел:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1+y_1i}{x_2+y_2i}=\frac{(x_1+y_1i)\cdot(x_2-y_2i)}{(x_2+y_2i)\cdot(x_2-y_2i)}=\frac{(x_1x_2+y_1y_2)+(x_2y_1-x_1y_2)i}{x_2^2+y_2^2}=$$

$$=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}i.$$

Операции над комплексными числами, заданными в тригонометрической форме

Все алгебраические действия с комплексными числами, заданными в тригонометрической форме, совершаются по тем же правилам, что и с комплексными числами, заданными в алгебраической форме. Складывать и вычитать комплексные числа проще и удобнее, когда они заданы в алгебраической форме, а умножать и делить – в тригонометрической форме.

При умножении любого конечного числа комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются.

Пусть $z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$ и $z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$, тогда

$$z_1\cdot z_2=r_1\cdot r_2(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)=$$

$$=r_1r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1\cos\varphi_2+i^2\sin\varphi_1\sin\varphi_2)=$$

$$=r_1r_2((\cos\varphi_1\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\sin\varphi_2)+i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2+\sin\varphi_2\cos\varphi_1))=$$

$$=r_1r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)).$$

При делении комплексных чисел их модули делятся, а аргументы вычитаются, т. е. $\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2))$.

Возведение в n-ную степень комплексного числа в тригонометрической форме.

Пусть комплексное число $z\neq 0$ представлено в тригонометрической форме $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$.

Тогда для любого $n\in Z$ имеем

$$z^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)\,.$$

Последнюю формулу называют формулой Муавра. В частном случае при $r=1$, из этой формулы получаем

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=\cos n\varphi+i\sin n\varphi\,.$$

Извлечение корня n-ной степени из комплексного числа.

Корнем n-ной степени из комплексного числа z называется комплексное число w, такое что $w^n = z$.

Обозначается корень n-ной степени из комплексного числа z через $\sqrt[n]{z}$. Имеет место формула

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right),$$

где $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Корень n-ной степени из единицы определяется по формуле

$$\sqrt[n]{1} = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}, \quad k = \overline{0,\ n-1}.$$

На комплексной плоскости корни n-ной степени из единицы изображаются точками, расположенными в вершинах правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса $r = 1$ с центром в начале координат.

Одной из таких точек будет точка, изображающая число 1. Остальные точки, соответствующие оставшимся корням n-ной степени из единицы, можно определить, изобразив правильный n-угольник, вписанный в окружность радиуса $r = 1$, и отметив его вершины.

В общем случае, на комплексной плоскости корни n-ной степени из комплексного числа z изображаются точками, расположенными в вершинах правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса $r = \sqrt[n]{|z|}$ с центром в начале координат. Продемонстрируем вышесказанное следующим примером: решим уравнение

$$z^6 + 64 = 0.$$

Решение.

Заданное уравнение преобразуем к следующему виду: $z^6 = -64$. Представим число -64 в тригонометрической форме

$$-64 = 64(\cos\pi + i\sin\pi).$$

Используя формулу $\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)$,

получим

$$z = \sqrt[6]{-64} = \sqrt[6]{64}\left(\cos\frac{\pi + 2k\pi}{6} + \sin\frac{\pi + 2k\pi}{6}\right), k = 0, 1, 2, .., 5.$$

Замечая, что $\sqrt[6]{64}=2$, и придавая k указанные значения, находим шесть корней уравнения:

$$z_0=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}+i,\qquad z_2=2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)=-\sqrt{3}+i,$$

$$z_1=2\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=2i,\qquad z_3=2\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right)=-\sqrt{3}-i,$$

$$z_4=2\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)=-2i,$$

$$z_5=2\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}\right)=\sqrt{3}-i.$$

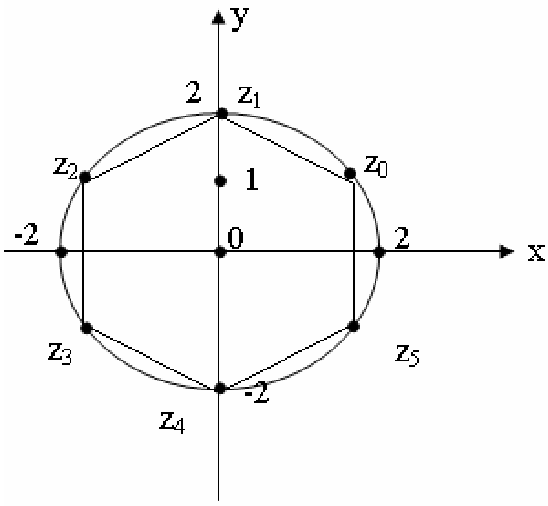


Рис. 3

Эти корни уравнения можно изобразить вершинами правильного шестиугольника, вписанного в окружность радиуса $R=\sqrt[6]{64}=2$, (рис. 3).

Полученные корни можно изобразить и другим способом: изображается число z_0, а затем, разбивая окружность на шесть равных частей, определяются остальные пять корней.

Показательная форма комплексного числа

Для получения комплексного числа в показательной форме воспользуемся формулой Эйлера, устанавливающей связь между показательной и тригонометрической функциями:

$$e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi.$$

Показательной формой комплексного числа $z=x+iy$ называют выражение вида $$z=r\cdot e^{i\varphi},$$
где $r=|z|$, а φ – аргумент комплексного числа z.

Функция $e^{i\varphi}$ обладает свойствами показательной функции с действительным показателем, поэтому формулы умножения, деления, возведения в натуральную степень для комплексных чисел в показательной форме имеют простой вид.

Если $z_1=r_1\cdot e^{i\varphi_1}$, $z_2=r_2\cdot e^{i\varphi_2}$, то $z_1\cdot z_2=r_1\cdot r_2\cdot e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$.

Если $z_2\neq 0$, то $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{r_1\cdot e^{i\varphi_1}}{r_2\cdot e^{i\varphi_2}}=\dfrac{r_1}{r_2}\cdot e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$.

Если $n \in N$, $z = r \cdot e^{i\varphi}$, то $z^n = (r \cdot e^{i\varphi})^n = r^n \cdot e^{in\varphi}$.

и $z_k = \sqrt[n]{r \cdot e^{i\varphi}} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i \cdot \frac{\varphi + 2k\pi}{n}}$, $k = \overline{0,\ n-1}$.

Основные задачи на комплексные числа

Пример 1**.** Найдите сумму, разность, произведение и частное чисел $z_1 = 4 + 5i$ и $z_2 = 2 - 6i$.

Решение.

$$z_1 + z_2 = (4+5i) + (2-6i) = 6 - i; \qquad z_1 - z_2 = (4+5i) - (2-6i) = 2 + 11i;$$

$$z_1 \cdot z_2 = (4+5i)(2-6i) = 38 - 14i;$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{4+5i}{2-6i} = \frac{(4+5i)(2+6i)}{(2-6i)(2+6i)} = -\frac{11}{20} + \frac{17}{20}i.$$

Пример 2**.** Определить действительную и мнимую часть числа:

2.1) $z = -5 + 11i$;

2.2) $z = (7+2i)(1-3i)$;

2.3) $z = \dfrac{1+6i}{3+i}$;

2.4) z^{-1}, если $z = 2 - 7i$.

*Решение***.** 2.1) $\operatorname{Re} z = -5$, $\operatorname{Im} z = 11$;

2.2) так как $z = (7+2i)(1-3i) = 7 - 21i + 2i - 6i^2 =$

$= (7+6) + (2-21)i = 13 - 19i$, то $\operatorname{Re} z = 13$, $\operatorname{Im} z = -19$;

2.3) так как $z = \dfrac{1+6i}{3+i} = \dfrac{(1+6i)(3-i)}{(3+i)(3-i)} = \dfrac{3+17i-6i^2}{9-i^2} =$,

$= \dfrac{9+17i}{10} = \dfrac{9}{10} + \dfrac{17}{10}i$, то $\operatorname{Re} z = \dfrac{9}{10}$, $\operatorname{Im} z = \dfrac{17}{10}$;

2.4) в силу того, что $z^{-1} = \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{2-7i} = \dfrac{(2+7i)}{(2-7i)(2+7i)} =$

$\dfrac{2+7i}{4-49i^2} = \dfrac{2+7i}{53} = \dfrac{2}{53} + \dfrac{7}{53}i$, тогда $\operatorname{Re} z = \dfrac{2}{53}$, $\operatorname{Im} z = \dfrac{7}{53}$.

Пример 3. Вычислить z^2, если $z = -5 + 2i$.

Решение.

$$(-5+2i)^2 = (-5)^2 + 2(-5)\cdot(2i) + (2i)^2 = 25 - 20i + 4i^2 = 21 - 20i.$$

Пример 4. Вычислить $\sqrt{2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i}$.

Решение. Запишем число $2\sqrt{2}+2\sqrt{2}i$ в тригонометрической форме $2\sqrt{2}+2\sqrt{2}i=4(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$.

Отсюда имеем

$$\sqrt{4\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)}=2\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{2}+i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{2}\right), \text{ где } k=0,1.$$

Тогда при $k = 0$ получим $z_0=2\left(\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}\right)$, при $k = 1$ получим $z_1=2\left(\cos\frac{9\pi}{8}+i\sin\frac{9\pi}{8}\right)$.

Пример 5. Вычислить $\sqrt[4]{-16}$.

Решение. Так как $-16=16(\cos\pi+i\sin\pi)$, то

$$\sqrt[4]{-16}=\sqrt[4]{16}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{6}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{6}\right),\ \overline{k=0,3}.$$

Полагая последовательно k = 0, 1, 2, 3 и учитывая, что $\sqrt[4]{16}=2$, получим четыре значения корня 4-й степени из числа – 16, которые располагаются в вершинах квадрата, вписанного в окружность радиуса $R=\sqrt[6]{64}=2$:
$z_0=\sqrt{2}+\sqrt{2}i;\quad z_1=-\sqrt{2}+\sqrt{2}i;\ z_2=-\sqrt{2}-\sqrt{2}i;\ z_3=\sqrt{2}-\sqrt{2}i$.

Пример 6. Решить уравнение:

6.1) $x^2-3x+10=0$;

6.2) $x^3-4x^2+6x-4=0$;

6.3) $x^4-5x^2-6=0$;

6.4) $x^4-37=0$.

Решение. 6.1) Используя формулу решения квадратного уравнения, получим

$$x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{-31}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{31}i}{2}=\frac{3}{2}\pm\frac{\sqrt{31}}{2}i.$$

6.2) Заданное уравнение кубическое, поэтому оно имеет по крайней мере один действительный корень. И в первую очередь рассмотрим делители свободного члена (т. к. целые корни многочлена с целыми коэффициентами являются делителями свободного члена). Среди делителей ± 1, ± 2, ± 4 методом подбора устанавливаем, что число x = 2 – корень данного уравнения. Разделим многочлен $x^3 - 4x^2 + 6x - 4$ на многочлен $(x - 2)$:

$$
\begin{array}{l|l}
\_x^3-4x^2+6x-4 & \underline{\;x-2\;} \\
\;\underline{x^3-2x^2} & x^2-2x+2 \\
\qquad\_-2x^2+6x-4 & \\
\qquad\;\underline{-2x^2+4x} & \\
\qquad\qquad\quad\_2x-4 & \\
\qquad\qquad\quad\;\underline{2x-4} & \\
\qquad\qquad\qquad\quad 0 &
\end{array}
$$

Значит, имеет место равенство:

$$x^3-4x^2+6x-4=(x-2)(x^2-2x+2).$$

Тогда корни исходного уравнения: $x_1=2,\quad x_{2,3}=\dfrac{2\pm 2i}{2}=1\pm i$.

6.3) Заменой $y=x^2$ приводим исходное уравнение к виду $y^2-5y-6=0$. Корнями полученного квадратного уравнения будут $y_1=-1;\quad y_2=6$. Отсюда корнями исходного уравнения будут числа

$$x_1=\sqrt{6};\qquad x_2=-\sqrt{6};\qquad x_3=i;\qquad x_4=-i.$$

6.4) *Первый способ*. Аргумент действительного числа равен нулю, поэтому $\arg 37=0;\quad |37|=37$. Исходное уравнение запишем в виде

$$x^4=37.\qquad \text{Откуда}\quad x_k=\sqrt[4]{37}\cdot e^{\frac{k\pi i}{2}},\quad k=\overline{0,3}.$$

Таким образом, данное уравнение имеет четыре корня:

$$x_0=\sqrt[4]{37};\quad x_1=\sqrt[4]{37}e^{\frac{\pi i}{2}}=\sqrt[4]{37}i;\quad x_2=\sqrt[4]{37}e^{\pi i}=-\sqrt[4]{37}\;;\quad x_3=\sqrt[4]{37}e^{\frac{3\pi i}{2}}=-\sqrt[4]{37}i.$$

Второй способ. Левую часть заданного уравнения разложим на множители: $\left(x^2-\sqrt[4]{37}\right)\left(x^2+\sqrt[4]{37}\right)=0$.

Отсюда получим два квадратичных уравнения:

$$\left(x^2-\sqrt[4]{37}\right)=0,\quad \left(x^2+\sqrt[4]{37}\right)=0.$$

Из первого уравнения будем иметь $x_0=\sqrt[4]{37};\;\; x_1=-\sqrt[4]{37}$, а из второго будем иметь $x_2=\sqrt[4]{37}i;\quad x_3=-\sqrt[4]{37}i.$

Замечание. В общем случае решение алгебраического уравнения степени $n>2$ с комплексными коэффициентами

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0=0,\quad a_n\neq 0,\;\; n\in N$$

является очень сложной задачей. Но вопрос о существовании корней этого уравнения решает ***основная теорема алгебры***.

ТЕОРЕМА. Каждое алгебраическое уравнение в множестве комплексных чисел имеет хотя бы один корень.

Опираясь на данную теорему, доказано, что левую часть уравнения $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0, \quad a_n \neq 0, \ n \in N$ можно представить в виде произведения $a_n (x - x_1)^{m_1} (x - x_2)^{m_2} ...(x - x_k)^{m_k}$,

где $x_1, x_2, \ldots, x_k,$ – корни уравнения; $m_1, m_2, \ldots, m_k \in N$ и $m_1 + m_2 + \ldots + m_k = n$.

В этом случае говорят, что число x_1 является корнем кратности m_1, x_2 – корнем кратности m_2 и т. д. Тогда имеет место следующая теорема (корень уравнения будем считать столько раз, какова его кратность):

ТЕОРЕМА. Каждое алгебраическое уравнение степени n имеет в множестве комплексных чисел ровно n корней.

Напомним, что функция называется ***рациональной***, если она не содержит действия извлечения корня (возведения в дробную степень). Такую функцию принято обозначать $R(x)$ – символ рациональной зависимости. Различают ***целую рациональную*** функцию – многочлен и ***дробно-рациональную*** функцию – отношение двух многочленов, т. е.

$$R(x) = \frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = \frac{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_m}{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n}.$$

Если $m < n$, то дробь называется ***правильной***, в противном случае – ***неправильной***. Неправильную дробь всегда можно представить в виде суммы целой части (многочлена) и правильной дроби. Это можно сделать посредством деления числителя на знаменатель столбиком.

Пример 1. Неправильную дробь $\dfrac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 3}$ (в числителе многочлен третьей степени, в знаменателе – второй) представить в виде суммы целой части и правильной дроби.

$$\begin{array}{l|l}
_x^3 + 2x^2 & \underline{x^2 - 3} \\
\underline{\ x^3 - 3x} & \ x + 2 \\
\quad _2x^2 + 3x & \\
\quad \ \underline{2x^2 - 6} & \\
\qquad \quad 3x + 6 &
\end{array}$$

В результате получим $\dfrac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 3} = x + 2 + \dfrac{3x + 6}{x^2 - 3}$.

Здесь целая часть – $(x + 2)$, правильная дробь – $\dfrac{3x+6}{x^2-3}$.

Существует общий метод разложения правильной рациональной дроби на сумму простейших дробей.

К ним относятся правильные рациональные дроби вида:

(I) $\dfrac{A}{(x-a)}$;

(II) $\dfrac{A}{(x-a)^k}$, $(k \geq 2,\ k \in \mathrm{N})$;

(III) $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$, $\left(D = p^2 - 4q < 0 \right)$;

(IV) $\dfrac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^k}$, $\left(k \geq 2,\ \ D = p^2 - 4q < 0\right)$,

где A, a, M, N, p, q – действительные числа.

Каждая правильная дробь может быть представлена в виде суммы простейших дробей указанных четырех типов. Для разложения правильной рациональной дроби $\dfrac{Q(x)}{P(x)}$ на простейшие дроби, нужно:

а) разложить знаменатель $P(x)$ на линейные и квадратичные множители:

$$P(x) = (x-a)^m \cdot \ldots \cdot (x-b)^k \cdot \left(x^2+px+g\right)^n \cdot \ldots \cdot \left(x^2+cx+d\right)^r;$$

б) написать схему разложения данной дроби на простейшие дроби в следующем виде:

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_m}{(x-a)^m} + \ldots + \frac{B_1}{x-b} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \ldots + \frac{B_k}{(x-b)^k} +$$

$$+ \frac{M_1x+N_1}{x^2+px+g} + \frac{M_2x+N_2}{\left(x^2+px+g\right)^2} + \ldots + \frac{M_nx+N_n}{\left(x^2+px+g\right)^n} + \ldots +$$

$$+ \frac{C_1x+D_1}{x^2+cx+d} + \frac{C_2x+D_2}{\left(x^2+cx+d\right)^2} + \ldots + \frac{C_rx+D_r}{\left(x^2+cx+d\right)^r},$$

где $A_1, \ldots, B_1, \ldots, M_1, \ldots, N_1, \ldots, C_1, \ldots, D_1, \ldots, D_r$ – некоторые неизвестные коэффициенты.

В эту схему для каждого множителя в разложении знаменателя $P(x)$ вписывается столько простейших дробей, какова его кратность (m, k, n, r).

Знаменателями простейших дробей являются все целые степени каждого множителя в разложении $P(x)$, начиная с первой степени и кончая той степенью, которую множитель имеет в разложении $P(x)$.

Числителями простейших дробей служат либо постоянные $A_1, A_2, \ldots$ либо линейные функции $M_1x + N_1, \ldots$ смотря по тому, является ли знаменатель дроби некоторой степенью линейной или квадратичной функции;

в) правую часть разложения нужно привести к общему знаменателю и выполнить действие сложения;

г) знаменатели левой и правой частей равенства равны, значит, должны быть тождественно равными и их числители;

д) коэффициенты $A_1, A_2, \ldots, B_1, B_2, \ldots$ находятся с помощью метода неопределенных коэффициентов или метода частных значений (иногда комбинируют оба метода).

1. Провести краткий теоретический обзор по теме « Комплексные числа». Выделить три формы комплексного числа, обратить внимание на геометрическую интерпретацию комплексного числа. Решить следующий пример (преподаватель у доски):

Даны числа $z_1 = 5 - 7i, \quad z_2 = \dfrac{5}{2-2i}$.

1) Записать числа в тригонометрической и показательной формах, изобразить их на плоскости.

2) Вычислить: а) $4z_1 - 7z_2$; б) $z_1 \cdot z_2$; в) $\dfrac{z_1}{z_2}$; г) z_1^{-1}; д) $\sqrt[3]{z_2}$.

2. Студент у доски решает уравнения: а) $z^4 = 47$; б) $\sqrt[3]{1-i}$.

3. Преподаватель у доски показывает разложение рациональной дроби $\dfrac{7x^3 + 3x + 3}{x^3 - 3x^2 - 18x}$ на простейшие рациональные дроби.

4. Студент у доски раскладывает на простейшие рациональную дробь: $\dfrac{3x+5}{\left(x^2+2x+7\right)\left(x^2-2x+1\right)}$.

Домашнее задание

1. Подготовить теоретический материал по теме «Таблица интегралов. Непосредственное интегрирование. Метод подведения под знак дифференциала».

2. Выполнить свой вариант из индивидуального домашнего задания.

Индивидуальные домашние задания

Вариант 1

1. Решить уравнение $2x^2-5x+4=0$.

2. Записать числа $z_1=5-7i,\quad z_2=\dfrac{-2\sqrt{2}}{1-i}$ в тригонометрической и показательной формах, изобразить их на плоскости.

Вычислить: а) $5z_1-3z_2$; б) $z_1\cdot z_2$; в) $\dfrac{z_1}{z_2}$; г) z_1^{-1}; д) $\sqrt[3]{z_2}$.

3. Решить уравнение: $z^4=26$.

4. Представить рациональную дробь в виде суммы простейших рациональных дробей:

а) $\dfrac{2x+7}{\left(3x^2+2\right)\left(x-5\right)}$; б) $\dfrac{5x^3-4x+3}{x^3-4x^2+3x}$.

Вариант 2

1. Решить уравнение $3x^2-4x+7=0$.

2. Записать числа $z_1=5-7i,\quad z_2=\dfrac{2\sqrt{2}}{1-i}$ в тригонометрической и показательной формах, изобразить их на плоскости.

Вычислить: а) $5z_1-3z_2$; б) $z_1\cdot z_2$; в) $\dfrac{z_1}{z_2}$; г) z_1^{-1}; д) $\sqrt[3]{z_2}$.

3. Решить уравнение $z^4=21$.

4. Представить рациональную дробь в виде суммы простейших рациональных дробей:

а) $\dfrac{2x+3}{\left(x^2+7\right)\left(x-4\right)}$; б) $\dfrac{7x^3-5x+6}{x^3-5x^2+6x}$.

Вариант 3

1. Решить уравнение $3x^2-5x+9=0$.

2. Записать числа $z_1=3-4i,\quad z_2=\dfrac{4}{1-\sqrt{2}i}$ в тригонометрической и показательной формах, изобразить их на плоскости.

Вычислить: а) $5z_1-3z_2$; б) $z_1\cdot z_2$; в) $\dfrac{z_1}{z_2}$; г) z_1^{-1}; д) $\sqrt[3]{z_2}$.

3. Решить уравнение $z^4=16$.

4. Представить рациональную дробь в виде суммы простейших рациональных дробей:

а) $\dfrac{2x+3}{\left(3x^2+1\right)\left(x-9\right)}$; б) $\dfrac{4x^3-3x-4}{x^3-3x^2-4x}$.

Вариант 4

1. Решить уравнение $3x^2-5x+7=0$.

2. Записать числа $z_1=4-5i,\quad z_2=\dfrac{-4}{\sqrt{3}-i}$ в тригонометрической и показательной формах, изобразить их на плоскости.

Вычислить: а) $5z_1-3z_2$; б) $z_1\cdot z_2$; в) $\dfrac{z_1}{z_2}$; г) z_1^{-1}; д) $\sqrt[3]{z_2}$.

3. Решить уравнение $z^4=9$.

4. Представить рациональную дробь в виде суммы простейших рациональных дробей:

а) $\dfrac{5x+8}{\left(3x^2+2\right)\left(x-5\right)}$; б) $\dfrac{3x^3-5x-6}{x^3-5x^2-6x}$.

Вариант 6

1. Решить уравнение $4x^2-5x+7=0$.

2. Записать числа $z_1=3-4i,\quad z_2=\dfrac{-1}{\sqrt{3}-i}$ в тригонометрической и показательной формах, изобразить их на плоскости.

Вычислить: а) $5z_1-3z_2$; б) $z_1\cdot z_2$; в) $\dfrac{z_1}{z_2}$; г) z_1^{-1}; д) $\sqrt[3]{z_2}$.

3. Решить уравнение $z^4=30$.

4. Представить рациональную дробь в виде суммы простейших рациональных дробей:

а) $\dfrac{3x+7}{\left(x^2+2\right)\left(x-3\right)}$; б) $\dfrac{2x^3-4x+3}{x^3+4x^2+3x}$.

Вариант 7

1. Решить уравнение $4x^2-5x+7=0$.

2. Записать числа $z_1=4-5i,\quad z_2=\dfrac{-2\sqrt{2}}{1-i}$ в тригонометрической и показательной формах, изобразить их на плоскости.

Вычислить: а) $5z_1 - 3z_2$; б) $z_1 \cdot z_2$; в) $\frac{z_1}{z_2}$; г) z_1^{-1}; д) $\sqrt[3]{z_2}$.

3. Решить уравнение $z^4 = 22$.

4. Представить рациональную дробь в виде суммы простейших рациональных дробей:

а) $\frac{3x+1}{\left(7x^2+2\right)\left(x-3\right)}$;   б) $\frac{3x^3-7x+12}{x^3-7x^2+12x}$.

Вариант 8

1. Решить уравнение $3x^2 - 5x + 9 = 0$.

2. Записать числа $z_1 = 3 - 5i$, $z_2 = \frac{4}{\sqrt{3}i - 1}$ в тригонометрической и показательной формах, изобразить их на плоскости.

Вычислить: а) $5z_1 - 3z_2$; б) $z_1 \cdot z_2$; в) $\frac{z_1}{z_2}$; г) z_1^{-1}; д) $\sqrt[3]{z_2}$.

3. Решить уравнение $z^4 = 28$.

4. Представить рациональную дробь в виде суммы простейших рациональных дробей:

а) $\frac{7x+2}{\left(3x^2+4\right)\left(x-2\right)}$;   б) $\frac{5x^3-8x+7}{x^3-8x^2+7x}$.

Вариант 9

1. Решить уравнение $2x^2 - 7x + 9 = 0$.

2. Записать числа $z_1 = 9 - 4i$, $z_2 = \frac{4}{i\sqrt{3} + 1}$ в тригонометрической и показательной формах, изобразить их на плоскости.

Вычислить: а) $5z_1 - 3z_2$; б) $z_1 \cdot z_2$; в) $\frac{z_1}{z_2}$; г) z_1^{-1}; д) $\sqrt[3]{z_2}$.

3. Решить уравнение $z^4 = 25$.

4. Представить рациональную дробь в виде суммы простейших рациональных дробей:

а) $\frac{3x+7}{\left(4x^2+1\right)\left(x-5\right)}$;   б) $\frac{5x^3-10x+9}{x^3-10x^2+9x}$.

Вариант 10

1. Решить уравнение $3x^2 - 5x + 7 = 0$.

2. Записать числа $z_1 = 4 - 5i$, $z_2 = \dfrac{-4}{\sqrt{3} + i}$ в тригонометрической и показательной формах, изобразить их на плоскости.

Вычислить: а) $5z_1 - 3z_2$; б) $z_1 \cdot z_2$; в) $\dfrac{z_1}{z_2}$; г) z_1^{-1}; д) $\sqrt[3]{z_2}$.

3. Решить уравнение $z^4 = 27$.

4. Представить рациональную дробь в виде суммы простейших рациональных дробей:

а) $\dfrac{2x+5}{(3x^2+4)(x-8)}$; б) $\dfrac{5x^3 - 6x + 8}{x^3 - 6x^2 + 8x}$.

Вариант 11

1. Решить уравнение $2x^2 - 5x + 5 = 0$.

2. Записать числа $z_1 = 3 - 7i$, $z_2 = \dfrac{4}{\sqrt{3} + i}$ в тригонометрической и показательной формах, изобразить их на плоскости.

Вычислить: а) $5z_1 - 3z_2$; б) $z_1 \cdot z_2$; в) $\dfrac{z_1}{z_2}$; г) z_1^{-1}; д) $\sqrt[3]{z_2}$.

3. Решить уравнение $z^4 = 24$.

4. Представить рациональную дробь в виде суммы простейших рациональных дробей:

а) $\dfrac{4x+5}{(5x^2+2)(x+5)}$; б) $\dfrac{5x^3 + 9x + 8}{x^3 + 9x^2 + 8x}$.

Вариант 12

1. Решить уравнение $3x^2 - 5x + 7 = 0$.

2. Записать числа $z_1 = 4 + 7i$, $z_2 = \dfrac{-1}{\sqrt{3} - i}$ в тригонометрической и показательной формах, изобразить их на плоскости.

Вычислить: а) $5z_1 - 3z_2$; б) $z_1 \cdot z_2$; в) $\dfrac{z_1}{z_2}$; г) z_1^{-1}; д) $\sqrt[3]{z_2}$.

3. Решить уравнение $z^4 = 31$.

4. Представить рациональную дробь в виде суммы простейших рациональных дробей:

а) $\dfrac{3x-2}{\left(5x^2+1\right)\left(x-4\right)}$; б) $\dfrac{7x^3-5x+4}{x^3-5x^2+4x}$.

Вариант 13

1. Решить уравнение $6x^2-5x+4=0$.

2. Записать числа $z_1=3-7i,\quad z_2=\dfrac{2\sqrt{2}}{1+i}$ в тригонометрической и показательной формах, изобразить их на плоскости.

Вычислить: а) $5z_1-3z_2$; б) $z_1\cdot z_2$; в) $\dfrac{z_1}{z_2}$; г) z_1^{-1}; д) $\sqrt[3]{z_2}$.

3. Решить уравнение $z^4=7$.

4. Представить рациональную дробь в виде суммы простейших рациональных дробей:

а) $\dfrac{2x+3}{\left(4x^2+3\right)\left(x+5\right)}$; б) $\dfrac{5x^3+7x+12}{x^3+7x^2+12x}$.

Вариант 14

1. Решить уравнение $8x^2-x+4=0$.

2. Записать числа $z_1=6+8i,\quad z_2=\dfrac{1}{\sqrt{3}+i}$ в тригонометрической и показательной формах, изобразить их на плоскости.

Вычислить: а) $5z_1-3z_2$; б) $z_1\cdot z_2$; в) $\dfrac{z_1}{z_2}$; г) z_1^{-1}; д) $\sqrt[3]{z_2}$.

3. Решить уравнение $z^4=21$.

4. Представить рациональную дробь в виде суммы простейших рациональных дробей:

а) $\dfrac{2x-1}{\left(5x^2+8\right)\left(x-5\right)}$; б) $\dfrac{5x^3-8x+15}{x^3-8x^2+15x}$.

Вариант 15

1. Решить уравнение $3x^2-4x+9=0$.

2. Записать числа $z_1=2+7i,\quad z_2=\dfrac{2\sqrt{2}}{1+i}$ в тригонометрической и показательной формах, изобразить их на плоскости.

Вычислить: а) $5z_1 - 3z_2$; б) $z_1 \cdot z_2$; в) $\frac{z_1}{z_2}$; г) z_1^{-1}; д) $\sqrt[3]{z_2}$.

3. Решить уравнение $z^4 = 19$.

4. Представить рациональную дробь в виде суммы простейших рациональных дробей:

а) $\frac{5x-2}{\left(4x^2+9\right)(x-1)}$; б) $\frac{5x^3-2x-3}{x^3-2x^2-3x}$.

Вариант 16

1. Решить уравнение: $8x^2 - 2x + 7 = 0$.

2. Записать числа $z_1 = 7 - 9i$, $z_2 = \frac{4}{1-\sqrt{3}i}$ в тригонометрической и показательной формах, изобразить их на плоскости.

Вычислить: а) $5z_1 - 3z_2$; б) $z_1 \cdot z_2$; в) $\frac{z_1}{z_2}$; г) z_1^{-1}; д) $\sqrt[3]{z_2}$.

3. Решить уравнение $z^4 = 29$.

4. Представить рациональную дробь в виде суммы простейших рациональных дробей:

а) $\frac{5x+7}{\left(6x^2+7\right)(x+3)}$; б) $\frac{8x^3+5x+6}{x^3+5x^2+6x}$.

Вариант 17

1. Решить уравнение $6x^2 - x + 4 = 0$.

2. Записать числа $z_1 = 2 + 5i$, $z_2 = \frac{1}{\sqrt{3}-i}$ в тригонометрической и показательной формах, изобразить их на плоскости.

Вычислить: а) $5z_1 - 3z_2$; б) $z_1 \cdot z_2$; в) $\frac{z_1}{z_2}$; г) z_1^{-1}; д) $\sqrt[3]{z_2}$.

3. Решить уравнение $z^4 = 17$.

4. Представить рациональную дробь в виде суммы простейших рациональных дробей:

а) $\frac{8x+7}{\left(3x^2+1\right)(x-9)}$; б) $\frac{5x^3-9x+8}{x^3-9x^2+8x}$.

Вариант 18

1. Решить уравнение $4x^2 - 3x + 5 = 0$.

2. Записать числа $z_1 = 3 + 8i$, $z_2 = \dfrac{-4}{1+\sqrt{2}i}$ в тригонометрической и показательной формах, изобразить их на плоскости.

Вычислить: а) $5z_1 - 3z_2$; б) $z_1 \cdot z_2$; в) $\dfrac{z_1}{z_2}$; г) z_1^{-1}; д) $\sqrt[3]{z_2}$.

3. Решить уравнение $z^4 = 28$.

4. Представить рациональную дробь в виде суммы простейших рациональных дробей:

а) $\dfrac{3x+2}{\left(5x^2+8\right)(x-1)}$; б) $\dfrac{9x^3-4x+3}{x^3-4x^2+3x}$.

Вариант 19

1. Решить уравнение $5x^2 - 2x + 3 = 0$.

2. Записать числа $z_1 = 7 - 4i$, $z_2 = \dfrac{4}{\sqrt{3}-i}$ в тригонометрической и показательной формах, изобразить их на плоскости.

Вычислить: а) $5z_1 - 3z_2$; б) $z_1 \cdot z_2$; в) $\dfrac{z_1}{z_2}$; г) z_1^{-1}; д) $\sqrt[3]{z_2}$.

3. Решить уравнение $z^4 = 7$.

4. Представить рациональную дробь в виде суммы простейших рациональных дробей:

а) $\dfrac{4x+7}{\left(2x^2+1\right)(x-7)}$; б) $\dfrac{6x^3-7x+6}{x^3-7x^2+6x}$.

Вариант 20

1. Решить уравнение $8x^2 - x + 4 = 0$.

2. Записать числа $z_1 = 3 + 4i$, $z_2 = \dfrac{4}{1-\sqrt{3}i}$ в тригонометрической и показательной формах, изобразить их на плоскости.

Вычислить: а) $5z_1 - 3z_2$; б) $z_1 \cdot z_2$; в) $\dfrac{z_1}{z_2}$; г) z_1^{-1}; д) $\sqrt[3]{z_2}$.

3. Решить уравнение $z^4 = 15$.

4. Представить рациональную дробь в виде суммы простейших рациональных дробей:

а) $\dfrac{3x-7}{\left(x^2+2\right)(x+5)}$; б) $\dfrac{5x^3-9x+14}{x^3-9x^2+14x}$.

Вариант 21

1. Решить уравнение $7x^2 - x + 4 = 0$.

2. Записать числа $z_1 = 7 - 5i$, $z_2 = \dfrac{4}{\sqrt{3} - i}$ в тригонометрической и показательной формах, изобразить их на плоскости.

Вычислить: а) $5z_1 - 3z_2$; б) $z_1 \cdot z_2$; в) $\dfrac{z_1}{z_2}$; г) z_1^{-1}; д) $\sqrt[3]{z_2}$.

3. Решить уравнение $z^4 = 11$.

4. Представить рациональную дробь в виде суммы простейших рациональных дробей:

а) $\dfrac{8x - 7}{\left(3x^2 - 5\right)(x + 9)}$; б) $\dfrac{2x^3 - 9x + 14}{x^3 - 9x^2 + 14x}$

Вариант 22

1. Решить уравнение $6x^2 - 5x + 4 = 0$.

2. Записать числа $z_1 = 3 + 8i$, $z_2 = \dfrac{1}{\sqrt{3} + i}$ в тригонометрической и показательной формах, изобразить их на плоскости.

Вычислить: а) $5z_1 - 3z_2$; б) $z_1 \cdot z_2$; в) $\dfrac{z_1}{z_2}$; г) z_1^{-1}; д) $\sqrt[3]{z_2}$.

3. Решить уравнение $z^4 = 17$.

4. Представить рациональную дробь в виде суммы простейших рациональных дробей:

а) $\dfrac{5x + 1}{\left(4x^2 + 1\right)(x + 3)}$; б) $\dfrac{2x^3 - 8x + 15}{x^3 - 8x^2 + 15x}$.

Вариант 22

1. Решить уравнение $8x^2 - x + 4 = 0$.

2. Записать числа $z_1 = 9 - 7i$, $z_2 = \dfrac{1}{\sqrt{3} - i}$ в тригонометрической и показательной формах, изобразить их на плоскости.

Вычислить: а) $5z_1 - 3z_2$; б) $z_1 \cdot z_2$; в) $\dfrac{z_1}{z_2}$; г) z_1^{-1}; д) $\sqrt[3]{z_2}$.

3. Решить уравнение $z^4 = 7$.

4. Представить рациональную дробь в виде суммы простейших рациональных дробей:

а) $\dfrac{8x+7}{\left(3x^2+1\right)\left(x+8\right)}$; б) $\dfrac{4x^3-7x+10}{x^3-7x^2+10x}$.

Вариант 23

1. Решить уравнение $9x^2-x+5=0$.

2. Записать числа $z_1=3-15i,\quad z_2=\dfrac{-2\sqrt{2}}{1-i}$ в тригонометрической и показательной формах, изобразить их на плоскости.

Вычислить: а) $5z_1-3z_2$; б) $z_1\cdot z_2$; в) $\dfrac{z_1}{z_2}$; г) z_1^{-1}; д) $\sqrt[3]{z_2}$.

3. Решить уравнение $z^4=19$.

4. Представить рациональную дробь в виде суммы простейших рациональных дробей:

а) $\dfrac{3x+7}{\left(7x^2+1\right)\left(x+2\right)}$; б) $\dfrac{3x^3-9x+8}{x^3-9x^2+8x}$.

Вариант 24

1. Решить уравнение $7x^2-3x+4=0$.

2. Записать числа $z_1=2+7i,\quad z_2=\dfrac{-2\sqrt{2}}{1+i}$ в тригонометрической и показательной формах, изобразить их на плоскости.

Вычислить: а) $5z_1-3z_2$; б) $z_1\cdot z_2$; в) $\dfrac{z_1}{z_2}$; г) z_1^{-1}; д) $\sqrt[3]{z_2}$.

3. Решить уравнение $z^4=20$.

4. Представить рациональную дробь в виде суммы простейших рациональных дробей:

а) $\dfrac{8x+7}{\left(7x^2+1\right)\left(x-9\right)}$; б) $\dfrac{5x^3+7x+6}{x^3-7x^2+6x}$.

Вариант 25

1. Решить уравнение $5x^2-x+4=0$.

2. Записать числа $z_1=4+7i,\quad z_2=\dfrac{2\sqrt{2}}{1+i}$ в тригонометрической и показательной формах, изобразить их на плоскости.

Вычислить: а) $5z_1 - 3z_2$; б) $z_1 \cdot z_2$; в) $\dfrac{z_1}{z_2}$; г) z_1^{-1}; д) $\sqrt[3]{z_2}$.

3. Решить уравнение $z^4 = 22$.

4. Представить рациональную дробь в виде суммы простейших рациональных дробей:

а) $\dfrac{3x+1}{\left(4x^2+1\right)(x-9)}$; б) $\dfrac{5x^3-9x+8}{x^3+9x^2+8x}$.

Вариант 26

1. Решить уравнение $7x^2 - 3x + 1 = 0$.

2. Записать числа $z_1 = 4 + 5i$, $z_2 = \dfrac{2}{\sqrt{3} - i}$ в тригонометрической и показательной формах, изобразить их на плоскости.

Вычислить: а) $5z_1 - 3z_2$; б) $z_1 \cdot z_2$; в) $\dfrac{z_1}{z_2}$; г) z_1^{-1}; д) $\sqrt[3]{z_2}$.

3. Решить уравнение $z^4 = 37$.

4. Представить рациональную дробь в виде суммы простейших рациональных дробей:

а) $\dfrac{5x+7}{\left(6x^2+1\right)(x+1)}$; б) $\dfrac{5x^3-7x+6}{x^3-9x^2+8x}$.

Вариант 27

1. Решить уравнение $6x^2 - 7x + 4 = 0$.

2. Записать числа $z_1 = -2 + 5i$, $z_2 = \dfrac{3}{\sqrt{3} - i}$ в тригонометрической и показательной формах, изобразить их на плоскости.

Вычислить: а) $5z_1 - 3z_2$; б) $z_1 \cdot z_2$; в) $\dfrac{z_1}{z_2}$; г) z_1^{-1}; д) $\sqrt[3]{z_2}$.

3. Решить уравнение $z^4 = 31$.

4. Представить рациональную дробь в виде суммы простейших рациональных дробей:

а) $\dfrac{8x+7}{\left(3x^2+5\right)(x-1)}$; б) $\dfrac{5x^3-3x+2}{x^3-9x^2+8x}$.

Вариант 28

1. Решить уравнение $6x^2 - x + 2 = 0$.

2. Записать числа $z_1 = 5 - 8i$, $z_2 = \dfrac{5}{\sqrt{3} - i}$ в тригонометрической и показательной формах, изобразить их на плоскости.

Вычислить: а) $5z_1 - 3z_2$; б) $z_1 \cdot z_2$; в) $\dfrac{z_1}{z_2}$; г) z_1^{-1}; д) $\sqrt[3]{z_2}$.

3. Решить уравнение $z^4 = 8$.

4. Представить рациональную дробь в виде суммы простейших рациональных дробей:

а) $\dfrac{8x + 7}{\left(7x^2 + 1\right)\left(x - 4\right)}$; б) $\dfrac{5x^3 - 9x + 8}{x^3 - 7x^2 + 6x}$.

Вариант 29

1. Решить уравнение $5x^2 - x + 4 = 0$.

2. Записать числа $z_1 = 2 + 5i$, $z_2 = \dfrac{3}{\sqrt{3} + i}$ в тригонометрической и показательной формах, изобразить их на плоскости.

Вычислить: а) $5z_1 - 3z_2$; б) $z_1 \cdot z_2$; в) $\dfrac{z_1}{z_2}$; г) z_1^{-1}; д) $\sqrt[3]{z_2}$.

3. Решить уравнение $z^4 = 5$.

4. Представить рациональную дробь в виде суммы простейших рациональных дробей:

а) $\dfrac{2x + 7}{\left(4x^2 + 1\right)\left(x - 2\right)}$; б) $\dfrac{4x^3 - 9x + 8}{x^3 - 5x^2 + 6x}$.

Вариант 30

1. Решить уравнение $5x^2 - x + 8 = 0$.

2. Записать числа $z_1 = 4 - 9i$, $z_2 = \dfrac{5}{\sqrt{3} - i}$ в тригонометрической и показательной формах, изобразить их на плоскости.

Вычислить: а) $5z_1 - 3z_2$; б) $z_1 \cdot z_2$; в) $\dfrac{z_1}{z_2}$; г) z_1^{-1}; д) $\sqrt[3]{z_2}$.

3. Решить уравнение $z^4 = 15$.

4. Представить рациональную дробь в виде суммы простейших рациональных дробей:

а) $\dfrac{3x-7}{\left(9x^2+1\right)\left(x-2\right)}$; б) $\dfrac{4x^3-4x+3}{x^3-5x^2+6x}$.

II. Таблица интегралов. Непосредственное интегрирование. Метод подведения под знак дифференциала

1. Краткий теоретический обзор с использованием лекционного материала, графической схемы.

Делаем акцент на то, что основной задачей дифференциального исчисления является отыскание производной данной функции или её дифференциала. Интегральное исчисление решает обратную задачу: по заданному дифференциалу, а, следовательно, и производной функции, требуется найти эту функцию.

Студенты у доски решают следующие примеры:

Пример 1. Запишите соотношение, соответствующее определению первообразной.

Пример 2. Из каждой пары функций выпишите ту, которая является первообразной для другой и обозначьте её через $F(x)$.

2.1) $\frac{1}{2}e^{2x}$ и e^{2x};

2.2) $\cos 3x$ и $-3\sin 3x$;

2.3) $\dfrac{3}{1+9x^2}$ и $\operatorname{arctg} 3x$.

Обращаем внимание, что если функция $F(x)$ – первообразная для $f(x)$, то её дифференциал равен $d\left(F(x)\right)=F'(x)dx=f(x)dx$.

Пример 3. Вместо точек поставьте нужную функцию $F(x)$

$f(x)dx=d\left(F(x)\right)$

3.1) $2xdx = d\ldots$

3.2) $\dfrac{dx}{x}=d\ldots$

3.3) $\dfrac{dx}{\cos^2 x}=d\ldots$

3.4) $\sin 5xdx=d\ldots$

Пример 4. Найдите:

4.1) $d(\sin x)$;

4.2) $d(\cos x)$;

4.3) $d(\ln x)$;

4.4) $d(x + b)$;

4.5) $d(kx)$;

4.6) $d(kx + b)$;

4.7) $d(\arccos x)$;

4.8) $d(\operatorname{arctg} x)$;

4.9) $d(x^2)$;

4.10) $d(x^2 + b)$

В интегральном исчислении довольно часто используют ниже перечисленные соотношения, записанные в виде:

1. $\cos x dx = d(\sin x + b)$;
2. $\dfrac{dx}{x} = d(\ln x + b)$;
3. $dx = d(x + b)$;
4. $dx = \dfrac{1}{k} d(kx + b)$;
5. $\dfrac{dx}{1+x^2} = d(\mathrm{arctg}\, x + b) =$
$= -d(\mathrm{arcctg}\, x + b)$;
6. $\dfrac{dx}{x^2} = -d\left(\dfrac{1}{x}\right)$;
7. $x dx = \dfrac{1}{2}(x^2 + b)$;
8. $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx =$
$= d(\arcsin x + b) = -d(\arccos x + b)$;
9. $\dfrac{dx}{\sqrt{x}} = 2d\left(\sqrt{x}\right)$;
10. $\dfrac{dx}{\cos^2 x} = d\left(\mathrm{tg}\, x\right)$;
11. $\dfrac{dx}{\sin^2 x} = -d\left(\mathrm{ctg}\, x\right)$ и т. п.

Пример 5. Задача о нахождении первообразной для заданной функции $3x^2$. Имеем:

а) одно решение;

б) бесконечно много решений;

в) несколько решений.

Выберите правильный ответ, объясните его.

Делаем ***выводы***, что

1) любые две первообразные $F_1(x)$ и $F_2(x)$ для функции $f(x)$ отличаются на постоянную C;

2) $F(x) + C$ выражает всю совокупность первообразных для $f(x)$.

Согласно определению неопределенного интеграла можно записать

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \quad \text{где } d(F(x)+C) = f(x)dx$$

$$\text{или } \ (F(x)+C)' = f(x), \quad \text{где } C = \text{const}.$$

Пример 6. Проверьте дифференцированием правильность решения примеров:

6.1) $\int dx = x + C$;

6.2) $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$;

6.3) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$;

6.4) $\int e^{3x} dx = \dfrac{1}{3} e^{3x} + C$.

Делаем ***вывод***, что результаты интегрирования всегда можно проверить дифференцированием. Взяв производную от ответа, мы должны получить подынтегральную функцию.

Свойства неопределённого интеграла

1. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$;
2. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$;
3. $\int dF(x) = F(x) + C$;
4. $\int [f_1(x) \pm f_2(x)]dx = \int f_1\ (x)dx \pm \int f_2(x)dx.$
5. Если $F'(x) = f(x)$, то $\int f(u)du = F(u) + C$; где $u = \varphi(x)$ − произвольная функция, имеющая непрерывную производную.

Вывод. Формула для неопределенного интеграла остается справедливой независимо от того, является ли переменная интегрирования независимой переменной или непрерывно-дифференцируемой функцией от нее.

Например, по определению неопределенного интеграла имеем

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$$

Тогда, используя свойство 5, можно найти множество первообразных и для некоторых других интегралов:

а) $\int \frac{d\cos x}{\cos x} = \ln|\cos x| + C$;

б) $\int \frac{d\arccos x}{\arccos x} = \ln|\arccos x| + C$ и т. д.

Таблица неопределенных интегралов

Таблицу интегралов запоминать целесообразно в соответствии с классом функции. Интегрирование, как и всякая обратная операция, выполняется сложнее дифференцирования. Здесь нет простых и универсальных путей. Отметим, что из алгебраических свойств используются только свойства линейности. Для интегрирования произведений и частных придется проявлять изобретательность, творчество, специальные методы для того, чтобы свести искомый интеграл к табличным. Результативность этих действий напрямую зависит от степени свободного владения таблицей интегралов основных функций. Степень этой свободы будет достаточно высокой, если не просто **узнавать** табличные интегралы, а **писать** их по памяти, в **соответствии с определенным классом**.

1. $\int 0 \cdot dx = C$;

2. $\int u^p du = \dfrac{u^{p+1}}{p+1} + C,$ где $p \neq -1;$

3. $\int u du = \dfrac{u^2}{2} + C\,;$

4. $\int \dfrac{du}{u^2} = -\dfrac{1}{u} + C\,;$

5. $\int \dfrac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C\,;$

Степенные

6. $\int \dfrac{du}{u} = \ln|u| + C\,;$

7. $\int \sin u du = -\cos u + C\,;$

8. $\int \cos u du = \sin u + C\,;$

9. $\int \dfrac{du}{\sin u} = \ln\left|\mathrm{tg}\dfrac{u}{2}\right| + C\,;$

10. $\int \dfrac{du}{\cos u} = \ln\left|\mathrm{tg}(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{u}{2})\right| + C\,;$

11. $\int \dfrac{du}{\sin^2 u} = -\mathrm{ctg}\, u + C\,;$

12. $\int \dfrac{du}{\cos^2 u} = \mathrm{tg}\, u + C\,;$

13. $\int \mathrm{tg}\, u du = -\ln|\cos u| + C\,;$

14. $\int \mathrm{ctg}\, u du = \ln|\sin u| + C\,;$

Тригоно-метриче-ские

15. $\int a^u du = \dfrac{a^u}{\ln a} + C\,;$

16. $\int e^u du = e^u + C\,;$

Показательные

17. $\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\dfrac{u}{a} + C\,;$

18. $\int \dfrac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C\,;$

19. $\int \dfrac{du}{u^2 + a^2} = \dfrac{1}{a}\mathrm{arctg}\dfrac{u}{a} + C\,;$

20. $\int \dfrac{du}{u^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{u-a}{u+a}\right| + C\,;$

21. $\int \sqrt{a^2 - u^2}\, du = \dfrac{u}{2}\sqrt{a^2 - u^2} + \dfrac{a^2}{2}\arcsin\dfrac{u}{a} + C\,;$

22. $\int \sqrt{u^2 \pm a^2}\, du = \dfrac{u}{2}\sqrt{u^2 \pm a^2} \pm \dfrac{a^2}{2}\ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C\,;$

Содержащие u^2, a^2

23. $\int \operatorname{sh} u\,du = \operatorname{ch} u + C$;

24. $\int \operatorname{ch} u\,du = \operatorname{sh} u + C$;

25. $\int \frac{du}{\operatorname{sh}^2 u} = -\operatorname{cth} u + C$;

26. $\int \frac{du}{\operatorname{ch}^2 u} = \operatorname{th} u + C$.

Гиперболические

Для нахождения интеграла надо, пользуясь тем или иным методом или приемом, свести его к одному или нескольким табличным интегралам и, таким образом, найти искомый результат.

Различают 3 метода интегрирования:

1) непосредственное интегрирование;

2) интегрирование по частям;

3) метод подстановки.

Непосредственное интегрирование

Непосредственное интегрирование базируется на применении свойств неопределенного интеграла и таблицы интегралов.

В простейшем случае, когда заданный интеграл представляет одну из табличных формул интегрирования, задача интегрирования сводится к простому применению этой формулы.

Преподаватель у доски решает со всей студенческой аудиторией:

***Обучающий пример* 1.** Найти $\int \frac{dx}{\sqrt{x^3}}$.

Решение. Пользуясь формулой $\int u^p du = \frac{u^{p+1}}{p+1} + C,$ где $p \neq -1$,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^3}} = \int \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}} = \int x^{-\frac{3}{2}} dx = \frac{x^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1} + C = \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + C = -\frac{2}{\sqrt{x}} + C.$$

***Обучающий пример* 2.** Найти $\int 3^x \cdot 5^x dx$.

Решение. Пользуясь формулой $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$, получим

$$\int 3^x \cdot 5^x dx = \int (3 \cdot 5)^x dx = \int 15^x dx = \frac{15^x}{\ln 15} + C.$$

Обучающий пример **3**. Найти $\int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2}}$.

Решение. Подставляя $a=\sqrt{5}$ в табличный интеграл

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C, \text{ получим}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\sqrt{5}\right)^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{\sqrt{5}} + C.$$

Обучающий пример **4**. Найти $\int \frac{dx}{\sqrt{5-4x^2}}$.

Решение. Поскольку $\sqrt{5-4x^2} = \sqrt{4\left(\frac{5}{4} - x^2\right)} = 2\sqrt{\frac{5}{4} - x^2}$, то

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5-4x^2}} = \int \frac{dx}{2\sqrt{\frac{5}{4}-x^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(\sqrt{\frac{5}{4}}\right)^2 - x^2}} = \frac{1}{2}\arcsin\frac{x}{\sqrt{\frac{5}{4}}} + C = \frac{1}{2}\arcsin\frac{2x}{\sqrt{5}} + C.$$

Обучающий пример **5.** Используя таблицу и основные свойства неопределенного интеграла, найти $\int \frac{x^2-3x+5}{\sqrt{x}}dx$.

Решение. Почленно поделим числитель дроби на знаменатель:

$\frac{x^2-3x+5}{\sqrt{x}} = x^{\frac{3}{2}} - 3x^{\frac{1}{2}} + 5x^{-\frac{1}{2}}$. Отсюда

$$\int \frac{x^2-3x+5}{\sqrt{x}}dx = \int\left(x^{\frac{3}{2}} - 3x^{\frac{1}{2}} + 5x^{-\frac{1}{2}}\right)dx = \int x^{\frac{3}{2}}\,dx - 3\int x^{\frac{1}{2}}\,dx + 5\int x^{-\frac{1}{2}}\,dx =$$

$$= \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} - 3\cdot\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + 5\cdot\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - 2x^{\frac{3}{2}} + 10x^{\frac{1}{2}} + C.$$

2. Выполнить самостоятельно; каждый студент решает свой вариант (два студента у доски выполняют свои задания).

Вариант 1

а) $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{x}}$. *Ответ*: $\frac{5}{4}\sqrt[5]{x^4} + C$.

б) $\int \frac{dx}{3x^2+9}$. *Ответ*: $\frac{1}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}+C$.

в) $\int \frac{7-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}dx$. *Ответ*: $7\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|-x+C$.

г) $\int\left(3\cdot 5^x-\frac{2}{\sqrt[3]{x}}+7\right)dx$. *Ответ*: $3\cdot\frac{5^x}{\ln 5}-3\sqrt[3]{x^2}+7x+C$.

Вариант 2

а) $\int 2^x\cdot e^x\,dx$. *Ответ*: $\frac{(2e)^x}{\ln 2+1}+C$.

б) $\int \frac{dx}{\sqrt{4+3x^2}}$. *Ответ*: $\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|x+\sqrt{\frac{4}{3}+x^2}\right|+C$.

в) $\int \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}dx$. *Ответ*: $\arcsin x-x+C$.

г) $\int \frac{x^4+x^2-6x}{x^3}dx$. *Ответ*: $\frac{x^2}{2}+\ln|x|+\frac{6}{x}+C$.

Вариант 3

а) $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{x^2}}$. *Ответ*: $\frac{3}{5}\sqrt[5]{x^3}+C$.

б) $\int \frac{dx}{\sqrt{5-9x^2}}$. *Ответ*: $\frac{1}{3}\arcsin\frac{3x}{\sqrt{5}}$.

в) $\int \frac{2-\sqrt{2+x^2}}{\sqrt{2+x^2}}dx$. *Ответ*: $2\ln\left|x+\sqrt{2+x^2}\right|-x+C$.

г) $\int \sqrt{x}\left(x^2+1\right)dx$. *Ответ*: $\frac{2}{7}x^3\sqrt{x}+\frac{2}{3}x\sqrt{x}+C$.

Вариант 4

а) $\int \frac{dx}{\sqrt[7]{x^5}}$. *Ответ*: $\frac{7}{2}\sqrt[7]{x^2}+C$.

б) $\int \frac{dx}{x^2+9}$. *Ответ*: $\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}+C$.

в) $\int \frac{3+\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{2-x^2}}dx$. *Ответ*: $3\arcsin\frac{x}{\sqrt{2}}+x+C$.

г) $\int \frac{\left(x^3+2\right)^2}{\sqrt{x}}dx$. *Ответ*: $\frac{2}{13}x^6\cdot\sqrt{x}+\frac{8}{7}x^3\cdot\sqrt{x}+8\sqrt{x}+C$.

Вариант 5

а) $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{x^3}}$. *Ответ*: $\frac{5}{2}\sqrt[5]{x^2}+C$.

б) $\int \frac{dx}{4x^2+1}$. *Ответ*: $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}2x+C$.

в) $\int \frac{4+\sqrt{3+x^2}}{\sqrt{3+x^2}}dx$. *Ответ*: $4\ln\left|x+\sqrt{3+x^2}\right|+x+C$.

г) $\int\left(4\sin x+8\sqrt{x}-\frac{11}{\cos^2 x}\right)dx$. *Ответ*: $-4\cos x+\frac{16}{3}\sqrt{x^3}-11\operatorname{tg}x+C$.

Вариант 6

а) $\int \frac{dx}{x^6}$. *Ответ*: $-\frac{1}{5x^5}+C$.

б) $\int \frac{dx}{x^2-25}$. *Ответ*: $\frac{1}{10}\ln\left|\frac{x-5}{x+5}\right|+C$.

в) $\int \frac{5-\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{4-x^2}}dx$. *Ответ*: $5\arcsin\frac{x}{2}-x+C$.

г) $\int\left(4\cos x+x^{-1}+\frac{10}{\sin^2 x}\right)dx$. *Ответ*: $4\sin x+\ln|x|-10\operatorname{ctg}x+C$.

Вариант 7

а) $\int \frac{dx}{x^2\cdot\sqrt[3]{x}}$. *Ответ*: $-\frac{3}{4\sqrt[3]{x^4}}+C$.

б) $\int \frac{dx}{9x^2-16}$. *Ответ*: $\frac{1}{24}\ln\left|\frac{x-\frac{4}{3}}{x+\frac{4}{3}}\right|+C$.

в) $\int \frac{3-\sqrt{5-x^2}}{\sqrt{5-x^2}}dx$. *Ответ*: $3\arcsin\frac{x}{\sqrt{5}}-x+C$.

г) $\int \frac{3-2x^4+\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[4]{x}}dx$. *Ответ*: $4\sqrt[4]{x^3}-\frac{8}{19}\sqrt[4]{x^{19}}+\frac{12}{17}\sqrt[12]{x^{17}}+C$.

Вариант 8

а) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x}}$. *Ответ*: $-\frac{2}{\sqrt{x}}+C$.

б) $\int \frac{dx}{4x^2+25}$. *Ответ*: $\frac{1}{10}\operatorname{arctg}\frac{2x}{5}+C$.

в) $\int \frac{6+\sqrt{4+x^2}}{\sqrt{4+x^2}}dx$. *Ответ*: $6\ln\left|x+\sqrt{4+x^2}\right|+x+C$.

г) $\int \frac{\sqrt{x^3}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x}}dx$. *Ответ*: $\frac{4}{9}\sqrt[4]{x^9}-\frac{12}{13}\sqrt[12]{x^{13}}+C$.

Вариант 9

а) $\int \frac{dx}{x^4\cdot\sqrt{x}}$. *Ответ*: $-\frac{2}{7\sqrt{x^7}}+C$.

б) $\int \frac{dx}{25x^2+49}$. *Ответ*: $\frac{1}{35}\operatorname{arctg}\frac{5x}{7}+C$.

в) $\int \frac{7-\sqrt{2+x^2}}{\sqrt{2+x^2}}dx$. *Ответ*: $7\ln\left|x+\sqrt{2+x^2}\right|-x+C$.

г) $\int \left(x+\frac{2}{x}\right)^2 dx$. *Ответ*: $\frac{x^3}{3}+4x-\frac{4}{x}+C$.

Вариант 10

а) $\int x\cdot\sqrt[5]{x}\,dx$. *Ответ*: $\frac{5}{11}x^{\frac{11}{5}}+C$.

б) $\int \frac{dx}{\sqrt{4-2x^2}}$. *Ответ*: $\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{x}{\sqrt{2}}$.

в) $\int \frac{5+\sqrt{9+x^2}}{\sqrt{9+x^2}}dx$. *Ответ*: $5\ln\left|x+\sqrt{9+x^2}\right|+x+C$.

г) $\int \left(7^x-\frac{8}{x}+4\cos x\right)dx$. *Ответ*: $\frac{7^x}{\ln 7}-8\ln|x|+4\sin x+C$.

Вариант 11

а) $\int \frac{dx}{9-x^2}$. *Ответ*: $\frac{1}{6}\ln\left|\frac{3+x}{3-x}\right|+C$.

б) $\int x\cdot\sqrt[4]{x}\,dx$. *Ответ*: $\frac{4}{9}\sqrt[4]{x^9}+C$.

в) $\int\frac{8-\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{4-x^2}}dx$. *Ответ*: $8\arcsin\frac{x}{2}-x+C$.

г) $\int\left(\frac{\sqrt{3}}{\cos^2 x}-\sqrt[3]{x}-\frac{2}{x^4}\right)dx$. *Ответ*: $\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,x-\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}+\frac{2}{3x^3}+C$.

Вариант 12

а) $\int\frac{dx}{x\cdot\sqrt[5]{x}}$. *Ответ*: $-\frac{5}{\sqrt[5]{x}}+C$.

б) $\int\frac{dx}{4x^2-25}$. *Ответ*: $\frac{1}{20}\ln\left|\frac{x-\frac{5}{2}}{x+\frac{5}{2}}\right|+C$.

в) $\int\frac{9+\sqrt{3+x^2}}{\sqrt{3+x^2}}dx$. *Ответ*: $9\ln\left|x+\sqrt{3+x^2}\right|+x+C$.

г) $\int\frac{\sqrt{x}-3\sqrt[5]{x^2}+1}{\sqrt[4]{x}}dx$. *Ответ*: $\frac{4}{5}x\sqrt[4]{x}-2\frac{14}{23}x\cdot\sqrt[20]{x^3}+\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}+C$.

Вариант 13

а) $\int\frac{dx}{x^3\cdot\sqrt[3]{x}}$. *Ответ*: $-\frac{3}{7\sqrt[3]{x^7}}+C$.

б) $\int\frac{dx}{x^2+7}$. *Ответ*: $\frac{1}{\sqrt{7}}\mathrm{arctg}\frac{x}{\sqrt{7}}+C$.

в) $\int\frac{9-\sqrt{9-x^2}}{\sqrt{9-x^2}}dx$. *Ответ*: $9\arcsin\frac{x}{3}-x+C$.

г) $\int\left(0,7x^{-0,1}+0,2\cdot(0,5)^x\right)dx$. *Ответ*: $\frac{7}{9}x^{0,9}-\frac{1}{2^x\cdot 5\ln 2}+C$.

Вариант 14

а) $\int\frac{dx}{\sqrt[4]{x^3}}$. *Ответ*: $4\sqrt[4]{x}+C$.

б) $\int\frac{dx}{4x^2+16}$. *Ответ*: $\frac{1}{8}\mathrm{arctg}\frac{x}{2}+C$.

в) $\int \frac{2+\sqrt{5+x^2}}{\sqrt{5+x^2}}dx$.   *Ответ*: $2\ln\left|x+\sqrt{5+x^2}\right|+x+C$.

г) $\int \frac{\left(x^3+2\right)^2}{\sqrt{x}}dx$.   *Ответ*: $\frac{2}{13}x^6\cdot\sqrt{x}+\frac{8}{7}x^3\cdot\sqrt{x}+8\sqrt{x}+C$.

Вариант 15

а) $\int \frac{dx}{\sqrt[7]{x^4}}$.   *Ответ*: $\frac{7}{3}\sqrt[7]{x^3}+C$.

б) $\int \frac{dx}{2x^2-18}$.   *Ответ*: $\frac{1}{12}\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right|+C$.

в) $\int \frac{7-\sqrt{x^2+\pi}}{\sqrt{x^2+\pi}}dx$.   *Ответ*: $7\ln\left|x+\sqrt{x^2+\pi}\right|-x+C$.

г) $\int\left(x^2-1\right)\left(\sqrt{x}+4\right)dx$.   *Ответ* $\frac{2}{7}x^3\cdot\sqrt{x}+\frac{4}{3}x^3-\frac{2}{3}x\sqrt{x}-4x+C$.

Подведение под знак дифференциала

Особенно эффективным приемом интегрирования является операция «подведения под знак дифференциала», когда подынтегральное выражение $f(x)dx$ приводится к виду

$$f(x)dx=g(u)du,$$

где u – функция от x.

***Обучающий пример* 6.** Найти $\int\sqrt{3x+1}\,dx=\int(3x+1)^{\frac{1}{2}}\,dx$.

Решение. Воспользоваться формулой $\int u^p du=\frac{u^{p+1}}{p+1}+C,\ p\neq -1$, таблицы интегралов мы вправе тогда, когда под знаком интеграла вместо dx будет $d(3x+1)$, т. к. переменной интегрирования должно быть основание степенной функции $(3x+1)^{1/2}$, т. е. $u=3x+1$, но при такой записи нарушается знак равенства, ибо $d(3x+1)=(3x+1)'\,dx=3dx$. Чтобы сохранить знак равенства, мы должны подынтегральное выражение разделить на 3. Правда, тогда получается «лишний множитель» 1/3, но он, как постоянный, может быть вынесен за знак интеграла.

$$\int\sqrt{3x+1}\,dx=\int(3x+1)^{\frac{1}{2}}dx=\int\frac{(3x+1)^{\frac{1}{2}}d(3x+1)}{3}=\frac{1}{3}\int(3x+1)^{\frac{1}{2}}d(3x+1)=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{(3x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C=\frac{2}{9}(3x+1)^{\frac{3}{2}}+C.$$

***Обучающий пример* 7.** Найти $\int\frac{x\,dx}{1+x^2}$.

Решение. Здесь нельзя применять табличную формулу $\int\frac{du}{u^2+a^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a}+C$, т. к. в этом случае в числителе множитель x будет лишним, который, нельзя вынести за знак интеграла, как переменную величину.

Сделаем замену: $xdx=\frac{1}{2}d\left(1+x^2\right)$, тогда

$$\int\frac{x\,dx}{1+x^2}=\int\frac{\frac{1}{2}d\left(1+x^2\right)}{1+x^2}=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(1+x^2\right)}{1+x^2}=\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+C.$$

***Обучающий пример* 8.** Найти $\int\operatorname{tg}x\,dx$.

Решение. Заменим $\operatorname{tg}x=\frac{\sin x}{\cos x}$.

$$\int\operatorname{tg}x\,dx=\int\frac{\sin x}{\cos x}dx=-\int\frac{d(\cos x)}{\cos x}=-\ln|\cos x|+C.$$

Заметим, что последние два из приведенных обучающих примеров являются частным случаем интегралов вида $\int\frac{f'(x)dx}{f(x)}$ (в числителе подынтегральной дроби стоит производная знаменателя), решаемых с помощью замены $t=f(x)$. Поэтому

$$\int\frac{f'(x)dx}{f(x)}=\ln|f(x)|+C. \qquad (*)$$

Полезно запомнить словесное выражение формулы (*): *интеграл от дроби, числитель которой является дифференциалом знаменателя, равен логарифму абсолютной величины знаменателя.*

3. Выполнить самостоятельно; каждый студент решает свой вариант (два студента у доски выполняют свои задания).

Вариант 1

а) $\int \cos(2x-1)\,dx$. *Ответ*: $\frac{1}{2}\sin(2x-1)+C$.

б) $\int \frac{dx}{8x-1}$. *Ответ*: $\frac{1}{8}\ln|8x-1|+C$.

в) $\int (9x+2)^{10}\,dx$. *Ответ*: $\frac{1}{99}(9x+2)^{11}+C$.

г) $\int x\sin\left(x^2+1\right)dx$. *Ответ*: $-\frac{1}{2}\cos\left(x^2+1\right)+C$.

д) $\int x^2\sqrt{x^3-7}\,dx$. *Ответ*: $\frac{2}{9}\left(x^3-7\right)^{\frac{3}{2}}+C$.

Вариант 2

а) $\int \sin(3x+7)\,dx$. *Ответ*: $-\frac{1}{3}\cos(3x+7)+C$.

б) $\int \frac{xdx}{5x^2+7}$. *Ответ*: $\frac{1}{10}\ln\left|5x^2+7\right|+C$.

в) $\int (3+2x)^{15}\,dx$. *Ответ*: $\frac{1}{32}(3+2x)^{16}+C$.

г) $\int x^2\cdot\cos\left(3x^3+1\right)dx$. *Ответ*: $-\frac{1}{9}\cos\left(3x^3+1\right)+C$.

д) $\int x\cdot\sqrt[3]{x^2+7}\,dx$. *Ответ*: $\frac{3}{8}\sqrt[3]{\left(x^2+7\right)^4}+C$.

Вариант 3

а) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x+13}}$. *Ответ*: $\sqrt{2x+13}+C$.

б) $\int x\cdot\sqrt{x^2+5}\,dx$. *Ответ*: $\frac{1}{3}\left(x^2+5\right)^{\frac{3}{2}}+C$.

в) $\int \frac{dx}{5x+3}$. *Ответ*: $\frac{1}{5}\ln|5x+3|+C$.

г) $\int (7+8x)^{13}\,dx$. *Ответ*: $\frac{1}{102}(7+8x)^{14}+C$.

д) $\int \cos^5 x\sin x dx$. *Ответ*: $-\frac{\cos^6 x}{6}+C$.

Вариант 4

а) $\int (3x+5)^{100}\,dx$. *Ответ*: $\frac{1}{303}(3x+5)^{101}+C$.

б) $\int \frac{dx}{3+2x}$. *Ответ*: $\frac{1}{2}\ln|3+2x|+C$.

в) $\int x\left(3x^2+7\right)^9 dx$. *Ответ*: $\frac{1}{60}\left(3x^2+7\right)^{10}+C$.

г) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x+13}}$. *Ответ*: $\sqrt{2x+13}+C$.

д) $\int \frac{\cos x}{\sin^5 x}\,dx$. *Ответ*: $-\frac{1}{4\sin^4 x}+C$.

Вариант 5

а) $\int (2x+1)^{10}\,dx$. *Ответ*: $\frac{1}{22}(2x+1)^{11}+C$.

б) $\int \frac{dx}{5-7x}$. *Ответ*: $-\frac{1}{7}\ln|5-7x|+C$.

в) $\int \frac{dx}{\sqrt{8x+9}}$. *Ответ*: $\frac{1}{4}\sqrt{8x+9}+C$.

г) $\int x^2\sqrt{27-x^3}\,dx$. *Ответ*: $-\frac{2}{9}\sqrt{\left(27-x^3\right)^3}+C$.

д) $\int x^2\cdot\sqrt[3]{3x^3+1}\,dx$. *Ответ*: $\frac{1}{12}\left(3x^3+1\right)^{\frac{4}{3}}+C$.

Вариант 6

а) $\int \cos(3x+7)\,dx$. *Ответ*: $\frac{1}{3}\sin(3x+7)+C$.

б) $\int \frac{dx}{7x-3}$. *Ответ*: $\frac{1}{7}\ln|7x-3|+C$.

в) $\int \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{1+x^2}\,dx$. *Ответ*: $\frac{1}{3}\operatorname{arctg}^3 x+C$.

г) $\int e^{x^3}\cdot x^2\,dx$. *Ответ*: $\frac{1}{3}e^{x^3}+C$.

д) $\int \sin^5 x\cos x\,dx$. *Ответ*: $\frac{\sin^6 x}{6}+C$.

Вариант 7

а) $\int e^{5x-7}\,dx$. *Ответ*: $\frac{1}{5}e^{5x-7}+C$.

б) $\int \frac{\operatorname{arcctg}^3 x}{1+x^2}\,dx$. *Ответ*: $-\frac{\operatorname{arcctg}^4 x}{4}+C$.

в) $\int \frac{x^2dx}{5x^3+9}$. *Ответ*: $\frac{1}{15}\ln\left|5x^3+9\right|+C$.

г) $\int \cos^7 x\cdot\sin x\,dx$. *Ответ*: $-\frac{1}{8}\cos^8 x+C$.

д) $\int \frac{\ln^4 x}{x}dx$. *Ответ*: $\frac{\ln^5 x}{5}+C$.

Вариант 8

а) $\int \frac{dx}{1+8x}$. *Ответ*: $\frac{1}{8}\ln\left|1+8x\right|+C$.

б) $\int \frac{\arcsin^2 x}{\sqrt{1-x^2}}dx$. *Ответ*: $\frac{\arcsin^3 x}{3}+C$.

в) $\int \frac{x^3dx}{4x^4+9}$. *Ответ*: $\frac{1}{16}\ln\left|4x^4+9\right|+C$.

г) $\int \cos^2 x\cdot\sin x\,dx$. *Ответ*: $-\frac{1}{3}\cos^3 x+C$.

д) $\int x\cdot\sin x^2\,dx$. *Ответ*: $-\frac{1}{2}\cos x^2+C$.

Вариант 9

а) $\int \cos(3x+10)\,dx$. *Ответ*: $\frac{1}{3}\sin(3x+10)+C$.

б) $\int \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}dx$. *Ответ*: $-\frac{1}{2}\arccos^2 x+C$.

в) $\int \frac{x^3dx}{5x^4+3}$. *Ответ*: $\frac{1}{20}\ln\left|5x^4+3\right|+C$.

г) $\int \sqrt{1+3\cos x}\cdot\sin x\,dx$. *Ответ*: $-\frac{2}{9}(1+3\cos x)^{\frac{3}{2}}+C$.

д) $\int e^{x^3+7}\cdot x^2\,dx$. *Ответ*: $\frac{1}{3}e^{x^3+7}+C$.

Вариант 10

а) $\int \cos(5-2x)\,dx$. *Ответ*: $-\frac{1}{2}\sin(5-2x)+C$.

б) $\int e^{x^4+5}\cdot x^3\,dx$. *Ответ*: $\frac{1}{4}e^{x^4+5}+C$.

в) $\int e^{\cos 2x}\sin 2x\,dx$. *Ответ*: $-\frac{1}{2}e^{\cos 2x}+C$.

г) $\int \frac{xdx}{5x^2+7}$. *Ответ*: $\frac{1}{10}\ln\left|5x^2+7\right|+C$.

д) $\int x\sqrt{125-5x^2}\,dx$. *Ответ*: $-\frac{1}{15}\left(125-5x^2\right)^{\frac{3}{2}}+C$.

Вариант 11

а) $\int e^{3x+11}\,dx$. *Ответ*: $\frac{1}{3}e^{3x+11}+C$.

б) $\int \cos(2x+9)\,dx$. *Ответ*: $\frac{1}{2}\sin(2x+9)+C$.

в) $\int \frac{x^3dx}{5x^4+7}$. *Ответ*: $\frac{1}{20}\ln\left|5x^4+3\right|+C$.

г) $\int \frac{\sqrt{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}\,dx$. *Ответ*: $\frac{2}{3}(\operatorname{arctg} x)^{\frac{3}{2}}+C$.

д) $\int x\left(5x^2+7\right)^{14}dx$. *Ответ*: $\frac{1}{150}\left(5x^2+7\right)^{15}+C$.

Вариант 12

а) $\int \sin(7x+9)\,dx$. *Ответ*: $-\frac{1}{7}\cos(7x+9)+C$.

б) $\int e^{\sin^2 x}\sin 2x\,dx$. *Ответ*: $e^{\sin^2 x}+C$.

в) $\int \frac{\sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$. *Ответ*: $\frac{2}{3}(\arcsin x)^{\frac{3}{2}}+C$.

г) $\int \frac{x^3dx}{4x^4-5}$. *Ответ*: $\frac{1}{16}\ln\left|4x^4-5\right|+C$.

д) $\int x^2\left(7x^3+2\right)^5dx$. *Ответ*: $\frac{1}{126}\left(7x^3+2\right)^6+C$.

Вариант 13

а) $\int \frac{dx}{9x+3}$. *Ответ*: $\frac{1}{9}\ln\left|9x+3\right|+C$.

б) $\int x^2\cdot\sqrt{x^3+10}\,dx$. *Ответ*: $\frac{2}{9}\left(x^3+10\right)^{\frac{3}{2}}+C$.

в) $\int e^{x^5+5}\cdot x^4\,dx$. *Ответ*: $\frac{1}{5}e^{x^5+5}+C$.

г) $\int \frac{\sqrt{\arccos x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$. *Ответ*: $-\frac{2}{3}\arccos^{\frac{3}{2}}x+C$.

д) $\int \sin^7 x\cos x\cdot dx$. *Ответ*: $\frac{\sin^8 x}{8}+C$.

Вариант 14

14.а) $\int \frac{x\,dx}{5x^2+3}$. *Ответ*: $\frac{1}{10}\ln\left|5x^2+3\right|+C$.

б) $\int x^2\cdot\cos\left(x^3+4\right)dx$. *Ответ*: $\frac{1}{3}\sin\left(x^3+4\right)+C$.

в) $\int \frac{\arcsin^7 x}{\sqrt{1-x^2}}dx$. *Ответ*: $\frac{\arcsin^8 x}{8}+C$.

г) $\int e^{\sin 2x}\cos 2x\,dx$. *Ответ*: $\frac{1}{2}e^{\sin 2x}+C$.

д) $\int \frac{\ln^5 x}{x}\,dx$. *Ответ*: $\frac{\ln^6 x}{6}+C$.

Вариант 15

а) $\int \cos(3-5x)\,dx$. *Ответ*: $-\frac{1}{5}\sin(3-5x)+C$

б) $\int \frac{x^4dx}{3x^5+1}$. *Ответ*: $\frac{1}{15}\ln\left|3x^5+1\right|+C$.

в) $\int \sqrt{1+2\sin x}\cdot\cos x\,dx$. *Ответ*: $\frac{1}{3}(1+2\sin x)^{\frac{3}{2}}+C$.

г) $\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}dx$. *Ответ*: $2\sqrt{\sin x}+C$.

д) $\int x\cos\left(3x^2\right)dx$. *Ответ*: $\frac{1}{6}\sin\left(3x^2\right)+C$.

Домашнее задание

1. Изучить по теоретической части модуля материал к следующему практическому занятию по теме «Замена переменной. Интегрирование выражений, содержащих квадратный трехчлен в знаменателе».

2. Выучить таблицу интегралов и основные свойства интегрирования.

3. Найти интегралы:

а) $\int \frac{6x^4 - 8x^3 - 4x^2 + 3x - 5}{x^2} dx$. *Ответ*: $2x^3 - 4x^2 - 4x + 3\ln|x| + \frac{5}{x} + C$.

б) $\int \left(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right)^2 dx$. *Ответ*: $x + \cos x + C$.

в) $\int \sin(7x - 3)\, dx$. *Ответ*: $-\frac{1}{7}\cos(7x - 3) + C$.

г) $\int e^{x^4} \cdot x^3\, dx$. *Ответ*: $\frac{1}{4}e^{x^4} + C$.

д) $\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{arctg} x}}{1 + x^2} dx$. *Ответ*: $\frac{3}{4}\sqrt[3]{(\operatorname{arctg} x)^4} + C$.

е) $\int \frac{\cos x}{\sin^7 x} dx$. *Ответ*: $-\frac{1}{6\sin^6 x} + C$.

ж) $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2 + 9}}$. *Ответ*: $\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|x + \sqrt{x^2 + 3}\right| + C$.

4. Выполнить свой вариант из индивидуального домашнего задания.

III. Замена переменной. Интегрирование выражений, содержащих квадратный трехчлен в знаменателе

1. Опрос таблицы интегралов устно.

2. Устно найти:

а) $\int \sin(9x + 5)\, dx$;

б) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 7}}$;

в) $\int \frac{dx}{\sqrt{7 - x^2}}$;

г) $\int e^{3x-2} dx$;

д) $\int \frac{x\,dx}{1 + x^2}$;

е) $\int \frac{dx}{x^2 + 5}$.

3. Разминка. Найти:

а) $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$.

Указание. Заменим в числителе $1=\sin^2 x+\cos^2 x$ и разобьем интеграл на сумму двух интегралов или приведем интеграл к виду $2\int\frac{d2x}{\sin^2 2x}$.

Ответ: $\operatorname{tg} x-\operatorname{ctg} x+C$ или $-2\operatorname{ctg} 2x+C$.

б) $\int\frac{x^2}{x^2+1}dx$.

Указание. Прибавляя в числителе 1 и вычитая ее, получим после деления два табличных интеграла.

Ответ: $x-\operatorname{arctg} x+C$.

в) $\int\frac{dx}{x^4+x^2}$.

Указание. Прибавьте и вычтите в числителе подынтегральной функции x^2.

Ответ: $-\frac{1}{x}-\operatorname{arctg} x+C$.

Примечание. Примененный прием добавления в числителе подынтегральной функции взаимно уничтожающихся слагаемых иногда бывает полезен и должен быть усвоен.

4. Краткий теоретический обзор с использованием лекционного материала.

Обращаем внимание, что метод замены переменной (подстановки) является эффективным методом интегрирования, в результате чего заданный интеграл заменяется другим интегралом, табличным или интегралом, сводимым к табличному.

Пусть требуется вычислить $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$, при этом функции $\varphi'(x)$ и $f(x)$ непрерывны на заданном интервале. Тогда этот интеграл можно упростить с помощью подстановки $t=\varphi(x)$, используя равенство

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx=\int f(t)dt.$$

Эта формула называется формулой замены переменной (подстановки) в неопределенном интеграле.

Иногда удобнее делать подстановку не $t=\varphi(x)$, а $x=\Psi(t)$, где $\Psi(t)$ – функция, имеющая непрерывную производную (т. е. непрерывно дифференцируема). Применяя такую подстановку к интегралу $\int f(x)dx$, получим еще одну формулу замены переменной:

$$\int f(x)dx=\int f(\psi(t))\psi'(t)dt.$$

Получающиеся после применения той или иной подстановки интегралы должны быть более просты для интегрирования, чем исходные.

Не существует общего «рецепта», следуя которому можно всегда понять, какую подстановку надо применить к данному интегралу. Однако следует иметь в виду следующие полезные подстановки:

1) Если под знаком интеграла стоит сложная функция $f\left(\varphi\left(x\right)\right)$, то, как правило, используется подстановка $t=\varphi\left(x\right)$ (к примеру, если в подынтегральном выражении встречается функция $\cos\frac{1}{x}$, то стоит попробовать подстановку $t=\frac{1}{x}$, а если e^{x^2}, то $t=x^2$ и т. д.).

2) Если в подынтегральном выражении есть готовый дифференциал функции $\varphi\left(x\right)$, т.е. выражение $\varphi'\left(x\right)dx$, то имеет смысл попробовать подстановку $t=\varphi\left(x\right)$. Поэтому целесообразно вспомнить формулы для наиболее часто встречающихся дифференциалов:

1. $\cos(x)dx = d(\sin x + b)$;
2. $\frac{dx}{x} = d(\ln x + b)$;
3. $dx = d(x + b)$;
4. $dx = \frac{1}{k}d(kx + b)$;
5. $xdx = \frac{1}{2}d(x^2 + b)$;
6. $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = d(\arcsin x + b) = -d(\arccos x + b)$;
7. $\frac{dx}{1+x^2} = d(\mathrm{arctg}\, x + b) = -d(\mathrm{arcctg}\, x + b)$;
8. $\frac{dx}{x^2}=-d\left(\frac{1}{x}\right)$;
9. $\frac{dx}{\sqrt{x}}=2d\left(\sqrt{x}\right)$;
10. $\frac{dx}{\cos^2 x}=d\left(\mathrm{tg}\, x\right)$;
11. $\frac{dx}{\sin^2 x}=-d\left(\mathrm{ctg}\, x\right)$ и т. д.

В простых случаях введение новой переменной можно (после приобретения определенного навыка) проводить в уме, мысленно обозначив соответствующую функцию через t или какую-либо иную букву: $u, z, y, \ldots$

Обучающий пример **1**. $\int x\sqrt{x-5}\,dx$.

Решение. Чтобы избавиться от корня, положим $x-5=t^2$, т. е. применим подстановку $x=t^2+5$. Приведем примерную схему выкладок при подстановке:

$$\int x\sqrt{x-5}\,dx=\begin{vmatrix} x-5=t^2 \\ x=t^2+5 \\ dx=2tdt \end{vmatrix}=\int\left(t^2+5\right)t\cdot 2tdt=\int\left(2t^4+10t^2\right)dt=$$

$$=2\int t^4dt+10\int t^2dt=\frac{2t^5}{5}+\frac{10t^3}{3}+C.$$

Отметим, что окончательный результат всегда следует выразить через первоначальную переменную. Для этого в равенстве $x-5=t^2$ выражаем t через x, т. е. $t=\sqrt{x-5}=(x-5)^{\frac{1}{2}}$.

Отсюда будем иметь:

$$\int x\sqrt{x-5}\,dx=\frac{2}{5}(x-5)^{\frac{5}{2}}+\frac{10}{3}(x-5)^{\frac{3}{2}}+C.$$

Обучающий пример **2.** $\int\frac{3x^2}{x^3+1}\ln\left(x^3+1\right)dx$.

Решение.

$$\int\frac{3x^2}{x^3+1}\ln\left(x^3+1\right)dx=\begin{vmatrix} \ln\left(x^3+1\right)=t \\ \dfrac{3x^2dx}{x^3+1}=dt \end{vmatrix}=\int tdt=\frac{t^2}{2}+C=\frac{\ln^2\left(x^3+1\right)}{2}+C.$$

Обучающий пример **3.** $\int\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx$.

Решение. Сделаем такую замену $x=\psi(t)$, чтобы подкоренное выражение $1-x^2$ стало полным квадратом. Подходит, например, подстановка $x=\sin t$ (или $x=\cos t$). Тогда

$$\int\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx=\begin{vmatrix} x=\sin t \\ dx=\cos tdt \end{vmatrix}=\int\frac{\sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,dt}{\sin^2 t}=\int\frac{\sqrt{\cos^2 t}\cos t\,dt}{\sin^2 t}=$$

$$=\int\frac{\cos^2 t\,dt}{\sin^2 t}=\int\frac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t}\,dt=\int\left(\frac{1}{\sin^2 t}-1\right)dt=\int\frac{dt}{\sin^2 t}-\int dt=$$

$$=-\operatorname{ctg} t-t+C=\left|\begin{array}{l}\text{т. к. } t=\arcsin x,\quad \sin t=x\\ \text{то}\quad \operatorname{ctg} t=\dfrac{\cos t}{\sin t}=\dfrac{\sqrt{1-\sin^2 t}}{\sin t}=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}\end{array}\right|=$$

$$=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}-\arcsin x+C.$$

***Обучающий пример* 4.** $\int\frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}$.

Решение.

$$\int\frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}=\left|\begin{array}{l}e^x+1=t^2\quad\Rightarrow e^x=t^2-1\\ e^x dx=2tdt\Rightarrow dx=\dfrac{2tdt}{e^x}=\dfrac{2tdt}{t^2-1}\end{array}\right|=\int\frac{2tdt}{t\left(t^2-1\right)}=$$

$$=2\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C=\ln\left|\frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}\right|+C.$$

5. Выполнить самостоятельно; каждый студент решает свой вариант (два студента у доски выполняют свои задания).

Вариант 1

а) $\int e^{-x^2}\cdot x\,dx$. *Ответ*: $-\frac{1}{2}e^{-x^2}+C$.

б) $\int\frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}}\,dx$. *Ответ*: $\frac{1}{3}\arcsin x^3+C$.

в) $\int\frac{x\,dx}{5+7x^4}$. *Ответ*: $\frac{1}{14}\sqrt{\frac{7}{5}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{7}{5}}x^2+C$.

г) $\int\frac{dx}{e^x+1}$. *Ответ*: $x-\ln\left|e^x+1\right|+C$.

Вариант 2

а) $\int\frac{dx}{1+\sqrt{x+3}}$. *Ответ*: $2\left(\sqrt{x+3}-\ln\left|1+\sqrt{x+3}\right|\right)+C$.

б) $\int x\cdot\sqrt[5]{\left(5x^2-3\right)^7}\,dx$. *Ответ*: $\frac{1}{24}\sqrt[5]{\left(5x^2-3\right)^{12}}+C$.

в) $\int \frac{x\,dx}{x^4+3}$. *Ответ*: $\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x^2}{\sqrt{3}}+C$.

г) $\int \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{1+2\cos x}}$. *Ответ*: $C-\sqrt{1+2\cos x}$.

Вариант 3

а) $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}\,dx$. *Ответ*: $\frac{2}{3}\sqrt{(1+\ln)^3}+C$.

б) $\int \frac{dx}{x\sqrt{3x+1}}$. *Ответ*: $\ln\left|\frac{\sqrt{3x+1}-1}{\sqrt{3x+1}+1}\right|+C$.

в) $\int \sin(3-8x)\,dx$. *Ответ*: $\frac{1}{8}\cos(3-8x)+C$.

г) $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}}$. *Ответ*: $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+C$.

Вариант 4

а) $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$. *Ответ*: $2\sin\sqrt{x}+C$.

б) $\int \frac{x}{\sqrt{4x+9}}\,dx$. *Ответ*: $\frac{1}{24}\sqrt{(4x+9)^3}-\frac{9}{8}\sqrt{4x+9}+C$.

в) $\int e^{\cos 2x}\cdot\sin 2x\,dx$. *Ответ*: $-\frac{1}{2}e^{\cos 2x}+C$.

г) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{4-x^2}}$. *Ответ*: $-\sqrt{4-x^2}+C$.

Вариант 5

а) $\int \frac{\cos x}{\sin^5 x}\,dx$. *Ответ*: $-\frac{1}{4\sin^4 x}+C$.

б) $\int x(2x+5)^{10}\,dx$. *Ответ*: $\frac{1}{4}\left(\frac{(2x+5)^{12}}{12}-\frac{5(2x+5)^{11}}{11}\right)+C$.

в) $\int \frac{dx}{e^x+1}$. *Ответ*: $x-\ln\left|e^x+1\right|+C$.

г) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x+1}}$. *Ответ*: $\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}-2\sqrt{x+1}+C$.

Вариант 6

а) $\int x\left(5x^2-3\right)^7 dx$. *Ответ*: $\frac{1}{80}\left(5x^2-3\right)^8+C$.

б) $\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$. *Ответ*: $\ln\left|\sin x+\sqrt{1+\sin^2 x}\right|+C$.

в) $\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}dx$. *Ответ*: $2\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{3}-\frac{x}{2}+2\sqrt{x}-2\ln\left|1+\sqrt{x}\right|\right)+C$.

г) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{9-x^2}}$. *Ответ*: $-\sqrt{9-x^2}+C$.

Вариант 7

а) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x}}$. *Ответ*: $-\frac{2}{\sqrt{e^x}}+C$.

б) $\int \frac{dx}{x\left(4-\ln^2 x\right)}$. *Ответ*: $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+\ln x}{2-\ln x}\right|+C$.

в) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^4}}$. *Ответ*: $\frac{1}{2}\arcsin x^2+C$.

г) $\int \frac{1-\sin x}{x+\cos x}dx$. *Ответ*: $\ln\left|x+\cos x\right|+C$.

Вариант 8

а) $\int \frac{dx}{x\ln^2 x}$. *Ответ*: $-\frac{1}{\ln x}+C$.

б) $\int \frac{x^3-1}{x^4-4x+1}dx$. *Ответ*: $\frac{1}{4}\ln\left|x^4-4x+1\right|+C$.

в) $\int x^2 e^{x^3}dx$. *Ответ*: $\frac{1}{3}e^{x^3}+C$.

г) $\int \frac{x^3\,dx}{x^8+5}$. *Ответ*: $\frac{1}{4\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x^4}{\sqrt{5}}+C$.

Вариант 9

а) $\int \frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}dx$. *Ответ*: $-\ln\left|\sin x+\cos x\right|+C$.

б) $\int x\sin\left(1-x^2\right)dx$. *Ответ*: $\frac{1}{2}\cos\left(1-x^2\right)+C$.

в) $\int \frac{x^2\,dx}{1+x^6}$. *Ответ*: $\frac{1}{3}\operatorname{arctg} x^3+C$.

г) $\int \frac{xdx}{\cos^2 x^2}$. *Ответ*: $\frac{1}{2}\operatorname{tg} x^2+C$.

Вариант 10

а) $\int \frac{\sin 3x}{3+\cos 3x}\,dx$. *Ответ*: $-\frac{1}{3}\ln\left|3+\cos 3x\right|+C$.

б) $\int \frac{xdx}{\sin^2 x^2}$. *Ответ*: $-\frac{1}{2}\operatorname{ctg} x^2+C$.

в) $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{1-e^{2x}}}$. *Ответ*: $\arcsin e^x+C$.

г) $\int \frac{5^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$. *Ответ*: $\frac{2}{\ln 5}5^{\sqrt{x}}+C$.

Вариант 11

а) $\int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}}\,dx$. *Ответ*: $\frac{2}{3}\sqrt{(\arcsin x)^3}+C$.

б) $\int 4^{2-3x}\,dx$. *Ответ*: $-\frac{1}{3\ln 4}4^{2-3x}+C$.

в) $\int \sqrt{1+3\cos^2 x}\cdot\sin 2xdx$. *Ответ*: $-\frac{2}{9}\sqrt{\left(1+3\cos^2 x\right)^3}+C$.

г) $\int \frac{1+\sin x}{x-\cos x}\,dx$. *Ответ*: $\ln\left|x-\cos x\right|+C$.

Вариант 12

а) $\int \frac{\sqrt[3]{1+\ln x}}{x}\,dx$. *Ответ*: $\frac{3}{4}\sqrt[3]{(1+\ln x)^4}+C$.

б) $\int e^{\sin^2 x}\cdot\sin 2x\,dx$. *Ответ*: $e^{\sin^2 x}+C$.

в) $\int \frac{x^4\,dx}{x^{10}+5}$. *Ответ*: $\frac{1}{5\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x^5}{\sqrt{5}}+C$

г) $\int \frac{dx}{x\left(9-\ln^2 x\right)}$. *Ответ*: $\frac{1}{6}\ln\left|\frac{3+\ln x}{3-\ln x}\right|+C$.

Вариант 13

а) $\int \frac{dx}{x\ln^3 x}$. *Ответ*: $-\frac{1}{2\ln^2 x}+C$.

б) $\int \frac{x^4-1}{x^5-5x+3}\,dx$. *Ответ*: $\frac{1}{5}\ln\left|x^5-5x+3\right|+C$.

в) $\int \frac{\arcsin^4 x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$. *Ответ*: $\frac{1}{5}\arcsin^5 x+C$.

г) $\int \frac{x^2dx}{\cos^2 x^3}$. *Ответ*: $\frac{1}{3}\operatorname{tg} x^3+C$.

Вариант 14

а) $\int 4^{2-5x}\,dx$. *Ответ*: $-\frac{1}{5}\frac{4^{2-5x}}{\ln 4}+C$.

б) $\int \frac{2x-5}{x^2-5x+6}\,dx$. *Ответ*: $\ln\left|x^2-5x+6\right|+C$.

в) $\int x\sqrt{125-5x^2}\,dx$. *Ответ*: $-\frac{1}{15}\left(125-5x^2\right)^{\frac{3}{2}}+C$.

г) $\int \frac{\arcsin^3 x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$. *Ответ*: $\frac{\arcsin^4 x}{4}+C$.

Вариант 15

а) $\int \frac{\cos(\ln x)}{x}\,dx$. *Ответ*: $\sin(\ln x)+C$.

б) $\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}\,dx$. *Ответ*: $\frac{3}{4}(\operatorname{arctg} x)^{\frac{4}{3}}+C$.

в) $\int \cos^5 x \sin x\,dx$. *Ответ*: $-\frac{\cos^6 x}{6}+C$.

г) $\int x^2\sqrt{5x^3-7}\,dx$. *Ответ*: $\frac{2}{45}\sqrt{\left(5x^3-7\right)^3}+C$.

Интегрирование выражений, содержащих квадратный трехчлен в знаменателе

К ним относятся интегралы вида:

$$J_1=\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}, \qquad J_3=\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

$$J_2=\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}\,dx, \qquad J_4=\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx.$$

Для нахождения интегралов вида $J_1 - J_4$:

1) выделяем в знаменателе полный квадрат.
2) основание квадрата обозначаем через новую переменную.

Тогда интегралы J_1 и J_3 – будут табличными, а интегралы J_2 и J_4 можно представить в виде суммы двух интегралов, один из которых – табличный, а 2-й легко находится методом подведения под знак дифференциала (подстановки).

***Обучающий пример* 1.** $\displaystyle\int \frac{7-8x}{2x^2-3x+1}\,dx$.

Решение. Выделим из квадратного трехчлена полный квадрат и введем новую переменную:

$$\int \frac{7-8x}{2x^2-3x+1}\,dx = \left| \begin{array}{l} 2x^2-3x+1 = 2\left(x^2-\dfrac{3}{2}x+\dfrac{1}{2}\right) = \\ = 2\left(\left(x^2-2x\cdot\dfrac{3}{4}+\dfrac{9}{16}\right)-\dfrac{9}{16}+\dfrac{1}{2}\right) = 2\left(\left(x-\dfrac{3}{4}\right)^2-\dfrac{1}{16}\right) = \\ x-\dfrac{3}{4}=t, \quad x=t+\dfrac{3}{4}, \quad dx=dt. \end{array} \right|$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{7-8\left(t+\dfrac{3}{4}\right)}{t^2-\dfrac{1}{16}}\,dt = \frac{1}{2}\int \frac{1-8t}{t^2-\dfrac{1}{16}}\,dt = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2-\dfrac{1}{16}} - \frac{1}{2}\int \frac{8t}{t^2-\dfrac{1}{16}}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2-\dfrac{1}{16}} - 2\int \frac{2t}{t^2-\left(\dfrac{1}{4}\right)^2}\,dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\cdot\dfrac{1}{4}}\ln\left|\frac{t-\dfrac{1}{4}}{t+\dfrac{1}{4}}\right| - 2\ln\left|t^2-\frac{1}{16}\right| + C.$$

Возвращаясь к переменной x, окончательно получим:

$$\int \frac{7-8x}{2x^2-3x+1}\,dx = \ln\left|\frac{x-1}{x-0,5}\right| - 2\ln\left|x^2-1,5x+0,5\right| + C.$$

***Обучающий пример* 2.** $\displaystyle\int \frac{3x-5}{\sqrt{9+6x-3x^2}}\,dx$.

Решение. Выделяем полный квадрат:

$$9+6x-3x^2 = -3\left(x^2-2x-3\right) = -3\left(\left(x^2-2x+1\right)-1-3\right) =$$

$$= -3\left((x-1)^2-4\right) = 3\left(4-(x-1)^2\right).$$

$$J=\int\frac{3x-5}{\sqrt{9+6x-3x^2}}\,dx=\int\frac{3x-5}{\sqrt{3\left(4-(x-1)^2\right)}}\,dx=\begin{vmatrix}x-1=t,\ x=t+1\\ dx=dt\end{vmatrix}=$$

$$=\int\frac{3(t+1)-5}{\sqrt{3\left(4-t^2\right)}}\,dt=\frac{1}{\sqrt3}\int\frac{3t-2}{\sqrt{4-t^2}}\,dt=\frac{1}{\sqrt3}\int\frac{3tdt}{\sqrt{4-t^2}}-\frac{2}{\sqrt3}\int\frac{dt}{\sqrt{4-t^2}}=$$

$$=\frac{3}{\sqrt3}\int\frac{tdt}{\sqrt{4-t^2}}-\frac{2}{\sqrt3}\int\frac{dt}{\sqrt{4-t^2}}=-\frac{\sqrt3}{2}\int\frac{d\left(4-t^2\right)}{\left(4-t^2\right)^{\frac12}}-\frac{2}{\sqrt3}\arcsin\frac{t}{2}=$$

$$=-\frac{\sqrt3}{2}\int\left(4-t^2\right)^{-\frac12}d\left(4-t^2\right)-\frac{2}{\sqrt3}\arcsin\frac{t}{2}=-\sqrt3\sqrt{4-t^2}-\frac{2}{\sqrt3}\arcsin\frac{t}{2}+C=$$

$$=-\sqrt{9+6x-3x^2}-\frac{2}{\sqrt3}\arcsin\frac{x-1}{2}+C.$$

6. Найти интегралы самостоятельно, каждому студенту свой вариант (два студента у доски выполняют свои задания).

Вариант 1

а) $\int\frac{dx}{x^2-5x+6}$. *Ответ*: $\ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right|+C$.

б) $\int\frac{dx}{\sqrt{4x^2-8x+3}}$. *Ответ*: $\frac12\ln\left|x-1+\sqrt{x^2-2x+\frac34}\right|+C$.

в) $\int\frac{x+1}{2x^2+x+1}\,dx$. *Ответ*: $\frac14\ln\left|2x^2+x+1\right|+\frac{3}{2\sqrt7}\operatorname{arctg}\frac{4x+1}{\sqrt7}+C$.

г) $\int\frac{2x-1}{\sqrt{x^2-3x+4}}\,dx$. *Ответ*: $2\sqrt{x^2-3x+4}+2\ln\left|x-\frac32+\sqrt{x^2-3x+4}\right|+C$.

Вариант 2

а) $\int\frac{dx}{2x^2+3x+6}$. *Ответ*: $\frac{2}{\sqrt{39}}\operatorname{arctg}\frac{4x+3}{\sqrt{39}}+C$.

б) $\int\frac{dx}{\sqrt{4+8x-x^2}}$. *Ответ*: $\arcsin\frac{x-4}{\sqrt{20}}+C$.

в) $\int\frac{2x-1}{3x^2-6x-9}\,dx$. *Ответ*: $\frac13\ln\left|3x^2-6x+9\right|+\frac{1}{12}\ln\left|\frac{x-3}{x+1}\right|+C$.

г) $\int \frac{x-3}{\sqrt{2x^2-4x-1}}\,dx$. *Ответ*: $\frac{1}{2}\sqrt{2x^2-4x-1}-\sqrt{2}\ln\left|x-1+\sqrt{x^2-2x-\frac{1}{2}}\right|+C$.

Вариант 3

а) $\int \frac{dx}{3x^2-12x+3}$. *Ответ*: $\frac{1}{6\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x-2-\sqrt{3}}{x-2+\sqrt{3}}\right|+C$.

б) $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x-2x^2}}$. *Ответ*: $\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{4x+3}{5}+C$.

в) $\int \frac{2x-1}{2x^2+8x-6}\,dx$. *Ответ*: $\frac{1}{2}\ln\left|2x^2+8x-6\right|-\frac{5}{4\sqrt{7}}\ln\left|\frac{x+2-\sqrt{7}}{x+2+\sqrt{7}}\right|+C$.

г) $\int \frac{3x-7}{\sqrt{x^2-5x+1}}\,dx$. *Ответ*: $3\sqrt{x^2-5x+1}+\frac{1}{2}\ln\left|x-\frac{5}{2}+\sqrt{x^2-5x+1}\right|+C$.

Вариант 4

а) $\int \frac{dx}{1-2x-3x^2}$. *Ответ*: $-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{3x-1}{3x+3}\right|+C$.

б) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+1}}$. *Ответ*: $\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+1}\right|+C$.

в) $\int \frac{x-4}{5x^2-x+7}\,dx$. *Ответ*: $\frac{1}{10}\ln\left|5x^2-x+7\right|-\frac{39}{5\sqrt{139}}\operatorname{arctg}\frac{10x-1}{\sqrt{139}}+C$.

г) $\int \frac{7x-1}{\sqrt{2-3x-x^2}}\,dx$. *Ответ*: $-7\sqrt{2-3x-x^2}-\frac{23}{2}\arcsin\frac{2x+3}{\sqrt{17}}+C$.

Вариант 5

а) $\int \frac{dx}{x^2-6x+8}$. *Ответ*: $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-4}{x-2}\right|+C$.

б) $\int \frac{dx}{\sqrt{3-x-x^2}}$. *Ответ*: $\arcsin\frac{2x+1}{\sqrt{13}}+C$.

в) $\int \frac{x-7}{4x^2+3x-1}\,dx$. *Ответ*: $\frac{1}{8}\ln\left|4x^2+3x-1\right|-\frac{59}{40}\ln\left|\frac{8x-2}{8x+8}\right|+C$.

г) $\int \frac{2x+4}{\sqrt{3x^2+x-5}}\,dx$. *Ответ*: $\frac{2}{3}\sqrt{3x^2+x-5}+\frac{11}{3\sqrt{3}}\ln\left|x+\frac{1}{6}+\sqrt{x^2+\frac{x}{3}-\frac{5}{3}}\right|+C$.

Вариант 6

а) $\int \frac{dx}{5x^2-10x+25}$. *Ответ*: $\frac{1}{10}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{2}+C$.

б) $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x-2x^2}}$. *Ответ*: $\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{4x+3}{5}+C$.

в) $\int \frac{2x-1}{3x^2-6x-9}\,dx$. *Ответ*: $\frac{1}{3}\ln\left|3x^2-6x+9\right|+\frac{1}{12}\ln\left|\frac{x-3}{x+1}\right|+C$.

г) $\int \frac{2x+5}{\sqrt{3x^2+9x-4}}\,dx$.

Ответ: $\frac{2}{3}\sqrt{3x^2+9x-4}+\frac{2}{\sqrt{3}}\ln\left|x+\frac{3}{2}+\sqrt{x^2+3x-\frac{4}{3}}\right|+C$.

Вариант 7

а) $\int \frac{dx}{2x^2-3x+2}$. *Ответ*: $\ln\left|\frac{2x-2}{2x-1}\right|+C$.

б) $\int \frac{dx}{\sqrt{2+8x-2x^2}}$. *Ответ*: $\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{x-2}{\sqrt{5}}+C$.

в) $\int \frac{x+5}{x^2+x-2}\,dx$. *Ответ*: $\frac{1}{2}\ln\left|x^2+x-2\right|+\frac{3}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|+C$.

г) $\int \frac{2x+4}{\sqrt{3x^2+x-5}}\,dx$.

Ответ: $\frac{2}{3}\sqrt{3x^2+x-5}+\frac{11}{3\sqrt{3}}\ln\left|x+\frac{1}{6}+\sqrt{x^2+\frac{x}{3}-\frac{5}{3}}\right|+C$.

Вариант 8

а) $\int \frac{dx}{2x^2-3x+1}$. *Ответ*: $\ln\left|\frac{2x-2}{2x-1}\right|+C$.

б) $\int \frac{dx}{\sqrt{3+2x-2x^2}}$. *Ответ*: $\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{2x-1}{\sqrt{7}}+C$.

в) $\int \frac{x-3}{x^2-5x+4}\,dx$. *Ответ*: $\frac{1}{2}\ln\left|x^2-5x+4\right|-\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-4}{x-1}\right|+C$.

г) $\int \frac{x+5}{\sqrt{3-6x-x^2}}\,dx$. *Ответ*: $-\sqrt{3-6x-x^2}+2\arcsin\frac{x+3}{\sqrt{12}}+C$.

Вариант 9

а) $\int \frac{dx}{2x^2-3x-2}$. *Ответ*: $\frac{1}{5}\ln\left|\frac{2x-4}{2x+1}\right|+C$.

б) $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-4x+1}}$. *Ответ*: $\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|x-\frac{2}{3}+\sqrt{x^2-\frac{4}{3}x+\frac{1}{3}}\right|+C$.

в) $\int \frac{x+1}{2x^2+x+1}\,dx$. *Ответ*: $\frac{1}{4}\ln\left|2x^2+x+1\right|+\frac{3}{2\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{4x+1}{\sqrt{7}}+C$.

г) $\int \frac{4x+1}{\sqrt{2+x-x^2}}\,dx$. *Ответ*: $-4\sqrt{2+x-x^2}+3\arcsin\frac{2x-1}{3}+C$.

Вариант 10

а) $\int \frac{dx}{2x^2-2x+5}$. *Ответ*: $\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{3}+C$.

б) $\int \frac{dx}{\sqrt{3-x-x^2}}$. *Ответ*: $\arcsin\frac{2x+1}{\sqrt{13}}+C$.

в) $\int \frac{x+1}{3x^2-2x-3}\,dx$. *Ответ*: $\frac{1}{6}\ln\left|3x^2-2x-3\right|+\frac{2}{3\sqrt{10}}\ln\left|\frac{3x-1-\sqrt{10}}{3x-1+\sqrt{10}}\right|+C$.

г) $\int \frac{x-4}{\sqrt{2x^2-x+7}}\,dx$.

Ответ: $\frac{1}{2}\sqrt{2x^2-x+7}-\frac{15}{4\sqrt{2}}\ln\left|x-\frac{1}{4}+\sqrt{x^2-\frac{x}{2}-\frac{7}{2}}\right|+C$.

Вариант 11

а) $\int \frac{dx}{3x^2-9x+6}$. *Ответ*: $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|+C$.

б) $\int \frac{dx}{\sqrt{3+2x-2x^2}}$. *Ответ*: $\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{2x-1}{\sqrt{7}}+C$.

в) $\int \frac{5x-2}{2x^2-5x+2}\,dx$. *Ответ*: $\frac{5}{4}\ln\left|2x^2-5x+2\right|+\frac{17}{12}\ln\left|\frac{2x-4}{2x-1}\right|+C$.

г) $\int \frac{2x-13}{\sqrt{3x^2-3x-16}}\,dx$.

Ответ: $\frac{2}{3}\sqrt{3x^2-3x-16}-4\sqrt{3}\ln\left|x-\frac{1}{2}+\sqrt{x^2-x-\frac{16}{3}}\right|+C$.

Вариант 12

а) $\int \frac{dx}{x^2+4x+25}$. *Ответ*: $\frac{1}{\sqrt{21}}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{\sqrt{21}}+C$.

б) $\int \frac{dx}{\sqrt{2-2x-3x^2}}$. *Ответ*: $\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{3x+1}{\sqrt{7}}+C$.

в) $\int \frac{x\,dx}{2x^2+2x+5}$. *Ответ*: $\frac{1}{4}\ln\left|2x^2+2x+5\right|-\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{3}+C$.

г) $\int \frac{x-1}{\sqrt{3x^2-x+5}}\,dx$.

Ответ: $\frac{1}{3}\sqrt{3x^2-x+5}-\frac{5}{6\sqrt{3}}\ln\left|x-\frac{1}{6}+\sqrt{x^2-\frac{x}{3}+\frac{5}{3}}\right|+C$.

Вариант 13

а) $\int \frac{dx}{2x^2-2x+1}$. *Ответ*: $\operatorname{arctg}(2x-1)+C$.

б) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x-x^2}}$. *Ответ*: $\arcsin\frac{2x-1}{\sqrt{5}}+C$.

в) $\int \frac{3x-2}{5x^2-3x+2}\,dx$. *Ответ*: $\frac{3}{10}\ln\left|5x^2-3x+2\right|-\frac{11}{5\sqrt{31}}\operatorname{arctg}\frac{10x-3}{\sqrt{31}}+C$.

г) $\int \frac{2x+5}{\sqrt{4x^2+8x+9}}\,dx$.

Ответ: $\frac{1}{2}\sqrt{4x^2+8x+9}+\frac{3}{2}\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+\frac{9}{4}}\right|+C$.

Вариант 14

а) $\int \frac{dx}{8-2x-x^2}$. *Ответ*: $-\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-2}{x+4}\right|+C$.

б) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-8x+3}}$. *Ответ*: $\frac{1}{2}\ln\left|x-1+\sqrt{x^2-2x+\frac{3}{4}}\right|+C$.

в) $\int \frac{x\,dx}{2x^2+x+5}$. *Ответ*: $\frac{1}{4}\ln\left|2x^2+x+5\right|-\frac{1}{2\sqrt{39}}\operatorname{arctg}\frac{4x+1}{\sqrt{39}}+C$.

г) $\int \frac{2x-8}{\sqrt{1-x+x^2}}\,dx$. *Ответ*: $2\sqrt{1-x+x^2}-7\ln\left|x-\frac{1}{2}+\sqrt{x^2-x+1}\right|+C$.

Вариант 15

а) $\int \frac{dx}{5x - x^2 - 6}$. *Ответ*: $-\ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right| + C$.

б) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 - x + 4}}$. *Ответ*: $\frac{1}{2}\ln\left|x - \frac{1}{8} + \sqrt{x^2 - \frac{1}{4}x + 1}\right| + C$.

в) $\int \frac{2x-1}{3x^2 - 2x + 6}\,dx$. *Ответ*: $\frac{1}{3}\ln\left|3x^2 - 2x + 6\right| - \frac{1}{3\sqrt{17}}\operatorname{arctg}\frac{3x-1}{\sqrt{17}} + C$ /

г) $\int \frac{2x-10}{\sqrt{1 + x - x^2}}\,dx$. *Ответ*: $-2\sqrt{1 + x - x^2} - 9\arcsin\frac{2x-1}{\sqrt{5}} + C$.

Домашнее задание

1. Изучить теоретический материал по теме «Интегрирование по частям. Циклическое интегрирование».

2. Найти интегралы:

а) $\int \frac{\sqrt[5]{\ln^2(x+2)}}{x+2}\,dx$. *Ответ*: $\frac{5\sqrt[5]{\ln^7 x}}{7} + C$.

б) $\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{arctg}^5 2x}}{1 + 4x^2}\,dx$. *Ответ*: $\frac{3}{16}\sqrt[3]{\operatorname{arctg}^8 2x} + C$.

в) $\int e^{5\sin x + 4}\cos x\,dx$. *Ответ*: $\frac{1}{5}e^{5\sin x + 4} + C$.

г) $\int \frac{\sin 3x\,dx}{\sqrt[5]{\cos 3x - 4}}$. *Ответ*: $-\frac{5}{12}\sqrt[5]{(\sin 3x - 4)^4} + C$.

д) $\int \frac{dx}{2x - 3 - 4x^2}$. *Ответ*: $-\frac{1}{\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\frac{4x-1}{\sqrt{11}} + C$.

е) $\int \frac{x+4}{2x^2 - 6x - 8}\,dx$. *Ответ*: $\frac{1}{4}\ln\left|2x^2 - 6x - 8\right| + \frac{11}{20}\ln\left|\frac{x-4}{x+1}\right| + C$.

и) $\int \frac{3x-1}{\sqrt{2x^2 - 5x + 1}}\,dx$.

Ответ: $\frac{3}{2}\sqrt{2x^2 - 5x + 1} + \frac{11}{4\sqrt{2}}\ln\left|x - \frac{5}{4} + \sqrt{x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{1}{2}}\right| + C$.

IV. Интегрирование по частям. Циклическое интегрирование

1. Математический диктант.

а) $\int \frac{dx}{5x^2+7}$.

б) $\int \frac{dx}{x^2-25}$.

в) $\int \frac{x^2}{5x^3+4}\,dx$.

г) $\int e^{7x-5}\,dx$.

д) $\int \frac{\sin 2x}{1+3\cos 2x}\,dx$.

е) $\int \frac{e^{2x}}{5+e^{2x}}\,dx$.

ж) $\int \frac{3-7x}{1+x^2}\,dx$.

з) $\int \frac{dx}{2x^2+3x+1}$.

и) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+5x+3}}$.

2. ***Упражнение*** (преподаватель решает у доски).

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны. Верно ли, что

$$\int f(x)\cdot g(x)\,dx = \int f(x)\,dx \cdot \int g(x)\,dx,$$

т. е. интеграл от произведения двух функций равен произведению интегралов?

Рассмотрим на примере функций $f(x)=g(x)=x$.

$$\int x\cdot x\,dx = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3}+C.$$

$$\int x\,dx \cdot \int x\,dx = \frac{x^2}{2}\cdot\frac{x^2}{2}+C = \frac{x^4}{4}+C.$$

Очевидно, получили неверный результат.

К сожалению, не существует формулы, выражающей интеграл от произведения функций через интегралы от сомножителей. Однако формула

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du,$$

которую легко получить почленным интегрированием равенства

$$d(uv) = vdu + udv,$$

является ее подобием.

Формулу $\int u\,dv = uv - \int v\,du$ называют формулой интегрирования по частям. Очевидно, при ее применении подынтегральное выражение разбивается на 2 сомножителя (u и dv), из которых первый дифференцируется, а другой интегрируется. Это разбиение надо произвести так, чтобы вновь полученный интеграл в правой части был табличным или более простым, чем исходный.

Укажем некоторые типы интегралов, которые удобно вычислять методом интегрирования по частям.

***Интегралы вида* I**: $\int P_n(x)\,e^{kx}\,dx$,

$$\int P_n(x)\,a^{kx}\,dx,$$

$$\int P_n(x)\sin kx\,dx,$$

$$\int P_n(x)\cos kx\,dx,$$

где $P_n(x)$ – многочлен степени *n*.

Рекомендуется положить $u = P_n(x)$, а за dv взять все остальные сомножители. Так как при дифференцировании степень многочлена понижается на единицу, то интегрировать по частям следует столько раз, какова степень многочлена.

***Обучающий пример* 1.** Найти $\int x^2\,e^{3x}dx$.

$$\int x^2\,e^{3x}dx = \left| \begin{matrix} x^2 = u & \Rightarrow & du = 2xdx \\ e^{3x}dx = dv \Rightarrow v = \int e^{3x}dx = \frac{1}{3}e^{3x} \end{matrix} \right| = \frac{1}{3}x^2e^{3x} - \int \frac{1}{3}e^{3x}\cdot 2xdx =$$

$$= \frac{1}{3}x^2e^{3x} - \frac{2}{3}\int xe^{3x}dx = \left| \begin{matrix} x = u & \Rightarrow du = dx \\ e^{3x}dx = dv \Rightarrow v = \frac{1}{3}e^{3x} \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{3}x^2e^{3x} - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{3}\int e^{3x}dx\right) =$$

$$= \frac{1}{3}x^2e^{3x} - \frac{2}{3}\left(\frac{x}{3}e^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x}\right) + C.$$

П р и м е ч а н и е. Отметим, что при нахождении v постоянная интегрирования C принимается равной 0.

***Интегралы вида* II**: $\int P_n(x)\arcsin x\,dx$,

$$\int P_n(x)\arccos x\,dx,$$

$$\int P_n(x)\,\mathrm{arctg}\,x\,dx,$$

$$\int P_n(x)\,\mathrm{arcctg}\,x\,dx,$$

$$\int P_n(x)\ln x\,dx.$$

В указанных интегралах целесообразно положить $P_n(x)dx = dv$, а через u обозначить остальные сомножители.

***Обучающий пример* 2.** Найти $\int\left(x^2-x+1\right)\ln x\,dx$.

Решение.

$$\int\left(x^2-x+1\right)\ln x\,dx=\left|\begin{array}{l}\ln x=u \qquad \Rightarrow \quad du=\dfrac{1}{x}dx\\ \left(x^2-x+1\right)dx=dv\Rightarrow v=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^2}{2}+x\end{array}\right|=$$

$$=\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x\right)\ln x-\int\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x\right)\frac{1}{x}dx=$$

$$=\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x\right)\ln x-\int\left(\frac{x^2}{3}-\frac{x}{2}+1\right)dx=$$

$$=\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x\right)\ln x-\frac{x^3}{9}+\frac{x^2}{4}-x+C.$$

***Обучающий пример* 3.** Найти $\int\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x}\,dx$.

Решение.

$$\int\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x}\,dx=\left|\begin{array}{l}\arcsin\sqrt{x}=u \quad \Rightarrow \quad du=\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}dx\\ \sqrt{1-x}dx=dv \quad \Rightarrow \quad v=\int\sqrt{1-x}dx=-\dfrac{2\sqrt{(1-x)^3}}{3}\end{array}\right|=$$

$$=-\frac{2}{3}\sqrt{(1-x)^3}\cdot\arcsin\sqrt{x}+\int\frac{2}{3}\sqrt{(1-x)^3}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x}\cdot 2\sqrt{x}}dx=$$

$$=-\frac{2}{3}\sqrt{(1-x)^3}\cdot\arcsin\sqrt{x}+\frac{1}{3}\int\frac{1-x}{\sqrt{x}}dx=$$

$$=-\frac{2}{3}\sqrt{(1-x)^3}\cdot\arcsin\sqrt{x}+\frac{1}{3}\left(\int x^{-\frac{1}{2}}dx-\int x^{\frac{1}{2}}dx\right)=$$

$$=-\frac{2}{3}\sqrt{(1-x)^3}\arcsin\sqrt{x}+\frac{2}{3}\sqrt{x}-\frac{2}{9}\sqrt{x^3}+C.$$

***Обучающий пример* 4.** Найти $\int e^x\cos x\,dx$.

Решение:

$$\underline{\int e^x \cos x\, dx} = \left| \begin{matrix} e^x = u & \Rightarrow & du = e^x dx \\ \cos x\, dx = dv & \Rightarrow & v = \sin x \end{matrix} \right| = e^x \sin x - \int \sin x \cdot e^x dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} e^x = u & \Rightarrow & du = e^x dx \\ \sin x dx = dv & \Rightarrow & v = -\cos x \end{matrix} \right| = e^x \sin x - \left(-e^x \cos x + \int \cos x \cdot e^x dx \right) =$$

$$= e^x \sin x + e^x \cos x - \underline{\int e^x \cos x\, dx}.$$

В итоге снова получили исходный интеграл, и может показаться, что решение зашло в тупик. Как выбраться из него?

Обозначив искомый интеграл через J, получим уравнение

$$J = e^x \sin x + e^x \cos x - J .$$

Перенося J в левую часть, и решив уравнение относительно J, получим

$$2J = e^x \sin x + e^x \cos x \quad \Rightarrow \quad J = \frac{e^x \sin x + e^x \cos x}{2} + C .$$

Появление константы C объясняется тем, что фактически все интегральные формулы, в том числе и формула интегрирования по частям, верны с точностью до константы, которую обычно в этих формулах не пишут. Ну, а поскольку в данном случае произвольная постоянная C неявно присутствует в интеграле из левой части равенства, то она должна появиться и в правой части.

К третьей группе относятся так называемые циклические интегралы. После двукратного применения формулы интегрирования по частям получается уравнение относительно искомого интеграла, из которого окончательно находится его выражение.

***Интегралы вида* III:** $\int e^{kx} \sin bx\, dx$, $\int a^{kx} \sin bx\, dx$,

$\int e^{kx} \cos bx\, dx$, $\int a^{kx} \cos bx\, dx$,

$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$, $\int \sqrt{a^2 + x^2}\, dx$,

где k, b, a – const.

***Обучающий пример* 5.** Найти $\int \sqrt{1 + x^2} dx$.

Решение.

$$\int \sqrt{1+x^2} dx = \int \frac{1+x^2}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} + \int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} dx =$$

$$= \ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right| + \int x \cdot \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} x = u \quad \Rightarrow \qquad du = dx \\ \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx = dv \Rightarrow v = \int \dfrac{xdx}{\sqrt{1+x^2}} \; = \dfrac{1}{2}\int\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}} d\left(1+x^2\right) = \sqrt{1+x^2} \end{array} \right| =$$

$$= \ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right| + \left(x\sqrt{1+x^2} - \int\sqrt{1+x^2}\,dx\right).$$

Обозначив $\int\sqrt{1+x^2}\,dx = J$, получим $J = \ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right| + x\sqrt{1+x^2} - J$

$\Rightarrow\; J = \dfrac{1}{2}\left(x\sqrt{1+x^2} + \ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|\right) + C$.

3. Выполнить самостоятельно; каждый студент решает свой вариант (два студента у доски выполняют свои задания).

Вариант 1

а) $\int x^2 \cos 2x\,dx$. *Ответ*: $\dfrac{x^2}{2}\sin 2x + \dfrac{x}{2}\cos 2x - \dfrac{1}{4}\sin 2x + C$.

б) $\int \ln\left(x+4\right)dx$. *Ответ*: $x\ln\left(x+4\right) - x + 4\ln\left(x+4\right) + C$.

в) $\int \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{x+1}}\,dx$. *Ответ*: $2\sqrt{x+1}\arcsin x + 4\sqrt{1-x} + C$.

г) $\int 2^x \cos x\,dx$. *Ответ*: $\dfrac{2^x\left(\sin x + \ln 2\cos x\right)}{1+\ln^2 2} + C$.

Вариант 2

а) $\int x^2 \sin\left(2x-3\right)dx$. *Ответ*: $\dfrac{x}{2}\sin 2x - \dfrac{x^2}{2}\cos 2x + \dfrac{1}{4}\cos 2x + C$.

б) $\int \ln\left(x+1\right)dx$. *Ответ*: $x\ln\left(x+1\right) - x + \ln\left(x+1\right) + C$.

в) $\int \sqrt{1-x}\arccos\sqrt{x}\,dx$. *Ответ*: $\dfrac{2}{9}\sqrt{x^3} - \dfrac{2}{3}\sqrt{x} - \dfrac{2}{3}\sqrt{\left(1-x\right)^3}\arccos\sqrt{x} + C$.

г) $\int 3^x \cos x\,dx$. *Ответ*: $\dfrac{3^x\left(\sin x + \ln 3\cos x\right)}{1+\ln^2 3} + C$.

Вариант 3

а) $\int x^2\left(\sin x+1\right)dx$. *Ответ*: $2x\sin x-x^2\cos x+2\cos x+\dfrac{x^3}{3}+C$.

б) $\int \ln\left(x+5\right)dx$. *Ответ*: $x\ln\left(x+5\right)-x+5\ln\left(x+5\right)+C$.

в) $\int \dfrac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\,dx$. *Ответ*: $2\sqrt{x}-2\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x}+C$.

г) $\int 4^x\cos x\,dx$. *Ответ*: $\dfrac{4^x\left(\sin x+\ln 4\cos x\right)}{1+\ln^2 4}+C$.

Вариант 4

а) $\int\left(x^2+x\right)e^{-x}\,dx$. *Ответ*: $C-\left(x^2+3x+3\right)e^{-x}$.

б) $\int \ln\left(x+6\right)dx$. *Ответ*: $x\ln\left(x+6\right)-x+6\ln\left(x+6\right)+C$.

в) $\int x\,\mathrm{arctg}\,2x\,dx$. *Ответ*: $\dfrac{x^2}{2}\mathrm{arctg}\,2x-\dfrac{x}{4}+\dfrac{1}{8}\mathrm{arctg}\,2x+C$.

г) $\int e^x\sin x\,dx$. *Ответ*: $\dfrac{1}{2}e^x\left(\sin x-\cos x\right)+C$.

Вариант 5

а) $\int\left(x^2-1\right)e^{-x}\,dx$. *Ответ*: $C-\left(x+1\right)^2e^{-x}$.

б) $\int \ln\left(x+7\right)dx$. *Ответ*: $x\ln\left(x+7\right)-x+7\ln\left(x+7\right)+C$.

в) $\int \dfrac{x\,\mathrm{arctg}\,x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$. *Ответ*: $\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{arctg}\,x-\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|+C$.

г) $\int 3^x\sin x\,dx$. *Ответ*: $\dfrac{-3^x\cos x+3^x\ln 3\sin x}{1+\ln^2 3}+C$.

Вариант 6

а) $\int x^2\ln x\,dx$. *Ответ*: $\dfrac{x^3}{3}\ln x-\dfrac{x^3}{9}+C$.

б) $\int\left(x^2-1\right)e^x\,dx$. *Ответ*: $\left(x-1\right)^2e^x+C$.

в) $\int \mathrm{arctg}\left(x+5\right)dx$.

Ответ: $x\,\mathrm{arctg}\left(x+5\right)-\dfrac{1}{2}\ln\left|x\quad+10x+26\right|+5\,\mathrm{arctg}\left(x+5\right)+C$.

г) $\int 4^x\sin x\,dx$. *Ответ*: $\dfrac{-4^x\cos x+4^x\ln 4\sin x}{1+\ln^2 4}+C$.

Вариант 7

а) $\int\left(x^2+x\right)e^x\,dx$. *Ответ*: $\left(x^2-x+1\right)e^x+C$.

б) $\int x\ln 6x\,dx$. *Ответ*: $\dfrac{x^2}{4}(2\ln 6x-1)+C$.

в) $\int x\,\mathrm{arctg}\,4x\,dx$. *Ответ*: $\dfrac{1}{8}\left(\left(4x^2+\dfrac{1}{4}\right)\mathrm{arctg}\,4x-x\right)+C$.

г) $\int 5^x\sin x\,dx$. *Ответ*: $\dfrac{-5^x\cos x+5^x\ln 5\sin x}{1+\ln^2 5}+C$.

Вариант 8

а) $\int(x+7)e^x\,dx$. *Ответ*: $(x+6)e^x+C$.

б) $\int x^3\ln x\,dx$. *Ответ*: $\dfrac{x^4}{4}\ln x-\dfrac{x^4}{16}+C$.

в) $\int x\,\mathrm{arctg}\,x\,dx$. *Ответ*: $C-\dfrac{x}{2}+\dfrac{x^2+1}{2}\mathrm{arctg}\,x$.

г) $\int 6^x\sin x\,dx$. *Ответ*: $\dfrac{-6^x\cos x+6^x\ln 6\sin x}{1+\ln^2 6}+C$.

Вариант 9

а) $\int x\cos x\,dx$. *Ответ*: $x\sin x+\cos x+C$.

б) $\int\dfrac{\ln x}{x^3}\,dx$. *Ответ*: $C-\dfrac{1+2\ln x}{4x^2}$.

в) $\int\arcsin x\,dx$. *Ответ*: $x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$.

г) $\int 5^x\cos x\,dx$. *Ответ*: $\dfrac{5^x(\sin x+\ln 5\cos x)}{1+\ln^2 5}+C$.

Вариант 10

а) $\int x\cos 3x\,dx$. *Ответ*: $\dfrac{x}{3}\sin 3x+\dfrac{1}{9}\cos 3x+C$.

б) $\int x^4\ln x\,dx$. *Ответ*: $\dfrac{x^5}{5}\ln x-\dfrac{x^5}{25}+C$.

в) $\int\dfrac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$. *Ответ*: $x-\sqrt{1-x^2}\arcsin x+C$.

г) $\int 7^x\sin x\,dx$. *Ответ*: $\dfrac{-7^x\cos x+7^x\ln 7\sin x}{1+\ln^2 7}+C$.

Вариант 11

а) $\int x\cos 4x\,dx$. *Ответ*: $\frac{x}{4}\sin 4x+\frac{1}{16}\cos 4x+C$.

б) $\int x^5\ln x\,dx$. *Ответ*: $\frac{x^6}{6}\ln x-\frac{x^6}{36}+C$.

в) $\int\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x}}\,dx$. *Ответ*: $4\sqrt{1-x}-2\sqrt{1-x}\arcsin x+C$.

г) $\int 8^x\sin x\,dx$. *Ответ*: $\frac{-8^x\cos x+8^x\ln 8\sin x}{1+\ln^2 8}+C$.

Вариант 12

а) $\int\left(x^2-x+1\right)e^{-x}\,dx$. *Ответ*: $C-\left(x^2+x+2\right)e^{-x}$.

б) $\int\frac{\ln x}{x^2}\,dx$. *Ответ*: $-\frac{\ln|x|+1}{x}+C$.

в) $\int\frac{x\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$. *Ответ*: $C-x-\sqrt{1-x^2}\arccos x$.

г) $\int 6^x\cos x\,dx$. *Ответ*: $\frac{6^x\left(\sin x+\ln 6\cos x\right)}{1+\ln^2 6}+C$.

Вариант 13

а) $\int\left(x^2-x+1\right)e^{x}\,dx$. *Ответ*: $\left(x^2-3x+4\right)e^{x}+C$.

б) $\int\sqrt{x}\ln x\,dx$. *Ответ*: $\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\left(\ln|x|-\frac{2}{3}\right)+C$.

в) $\int\frac{\arccos x}{\sqrt{1+x}}\,dx$. *Ответ*: $2\sqrt{1+x}\arccos x-4\sqrt{1-x}+C$.

г) $\int 7^x\cos x\,dx$. *Ответ*: $\frac{7^x\left(\sin x+\ln 7\cos x\right)}{1+\ln^2 7}+C$.

Вариант 14

а) $\int\left(x^2+4\right)e^{2x}\,dx$. *Ответ*: $\frac{1}{2}\left(x^2+4\right)e^{2x}+\frac{1}{2}xe^{2x}+\frac{1}{4}e^{2x}+C$.

б) $\int x^6\ln x\,dx$. *Ответ*: $\frac{x^7}{7}\ln x-\frac{x^7}{47}+C$.

в) $\int\frac{x\,\mathrm{arctg}\,x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$. *Ответ*: $\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{arctg}\,x+\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|+C$.

г) $\int 9^x \sin x\, dx$. *Ответ*: $\dfrac{-9^x \cos x + 9^x \ln 9 \sin x}{1+\ln^2 9} + C$.

Вариант 15

а) $\int \left(x^2-3\right)\cos x\, dx$. *Ответ*: $\left(x^2-5\right)\sin x + 2x\cos x + C$.

б) $\int x^7 \ln x\, dx$. *Ответ*: $\dfrac{x^8}{8}\ln x - \dfrac{x^8}{64} + C$.

в) $\int x \operatorname{arcctg} x\, dx$. *Ответ*: $\dfrac{x^2}{2}\operatorname{arcctg} x + \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{2}\operatorname{arcctg} x + C$.

г) $\int 8^x \cos x\, dx$**.** *Ответ*: $\dfrac{8^x\left(\sin x + \ln 8 \cos x\right)}{1+\ln^2 8} + C$.

В заключение отметим, что указанные три группы не исчерпывают всех интегралов, которые интегрируются по частям.

***Обучающий пример* 6.** Найти $\int \dfrac{xdx}{\cos^2 x}$.

Решение: Ни к одному из указанных трех групп его отнести не возможно, тем не менее, он хорошо интегрируется по частям.

$$\int \frac{xdx}{\cos^2 x} = \begin{vmatrix} u = x; & du = dx \\ dv = \dfrac{dx}{\cos^2 x}; & v = \operatorname{tg} x \end{vmatrix} = x\operatorname{tg} x - \int \operatorname{tg} x\, dx = x\operatorname{tg} x - \int \frac{\sin x}{\cos x}\, dx =$$

$$= x\operatorname{tg} x + \ln\left|\cos x\right| + C.$$

Домашнее задание

1. Изучить теоретический материал по теме «Интегрирование простейших рациональных дробей. Интегрирование рациональных функций».
2. Найти:

1) $\int x \cdot 2^x\, dx$. *Ответ*: $\dfrac{2^x\left(x\ln 2 - 1\right)}{\ln^2 2} + C$.

2) $\int \ln^2 x\, dx$. *Ответ*: $x\left(\ln^2 x - 2\ln x + 2\right) + C$.

3) $\int x \sin x \cos x\, dx$. *Ответ*: $\dfrac{1}{8}\sin 2x - \dfrac{x}{4}\cos 2x + C$.

4) $\int \dfrac{\ln \cos x}{\cos^2 x}\, dx$. *Ответ*: $\operatorname{tg} x \ln\left(\cos x\right) + \operatorname{tg} x - x + C$.

5) $\int \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx$. *Ответ*: $x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\sqrt{1+x^2}+C$.

6) $\int \cos(\ln x)\,dx$. *Ответ*: $\frac{x}{2}\left(\sin(\ln x)+\cos(\ln x)\right)+C$.

7) $\int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^k}$.

$$\textit{Ответ}:\ J_k=\frac{1}{a^2}\left(\frac{2k-3}{2k-2}J_{k-1}+\frac{t}{2(k-1)\left(t^2+a^2\right)^{k-1}}\right)+C.$$

V. Интегрирование простейших рациональных дробей. Интегрирование рациональных функций

1. Проверка домашнего задания:

а) Два студента решают на доске примеры № 5 и № 6 из домашнего задания, у остальных бегло проверяется выполнение домашнего задания.

б) На доске записываем рекуррентную формулу для нахождения интеграла
$$\int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^k}.$$

2. Краткий теоретический обзор с использованием лекционного материала.

Различают целую рациональную функцию – многочлен и дробно-рациональную функцию – отношение двух многочленов. Интегрирование целой рациональной функции (многочлена) не вызывает затруднений, так как сводится к интегрированию суммы степенных функций. Поэтому остановимся подробнее на интегрировании дробно-рациональной функции:

$$R(x)=\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}=\frac{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m}{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n}.$$

Если $m<n$, то дробь называется правильной, в противном случае – неправильной. Неправильную дробь всегда можно представить в виде суммы целой части (многочлена) и правильной дроби, разделив по правилу деления многочленов числитель на знаменатель.

Так как целая часть интегрируется непосредственно, то вопрос об интегрировании дробно-рациональной функции сводится к интегрированию правильной дроби. Для этого существует общий метод разложения ее на сумму простейших дробей.

К простейшим дробям относятся:

I. $\dfrac{A}{(x-a)}$;

II. $\dfrac{A}{(x-a)^k}$, $(k \geq 2,\ k \in N)$;

III. $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$, $\left(D = p^2 - 4q < 0\right)$;

IV. $\dfrac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^k}$, $\left(k \geq 2,\ D = p^2 - 4q < 0\right)$,

где A, a, M, N, p, q – действительные числа.

I. Интеграл от простейших рациональных дробей первого вида подведением под знак дифференциала знаменателя сводится к табличному.

$$\int \frac{A}{x-a}dx = A\int \frac{d(x-a)}{x-a} = A\ln|x-a| + C.$$

II. Интеграл от простейших рациональных дробей второго вида подведением под знак дифференциала знаменателя сводится к табличному:

$$\int \frac{A}{(x-a)^k}dx = A\int (x-a)^{-k}d(x-a) = A\frac{(x-a)^{1-k}}{1-k} + C.$$

III. Интегрирование простейших рациональных дробей третьего вида рассмотрено нами ранее.

IV. Интегрирование простейших дробей четвертого типа $\displaystyle\int \frac{Mx+N}{\left(x^2+px+g\right)^k}dx$ начинается с выделения полного квадрата

$$x^2 + px + g = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(g - \frac{p^2}{4}\right)$$

с последующей подстановкой $x + \dfrac{p}{2} = t$. Тогда исходный интеграл представляется в виде суммы двух интегралов, один из которых легко приводится к табличному, а второй находится с помощью рекуррентной формулы

$$J_n = \int \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^n} = \frac{1}{a^2}\left[\frac{2n-3}{2(n-1)}J_{n-1} + \frac{x}{2(n-1)\left(x^2+a^2\right)^{n-1}}\right]. \qquad (*)$$

***Обучающий пример* 1.** Найти $\int \frac{x-1}{\left(x^2+2x+3\right)^2}\,dx = J$ **.**

Решение. Так как $x^2+2x+3=(x+1)^2+2$, то сделаем подстановку $x+1=t$, тогда получим

$$J=\int \frac{t-2}{\left(t^2+2\right)^2}\,dt=\int \frac{t\,dt}{\left(t^2+2\right)^2}-2\int \frac{dt}{\left(t^2+2\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\int \left(t^2+2\right)^{-2} d\left(t^2+2\right)-2\int \frac{dt}{\left(t^2+2\right)^2}=-\frac{1}{2\left(t^2+2\right)}-2J_2.$$

Интеграл $J_2=\int \frac{dt}{\left(t^2+2\right)^2}$ вычислим по рекуррентной формуле $(*)$

Здесь $a=2$, $n=2$.

$$J_1=\int \frac{dt}{t^2+2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}}+C.$$

$$J_2=\int \frac{dt}{\left(t^2+2\right)^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{2\cdot 2-3}{2\cdot 2-2}J_1+\frac{t}{2(2-1)\left(t^2+2\right)^{2-1}}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}}+\frac{t}{2\left(t^2+2\right)}\right)+C=$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}}+\frac{t}{4\left(t^2+2\right)}+C.$$

Тогда $\int \frac{t-2}{\left(t^2+2\right)^2}\,dt=-\frac{1}{2\left(t^2+2\right)}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}}-\frac{t}{2\left(t^2+2\right)}+C.$

Возвращаясь к переменной *x*, получим

$$\int \frac{x-1}{\left(x^2+2x+3\right)^2}\,dx=-\frac{1}{2\left(x^2+2x+3\right)}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}}-\frac{x+1}{2\left(x^2+2x+3\right)}+C.$$

Каждая правильная дробь может быть представлена в виде суммы простейших дробей указанных четырех типов. Напоминаем, что для разложения правильной рациональной дроби $\frac{Q(x)}{P(x)}$ на простейшие дроби, нужно:

а) разложить знаменатель $P(x)$ на линейные и квадратичные множители, не имеющие действительных корней:

$$P(x)=(x-a)^m\cdot\ldots\cdot(x-b)^k\cdot\left(x^2+px+g\right)^n\cdot\ldots\cdot\left(x^2+cx+d\right)^r;$$

б) написать схему разложения данной дроби на простейшие дроби в следующем виде:

$$\frac{Q(x)}{P(x)}=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{A_m}{(x-a)^m}+\ldots+$$

$$+\frac{B_1}{x-b}+\frac{B_2}{(x-b)^2}+\ldots+\frac{B_k}{(x-b)^k}+$$

$$+\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+g}+\frac{M_2x+N_2}{\left(x^2+px+g\right)^2}+\ldots+\frac{M_nx+N_n}{\left(x^2+px+g\right)^n}+\ldots+$$

$$+\frac{C_1x+D_1}{x^2+cx+d}+\frac{C_2x+D_2}{\left(x^2+cx+d\right)^2}+\ldots+\frac{C_rx+D_r}{\left(x^2+cx+d\right)^r},$$

где $A_1, \ldots, B_1, \ldots, M_1, \ldots, N_1, \ldots, C_1, \ldots, D_1, \ldots D_r$ – некоторые постоянные.

В эту схему для каждого множителя в разложении знаменателя $P(x)$ вписывается столько простейших дробей, какова его кратность (m, k, n, r).

Знаменателями простейших дробей являются все целые степени каждого множителя в разложении $P(x)$, начиная с первой степени и кончая той степенью, которую множитель имеет в разложении $P(x)$.

Числителями простейших дробей служат либо постоянные $A_1, A_2, \ldots$ либо линейные функции $M_1x+N_1, \ldots$ смотря по тому, является ли знаменатель дроби некоторой степенью линейной или квадратной функции.

в) правую часть разложения нужно привести к общему знаменателю и выполнить действие сложения;

г) знаменатели левой и правой частей равенства равны, значит, должны быть равны и числители;

д) коэффициенты A_1, $A_2, \ldots$, B_1, $B_2, \ldots$ находятся с помощью метода неопределенных коэффициентов или метода частных значений (иногда комбинируют оба метода).

Таким образом, интегрируя правильную дробь, мы сначала раскладываем ее на сумму простейших, а затем интегрируем каждое слагаемое в этом разложении.

***Обучающий пример* 2.** Найти $\int\frac{5x^3+9x^2-22x-8}{x^3-4x}dx$.

Решение. Подынтегральная рациональная дробь неправильная, т. к. степень числителя равна степени знаменателя. Поэтому выделяем целую часть.

$$\begin{array}{r|l} -\,5x^3+9x^2-22x-8 & \underline{x^3-4x} \\ \underline{5x^3-20x\qquad\quad} & \quad 5 \\ 9x^2-2x-8 & \end{array}$$

Таким образом, $\int \frac{5x^3+9x^2-22x-8}{x^3-4x}dx = \int\left(5+\frac{9x^2-2x-8}{x^3-4x}\right)dx$.

Знаменатель правильной остаточной дроби разлагается на множители: $x^3-4x = x\left(x^2-4\right) = x(x-2)(x+2)$.

Каждому множителю знаменателя вида $(x-a)$ в разложении правильной дроби на простейшие соответствует слагаемое вида $\frac{A}{x-a}$. Поэтому в данном случае получится разложение

$$\frac{9x^2-2x-8}{x^3-4x} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+2}.$$

Приводя правую часть к общему знаменателю и приравнивая числители, получим тождество

$$9x^2-2x-8 = A(x-2)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x-2).$$

Найдем коэффициенты A, B, C методом частных значений, состоящим в том, что после приравнивания числителей, аргументу x придают некоторые удобные значения. Эти удобные значения совпадают с действительными корнями знаменателя подынтегральной дроби. Так, в рассматриваемом случае, отмечая за чертой слева значения, придаваемые аргументу x, получим

$$\begin{array}{r|ll} x=0 & -8=-4A, & A=2 \\ x=2 & 24=8B, & B=3 \\ x=-2 & 32=8C, & C=4 \end{array}$$

Эти коэффициенты можно было найти методом неопределённых коэффициентов, или иначе – способом сравнения коэффициентов.

$$9x^2-2x-8 = Ax^2-4A+Bx^2+2B+Cx^2-2Cx.$$

Коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях тождества должны быть равны. Поэтому, отмечая за чертой слева, при каких степенях x сравниваются коэффициенты, получим систему уравнений:

$$x^2\left|9=A+B+C\right.$$

$$x^1\left|-2=2B-2C\right.$$

$$x^0\left|-8=-4A\right.$$

Решив эту систему уравнений, найдём A = 2, B = 3, C = 4. Заменяя под знаком интеграла остаточную дробь её разложением на простейшие дроби (с подставленными в него найденными значениями коэффициентов), и, находя нужные интегралы последовательно, получим

$$\int\frac{5x^3+9x^2-22x-8}{x^3-4x}dx=\int\left(5+\frac{2}{x}+\frac{3}{x-2}+\frac{4}{x+2}\right)dx=$$

$$=5\int dx+2\int\frac{dx}{x}+3\int\frac{dx}{x-2}+4\int\frac{dx}{x+2}=$$

$$=5x+2\ln|x|+3\ln|x-2|+4\ln|x+2|+C.$$

Обучающий пример 3. Найти $\int\frac{x^3-2x+2}{(x-1)^2\left(x^2+1\right)}dx$.

Решение: Подынтегральная дробь правильная. Её знаменатель уже разложен на множители. Множителю x^2+1 знаменателя в разложении подынтегральной функции будет соответствовать простейшая дробь $\frac{Mx+N}{x^2+1}$. Разложение подынтегральной функции на простейшие дроби запишем следующим образом:

$$\frac{x^3-2x+2}{(x-1)^2\left(x^2+1\right)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{Mx+N}{x^2+1}.$$

Приводя правую часть к общему знаменателю и приравнивая числители, получим $x^3-2x+2=A(x-1)\left(x^2+1\right)+B\left(x^2+1\right)+(Mx+N)(x-1)^2$ или

$$x^3-2x+2=(A+M)x^3+(B-2M-A+N)x^2+(A-M-2N)x+B-A+N.$$

Комбинируя методы частных значений и сравнения коэффициентов, найдём

$$\left.\begin{array}{l} x=1\big|1=2B, B=\dfrac{1}{2} \\ x^3\big|1=A+M \\ x^2\big|0=B-A+N-2M \\ x^0\big|2=-A+B+N \end{array}\right\}, \qquad \begin{cases} B=\dfrac{1}{2} \\ 1=A+M \\ -2M=-2 \\ -A+N=\dfrac{3}{2} \end{cases}, \qquad \begin{cases} B=\dfrac{1}{2} \\ A=0 \\ M=1 \\ N=\dfrac{3}{2} \end{cases}.$$

Поэтому

$$\int\frac{x^3-2x+2}{(x-1)^2\left(x^2+1\right)}dx=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x-1)^2}+\int\frac{x+\frac{3}{2}}{x^2+1}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int(x-1)^{-2}d(x-1)+\frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2+1}dx+\frac{3}{2}\int\frac{dx}{x^2+1}=$$

$$=-\frac{1}{2(x-1)}+\frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right|+\frac{3}{2}\operatorname{arctg}x+C.$$

3. Разминка. Представить в виде суммы простейших дробей (не находя коэффициентов):

а) $\dfrac{2x-3}{(x-1)^2(x+2)}$;

б) $\dfrac{x-3}{(x-1)^3\left(x^2-2x+5\right)}$;

в) $\dfrac{x^2+2}{(x-1)(x+1)^2}$;

г) $\dfrac{1}{\left(x^2+4\right)\left(x^2+1\right)}$;

д) $\dfrac{x+3}{x\cdot\left(x^2+1\right)^2}$;

е) $\dfrac{2x+3}{(x-2)^3}$.

4. Выполнить самостоятельно; каждый студент решает свой вариант (два студента у доски выполняют свои задания).

Вариант 1

а) $\displaystyle\int\frac{2x^4+8x^3+9x^2-7}{(x+3)\left(x^2+x-2\right)}dx$. *Ответ*: $x^2+5\ln|x+3|+\ln|x+2|+\ln|x-1|+C$.

б) $\displaystyle\int\frac{x^2-6x+8}{x^3+8}dx$. *Ответ*: $2\ln|x+2|-\dfrac{1}{2}\ln\left|x^2-2x+4\right|-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{x-1}{\sqrt{3}}+C$.

в) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^3-x^2}$. *Ответ*: $\dfrac{1}{x}-\ln|x|+\ln|x-1|+C$.

Вариант 2

а) $\int \frac{43x-67}{(x-1)\left(x^2-x-12\right)}dx$. *Ответ*: $2\ln|x-1|+5\ln|x-4|-7\ln|x+3|+C$.

б) $\int \frac{2x^2+1}{x^3-2x^2+x}dx$. *Ответ*: $\ln|x|+\ln|x-1|-\frac{3}{x-1}+C$.

в) $\int \frac{3x+13}{(x-1)\left(x^2+2x+5\right)}dx$.

Ответ: $2\ln|x-1|-\ln\left|x^2+2x+5\right|-\frac{1}{2}arctg\frac{x+1}{2}+C$.

Вариант 3

а) $\int \frac{3x^2+20x+9}{(x+5)\left(x^2+4x+3\right)}dx$. *Ответ*: $6\ln|x+3|-\ln|x+1|+2\ln|x+5|+C$.

б) $\int \frac{x^2+x+2}{x^3+x^2}dx$. *Ответ*: $2\ln|x+1|-\ln|x|-\frac{2}{x}+C$.

в) $\int \frac{12-6x}{(x+1)\left(x^2-4x+13\right)}dx$.

Ответ: $\ln|x+1|-\frac{1}{2}\ln\left|x^2-4x+13\right|-\mathrm{arctg}\frac{x-2}{3}+C$.

Вариант 4

а) $\int \frac{8x}{(x+3)\left(x^2+6x+5\right)}dx$. *Ответ*: $-5\ln|x+5|+6\ln|x+3|-\ln|x+1|+C$.

б) $\int \frac{3x^2-7x+2}{(x-1)\left(x^2+x\right)}dx$. *Ответ*: $2\ln|x|+\ln|x-1|+\frac{2}{x-1}+C$.

в) $\int \frac{2x^2+2x+20}{(x-1)\left(x^2+2x+5\right)}dx$.

Ответ: $3\ln|x-1|-\frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x+5\right|-2\,\mathrm{arctg}\frac{x+1}{2}+C$.

Вариант 5

а) $\int \frac{2x^4+8x^3-45x-61}{(x-1)\left(x^2+5x+6\right)}dx$. *Ответ*: $x^2-8\ln|x-1|+5\ln|x+3|+\ln|x+2|+C$.

б) $\int \frac{3x^2+2}{x(x+1)^2}dx$. *Ответ*: $2\ln|x|+\ln|x+1|+\frac{5}{x+1}+C$.

в) $\int \frac{x^2+3x-6}{(x+1)(x^2+6x+13)}dx$.

Ответ: $\ln\left|x^2+6x+13\right|-\ln|x+1|+\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{x+3}{2}+C$.

Вариант 6

а) $\int \frac{2x^4+17x^3+32x^2-7x}{(x+5)(x^2+4x+3)}dx$.

Ответ: $x^2-x-5\ln|x+5|+3\ln|x+1|-3\ln|x+3|+C$

б) $\int \frac{x+5}{x^3-x^2-x+1}dx$. *Ответ*: $\ln|x+1|-\ln|x-1|-\frac{3}{x-1}+C$.

в) $\int \frac{x^2+3x+2}{x^3-1}dx$. *Ответ*: $2\ln|x-1|-\frac{1}{2}\ln\left|x^2+x+1\right|+\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$.

Вариант 7

а) $\int \frac{6x^2+6x-6}{(x+1)(x^2+x-2)}dx$. *Ответ*: $3\ln|x+1|+\ln|x-1|+2\ln|x+2|+C$.

б) $\int \frac{x^3-4x+5}{(x-1)(x^2-1)}dx$. *Ответ*: $x-\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}+2\ln|x+1|+C$.

в) $\int \frac{9x-9}{(x+1)(x^2-4x+13)}dx$.

Ответ: $\frac{1}{2}\ln\left|x^2-4x+13\right|-\ln|x+1|+2\mathrm{arctg}\frac{x-2}{3}+C$.

Вариант 8

а) $\int \frac{2x^4+17x^3+32x^27x}{(x+5)(x^2+4x+3)}dx$.

Ответ: $x^2-x-5\ln|x+5|+3\ln|x+1|-3\ln|x+3|+C$.

б) $\int \frac{6x-2x^2-1}{x^3-2x^2+x}dx$. *Ответ*: $-\ln|x|-\ln|x-1|-\frac{3}{x-1}+C$.

в) $\int \frac{7x-10}{x^3+8}dx$. *Ответ*: $\ln\left|x^2-2x+4\right|-2\ln|x+2|+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{\sqrt{3}}+C$.

Вариант 9

а) $\int \frac{2x^4-7x^3+3x+20}{(x-2)\left(x^2-2x-3\right)}dx$.

Ответ: $x^2+x-4\ln|x-2|+3\ln|x-3|+3\ln|x+1|+C$.

б) $\int \frac{3x^2+1}{(x-1)\left(x^2-1\right)}dx$. *Ответ*: $2\ln|x-1|-\frac{2}{x-1}+\ln|x+1|+C$.

в) $\int \frac{7x-10}{x^3+8}dx$. *Ответ*: $\ln\left|x^2-2x+4\right|-2\ln|x+2|+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{\sqrt{3}}+C$.

Вариант 10

а) $\int \frac{37x-85}{(x-4)\left(x^2+2x-3\right)}dx$. *Ответ*: $4\ln|x-1|-7\ln|x+3|+\ln|x-4|+C$.

б) $\int \frac{x^3-2x^2-2x+1}{x^3-x^2}dx$. *Ответ*: $x+\ln|x|+\frac{1}{x}-2\ln|x-1|+C$.

в) $\int \frac{4x^2+3x+17}{(x-1)\left(x^2+2x+5\right)}dx$.

Ответ: $3\ln|x-1|+\frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x+5\right|-\frac{3}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}+C$.

Вариант 11

а) $\int \frac{3x^2+3x-24}{(x-3)\left(x^2-x-2\right)}dx$. *Ответ*: $2\ln|x-2|+3\ln|x-3|-2\ln|x+1|+C$.

б) $\int \frac{x^3+1}{x^3-x^2}dx$. *Ответ*: $x+\frac{1}{x}-\ln|x|+2\ln|x-1|+C$.

в) $\int \frac{x^2-5x+40}{(x+2)\left(x^2-2x+10\right)}dx$.

Ответ: $3\ln|x+2|-\ln\left|x^2-2x+10\right|+\operatorname{arctg}\frac{x-1}{3}+C$.

Вариант 12

а) $\int \frac{x^2-19x+6}{(x-1)\left(x^2+5x+6\right)}dx$. *Ответ*: $18\ln|x+3|-\ln|x-1|-16\ln|x+2|+C$.

б) $\int \frac{4x^4+8x^3-x-2}{x(x+1)^2}dx$. *Ответ*: $2x^2-2\ln|x|-2\ln|x+1|-\frac{5}{x+1}+C$.

в) $\int \frac{4x-x^2-12}{x^3+8}dx$. *Ответ*: $\frac{1}{2}\ln\left|x^2-2x+4\right|-2\ln|x+2|-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{\sqrt{3}}+C$.

Вариант 13

а) $\int \frac{2x^4+8x^3-17x-5}{(x+2)\left(x^2+2x-3\right)}dx$. *Ответ*: $x^2-\ln|x-1|+\ln|x+2|-2\ln|x+3|+C$.

б) $\int \frac{2x^2-5x+1}{x^3-2x^2+x}dx$. *Ответ*: $\ln|x|+\ln|x-1|+\frac{2}{x-1}+C$.

в) $\int \frac{4x+2}{x^4+4x^2}dx$. *Ответ*: $\ln|x|-\frac{1}{2x}-\frac{1}{2}\ln\left|x^2+4\right|+\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C$.

Вариант 14

а) $\int \frac{6x^4}{(x+2)\left(x^2-1\right)}dx$. *Ответ*: $3x^2-12x+\ln|x-1|-3\ln|x+1|+32\ln|x+2|+C$.

б) $\int \frac{4x^2}{\left(x^2-2x+1\right)(x+1)}dx$. *Ответ*: $3\ln|x-1|-\frac{2}{x-1}+\ln|x+1|+C$.

в) $\int \frac{4x-10}{(x+2)\left(x^2-2x+10\right)}dx$.

Ответ: $\frac{1}{2}\ln\left|x^2-2x+10\right|-\ln|x+2|+\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{3}+C$.

Вариант 15

а) $\int \frac{2x^4-7x^3+2x^2+13}{(x+1)\left(x^2-5x+6\right)}dx$. *Ответ*: $x^2+x+2\ln|x+1|+\ln|x-2|+\ln|x-3|+C$.

б) $\int \frac{x+2}{x^3-2x^2+x}dx$. *Ответ*: $2\ln|x|-2\ln|x-1|-\frac{3}{x-1}+C$.

в) $\int \frac{2x^2+4x+20}{(x+1)\left(x^2-4x+13\right)}dx$.

Ответ: $\ln|x+1|+\frac{1}{2}\ln\left|x^2-4x+13\right|+3\operatorname{arctg}\frac{x-2}{3}+C$.

В заключение подводим итоги, что для интегрирования рациональных дробей нужно:

1. Выяснить правильная дробь или неправильная; и в случае, если дробь неправильная, разделив числитель на знаменатель, отделить целую часть и правильную рациональную дробь;
2. В правильной рациональной дроби разложить знаменатель на множители;
3. Правильную рациональную дробь представить в виде суммы простейших дробей;
4. Проинтегрировать целый многочлен и сумму простейших рациональных дробей.

Домашнее задание

1. Изучить теоретический материал по теме «Интегрирование иррациональных функций. Интегрирование дифференциальных биномов».
2. Найти интегралы:

а) $\int \frac{6x^4+30x^2+30}{(x+2)(x^2-1)}dx$.

Ответ: $3x^2-12x+\ln|x-1|-3\ln|x+1|+2\ln|x+2|+C$.

б) $\int \frac{dx}{x^3+x^2}$. *Ответ*: $\ln|x+1|-\ln|x|-\frac{1}{x}+C$.

в) $\int \frac{x^2+23}{(x+1)(x^2+6x+13)}dx$.

Ответ: $3\ln|x+1|-\ln|x^2+6x+13|-5\operatorname{arctg}\frac{x+3}{2}+C$.

г) $\int \frac{2x^5-2x^3+x^2}{1-x^4}dx$. *Ответ*: $\frac{1}{4}\ln|x+1|-\frac{1}{4}\ln|x-1|-x^2-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C$.

3. Задания для систематизации, повторения:
1) Найти:

а) $\int \cos(3x-7)\,dx$;

б) $\int \frac{xdx}{5x^2+7}$;

в) $\int e^{2x+7}dx$;

г) $\int \frac{(1+\ln x)^3}{x}dx$;

д) $\int x^2\sqrt{x^3+9}\,dx$;

е) $\int \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x}dx$;

ж) $\int \frac{dx}{(5x+2)^{10}}$.

2) Представить в виде суммы простейших дробей (не находя коэффициентов):

а) $\dfrac{x+2}{x^3+x}$; в) $\dfrac{3x-x^2-2}{x(x+1)^2}$; д) $\dfrac{4x}{(x^2-1)(x+1)}$.

б) $\dfrac{3-9x}{x^3-1}$; г) $\dfrac{x+2}{x^3+x^2}$;

VI. Интегрирование некоторых иррациональных функций

1. Просмотр выполнения домашнего задания.

2. Краткий теоретический обзор с использованием лекционного материала.

Напоминаем, что функция, содержащая действие извлечение корня (возведение в дробную степень), называется иррациональной. В тех случаях, когда непосредственным интегрированием взять интеграл не удаётся, прибегают к методу подстановки с тем, чтобы подынтегральное выражение привести к рациональному виду.

Рассмотрим наиболее часто употребляемые случаи:

1) $\int R\left(x, x^{\frac{m_1}{n_1}}, x^{\frac{m_2}{n_2}}, x^{\frac{m_3}{n_3}}, .., x^{\frac{m_k}{n_k}}\right)dx = \left|x = t^p, \text{ где } p = НОК(n_1, n_2, .., n_k)\right|.$

***Обучающий пример* 1.** $\int \dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^4}+2x}dx$.

Решение:

$$\int \frac{x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{4}{3}}+2x}dx = \begin{vmatrix} x = t^6, \text{ т. к. } НОК(2,3) = 6 \\ dx = 6t^5dt \end{vmatrix} =$$

$$= \int \frac{\left(t^3+t^2\right)6t^5}{t^8+2t^6}dt = 6\int \frac{t^2+t}{t^2+2}dt = 6\int \left(1+\frac{t-2}{t^2+2}\right)dt =$$

$$= 6\int dt + 6\int \frac{t}{t^2+2}dt - 12\int \frac{dt}{t^2+2} = 6t + 3\int \frac{2tdt}{t^2+2} - 12\int \frac{dt}{t^2+\left(\sqrt{2}\right)^2} =$$

$$= 6t + 3\ln\left|t^2+2\right| - 12\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}} + C = 6\sqrt[6]{x} + 3\ln\left|\sqrt[3]{x}+2\right| + 6\sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt[6]{x}}{2} + C.$$

2) $\int R\left(x,(ax+b)^{\frac{m_1}{n_1}},(ax+b)^{\frac{m_2}{n_2}},..,(ax+b)^{\frac{m_k}{n_k}}\right)dx=$

$$=\left|ax+b=t^p, \text{ где } p=НОК(n_1,n_2,..,n_k)\right|.$$

***Обучающий пример* 2.** $\int\frac{dx}{x+2+\sqrt{x+2}}$.

Решение.

$$\int\frac{dx}{x+2+\sqrt{x+2}}=\begin{vmatrix}x+2=t^2\\ dx=2tdt\end{vmatrix}=\int\frac{2tdt}{t^2+t}=2\int\frac{dt}{t+1}=2\ln|t+1|+C=$$

$$=2\ln\left|\sqrt{x+2}+1\right|+C.$$

3) $\int R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}},\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_2}{n_2}},..,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_k}{n_k}}\right)dx=$

$$=\left|\frac{ax+b}{cx+d}=t^p, \text{ где } p=НОК(n_1,n_2,..,n_k)\right|.$$

***Обучающий пример* 3.** $\int\frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{1+x}{x}}dx$.

Решение: Подынтегральное выражение есть рациональная функция от переменной x и от выражения $\sqrt{\frac{1+x}{x}}$, поэтому введём подстановку $\frac{1+x}{x}=t^2$.

$$\int\frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{1+x}{x}}dx=\begin{vmatrix}\frac{1+x}{x}=t^2, & x=\frac{1}{t^2-1}\\ dx=-\frac{2tdt}{\left(t^2-1\right)^2} & \end{vmatrix}=\int\left(t^2-1\right)^2\cdot t\cdot\left(-\frac{2tdt}{\left(t^2-1\right)^2}\right)=$$

$$=-2\int t^2dt=-\frac{2}{3}t^3+C=C-\frac{2}{3}\sqrt{\left(\frac{1+x}{x}\right)^3}.$$

4) Интеграл от дифференциального бинома

$$\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx,$$

где m, n, p – рациональные числа, сводится к интегралу от рациональной функции в трёх случаях (доказано П.Л. Чебышевым).

а) p – целое. Тогда, если $p > 0$, подынтегральное выражение раскладывается по формуле бинома Ньютона; если же $p < 0$, то полагаем $x = t^k$, где k – общий знаменатель дробей m и n.

б) $\dfrac{m+1}{n}$ – целое. Полагаем $a + bx^n = t^k$, k – знаменатель дроби p.

в) $\dfrac{m+1}{n} + p$ – целое. Полагаем $a + bx^n = t^k x^n$, где k – знаменатель дроби p.

***Обучающий пример* 4.** $J = \int x^{\frac{1}{3}} \left(2 + x^{\frac{1}{2}} \right)^2 dx$.

Решение: $J = \int x^{\frac{1}{3}} \left(2 + x^{\frac{1}{2}} \right)^2 dx$. Здесь $p = 2$ – целое число, значит, имеем случай а), следовательно,

$$J = \int x^{\frac{1}{3}} \left(4 + 4x^{\frac{1}{2}} + x \right) dx = \int \left(x^{\frac{4}{3}} + 4x^{\frac{5}{6}} + 4x^{\frac{1}{3}} \right) dx = \frac{3}{7} x^{\frac{7}{3}} + \frac{24}{11} x^{\frac{11}{6}} + 3x^{\frac{4}{3}} + C.$$

***Обучающий пример* 5.** $\int \dfrac{\sqrt{1 + \sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}} dx$.

Решение: $\int \dfrac{\sqrt{1 + \sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}} dx = \int x^{-\frac{2}{3}} \left(1 + x^{\frac{1}{3}} \right)^{\frac{1}{2}} dx$. Здесь $m = -\dfrac{2}{3}$, $n = \dfrac{1}{3}$, $p = \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{m+1}{n} = \dfrac{-\frac{2}{3} + 1}{\frac{1}{3}} = 1$ – целое число, имеем случай б), тогда

$$\int x^{-\frac{2}{3}} \left(1 + x^{\frac{1}{3}} \right)^{\frac{1}{2}} dx = \left| \begin{matrix} 1 + x^{\frac{1}{3}} = t^2, & x^{\frac{1}{3}} = t^2 - 1, \\ \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} dx = 2t dt, & x^{-\frac{2}{3}} dx = 6t dt \end{matrix} \right| =$$

$$= 6 \int t^2 dt = 2t^3 + C = 2 \left(1 + x^{\frac{1}{3}} \right)^{\frac{3}{2}} + C.$$

***Обучающий пример* 6.** $\int x^{-11}\left(1+x^4\right)^{-\frac{1}{2}}dx$. Здесь $m=-11$, $n=4$, $p=-\frac{1}{2}$, $\frac{m+1}{n}+p=\frac{-11+1}{4}-\frac{1}{2}=-3$ – целое число, имеем случай б):

$$\int x^{-11}\left(1+x^4\right)^{-\frac{1}{2}}dx=\left|\begin{array}{l} 1+x^4=x^4t^2, \quad x=\dfrac{1}{\left(t^2-1\right)^{\frac{1}{4}}}, \\ x^4\left(t^2-1\right)=1, \; dx=-\dfrac{tdt}{2\left(t^2-1\right)^{\frac{5}{4}}} \end{array}\right|=$$

$$=-\frac{1}{2}\int\left(t^2-1\right)^{\frac{11}{4}}\left(x^4t^2\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{tdt}{\left(t^2-1\right)^{\frac{5}{4}}}=$$

$$=-\frac{1}{2}\int\left(t^2-1\right)^{\frac{6}{4}}\left(\frac{t^2}{t^2-1}\right)^{-\frac{1}{2}}tdt=-\frac{1}{2}\int\left(t^2-1\right)^{\frac{3}{2}}\cdot\left(t^2-1\right)^{\frac{1}{2}}dt=$$

$$=-\frac{1}{2}\int\left(t^2-1\right)^2dt=-\frac{1}{2}\int\left(t^4-2t^2+1\right)dt=-\frac{1}{2}\left(\frac{t^5}{5}-\frac{2t^3}{3}+t\right)+C=$$

$$=-\frac{t^5}{10}+\frac{t^3}{3}-\frac{t}{2}+C=-\frac{1}{10x^{10}}\sqrt{\left(1+x^4\right)^5}+\frac{1}{3x^6}\sqrt{\left(1+x^4\right)^3}-\frac{1}{2x^2}\sqrt{1+x^4}+C.$$

3. Выполнить самостоятельно; каждый студент решает свой вариант (два студента у доски выполняют свои задания).

Вариант 1

а) $\int\frac{\sqrt{x}dx}{1-\sqrt[4]{x}}$. *Ответ*: $-\frac{4}{5}\sqrt[4]{x^5}-x-\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}-2\sqrt{x}-4\sqrt[4]{x}-4\ln\left|1-\sqrt[4]{x}\right|+C$.

б) $\int\frac{dx}{2+\sqrt{x+3}}$. *Ответ*: $2\sqrt{x+3}-4\ln\left|\sqrt{x+3}+2\right|+C$.

в) $\int\frac{\sqrt{3x+1}+2}{\sqrt{3x+1}+2\sqrt[3]{3x+1}}dx$. *Ответ*: $\frac{1}{3}(3x+1)-\frac{4}{5}\sqrt[6]{(3x+1)^5}+2\sqrt[3]{(3x+1)^2}-$ $-4\sqrt{3x+1}+12\sqrt[3]{3x+1}-48\sqrt[6]{3x+1}+96\ln\left|\sqrt[6]{3x+1}+2\right|+C$.

г) $\int\frac{dx}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^2}$. *Ответ*: $4\left(\ln\left|\sqrt[4]{x}+1\right|+\frac{1}{\sqrt[4]{x}+1}\right)+C$.

Вариант 2

а) $\int \frac{\sqrt{x}dx}{x-4\sqrt[3]{x^2}}$. *Ответ*: $2\sqrt{x}+24\sqrt[6]{x}+24\ln\left|\frac{\sqrt[6]{x}-2}{\sqrt[6]{x}+2}\right|+C$.

б) $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x+4}}$. *Ответ*: $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{x+4}-\sqrt{3}}{\sqrt{x+4}+\sqrt{3}}\right|+C$.

в) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}-\sqrt{2x+1}}$. *Ответ*: $\frac{3}{2}\sqrt[3]{2x+1}+3\sqrt[6]{2x+1}+3\ln\left|\sqrt[6]{2x+1}-1\right|+C$.

г) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt[3]{\left(1+x^3\right)^5}}$. *Ответ*: $-\frac{2+3x^3}{2x\sqrt[3]{\left(1+x^3\right)^2}}+C$.

Вариант 3

а) $\int \frac{x+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}}{x\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}dx$. *Ответ*: $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+6\sqrt[6]{x}-6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}+C$.

б) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x-1}}$. *Ответ*: $\frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3}+2\sqrt{x-1}+C$.

в) $\int \frac{\sqrt[6]{x-1}}{\sqrt[3]{x-1}+\sqrt{x-1}}dx$.

Ответ: $\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x-1)^2}-2\sqrt{x-1}+3\sqrt[3]{x-1}-6\sqrt[6]{x-1}+6\ln\left|\sqrt[6]{x-1}+1\right|+C$.

г) $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[6]{x}}}{\sqrt{x}}dx$. *Ответ*: $18\left(\frac{\sqrt[3]{\left(1+x^{1/6}\right)^{10}}}{10}-\frac{2}{7}\sqrt[3]{\left(1+x^{1/6}\right)^7}+\frac{\sqrt[3]{\left(1+x^{1/6}\right)^4}}{4}\right)+C$.

Вариант 4

а) $\int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}dx$. *Ответ*: $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+6\sqrt[6]{x}-6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}+C$.

б) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x-2}}$. *Ответ*: $\sqrt{2}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x-2}{2}}+C$.

в) $\int \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt[3]{x+3}+1}dx$.

Ответ: $\frac{6}{7}\sqrt[6]{(x+3)^7}-\frac{6}{5}\sqrt[6]{(x+3)^5}+2\sqrt{x+3}-6\sqrt[6]{x+3}-\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x+3}+C$.

г) $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}dx$. *Ответ*: $\frac{\sqrt{1+x^2}\left(x^2-2\right)}{3}+C$.

Вариант 5

а) $\int \frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt[3]{x^2}}dx$. *Ответ*: $2\sqrt{x}+6\sqrt[6]{x}+3\ln\left|\frac{\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt[6]{x}+1}\right|+C$.

б) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x+3}}$. *Ответ*: $\frac{2}{3}\sqrt{x+3}-6\sqrt{x+3}+C$.

в) $\int \frac{x+1+\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[6]{x+1}}{(x+1)\left(\sqrt[3]{x+1}+1\right)}dx$. *Ответ*: $\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+1)^2}+6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x+1}+C$.

г) $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}dx$. *Ответ*: $2\left(1+x^{1/3}\right)^{3/2}+C$.

Вариант 6

а) $\int \frac{x-\sqrt[3]{x^2}}{x\left(1+\sqrt[6]{x}\right)}dx$. *Ответ*: $\frac{1}{4}\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+\ln\left|\sqrt[3]{x}+1\right|+C$.

б) $\int \frac{\sqrt{2x+1}+\sqrt[3]{2x+1}}{\sqrt{2x+1}}dx$. *Ответ*: $\frac{1}{2}(2x+1)+\frac{3}{5}\sqrt[6]{(2x+1)^5}+C$.

в) $\int \frac{dx}{3+\sqrt{x+5}}$. *Ответ*: $2\sqrt{x+5}-6\ln\left|\sqrt{x+5}+3\right|+C$.

г) $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx$. *Ответ*: $\frac{\sqrt{1-x^2}}{3}\left(-x^2-2\right)+C$.

Вариант 7

а) $\int \frac{\sqrt{x}}{4x-\sqrt[3]{x^2}}dx$. *Ответ*: $\frac{1}{2}\sqrt{x}+\frac{3}{8}\sqrt[6]{x}+\frac{3}{32}\ln\left|\frac{2\sqrt[6]{x}-1}{2\sqrt[6]{x}+1}\right|+C$.

б) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x-1}}$. *Ответ*: $2\sqrt{x-1}-2\ln\left|1+\sqrt{x-1}\right|+C$.

в) $\int \frac{\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[6]{x+1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}dx$. *Ответ*: $\frac{6}{7}\sqrt[6]{(x+1)^7}-(x+1)+\frac{6}{5}\sqrt[6]{(x+1)^5}+C$.

г) $\int \frac{x^3}{\sqrt{3+x^2}}dx$. *Ответ*: $\frac{\sqrt{3+x^2}\left(x^2-6\right)}{3}+C$.

Вариант 8

а) $\int \frac{\sqrt{x}}{4x-\sqrt[3]{x^2}}dx$. *Ответ*: $\frac{1}{2}\sqrt{x}+\frac{3}{8}\sqrt[6]{x}+\frac{3}{32}\ln\left|\frac{2\sqrt[6]{x}-1}{2\sqrt[6]{x}+1}\right|+C$.

б) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x-1}}$. *Ответ*: $2\sqrt{x-1}-2\ln\left|1+\sqrt{x-1}\right|+C$.

в) $\int \frac{\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[6]{x+1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}dx$. *Ответ*: $\frac{6}{7}\sqrt[6]{(x+1)^7}-(x+1)+\frac{6}{5}\sqrt[6]{(x+1)^5}+C$.

г) $\int \frac{x^3}{\sqrt{3+x^2}}dx$. *Ответ*: $\frac{\sqrt{3+x^2}\left(x^2-6\right)}{3}+C$.

Вариант 9

а) $\int \frac{\sqrt[4]{x}+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}dx$.

Ответ: $x+\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}-2\sqrt{x}-4\sqrt[4]{x}+2\ln\left|\sqrt{x}+1\right|+4\operatorname{arctg}\sqrt[4]{x}+C$.

б) $\int \frac{x+1}{x\sqrt{x-1}}dx$. *Ответ*: $2\sqrt{x-1}+2\operatorname{arctg}\sqrt{x-1}+C$.

в) $\int \frac{\sqrt[6]{x+3}}{\sqrt{x+3}+\sqrt[3]{x+3}}dx$.

Ответ: $\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+3)^2}-2\sqrt{x+3}+3\sqrt[3]{(x+3)}-6\sqrt[6]{x+3}+6\ln\left|\sqrt[6]{x+3}+1\right|+C$.

г) $\int \frac{x^3}{\left(1-x^2\right)\sqrt{1-x^2}}dx$. *Ответ*: $\frac{2-x^2}{\sqrt{1-x^2}}+C$.

Вариант 10

а) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}+1}dx$. *Ответ*: $\frac{4}{5}\sqrt[4]{x^5}-x-\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}-2\sqrt{x}+4\sqrt[6]{x}-4\ln\left|\sqrt[4]{x}+1\right|+C$.

б) $\int \frac{dx}{3+\sqrt{x-6}}$. *Ответ*: $2\sqrt{x-6}-6\ln\left|\sqrt{x-6}+3\right|+C$.

в) $\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}\left(\sqrt[3]{x+1}+1\right)}dx$.

Ответ: $3\sqrt[3]{x+1}-\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+1)^2}+6\sqrt[6]{x+1}-3\ln\left|\sqrt[3]{x+1}+1\right|-6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x+1}+C$.

г) $\int \frac{x^3}{\left(2-x^2\right)\sqrt{2-x^2}}dx$. *Ответ*: $\frac{4-x^2}{\sqrt{2-x^2}}+C$.

Вариант 11

а) $\int \frac{\left(\sqrt[3]{x}+1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt[6]{x^5}}dx$. *Ответ*: $x+\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt{x}+6\sqrt[6]{x}+C$.

б) $\int \frac{dx}{2+\sqrt{x-8}}$. *Ответ*: $2\sqrt{x-8}-4\ln\left|\sqrt{x-8}+2\right|+C$.

в) $\int \frac{1+\sqrt[6]{3x+1}}{\sqrt{3x+1}-\sqrt[3]{3x+1}}dx$.

Ответ: $\frac{1}{2}\sqrt[3]{(3x+1)^2}-\frac{4}{3}\sqrt{3x+1}+2\sqrt[3]{3x+1}+4\sqrt[6]{3x+1}+4\ln\left|\sqrt[6]{3x+1}-1\right|+C$.

г) $\int \frac{x^3}{\left(3-x^2\right)\sqrt{3-x^2}}dx$. *Ответ*: $\frac{6-x^2}{\sqrt{3-x^2}}+C$.

Вариант 12

а) $\int \frac{\sqrt{x}}{3x+\sqrt[3]{x^2}}dx$. *Ответ*: $\frac{2}{3}\sqrt{x}-\frac{2}{3}\sqrt[6]{x}+\frac{2\sqrt{3}}{9}\operatorname{arctg}\sqrt[6]{9x}+C$.

б) $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x}}$. *Ответ*: $\ln\left|\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right|+C$.

в) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x}-\sqrt[4]{1-2x}}$. *Ответ*: $-\sqrt{(2x-1}-2\sqrt[4]{1-2x}-2\ln\left|\sqrt[4]{1-2x}\right|+C$.

г) $\int \frac{x^3}{\left(4-x^2\right)\sqrt{4-x^2}}dx$. *Ответ*: $\frac{8-x^2}{\sqrt{4-x^2}}+C$.

Вариант 13

а) $\int \frac{\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{x}+\sqrt[6]{x}\right)}{\left(\sqrt[3]{x}+1\right)x}dx$. *Ответ*: $\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}+6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}+C$.

б) $\int \frac{\sqrt{x}dx}{x+10}$. *Ответ*: $2\sqrt{x}-2\sqrt{10}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x}{10}}+C$.

в) $\int \frac{\sqrt{2x-3}}{1+\sqrt[3]{2x-3}}dx$.

Ответ: $3\left(\frac{1}{7}(2x-3)^{\frac{7}{6}}-\frac{1}{5}(2x-3)^{\frac{5}{6}}+\frac{1}{3}(2x-3)^{\frac{1}{2}}-(2x-3)^{\frac{1}{6}}+\operatorname{arctg}(2x-3)^{\frac{1}{6}}\right)+C$.

г) $\int x^3\left(1-x^2\right)^{-\frac{3}{2}}dx$. *Ответ*: $\frac{2-x^2}{\sqrt{1-x^2}}+C$.

Вариант 14

а) $\int \frac{\sqrt{x}-1}{\left(\sqrt[3]{x}+1\right)\sqrt{x}}dx$. *Ответ*: $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}-3\sqrt[3]{x}-6\sqrt[6]{x}+3\ln\left|\sqrt[3]{x}+1\right|+6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}+C$.

б) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x-7}}$. *Ответ*: $2\operatorname{arctg}\sqrt{x}-7+C$.

в) $\int \frac{x+\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x+1}}dx$ *Ответ*: $6\sqrt[3]{(x+1)^2}\left(\frac{1+x}{10}+\frac{\sqrt{1+x}}{7}-\frac{1}{4}\right)+C$.

г) $\int \frac{x^3}{\left(5-x^2\right)\sqrt{5-x^2}}dx$. *Ответ*: $\frac{10-x^2}{\sqrt{5-x^2}}+C$.

Вариант 15

а) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}$. *Ответ*: $2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln\left|\sqrt[6]{x}+1\right|+C$.

б) $\int \frac{\sqrt{x+2}}{x-3}dx$. *Ответ*: $2\sqrt{x+2}-5\ln\left|\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{5}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{5}}\right|+C$.

в) $\int \frac{\sqrt[6]{2x-1}+1}{(2x-1)\left(\sqrt[3]{2x-1}-1\right)}dx$. *Ответ*: $3\left(\left|\sqrt[6]{2x-1}-1\right|-\ln\sqrt[6]{2x-1}\right)+C$.

г) $\int x^3\left(7-x^2\right)^{-\frac{3}{2}}dx$. *Ответ*: $\frac{14-x^2}{\sqrt{7-x^2}}+C$.

Вариант 16

а) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{x}}dx$.

Ответ: $6\left(\frac{1}{5}\sqrt[6]{x^5}-\frac{1}{4}\sqrt[3]{x^2}+\frac{1}{3}\sqrt{x}-\frac{1}{2}\sqrt[3]{x}+\sqrt[6]{x}-\ln\left|\sqrt[6]{x}+1\right|\right)+C$.

б) $\int \frac{\sqrt{x+4}}{x}dx$. *Ответ*: $2\sqrt{x+4}+\ln\left|\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+4}+2}\right|+C$.

в) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}-\sqrt{(x+1)^3}}$. *Ответ*: $2\operatorname{arctg}\sqrt{x+1}+C$.

г) $\int \frac{\sqrt[3]{\sqrt[4]{x}+1}}{\sqrt{x}}dx$. *Ответ*: $\frac{12}{7}\left(\sqrt[4]{x}+1\right)^{7/3}-3\left(\sqrt[4]{x}+1\right)^{4/3}+C$.

Студент решает у доски:

$\int \frac{dx}{x^2\sqrt[3]{\left(1+x^3\right)^5}}$. *Ответ*: $C-\frac{2+3x^3}{2x\sqrt[3]{\left(1+x^3\right)^2}}$.

Домашнее задание

1. Изучить теоретический материал по теме «Интегрирование тригонометрических функций».
2. Найти интегралы:

а) $\int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x+\sqrt[3]{x^4}}dx$. *Ответ*: $\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}+6\cdot\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}+C$.

б) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+2)^2}-\sqrt{x+2}}$.

Ответ: $3\cdot\sqrt[3]{x+2}+6\cdot\sqrt[6]{x+2}+6\cdot\ln\left|\sqrt[6]{x+2}-1\right|+C$.

в) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^{10}}$. *Ответ*: $-\frac{1}{8\cdot\left(\sqrt[4]{x}+1\right)^8}+\frac{1}{9\cdot\left(\sqrt[4]{x}+1\right)^9}+C$.

г) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}$. *Ответ*: $-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C$.

VII. Интегрирование тригонометрических функций

1. Устно указать подстановку для нахождения интегралов:

$J_1=\int \frac{\sqrt{x}-1}{3\sqrt[3]{x}-x}dx$, $J_2=\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\frac{dx}{(1-x)^2}$,

$J_3=\int \frac{dx}{\sqrt{1-3x}-\sqrt[4]{1-3x}}$, $J_4=\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x^3}}dx$.

2. Беглый просмотр выполнения домашнего задания.

3. Краткий теоретический обзор с использованием лекционного материала (графической схемы, информационной таблицы).

Обращаем внимание на то, что интегралы от тригонометрических функций во многих ситуациях удается рационализировать либо существенно упростить. Рассмотрим наиболее типичные случаи.

1) $\int \sin^m x \cos^n dx$.

а) Если m – нечетное положительное число, то подстановка $\cos x = t$.

Если n – нечетное положительное число, то $\sin x = t$.

Обучающий пример **1**. Найти $\int \sin^4 x \cos^3 x\, dx$.

Решение: Так как одна из степеней является нечетной (n = 3), то, предварительно отделив от нечетной степени множитель в 1-й степени, вводим новую переменную:

$$\int \sin^4 x \cos^3 x\, dx = \int \sin^4 x \cos^2 x \cos x\, dx = \int \sin^4 x \left(1 - \sin^2 x\right) \cos x\, dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \end{matrix} \right| = \int t^4 \left(1 - t^2\right) dt = \int \left(t^4 - t^6\right) dt =$$

$$= \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + C = \frac{\sin^5 x}{5} - \frac{\sin^7 x}{7} + C.$$

б) если m и n – четные неотрицательные, то применяют формулы понижения степени:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}; \qquad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}; \qquad \sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x.$$

Обучающий пример **2.** Найти $\int \sin^4 x \cos^2 x\, dx$.

Решение:

$$\int \sin^4 x \cos^2 x\, dx = \int \sin^2 x \left(\sin x \cos x\right)^2 dx =$$

$$= \int \frac{1 - \cos 2x}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} \sin 2x\right)^2 dx = \frac{1}{8} \int \left(1 - \cos 2x\right) \sin^2 2x\, dx =$$

$$= \frac{1}{8} \int \sin^2 2x\, dx - \frac{1}{8} \int \sin^2 2x \cos 2x\, dx =$$

$$= \frac{1}{8} \int \frac{1 - \cos 4x}{2}\, dx - \left| \begin{matrix} \sin 2x = t \\ 2\cos 2x dx = dt \end{matrix} \right| - \frac{1}{8} \int t^2 \frac{dt}{2} =$$

$$= \frac{1}{16}\left(\int dx - \int \cos 4x\, dx\right) - \frac{1}{16} \cdot \frac{t^3}{3} = \frac{1}{16}\left(x - \frac{\sin 4x}{4} - \frac{\sin^3 2x}{3}\right) + C.$$

в) $(m+n)$ – четное отрицательное. Подстановка $\operatorname{tg} x = t$ (или $\operatorname{ctg} x = t$).

***Обучающий пример* 3.** Найти $\int \frac{dx}{\cos x \sin^3 x}$.

Решение: $\int \cos^{-1} x \sin^{-3} x \, dx$.

Здесь $m+n=-4$. Обозначим $\operatorname{tg} x = t$, тогда

$$x = \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}, \ \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}.$$

$$\int \frac{dx}{\cos x \sin^3 x} = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \cdot \frac{t^3}{\left(\sqrt{1+t^2}\right)^3}} = \int \frac{1+t^2}{t^3} dt = \int t^{-3} dt + \int \frac{dt}{t} =$$

$$= -\frac{1}{2t^2} + \ln|t| + C = -\frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2 x + \ln|\operatorname{tg} x| + C.$$

2) Если под знаком интеграла стоит выражение $R(\sin x, \cos x)$, получающееся из функций $\sin x$ и $\cos x$, и некоторых констант с помощью четырех арифметических действий (т. е. $R(\sin x, \cos x)$ является рациональной функцией от $\sin x$ и $\cos x$), то данный интеграл $\int R(\sin x, \cos x)\, dx$ сводится к интегралу от рациональной функции при помощи универсальной тригонометрической подстановки $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Тогда $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$.

Наиболее быстро вычисляются с помощью подстановки $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ интегралы вида $\int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x + c}$, где a или b не равны нулю.

***Обучающий пример* 4.** Найти $\int \frac{dx}{4\sin x - 3\cos x - 5}$.

Решение. Воспользуемся универсальной тригонометрической подстановкой:

$$\int \frac{dx}{4\sin x - 3\cos x - 5} = \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg}\frac{x}{2} = t \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{4\cdot\frac{2t}{1+t^2} - 3\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2} - 5} = \int \frac{2dt}{8t - 3\left(1-t^2\right) - 5\left(1+t^2\right)} =$$

$$= -\int \frac{dt}{t^2 - 4t + 4} = -\int \frac{dt}{(t-2)^2} = \frac{1}{t-2} + C = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 2} + C.$$

Хотя универсальная подстановка позволяет найти любой интеграл вида $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$, однако в большинстве случаев она приводит к чересчур громоздким вычислениям, и тогда удобнее пользоваться другими более эффективными подстановками.

3) Если $R(\sin x, \cos x)$ меняет знак с изменением знака $\cos x$, то применяется подстановка $\sin x = t$.

4) Аналогично, если $R(\sin x, \cos x)$ меняет знак с изменением знака $\sin x$, то применяется подстановка $\cos x = t$.

***Обучающий пример* 5.** Найти $\int \frac{dx}{\sin x \sin 2x}$.

Решение. Преобразуем подынтегральную функцию:

$$\frac{1}{\sin x \sin 2x} = \frac{1}{\sin x \cdot 2\sin x \cos x} = \frac{1}{2\sin^2 x \cos x}.$$

Теперь видно, что эта функция меняет знак при замене $\cos x$ на $(-\cos x)$. Поэтому, воспользуемся подстановкой $\sin x = t$, предварительно домножив числитель и знаменатель преобразованной подынтегральной дроби на $\cos x$:

$$\int \frac{dx}{\sin x \sin 2x} = \frac{1}{2}\int \frac{\cos x\,dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{1}{2}\int \frac{\cos x\,dx}{\sin^2 x\left(1-\sin^2 x\right)} = \left| \begin{array}{l} \sin x = t \\ \cos x\,dx = dt \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2\left(1-t^2\right)} = \frac{1}{2}\int \frac{1-t^2+t^2}{t^2\left(1-t^2\right)}\,dt = \frac{1}{2}\left(\int \frac{dt}{t^2} + \int \frac{dt}{1-t^2} \right) =$$

$$=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{t}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|\right)+C=\frac{1}{4}\left(-\frac{2}{\sin x}\ +\ \ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|\right)+C.$$

5) Если выполняется равенство $R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x)$, то выгоднее применять подстановку $\operatorname{tg} x=t$ или $\operatorname{ctg} x=t$. Это относится к интегралам вида $\displaystyle\int\frac{dx}{a\sin^2 x+b\sin x\cos x+c\cos^2 x+d}$.

***Обучающий пример* 6.** $\displaystyle\int\frac{dx}{\sin^2 x-4\sin x\cos x+5\cos^2 x}$.

Решение. Подынтегральная функция четная относительно синуса и косинуса:

$$\frac{1}{(-\sin x)^2-4(-\sin x)(-\cos x)+5(-\cos x)^2}=\frac{1}{\sin^2 x-4\sin x\cos x+5\cos^2 x},$$

поэтому применим подстановку $\operatorname{tg} x=t$, при этом

$$\cos x=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}},\quad \sin x=\operatorname{tg} x\cdot\cos x=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}},\quad dx=\frac{dt}{1+t^2}.$$

Получаем

$$\int\frac{dx}{\sin^2 x-4\cdot\sin x\cos x+5\cdot\cos^2 x}=\int\frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{t^2}{1+t^2}-4\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}+5\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}}=$$

$$=\int\frac{dt}{t^2-4t+5}=\int\frac{dt}{(t-2)^2+1}=\int\frac{d(t-2)}{(t-2)^2+1}=$$

$$=\operatorname{arctg}(t-2)+C=\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x-2)+C.$$

Можно было избежать выражения $\cos x$, $\sin x$ и dx через t, разделив числитель и знаменатель на $\cos^2 x$.

Действительно,

$$\int\frac{dx}{\sin^2 x-4\sin x\cos x+5\cos^2 x}=\int\frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}-4\frac{\sin x\cos x}{\cos^2 x}+5\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}}=$$

$$=\int\frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg}^2 x-4\operatorname{tg} x+5}=\left|\begin{array}{l}\operatorname{tg} x=t\\ \frac{1}{\cos^2 x}dx=dt\end{array}\right|=\int\frac{dt}{t^2-4t+5}.$$

В дальнейшем *рекомендуем замечать и не упускать возможности* подобных упрощений.

6) При вычислении интегралов $\int \sin nx \cos kx\, dx$, $\int \sin nx \sin kx\, dx$, $\int \cos nx \cos kx\, dx$ пользуются тригонометрическими формулами:

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\right),$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right),$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right).$$

***Обучающий пример* 7.** Найти $\int \sin 4x \sin 6x\, dx$.

Решение. $\int \sin 4x \sin 6x\, dx = \int \frac{1}{2}\left(\cos(4x-6x)-\cos(4x+6x)\right)dx =$

$$= \frac{1}{2}\int (\cos 2x - \cos 10x)\, dx = \frac{1}{2}\int \cos 2x\, dx - \frac{1}{2}\int \cos 10x\, dx =$$

$$= \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{20}\sin 10x + C.$$

7) При вычислении интегралов вида $\int R(\operatorname{tg} x)\,dx$ и $\int R(\operatorname{ctg} x)\,dx$ в большинстве случаев выгодно применять подстановку $\operatorname{tg} x = t$ или $\operatorname{ctg} x = t$. В частном случае интегралы вида $\int \operatorname{tg}^m x\, dx$ и $\int \operatorname{ctg}^m x\, dx$, где m – целое положительное число можно применять формулы:

$$\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 \quad \text{или} \quad \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1,$$

с помощью которых последовательно понижается степень тангенса или котангенса.

***Обучающий пример* 8.** Найти $\int \operatorname{tg}^7 x\, dx$.

Решение. *Первый способ.* Имеем

$$\int \operatorname{tg}^7 x\, dx = \int \operatorname{tg}^5 x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx = \int \operatorname{tg}^5 x\, d(\operatorname{tg} x) - \int \operatorname{tg}^5 x\, dx =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}^6 x}{6} - \int \operatorname{tg}^3 x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx = \frac{\operatorname{tg}^6 x}{6} - \int \frac{\operatorname{tg}^3 x}{\cos^2 x} dx + \int \operatorname{tg} x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}^6 x}{6} - \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} + \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + \ln|\cos x| + C.$$

Второй способ.

$$\int \operatorname{tg}^7 x\,dx = \left| \operatorname{tg} x = t, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2} \right| = \int \frac{t^7}{1+t^2}dt = \int \left(t^5 - t^3 + t\right)dt - \int \frac{tdt}{1+t^2} \text{ и т.д.}$$

4. Выполнить самостоятельно; каждый студент решает свой вариант (два студента у доски выполняют свои задания).

Вариант 1

а) $\int \sqrt[5]{\sin^4 x}\cos^3 x\,dx$. *Ответ*: $\frac{5}{9}\sqrt[5]{\sin^9 x} - \frac{5}{19}\sqrt[5]{\sin^{19} x} + C$.

б) $\int \sin^2 x\cos^4 x\,dx$. *Ответ*: $\frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\sin 4x + \frac{1}{48}\sin^2 2x + C$.

в) $\int \frac{dx}{5 - 4\sin x + 2\cos x}$. *Ответ*: $\frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{3\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 4}{\sqrt{5}} + C$.

г) $\int \operatorname{tg}^2 5x\,dx$. *Ответ*: $\frac{1}{5}\operatorname{tg}5x - x + C$.

д) $\int \frac{dx}{5 + 3\sin^2 x}$. *Ответ*: $\frac{1}{2\sqrt{10}}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{2}\operatorname{tg}x}{\sqrt{5}} + C$.

Вариант 2

а) $\int \sin^4 x\cos^5 x\,dx$. *Ответ*: $\frac{1}{5}\sin^5 x - \frac{2}{7}\sin^7 x + \frac{1}{9}\sin^9 x + C$.

б) $\int \sin^2 x\cos^2 x\,dx$. *Ответ*: $\frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin 4x + C$.

в) $\int \frac{dx}{5 + 2\sin x + 3\cos x}$. *Ответ*: $\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}x + 1}{\sqrt{3}} + C$.

г) $\int \operatorname{ctg}^4 x\,dx$. *Ответ*: $-\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x + \operatorname{ctg}x + x + C$.

д) $\int \frac{dx}{3 - 2\sin^2 x}$. *Ответ*: $\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}x}{\sqrt{3}} + C$.

Вариант 3

а) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos x\sqrt[3]{\cos x}}\,dx$. *Ответ*: $\frac{3}{\sqrt[3]{\cos x}} + \frac{3}{5}\cos x\sqrt[3]{\cos^2 x} + C$.

б) $\int \cos^2\frac{x}{2}dx$. *Ответ*: $\frac{1}{2}\left(x + \sin x\right) + C$.

в) $\int \frac{dx}{5+3\cos x-5\sin x}$. *Ответ*: $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-4}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1}\right|+C$.

г) $\int \operatorname{ctg}^6 x\,dx$. *Ответ*: $-\frac{\operatorname{ctg}^5 x}{5}+\frac{\operatorname{ctg}^3 x}{3}-\operatorname{ctg} x-x+C$.

д) $\int \frac{dx}{\sin^2 x+3\sin x\cos x-\cos^2 x}$. *Ответ*: $\frac{1}{\sqrt{13}}\ln\left|\frac{2\operatorname{tg} x+3-\sqrt{13}}{2\operatorname{tg} x+3+\sqrt{13}}\right|+C$.

Вариант 4

а) $\int \sin^4 x\cos^3 x\,dx$. *Ответ*: $\frac{\sin^5 x}{5}-\frac{\sin^7 x}{7}+C$.

б) $\int \sin^2 3x\,dx$. *Ответ*: $\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{6}\sin 6x\right)+C$.

в) $\int \frac{dx}{3+2\cos x-\sin x}$. *Ответ*: $\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1}{2}+C$.

г) $\int \sin 8x\cos 2x\,dx$. *Ответ*: $\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{10}\cos 10x-\frac{1}{6}\cos 6x\right)+C$.

д) $\int \frac{dx}{\sin^2 x+\sin 2x+3\cos^2 x}$. *Ответ*: $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg} x+1}{\sqrt{2}}+C$.

Вариант 5

а) $\int \cos^5 x\,dx$. *Ответ*: $\sin x-\frac{\sin^3 x}{3}+C$.

б) $\int \sin^4 x\,dx$. *Ответ*: $\frac{3x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}+\frac{\sin 4x}{32}+C$.

в) $\int \frac{dx}{5+4\sin x}$. *Ответ*: $\frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{5\operatorname{tg}\frac{x}{2}+4}{3}+C$.

г) $\int \operatorname{ctg}^3 x\,dx$. *Ответ*: $-\frac{1}{6}\operatorname{ctg}^2 3x-\frac{1}{3}\ln|\sin 3x|+C$.

д) $\int \frac{dx}{3\cos^2 x-2}$. *Ответ*: $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1+\sqrt{2}\operatorname{tg} x}{1-\sqrt{2}\operatorname{tg} x}\right|+C$.

Вариант 6

а) $\int \sin^3 x \cos^3 x \, dx$. *Ответ*: $\dfrac{\sin^4 x}{4} - \dfrac{\sin^6 x}{6} + C$.

б) $\int \cos^2 3x \, dx$. *Ответ*: $\dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{1}{6}\sin 6x \right) + C$.

в) $\int \dfrac{dx}{8 + 4\cos x}$. *Ответ*: $\dfrac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \dfrac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{3}} + C$.

г) $\int \operatorname{tg}^4 x \, dx$. *Ответ*: $\dfrac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x + x + C$.

д) $\int \dfrac{dx}{4\cos^2 x + 3\sin^2 x}$. *Ответ*: $\dfrac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \dfrac{\sqrt{3}\operatorname{tg} x}{2} + C$.

Вариант 7

а) $\int \sin^2 x \cos^5 x \, dx$. *Ответ*: $\dfrac{\sin^3 x}{5} - \dfrac{2\sin^5 x}{5} + \dfrac{\sin^7 x}{7} + C$.

б) $\int \sin^2 4x \, dx$. *Ответ*: $\dfrac{1}{2}\left(x - \dfrac{1}{8}\sin 8x \right) + C$.

в) $\int \dfrac{dx}{3\sin x - 4\cos x}$. *Ответ*: $\dfrac{1}{5} \ln \left| \dfrac{\operatorname{tg}\frac{x}{2} - \frac{1}{2}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 2} \right| + C$.

г) $\int \operatorname{tg}^3 x \, dx$. *Ответ*: $\dfrac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x + \ln|\cos x| + C$.

д) $\int \dfrac{dx}{1 + \sin^2 x}$. *Ответ*: $\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\operatorname{tg} x\right) + C$.

Вариант 8

а) $\int \dfrac{\cos^3 x}{\sin^4 x} \, dx$. *Ответ*: $-\dfrac{1}{3\sin^3 x} + \dfrac{1}{\sin x} + C$.

б) $\int \cos^2 5x \, dx$. *Ответ*: $\dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{1}{10}\sin 10x \right) + C$.

в) $\int \dfrac{dx}{5 - 4\sin x + 2\cos x}$. *Ответ*: $\dfrac{2}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \dfrac{3\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 4}{\sqrt{5}} + C$.

г) $\int \operatorname{ctg}^4 x dx$. *Ответ*: $-\dfrac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x + \operatorname{ctg} x + x + C$.

д) $\int \frac{dx}{3\cos^2 x - 2}$. *Ответ*: $\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{1+\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\, x}{1-\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\, x} \right| + C$.

Вариант 9

а) $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}} dx$. *Ответ*: $3\sqrt[3]{\cos x}\left(\frac{1}{7}\cos^2 x - 1\right) + C$.

б) $\int \cos^4 x\, dx$. *Ответ*: $\frac{3}{8}x - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32} + C$.

в) $\int \frac{dx}{4\cos x + 3\sin x}$. *Ответ*: $-\frac{1}{5}\ln \left| \frac{\mathrm{tg}\frac{x}{2} - 2}{\mathrm{tg}\frac{x}{2} - \frac{1}{2}} \right| + C$.

г) $\int \mathrm{tg}^5 x\, dx$. *Ответ*: $\frac{\mathrm{tg}^4 x}{4} - \frac{\mathrm{tg}^2 x}{2} + \ln|\cos x| + C$.

д) $\int \frac{dx}{\sin^2 x - 4\sin x \cos x + 5\cos^2 x}$. *Ответ*: $\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}\, x - 2) + C$.

Вариант 10

а) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^6 x} dx$. *Ответ*: $\frac{1}{3\sin^3 x} - \frac{1}{5\sin^5 x} + C$.

б) $\int \sin^2 5x\, dx$. *Ответ*: $\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{10}\sin 10x\right) + C$.

в) $\int \frac{dx}{2 + 4\sin x + 3\cos x}$. *Ответ*: $-\frac{1}{\sqrt{21}}\ln \left| \frac{\mathrm{tg}\frac{x}{2} - 4 - \sqrt{21}}{\mathrm{tg}\frac{x}{2} - 4 + \sqrt{21}} \right| + C$.

г) $\int \mathrm{tg}^4 \frac{x}{2} dx$. *Ответ*: $\frac{2}{3}\mathrm{tg}^3 \frac{x}{2} - 2\,\mathrm{tg}\frac{x}{2} + x + C$.

д) $\int \frac{dx}{4\sin^2 x + 4\sin 2x}$. *Ответ*: $\frac{1}{8}\ln \left| \frac{\mathrm{tg}\, x}{\mathrm{tg}\, x + 2} \right| + C$.

Вариант 11

а) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} dx$. *Ответ*: $-\frac{1}{3\sin^3 x} + \frac{1}{\sin x} + C$.

б) $\int \cos^4 \frac{x}{2} dx$. *Ответ*: $\frac{3x}{8} - \frac{\sin x}{2} + \frac{\sin 2x}{16} + C$.

в) $\int \frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}$. *Ответ*: $\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-5}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-3}\right|+C$.

г) $\int \sin 3x\cos 5x\,dx$. *Ответ*: $-\frac{1}{16}\cos 8x+\frac{1}{4}\cos 2x+C$.

д) $\int \frac{dx}{4\sin^2 x-5\cos^2 x}$. *Ответ*: $\frac{1}{4\sqrt{5}}\ln\left|\frac{2\operatorname{tg}x-\sqrt{5}}{2\operatorname{tg}x+\sqrt{5}}\right|+C$.

Вариант 12

а) $\int \cos^5 x\sin^2 x\ dx$. *Ответ*: $\frac{1}{3}\sin^3 x-\frac{2}{5}\sin^5 x+\frac{1}{7}\sin 7x+C$.

б) $\int \sin^2\frac{x}{4}\cos^2\frac{x}{4}\,dx$. *Ответ*: $\frac{x}{8}-\frac{1}{8}\sin x+C$.

в) $\int \frac{dx}{4-4\sin x+3\cos x}$. *Ответ*: $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-7}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1}\right|+C$.

г) $\int \sin 10x\sin 15x\,dx$. *Ответ*: $-\frac{1}{50}\sin 25x+\frac{1}{10}\sin 5x+C$.

д) $\int \frac{dx}{3\cos^2 x+4\sin^2 x}$. *Ответ*: $\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}x}{\sqrt{3}}+C$.

Вариант 13

а) $\int \sqrt[3]{\sin^2 x}\cos^3 x\,dx$. *Ответ*: $\frac{3}{5}\sqrt[3]{\sin^5 x}-\frac{3}{11}\sqrt[3]{\sin^{11} x}+C$.

б) $\int \sin^2 2x\ dx$. *Ответ*: $\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{4}\sin 4x\right)+C$.

в) $\int \frac{dx}{3\cos x-4\sin x}$. *Ответ*: $-\frac{1}{5}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\frac{1}{3}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+3}\right|+C$.

г) $\int \cos x\cos^2 3x\,dx$. *Ответ*: $\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}+\frac{1}{20}\sin 5x+\frac{1}{28}\sin 7x+C$.

д) $\int \frac{dx}{1+3\cos^2 x}$. *Ответ*: $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}x}{2}+C$.

Вариант 14

а) $\int \sin^5 x \cos^4 x\, dx$. *Ответ*: $-\dfrac{1}{5}\cos^5 x + \dfrac{2}{7}\cos^7 x - \dfrac{\cos^9 x}{9} + C$.

б) $\int \cos^2 2x\, dx$. *Ответ*: $\dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{1}{4}\sin 4x\right) + C$.

в) $\int \dfrac{dx}{5 + 3\cos x}$. *Ответ*: $\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{2} + C$.

г) $\int \cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{3}\, dx$. *Ответ*: $\dfrac{3}{5}\sin\dfrac{5x}{6} + 3\sin\dfrac{x}{6} + C$.

д) $\int \dfrac{dx}{16\sin^2 x - 4\sin 2x}$. *Ответ*: $\dfrac{1}{8}\ln\left|\dfrac{2\operatorname{tg} x - 1}{2\operatorname{tg} x}\right| + C$.

Вариант 15

а) $\int \sin^{\frac{3}{5}} x \cos^5 x\, dx$.

Ответ: $\dfrac{5}{8}\sqrt[5]{\sin^8 x} - \dfrac{5}{9}\sqrt[5]{\sin^{18} x} + \dfrac{5}{28}\sqrt[5]{\sin^{28} x} + C$.

б) $\int \sin^2 2x \cos^2 2x\, dx$. *Ответ*: $\dfrac{1}{8}x - \dfrac{1}{64}\sin 8x + C$.

в) $\int \dfrac{dx}{3 + 5\sin x + 3\cos x}$. *Ответ*: $\dfrac{1}{5}\ln\left|5\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} + 3\right| + C$.

г) $\int \cos 9x \cos 5x\, dx$. *Ответ*: $\dfrac{1}{8}\sin 4x + \dfrac{1}{28}\sin 14x + C$.

д) $\int \dfrac{dx}{8\sin^2 x - 8\sin 2x}$. *Ответ*: $\dfrac{1}{16}\ln\left|\dfrac{\operatorname{tg} x - 2}{\operatorname{tg} x}\right| + C$.

Домашнее задание

1. Повторить все методы интегрирования.
2. Изучить интегрирование некоторых иррациональных функций с помощью тригонометрических подстановок.
3. Найти интегралы:

а) $\int \dfrac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^4 x}}\, dx$. *Ответ*: $\dfrac{3}{\sqrt[3]{\cos x}} + \dfrac{3}{5}\sqrt[3]{\cos^5 x} + C$.

б) $\int \sin^2 4x \cos^2 4x\, dx$. *Ответ*: $\dfrac{1}{8}\left(x - \dfrac{1}{16}\sin 16x\right) + C$.

в) $\int \frac{dx}{4\sin x - 3\cos x - 5}$. *Ответ*: $\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 2} + C$.

г) $\int \frac{dx}{3\sin^2 x + 5\cos^2 x}$. *Ответ*: $\frac{1}{\sqrt{15}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{3}{5}} \operatorname{tg} x\right) + C$.

д) $\int \cos 2x \sin 4x \, dx$. *Ответ*: $-\frac{1}{12}\cos 6x - \frac{1}{4}\cos 2x + C$.

VIII. Интегрирование некоторых иррациональных функций с помощью тригонометрических подстановок. Итоговое повторение, вычисление интегралов от различных классов функций

1. Устно указать метод для нахождения интегралов:

а) $\int \sin^{30} x \cos^3 x \, dx$.

б) $\int \sin^2 3x \, dx$.

в) $\int \frac{dx}{2\sin x - 3\cos x + 5}$.

г) $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 3\cos^2 x}$.

д) $\int \sin 5x \cos 3x \, dx$.

е) $\int \operatorname{tg}^3 2x \, dx$.

2. Просмотр выполнения домашнего задания.

3. Краткий теоретический обзор с использованием лекционного материала, информационной таблицы.

Обращаем внимание, что некоторые частные случаи нахождения интегралов вида $\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx$ уже были рассмотрены нами ранее. Существуют различные методы их нахождения. Рассмотрим еще один из таких методов, основанный на применении тригонометрических подстановок.

В квадратном трехчлене выделяют полный квадрат:

$$ax^2 + bx + c = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right),$$

затем с помощью подстановки $z = x + \frac{b}{2a}$ приводят к интегралам одного из следующих трех типов:

I. $\int R\left(z, \sqrt{k^2 - z^2}\right) dz$.

II. $\int R\left(z, \sqrt{k^2 + z^2}\right) dz$.

III. $\int R\left(z, \sqrt{z^2 - k^2}\right) dz$.

Эти интегралы с помощью следующих подстановок:

– для I-го интеграла $z = k\sin t$ (или $z = k\cos t$);

– для II-го – $z = k\,\mathrm{tg}\,t$;

– для III-го – $z = \dfrac{k}{\sin t}$ (или $z = \dfrac{k}{\cos t}$),

приводятся к интегралам от рациональной функции относительно $\sin t$ и $\cos t$, т. е. к интегралам вида $\int R(\sin t, \cos t)dt$.

***Обучающий пример* 1.** Найти $\int \sqrt{4x - x^2}\,dx$.

Решение. Выделим полный квадрат в квадратном трехчлене:

$$\int \sqrt{4x-x^2}\,dx = \int \sqrt{4-(x-2)^2}\,dx = \begin{vmatrix} x-2=z \\ dx=dz \end{vmatrix} = \int \sqrt{4-z^2}\,dz = \begin{vmatrix} z = 2\sin t \\ dz = 2\cos t dt \end{vmatrix} =$$

$$= \int \sqrt{4-4\sin^2 t}\cdot 2\cos t\,dt = 4\int \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,dt = 4\int \cos^2 t\,dt =$$

$$= 2\int (1+\cos 2t)\,dt = 2\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right) + C, \quad \text{где} \quad t = \arcsin\frac{x-2}{2}.$$

Так как $\quad \sin t = \dfrac{x-2}{2}, \qquad \cos t = \sqrt{1-\dfrac{(x-2)^2}{4}} = \dfrac{\sqrt{4x-x^2}}{2}$,

$$\frac{1}{2}\sin 2t = \sin t\cos t = \frac{x-2}{4}\sqrt{4x-x^2},$$

то
$$\int \sqrt{4x-x^2}\,dx = 2\arcsin\frac{x-2}{2} + \frac{x-2}{2}\sqrt{4x-x^2} + C.$$

***Обучающий пример* 2.** Найти $\int \dfrac{dx}{\sqrt{\left(5+2x+x^2\right)^3}}$.

Решение. Выделим в квадратном трехчлене полный квадрат:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\left(5+2x+x^2\right)^3}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\left(4+(x+1)^2\right)^3}} = \begin{vmatrix} x+1=z \\ dx=dz \end{vmatrix} = \int \frac{dz}{\sqrt{\left(4+z^2\right)^3}} = \begin{vmatrix} z = 2\,\mathrm{tg}\,t \\ dz = \dfrac{2dt}{\cos^2 t} \end{vmatrix} =$$

$$= \int \frac{2dt}{\cos^2 t\sqrt{\left(4+4\,\mathrm{tg}^2 t\right)^3}} = 2\int \frac{dt}{\cos^2 t\cdot 8\cdot \dfrac{1}{\cos^3 t}} = \frac{1}{4}\int \cos t dt = \frac{1}{4}\sin t + C =$$

$$= \frac{1}{4}\frac{\mathrm{tg}\,t}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2 t}} + C = \frac{1}{4}\frac{\dfrac{z}{2}}{\sqrt{1+\dfrac{z^2}{4}}} + C = \frac{x+1}{4\sqrt{5+2x+x^2}} + C.$$

***Обучающий пример* 3.** Найти $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x^2-a^2\right)^3}}$.

Решение. $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x^2-a^2\right)^3}} = \left| \begin{array}{l} x = \dfrac{a}{\cos t} \\ dx = \dfrac{a\sin t}{\cos^2 t}dt \end{array} \right| = \int \frac{a\sin t\,dt}{\cos^2 t \cdot \sqrt{\left(\dfrac{a^2}{\cos^2 t}-a^2\right)^3}} =$

$$= \int \frac{a\sin t\,dt}{a^3\cos^2 t \cdot \sqrt{\left(\dfrac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t}\right)^3}} = \frac{1}{a^2}\int \frac{\sin t\,dt}{\cos^2 t \cdot \dfrac{\sin^3 t}{\cos^3 t}} =$$

$$= \frac{1}{a^2}\int \frac{\cos t\,dt}{\sin^2 t} = \frac{1}{a^2}\int \sin^{-2} t\,d\left(\sin t\right), \text{ где } \quad t = \arccos\frac{a}{x}.$$

Так как $\sin t = \sqrt{1-\cos^2 t} = \sqrt{1-\dfrac{a^2}{x^2}} = \dfrac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}$, то окончательно имеем:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x^2-a^2\right)^3}} = -\frac{x}{a^2\sqrt{x^2-a^2}} + C.$$

3. Два студента у доски выполняют свое задание. Найти:

1. $\int \sqrt{12+4x-x^2}\,dx$. *Ответ*: $\frac{x-2}{2}\sqrt{12+4x-x^2} + 8\arcsin\frac{x-2}{4} + C$.

2. $\int \frac{dx}{\left(x+1\right)^2\sqrt{x^2+2x+2}}$. *Ответ*: $-\frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x+1} + C$.

Подчеркиваем, что для овладения важнейшими элементами техники интегрирования нужно:

– знать таблицу основных интегралов;

– знать основные правила и основные методы интегрирования (они приведены в информационной таблице);

– уметь определять класс подынтегральной функции и выбирать для ее интегрирования необходимый метод;

– уметь, пользуясь информационными таблицами, правильно доводить вычисления до нахождения неопределенного интеграла.

4. Два студента у доски выполняют по три задания:

1. $\int \frac{x+4\sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$. *Ответ*: $\frac{8}{3}\sqrt{\arcsin^3 x}-\sqrt{1-x^2}+C$.

2. $\int \frac{e^{\operatorname{tg} x}-7\sin x+5\sin 2x}{\cos^2 x}\,dx$. *Ответ*: $e^{\operatorname{tg} x}-\frac{7}{\cos x}-10\ln|\cos x|+C$.

3. $\int \frac{x\cos x\,dx}{\sin^3 x}$. *Ответ*: $C-\frac{x}{2\sin^2 x}-\frac{1}{2}\operatorname{ctg} x$.

4. $\int \frac{x^5-1}{x^3+x^2+x}\,dx$. *Ответ*: $\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+\ln\left|\frac{x^2+x+1}{x}\right|+C$.

5. $\int \frac{x+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}\,dx$. *Ответ*: $6\sqrt[3]{(1+x)^2}\left(\frac{1+x}{10}+\frac{\sqrt{1+x}}{7}-\frac{1}{4}\right)+C$.

6. $\int \frac{dx}{2\sin x-\cos x+5}$. *Ответ*: $\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{3\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{5}}+C$.

Домашнее задание

1. Повторить все методы интегрирования.
2. Найти:

1) $\int \frac{7x+2}{\sqrt{x^2+10}}\,dx$. *Ответ*: $7\sqrt{x^2+10}+2\ln\left|x+\sqrt{x^2+10}\right|+C$.

2) $\int \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}\,dx$. *Ответ*: $\frac{2}{3}\sqrt{\operatorname{tg}^3 x}+C$.

3) $\int x^2\ln x\,dx$. *Ответ*: $\frac{x^3}{9}(3\ln x-1)+C$.

4) $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\,dx$. *Ответ*: $2\left(\sqrt{x}-\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x}\right)+C$.

5) $\int \frac{x^2+5x-2}{(x^2-1)(x+1)}\,dx$. *Ответ*: $\ln|x-1|-\frac{3}{x+1}+C$.

6) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}-\sqrt{2x+1}}$.

Ответ: $\frac{3}{2}\sqrt[3]{2x+1}+3\sqrt[6]{2x+1}+3\ln\left|\sqrt[6]{2x+1}-1\right|+C$.

7) $\int \frac{dx}{5\cos x+3}$. *Ответ*: $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+2}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-2}\right|+C$.

8) $\int \frac{dx}{1+\sin^2 x}$. *Ответ*: $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\operatorname{tg} x\right)+C$.

9) $\int \sin^3 x\cdot\sqrt{\cos x}\,dx$. *Ответ*: $\frac{2}{7}\sqrt{\cos^7 x}-\frac{2}{3}\sqrt{\cos^3 x}+C$.

10) $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\,dx$. *Ответ*: $\ln\left|\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right|+\sqrt{1-x^2}+C$.

IX. Контрольная работа по теме «Неопределенный интеграл»

Пример 1. Найти $\int\left(2x^3-3\sqrt{x^5}+\frac{7}{\sqrt[7]{x^6}}\right)dx$.

Решение. Интеграл суммы (разности) можно представить как сумму (разность) интегралов:

$$\int\left(2x^3-3\sqrt{x^5}+\frac{7}{\sqrt[7]{x^6}}\right)dx=\int 2x^3dx-\int 3\sqrt{x^5}dx+\int\frac{7}{\sqrt[7]{x^6}}dx=$$

представим степени переменных в виде дробей и вынесем постоянные за знак интеграла:

$=2\int x^3dx-3\int x^{5/2}dx+7\int x^{-6/7}dx=$ (используя таблицу интегралов, вычислим)

$$=2\frac{x^{3+1}}{3+1}-3\frac{x^{5/2+1}}{\frac{5}{2}+1}+7\frac{x^{-6/7+1}}{-\frac{6}{7}+1}+C=2\frac{x^4}{4}-3\frac{x^{7/2}}{\frac{7}{2}}+7\frac{x^{1/7}}{\frac{1}{7}}+C=$$

$$\frac{x^4}{2}-\frac{6}{7}\sqrt{x^7}+49\sqrt[7]{x}+C.$$

Пример 2. Найти $\int\frac{dx}{\sin^2 x\cdot\operatorname{ctg}^5 x}$.

Решение. Данный интеграл решим методом замены переменной:

$$\int\frac{dx}{\sin^2 x\cdot\operatorname{ctg}^5 x}=\left[\begin{array}{l} t=\operatorname{ctg}x;\ dt=t'dx=\left(\operatorname{ctg}x\right)'dx=-\dfrac{dx}{\sin^2 x} \\ dx=-\sin^2 x dt \end{array}\right]=$$

$=\int \frac{1}{\sin^2 x\cdot t^5}\left(-\sin^2 x\right)dt=$ (сокращаем $\sin^2 x$, степень переменной перепишем в виде дроби) $=-\int t^{-5}dt=-\frac{t^{-5+1}}{-5+1}+C=-\frac{t^{-4}}{-4}+C=\frac{1}{4t^4}+C=$ (вернёмся к старой переменной) $=\frac{1}{4\operatorname{ctg}^4 x}+C$.

Пример 3. Найти $\int \frac{2x^2-7x+10}{x^3-x^2+4x-4}dx$.

Решение. Представим подынтегральную функцию в виде суммы дробей. Для этого разложим знаменатель дроби на линейные и квадратичные множители:

$$x^3-x^2+4x-4=\left(x^3-x^2\right)+(4x-4)=x^2(x-1)+4(x-1)=(x-1)\left(x^2+4\right).$$

$$\frac{2x^2-7x+10}{x^3-x^2+4x-4}=\frac{2x^2-7x+10}{(x-1)\left(x^2+4\right)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+4}.$$

Приведём дроби к общему знаменателю:

$$\frac{A\left(x^2+4\right)+(Bx+C)(x-1)}{(x-1)\left(x^2+4\right)}=\frac{Ax^2+4A+Bx^2+Cx-Bx-C}{(x-1)\left(x^2+4\right)}=$$

(сгруппируем по степеням) $=\frac{(A+B)x^2+(C-B)x+(4A-C)}{(x-1)\left(x^2+4\right)}$.

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях, т. к. числители первоначальной дроби и полученной тождественно равны.

$$\left[\begin{array}{l}(A+B)x^2+(C-B)x+(4A-C)=2x^2-7x+10\\ \begin{cases}A+B=2\\ C-B=-7\\ 4A-C=10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=1\\ B=1\\ C=-6\end{cases}\end{array}\right]=$$

$$=\frac{1}{x-1}+\frac{x-6}{x^2+4}=\frac{1}{x-1}+\frac{x}{x^2+4}-\frac{6}{x^2+4}.$$

Полученную сумму дробей подставим в интеграл:

$$\int\left(\frac{1}{x-1}+\frac{x}{x^2+4}-\frac{6}{x^2+4}\right)dx=\int\frac{dx}{x-1}+\int\frac{xdx}{x^2+4}-\int\frac{6}{x^2+4}dx=$$ (во втором интеграле воспользуемся методом подведения под знак дифференциала)

$$=\int\frac{dx}{x-1}+\frac{1}{2}\int\frac{2xdx}{x^2+4}-6\int\frac{1}{x^2+4}dx=\int\frac{d(x-1)}{x-1}+\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x^2+4\right)}{x^2+4}-6\int\frac{dx}{x^2+2^2}=$$

$$=\ln|x-1|+\frac{1}{2}\ln\left|x^2+4\right|-6\cdot\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C=\ln\left|(x-1)\sqrt{x^2+4}\right|-3\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C.$$

Пример 4. Найти $\int\frac{x+1}{\sqrt{x+2}}dx$.

Решение. $\int\frac{x+1}{\sqrt{x+2}}dx=$ (прибавим и вычтем 1 в числителе)

$=\int\frac{x+1+1-1}{\sqrt{x+2}}dx=\int\frac{x+2-1}{\sqrt{x+2}}dx=$(представим подынтегральную функцию в виде разности двух дробей) $=\int\left(\frac{x+2}{\sqrt{x+2}}-\frac{1}{\sqrt{x+2}}\right)dx=\int\frac{x+2}{\sqrt{x+2}}dx-\int\frac{1}{\sqrt{x+2}}dx=$

$$=\int\frac{\left(\sqrt{x+2}\right)^2}{\sqrt{x+2}}dx-\int\frac{1}{\sqrt{x+2}}dx=\int\sqrt{x+2}dx-\int\frac{1}{\sqrt{x+2}}dx=$$

$$=\int(x+2)^{\frac{1}{2}}dx-\int(x+2)^{-\frac{1}{2}}dx==\frac{(x+2)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}-\frac{(x+2)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}+C=$$

$$=\frac{(x+2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}-\frac{(x+2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+C=\frac{2}{3}\sqrt{(x+2)^3}-2\sqrt{x+2}+C.$$

Пример 5. Найти $\int\frac{dx}{7+5x}$.

Решение. Воспользуемся методом подведения под знак дифференциала:

$$\int\frac{dx}{7+5x}=\frac{5}{5}\int\frac{dx}{7+5x}=\frac{1}{5}\int\frac{5dx}{7+5x}=\frac{1}{5}\int\frac{d(5x+7)}{7+5x}=\frac{1}{5}\ln|5x+7|+C.$$

Пример 6. Найти $\int x\cos(x+5)dx$.

Решение. Применим метод интегрирования по частям:

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$\int x\cos(x+5)dx = \begin{bmatrix} u = x; du = u'dx = x'dx = dx \\ dv = \cos(x+5)dx; v = \int dv = \int \cos(x+5)dx = \sin(x+5) \end{bmatrix} =$$

$$= x\cdot\sin(x+5) - \int \sin(x+5)dx = x\cdot\sin(x+5) + \cos(x+5) + C.$$

Пример 7. Найти $\int \frac{xdx}{\sqrt{9-x^2}}$.

Решение. Воспользуемся методом подведения под знак дифференциала: $\int \frac{xdx}{\sqrt{9-x^2}} = \frac{2}{2}\int \frac{xdx}{\sqrt{9-x^2}} = -\frac{1}{2}\int \frac{-2xdx}{\sqrt{9-x^2}} = -\frac{1}{2}\int \frac{d\left(9-x^2\right)}{\sqrt{9-x^2}} =$

$$= -\frac{1}{2}\int \left(9-x^2\right)^{-\frac{1}{2}} d\left(9-x^2\right) = -\frac{1}{2}\frac{\left(9-x^2\right)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = -\frac{1}{2}\frac{\left(9-x^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C =$$

$$= -\sqrt{9-x^2} + C.$$

Пример 8. Найти $\int \frac{\cos^3 xdx}{\sin^2 x}$.

Решение. $\int \frac{\cos^3 xdx}{\sin^2 x} = \int \frac{\cos^2 x\cdot\cos x}{\sin^2 x}dx = \int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}\cos xdx =$ (поделим числитель на знаменатель почленно) $= \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x}\right)\cos xdx =$

$\int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right)\cos xdx =$ (введём замену переменной) $= \begin{bmatrix} t = \sin x, dt = \cos xdx \\ dx = \dfrac{dt}{\cos x} \end{bmatrix} =$

$$= \int \left(\frac{1}{t^2} - 1\right)\cos x\frac{dt}{\cos x} = \int \frac{dt}{t^2} - \int dt = \frac{t^{-2+1}}{-2+1} - t + C = = \frac{t^{-1}}{-1} - t + C =$$

$= -\frac{1}{t} - t + C =$ (вернёмся к старой переменной) $= -\frac{1}{\sin x} - \sin x + C$.

Пример 9. Найти $\int \frac{5-3x}{\sqrt{4-3x^2}}dx$.

Решение. $\int \frac{5-3x}{\sqrt{4-3x^2}}dx = \int \frac{5}{\sqrt{4-3x^2}}dx - \int \frac{3x}{\sqrt{4-3x^2}}dx =$ (во втором интеграле воспользуемся методом подведения под знак дифференциала)

$$= \int \frac{5}{\sqrt{4-3x^2}}dx - \frac{2}{2}\int \frac{3x}{\sqrt{4-3x^2}}dx = \int \frac{5}{\sqrt{4-3x^2}}dx + \frac{1}{2}\int \frac{-6x}{\sqrt{4-3x^2}}dx =$$

$$= 5\int \frac{dx}{\sqrt{4-3x^2}} + \frac{1}{2}\int \frac{d\left(4-3x^2\right)}{\sqrt{4-3x^2}} = \frac{5}{\sqrt{3}}\int \frac{dx}{\sqrt{2^2-\left(\sqrt{3}x\right)^2}} + \frac{1}{2}\int \frac{d\left(4-3x^2\right)}{\sqrt{4-3x^2}} =$$

$$= \frac{5}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}\frac{\left(4-3x^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \frac{5}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}x + \sqrt{4-3x^2} + C.$$

Пример 10. Найти $\int \frac{2-x}{4x^2+16x-12}dx$.

Решение. Выделим полный квадрат в знаменателе подынтегральной функции:

$$4x^2+16x-12 = 4\left(x^2+4x-3\right) = 4\left(\left((x)^2+2\cdot x\cdot 2+4\right)-4-3\right) = 4\left((x+2)^2-7\right).$$

$$\int \frac{2-x}{4x^2+16x-12}dx = \int \frac{2-x}{4\left((x+2)^2-7\right)}dx = \frac{1}{4}\int \frac{2-x}{(x+2)^2-7}dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{2}{(x+2)^2-7}dx - \frac{1}{4}\int \frac{x}{(x+2)^2-7}dx = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x+2)^2-7} - \frac{1}{8}\int \frac{2(x+2)-4}{(x+2)^2-7}dx =$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x+2)^2-7} - \frac{1}{8}\int \frac{2(x+2)}{(x+2)^2-7}dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x+2)^2-7} =$$

$$= \int \frac{dx}{(x+2)^2-\left(\sqrt{7}\right)^2} - \frac{1}{8}\int \frac{d\left((x+2)^2-7\right)}{(x+2)^2-7} =$$

$$\frac{1}{2\sqrt{7}}\ln\left|\frac{x+2-\sqrt{7}}{\sqrt{7}+x+2}\right| - \frac{1}{8}\ln\left|x^2+4x-3\right| + C.$$

Неопределенные интегралы
(повышенный уровень)

1. $\int \frac{2+3x^2}{x^2\left(1+x^2\right)}dx$

2. $\int \frac{dx}{1+e^{5x}}$

3. $\int \frac{x^2-1}{\left(x^4+3x^2+1\right)\operatorname{arctg}\frac{x^2+1}{x}}dx$

4. $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^4}dx$

5. $\int \frac{1+\ln x}{3+x\ln x}dx$

6. $\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}dx$

7. $\int \cos^5 x\sqrt{\sin x}dx$

8. $\int x^2\sqrt[3]{1-x}dx$

9. $\int e^{5x}\cos 4x dx$

10. $\int \cos(\ln x)dx$

11. $\int x\ln(1+\frac{1}{x})dx$

12. $\int \ln(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})dx$

13. $\int \sin x\ln \operatorname{tg} x dx$

14. $\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})dx$

15. $\int \frac{x\cos x}{\sin^3 x}dx$

16. $\mathrm{I}_n=\int (4-x^2)^n dx$

17. $\mathrm{I}_n=\int (\ln x)^n dx$

18. $\mathrm{I}_n=\int \frac{dx}{\sin^n x}$

19. $\mathrm{I}_n=\int \frac{x^n dx}{\sqrt{x^2+a}}$

20. $\mathrm{I}_n=\int \operatorname{tg}^n x dx$

21. $\int \frac{x^4 dx}{(2+x)(x^2-1)}$

22. $\int \frac{2x^2-3x+3}{x^3-2x^2+3}dx$

23. $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$

24. $\int \frac{5x^3+9x^2-22x-8}{x^2-4x}dx$

25. $\int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x(1+\sqrt[3]{x})}dx$

26. $\int \frac{2}{(2-x)^2}\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}dx$

27. $\int \frac{dx}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}$

28. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}$

29. $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x-x^2}}$

30. $\int \frac{(x+\sqrt{1+x^2})^5}{\sqrt{1+x^2}}dx$

31. $\int \frac{5x+4}{\sqrt{x^2+2x+5}}dx$

32. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^6 x}dx$

33. $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$

34. $\int \frac{\sin^4 x}{\cos x}dx$

35. $\int \frac{dx}{\sin x(2+\cos x-2\sin x)}$

36. $\int \frac{\sin^2 x\cos x}{\sin x+\cos x}dx$

37. $\int \frac{dx}{\cos^4 x\sin^2 x}$

38. $\int \frac{\ln x}{x^2}dx$

39. $\int e^{-x}\ln(1+c^x)dx$

ЗАДАНИЯ

1. $\int 5\sin x \cdot x^{15} dx;$

2. $\int e^{11x} \cdot \operatorname{tg} x dx;$

3. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{4x^2 + 2x - 10}};$

4. $\int \dfrac{x^3}{1 + x^6} dx;$

5. $\int \dfrac{x^2 + 4x - 15}{x^4 + x - 10x};$

6. $\int \dfrac{\sqrt{x-3} - 2}{2x - 14} dx;$

7. $\int \dfrac{x^4 + 5}{x^2 + 1} dx;$

8. $\int (3x^2 + 1)\cos(x) dx;$

9. $\int \dfrac{8x^2}{x^2 - 4x + 3} dx;$

10. $\int \dfrac{\ln(x) dx}{x^4};$

11. $\int \dfrac{x^4 - 4}{x^2 - 5x + 6} dx;$

12. $\int \dfrac{4^{\operatorname{arctg}(x)} dx}{1 + x^2};$

13. $\int (x^2 - 2x + 3)\sin(x) dx;$

14. $\int \dfrac{e^{5\arcsin(x)} dx}{\sqrt{1 - x^2}};$

15. $\int \dfrac{x^3 + 3}{x^2 + 2x + 5} dx$

16. $\int \dfrac{e^{-4x}}{e^{-4x} + 2} dx;$

17. $\int (x^4 - 2)\sin^2(x) dx;$

18. $\int \dfrac{\sqrt{x} - 9}{\sqrt[4]{2x}} dx;$

19. $\int \dfrac{x^4 - 6x + 5}{x^2 + 6} dx;$

20. $\int \dfrac{\ln^2(x) dx}{x^4 + 1}$

Вам необходимо выполнить задания самостоятельно с помощью приведенных в приложении программ и представить отчёт об их выполнении.

ГЛОССАРИЙ

Первообразной для функции $\boldsymbol{f(x)}$ ***на некотором множестве X***	называется функция $F(x)$, которая является ***дифференцируемой*** и для которой для любого $x \in X$ выполняется равенство $F'(x) = f(x)$ или $dF(x) = F'(x) \cdot dx$
Неопределённым интегралом	называется множество всех первообразных для функции $f(x)$
Интегрируемой на $\boldsymbol{[a, b]}$	называется функция, для которой на $[a,b]$ существует первообразная, а значит, и неопределённый интеграл
Интегрированием	называется операция нахождения неопределённого интеграла
Свойство инвариантности	если $F'(x) = f(x)$, то $\int f(u)du = F(u) + C$; где $u = \varphi(x)$ – произвольная функция, имеющая непрерывную производную
Непосредственное интегрирование	выполняется с помощью таблиц, преобразования подынтегральных выражений, свойств неопределенного интеграла
Метод поднесения под знак дифференциала	основывается на свойстве инвариантности неопределенного интеграла: **если** $\boldsymbol{F'(x) = f(x)}$, **то** $\boldsymbol{\int f(u)du = F(u) + C}$
Чтобы поднести под знак дифференциала функцию	нужно записать под знаком дифференциала ее первообразную
Метод замены переменной	заключается во введении новой переменной с целью получения табличного интеграла или интеграла, сводимого к табличн ым
Интегрирование выражений, содержащих квадратный трёхчлен	выделением полного квадрата из квадратного трёхчлена и введением замены переменной $x + \dfrac{b}{2a} = t$ интегралы сводятся к табличным или к более простым
Метод интегрирования по частям	$\int u d\vartheta = u\vartheta - \int \vartheta du$

Циклическое интегрирование	применяя формулу интегрирования по частям достаточное число раз (но не менее двух), получают в правой части равенства интеграл, аналогичный интегралу в левой части равенства. Решая полученные уравнения относительно искомого, получают данный интеграл
Простейшие рациональные дроби I, II, III и IV типов	правильные рациональные дроби вида (I) $\dfrac{A}{(x-a)}$; (II) $\dfrac{A}{(x-a)^k}$, $(k \ge 2,\ k \in \mathrm{N})$; (III) $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$, $\left(D = p^2 - 4q < 0\right)$; (IV) $\dfrac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^k}$, $\left(k \ge 2, D = p^2 - 4q < 0\right)$, где A, a, M, N, p, q – действительные числа
Алгоритм интегрирования рациональных дробей	1) если дробь неправильная, то, разделив числитель на знаменатель, нужно отделить целую часть и правильную рациональную дробь; 2) в правильной рациональной дроби знаменатель нужно разложить на множители; 3) правильную рациональную дробь представить в виде суммы простейших рациональных дробей; 4) проинтегрировать целый многочлен и сумму простейших рациональных дробей
Интегрирование иррациональных функций	$\int R\left(\left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}},\ldots,\left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_k}{n_k}}\right)dx = \left\|\dfrac{ax+b}{cx+d} = t^p\right\|$, $p = НОК\ \left(n_1, n_2, \ldots, n_k\right)$
Дифференциальным биномом	называется выражение $x^m\left(a + bx^n\right)^p$, где m, n, p, – рациональные числа; a, b – действительные числа

Интегрирование дифференциальных биномов	выражаются через элементарные функции в следующих трёх случаях: 1. $p - целое\left(\left\|a+bx^n = t\right\|\right);$ 2. $\dfrac{m+1}{n} - целое \left(\left\|\begin{array}{l} a+bx^n = t^q, \\ q - знаменатель(p) \end{array}\right\|\right);$ 3. $\left(\dfrac{m+1}{n}+p\right) - целое \left(\left\|\begin{array}{l} a+bx^n = t^q x^n, \\ q - \text{знаменатель}(p) \end{array}\right\|\right)$
Интегрирование тригонометрических функций	всегда может быть выполнено с помощью ***универсальной тригонометрической подстановки*** $\boxed{\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = t, \quad x = 2\operatorname{arctg} t, \quad dx = \dfrac{2}{1+t^2}dt} \Rightarrow$ $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}, \operatorname{tg} x = \dfrac{2t}{1-t^2}$

ИСПОЛЬЗУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Бабко, Г.И. Учебно-методический комплекс: теория и практика проектирования (Методические рекомендации для преподавателей вузов) / Г.И. Бабко. – Минск: РИВШ, 2004.
2. Беспалько, В.П. Системно-методическое обеспечение учебно-воспитательного процесса подготовки специалистов / В.П. Беспалько, Ю.Г. Татур. – М., 1989.
3. Вакульчик, В.С. Элементы линейной алгебры. Введение в математический анализ. Дифференциальное исчисление функции одной переменной: учеб.-метод. комплекс / В.С. Вакульчик. – Новополоцк: ПГУ, 2007.
4. Высшая математика: учеб.-метод. комплекс для студентов техн. спец. В 2-х ч. Ч. 1 / сост. и общ. ред. Н.В. Цывиса. – Новополоцк: ПГУ, 2004. – 264 с.
5. Гусак, А.А. Справочник по высшей математике / А.А. Гусак, Г.М. Гусак. – Минск: Навука и тэхника, 1991.
6. Гусак, А.А. Высшая математика: учеб. для студентов вузов. В 2 т. Т. 1 / А.А. Гусак. – 5-е изд. – Минск: ТетраСистемс, 2004.
7. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 3 ч. Ч. 1 / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – М.: Высш. шк., 1980.
8. Зайцев, И.А. Высшая математика: учеб. для неинженерных специальностей с.-х. вузов / И.А. Зайцев. – М.: Высш. шк., 1991.
9. Зуев, Д.Д. Повышение эффективности учебно-методического комплекса как средств интенсификации учебно-воспитательного процесса: Проблемы школьного учебника / Д.Д. Зуев. – М.: Просвещение, 1987.
10. Жевняк, Р.М. Высшая математика. В 2 ч. Ч. 1 / Р.М. Жевняк, А.А. Карпук. – Минск: Выш. шк., 1985.
11. Мышкис, А.Д. Лекции по высшей математике / А.Д. Мышкис. – М.: Наука, 1973.
12. Пальчевский, Б.В. Концепция УМК / Б.В. Пальчевский, Л.С. Фридман. – Минск, 1993.
13. Письменный, Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. В 2 ч. Ч. 1 / Д.Т. Письменный. – 2-е изд., исп. – М.: Айрис-пресс, 2002.
14. Проектирование и разработка учебно-методических комплексов по циклу социально-гуманитарных дисциплин в вузе. Материалы для

слушателей курсов повышения квалификации / под общ. ред. А.В. Макарова – Минск: РИВШ, 2003.
15. Сборник задач по математике для втузов: спец. разделы математического анализа / под ред. А.В. Ефимова и Б.П. Демидовича. – М.: Наука, 1981.
16. Сборник задач по математике для втузов. Линейная алгебра и основы математического анализа / под ред. А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича. – М.: Наука, 1986.
17. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике. Ч. 1, Ч. 2 / под общ. ред. А.П. Рябушко. – Минск: Выш. шк., 1991.
18. Сергеенкова, В.В. Управляемая самостоятельная работа студентов. Модульно-рейтиноговая и рейтинговая системы / В.В. Сергеенкова. – Минск: РИВШ, 2000.
19. Столяр, А.А. Педагогика математики: учеб. пособие для физ.-мат. фак. пед. ин-тов / А.А. Столяр. – Минск: Выш. шк., 1986.
20. Яско, Ф.Ф. Методические рекомендации о порядке разработки, утверждения и распространения учебно-методических комплексов / Ф.Ф. Яско. – Новополоцк: ПГУ, 2004.
21. Яско, Ф.Ф. Положение о подготовке и выпуске научных и учебных изданий / Ф.Ф. Яско. – Новополоцк: ПГУ, 2005.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Вычисление неопределённых интегралов с помощью математических пакетов Maple, Matlab и Mathcad

Вычисление неопределенных интегралов рекомендуется при помощи компьютерных математических пакетов таких, как Maple, Matlab и Mathcad. Предлагаемые программы помогут вам при проверке домашнего задания или при необходимости быстрого решения задачи.

Рассмотрим вычисление неопределённых интегралов в программе **Maple**. Интегрирование выражений по заданной переменной осуществляется командой int(), которая имеет отложенную форму Int(). Эта команда позволяет вычислять неопределённый интеграл от выражения с использованием следующего синтаксиса команды int (выражение, переменная). Например, вам нужно вычислить интеграл:

$$\int e^x \cdot \sin x dx.$$

Для этого необходимо присвоить функции f подынтегральную функцию

$$f := e^x \cdot \sin x\,;$$

Нужно помнить, что в данной программе очень важное место занимают следующие операторы:

«:» – присвоить;

«;» – окончание предложения;

$\mathrm{Int}(f, x)$; – проверка интеграла;

$\mathrm{int}(f, x)$; – непосредственное вычисление (Ответ – число).

Решение примера приведено на рис. П.1. Обращаем ваше внимание на введение некоторых функций:

1. $e^x - \exp(x)$;
2. $e^{3x} - \exp(3 \cdot x)$;
3. $\sin x - \sin(x), \cos 4x - \cos(4 \cdot x)$;
4. $\dfrac{x}{2} - x/2$;
5. $x^2 - x \wedge 2$ (в Maple.10 при данном наборе программа автоматически будет выдавать вам привычный внешний вид формул).

Использование операторов Int() и int() дает возможность быстрого и качественного вычисления (рис. П.2, П.3).

Далее приведены примеры интегрирования дробно-рациональных выражений с помощью операторов Int() и int() и разложением на сумму простейших рациональных дробей (рис. П.4).

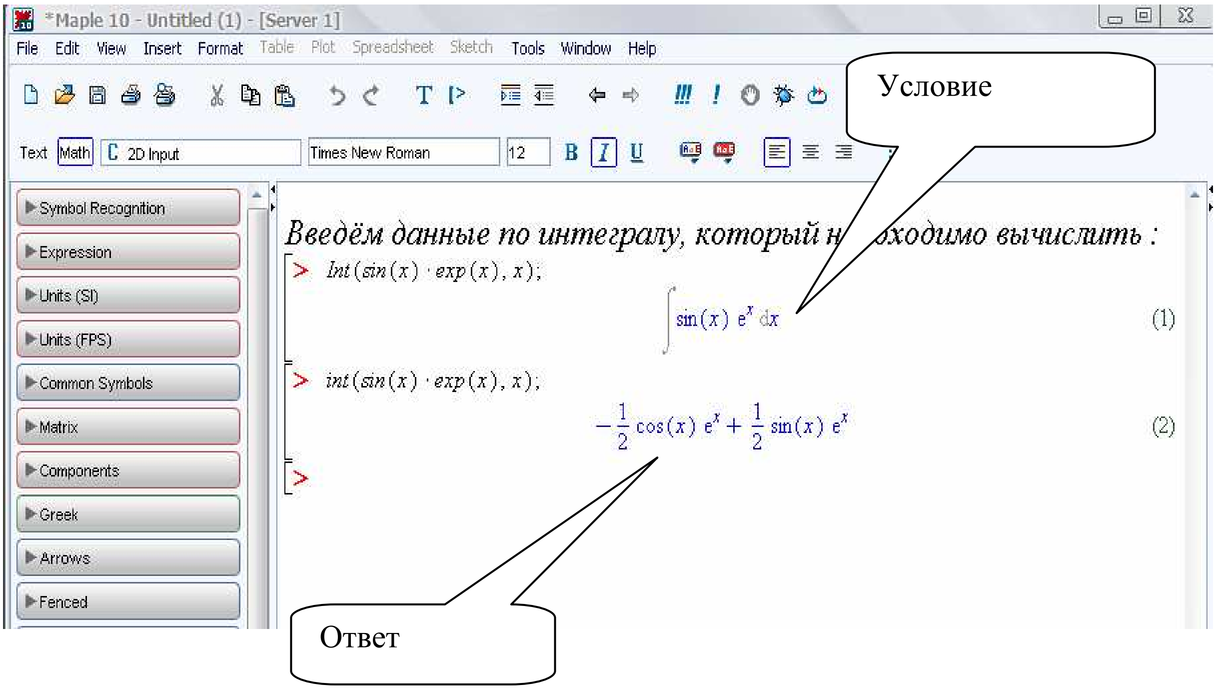

*Maple 10 - Untitled (1) - [Server 1]
Условие
Введём данные по интегралу, который необходимо вычислить :
> Int(sin(x)·exp(x), x);
(1)
> int(sin(x)·exp(x), x);
(2)
Ответ

Рис. П.1

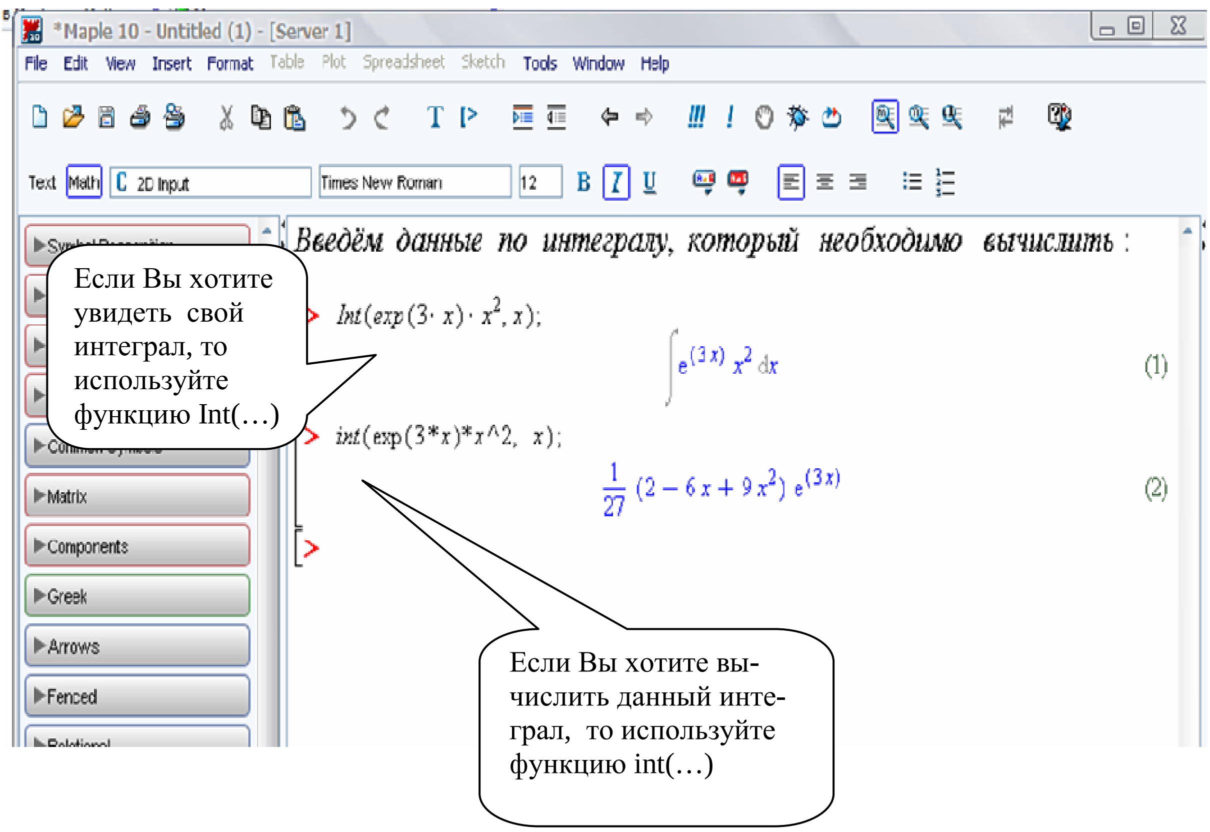

*Maple 10 - Untitled (1) - [Server 1]
Введём данные по интегралу, который необходимо вычислить :
Если Вы хотите увидеть свой интеграл, то используйте функцию Int(…)
> Int(exp(3·x)·x^2, x);
(1)
> int(exp(3*x)*x^2, x);
(2)
Если Вы хотите вычислить данный интеграл, то используйте функцию int(…)

Рис. П.2

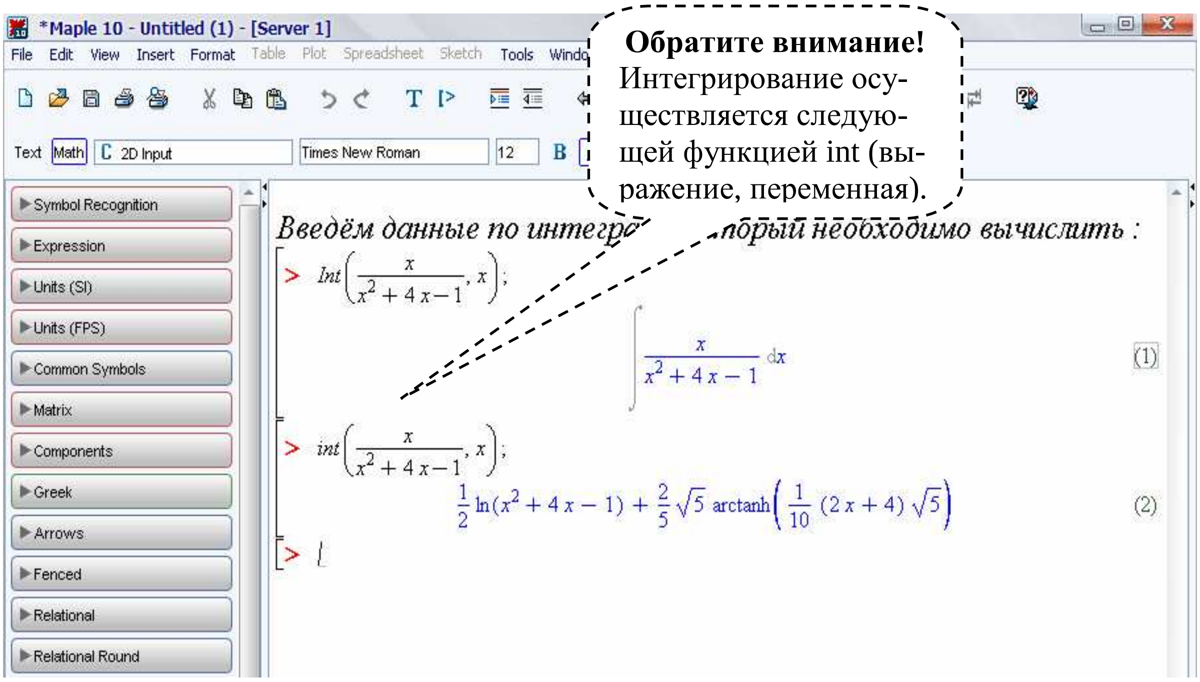


Рис. П.3

Разложение дробно-рационального выражения на сумму простых дробей

```
> dr := (x^2 + 8)/(x^3-4·x^2 + 4·x);
```

$$dr := \frac{x^2+8}{x^3-4x^2+4x}$$

```
> dn := denom(dr);
```

$$dn := x\,(x^2-4x+4)$$

```
> dnf := factor(dn);
```

$$dnf := x\,(x-2)^2$$

```
> drSimple := A/op(1, dnf) + B/op(1, op(2, dnf)) + C/op(2, dnf);
```

$$drSimple := \frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{(x-2)^2}$$

> *После разложения дробно − рационального выражения на сумму простых дробей найдём коэффициенты A, B, C*

```
> dns1 := simplify(drSimple);
```

$$dns1 := \frac{A x^2-4Ax+4A+Bx^2-2Bx+Cx}{x\,(x-2)^2}$$

```
> dns := numer(dns1);
```

$$dns := A x^2-4Ax+4A+Bx^2-2Bx+Cx$$

```
> drs := numer(dr);
```

$$drs := x^2+8$$

```
> e1 := coeff(dns, x^2) = coeff(drs, x^2);
```

$$e1 := A+B=1$$

```
> e2 := coeff(dns, x) = coeff(drs, x);
```

$$e2 := -4A-2B+C=0$$

```
> e3 := coeff(dns, x, 0) = coeff(drs, x, 0);
```

$$e3 := 4A=8$$

```
> solve({e1, e2, e3}, {A, B, C});
```

$$\{A=2,\ B=-1,\ C=6\}$$

> *Представим сумму простых дробей*

```
> assign(%);
> drSimple;
```

$$\frac{2}{x}-\frac{1}{x-2}+\frac{6}{(x-2)^2}$$

Рис. П.4

Представленная программа обладает также и другими возможностями, ознакомиться с ними можно либо на практических занятиях, либо изучая специализированную литературу.

Приведем примеры решения некоторых задач с помощью наиболее популярных математических пакетов MathCAD и Matlab (рис. П.5, П.6).

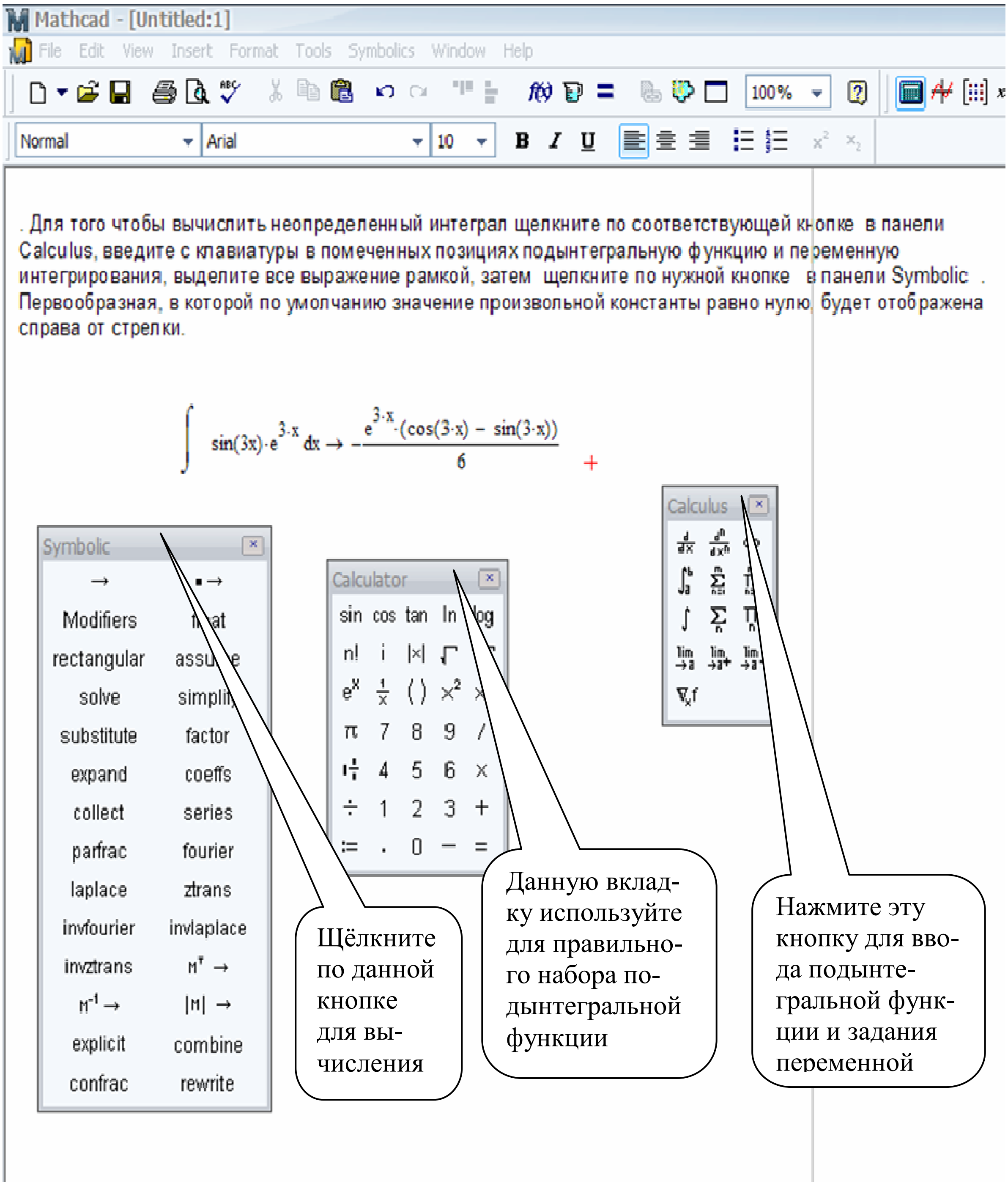


Рис. П.5

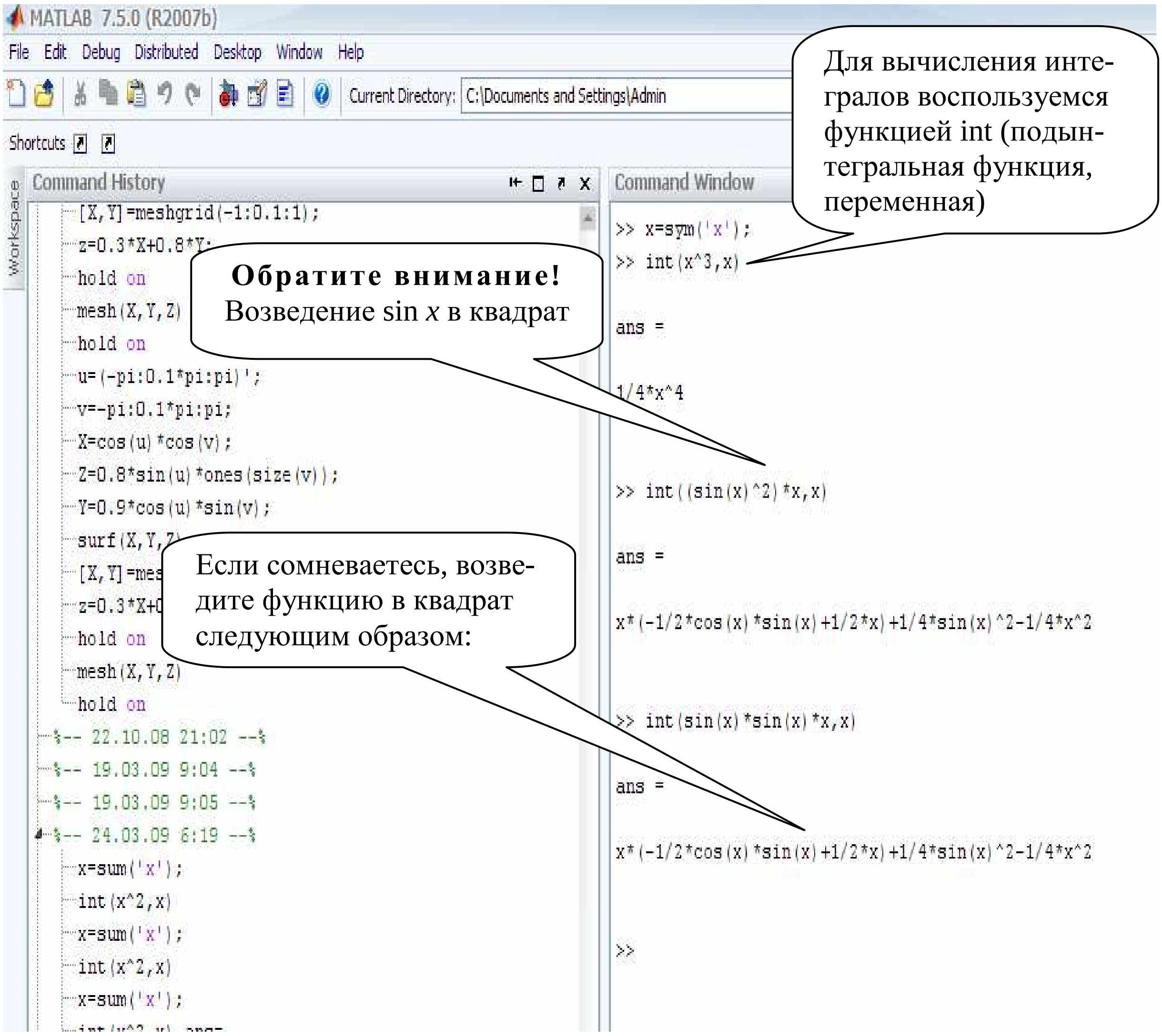
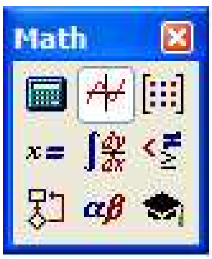
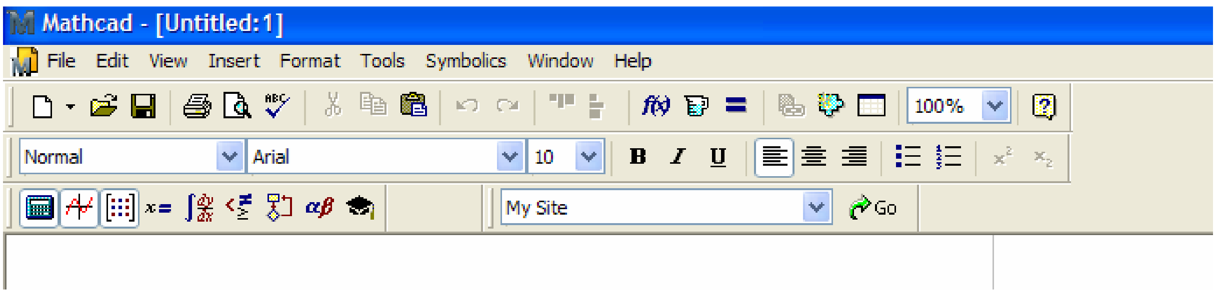


Рис. П.6



Чтобы воспользоваться возможностями данной программы, вы должны вызвать окно Math, на котором находятся следующие панели «Symbolic», «Calculator», «Calcul» и др. Окно Math может выглядеть так или как представлено ниже



Обратите внимание, что для вызова этой панели (если её нет) необходимо нажать кнопку «View». Появится новая вкладка, на которой необходимо выбрать «Toolbars». Откроется список команд, после чего найдите и нажмите кнопку «Math».

Применения математических пакетов Matlab и Maple при вычислении неопределённых интегралов идентичны: используется оператор int(). Приведем пример возведения в степень аргумента sin *x* (рис. П.7).

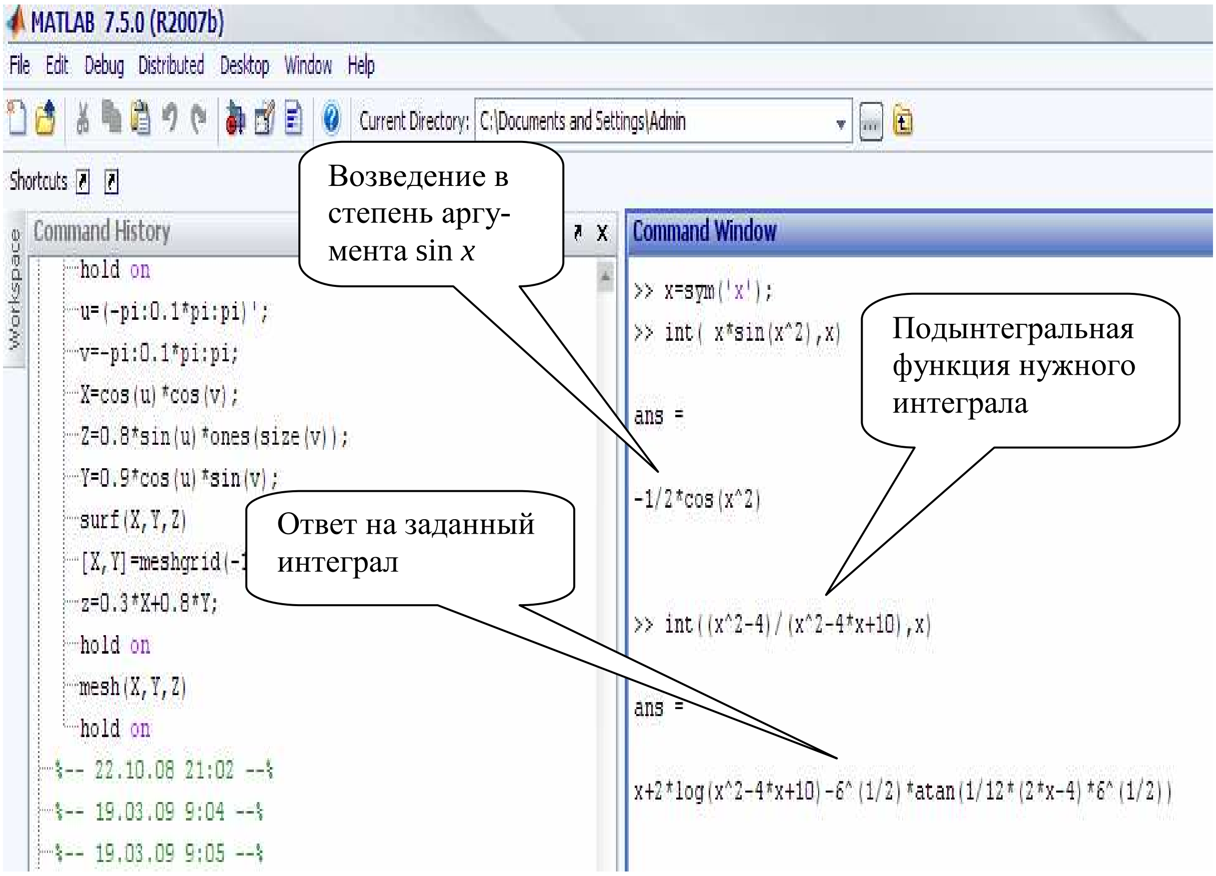


Рис. П.7

Предлагаемые программы обладают также и другими возможностями, ознакомиться с ними можно либо на практических занятиях, либо изучая специализированную литературу.

СОДЕРЖАНИЕ

От авторов ... 3
Введение ... 4
УЧЕБНЫЙ МОДУЛЬ 6. Неопределенный интеграл ... 7
Введение ... 7
Дидактические цели обучения ... 7
Учебно-методическая карта модуля ... 8
Графическая схема модуля ... 8
Информационная таблица «Неопределенный интеграл» ... 9
Краткое содержание теоретического материала ... 12
6.1. Первообразная. Неопределённый интеграл. Основные понятия ... 12
6.2. Таблица неопределенных интегралов ... 15
Методы интегрирования ... 18
6.3. Непосредственное интегрирование ... 18
6.4. Метод подведения под знак дифференциала ... 19
6.5. Метод замены переменной ... 20
6.6. Интегрирование выражений, содержащих квадратный трёхчлен ... 24
6.7. Метод интегрирования по частям ... 25
6.8. Циклическое интегрирование ... 27
6.9. Рекуррентная формула для интеграла $J_n = \int \frac{dx}{\left(x^2 + a^2\right)^n}$ ... 29
6.10. Интегрирование правильной рациональной дроби ... 31
6.11. Интегрирование иррациональных функций ... 33
6.12. Интегрирование дифференциальных биномов ... 35
6.13. Интегрирование тригонометрических функций ... 37
6.14. Интегрирование выражений, содержащих квадратный трёхчлен, с помощью тригонометрических подстановок ... 40
Выводы ... 43
Вопросы к экзамену ... 44
МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ПРОВЕДЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ ... 45
Учебно-информационный блок для проведения практических занятий ... 45
Основная и дополнительная литература ... 45
I. Комплексные числа. Основная теорема алгебры. Представление дроби в виде суммы простейших рациональных дробей ... 46
II. Таблица интегралов. Непосредственное интегрирование. Метод подведения под знак дифференциала ... 69
III. Замена переменной. Интегрирование выражений, содержащих квадратный трехчлен в знаменателе ... 86
IV. Интегрирование по частям. Циклическое интегрирование ... 102
V. Интегрирование простейших рациональных дробей. Интегрирование рациональных функций ... 111
VI. Интегрирование некоторых иррациональных функций ... 123
VII. Интегрирование тригонометрических функций ... 132
VIII. Интегрирование некоторых иррациональных функций с помощью тригонометрических подстановок. Итоговое повторение, вычисление интегралов от различных классов функций ... 144
IX. Контрольная работа по теме «Неопределенный интеграл» ... 148
ЗАДАНИЯ ... 155
ГЛОССАРИЙ ... 156
Используемая литература ... 159
ПРИЛОЖЕНИЕ ... 161

Учебное издание

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Учебно-методический комплекс
для студентов технических специальностей

Редактор *О. П. Михайлова*
Дизайн обложки *В. А. Виноградовой*

Подписано в печать 03.02.10. Формат 60×84 $^{1}/_{16}$. Гарнитура Таймс. Бумага офсетная.
Ризография. Усл. печ. л. 9,75. Уч.-изд. л. 8,22. Тираж 520 экз. Заказ № 62.

Издатель и полиграфическое исполнение:
учреждение образования «Полоцкий государственный университет»

ЛИ № 02330/0548568 от 26.06.2009 ЛП № 02330/0494256 от 27.05.2009

211440 г. Новополоцк, ул. Блохина, 29