Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Полоцкий государственный университет»

А. В. Капусто, И. П. Кунцевич

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

Учебно-методический комплекс
для студентов машиностроительных специальностей

В двух частях

Часть 1

Новополоцк
ПГУ
2010

УДК 51(075.8)
ББК 22.11я73
К20

Рекомендовано к изданию методической комиссией машиностроительного факультета в качестве учебно-методического комплекса
(протокол № 1 от 01.02.2010)

РЕЦЕНЗЕНТЫ:
профессор кафедры уравнений математической физики БГУ,
доктор педагогических наук, доцент О. И. МЕЛЬНИКОВ;
кандидат физ.-мат. наук, доцент, профессор кафедры высшей математики УО «ПГУ» И. Е. АНДРУШКЕВИЧ

Капусто, А. В.
К20 Дискретная математика : учеб.-метод. комплекс для студентов машиностроительных специальностей. В 2 ч. Ч. 1 / А. В. Капусто, И. П. Кунцевич. – Новополоцк : ПГУ, 2010. – 136 с.
ISBN 978-985-531-036-6.

В первой части изложен теоретический материал по разделам «Элементы теории множеств», «Булевы функции».
Содержит большое число примеров с подробным решением; приведены задания для практических занятий и самостоятельного выполнения.
Предназначен для студентов машиностроительных специальностей.

УДК 51(075.8)
ББК 22.11я73

ISBN 978-985-531-036-6 (ч. 1)
ISBN 978-985-531-035-9

© Капусто А.В., Кунцевич И.П., 2010
© УО «Полоцкий государственный университет», 2010

ВВЕДЕНИЕ

Данный УМК является учебно-методическим обеспечением дисциплины «Дискретная математика» для студентов машиностроительного факультета дневной формы обучения по специальностям 1-36 01 01 «Технология машиностроения» и 1-36 01 03 «Технологическое оборудование машиностроительного производства».

В предлагаемом УМК, состоящем из двух частей, приведен теоретический материал по разделам «Элементы теории множеств», «Булевы функции» (1 часть), «Основы теории графов», «Элементы математического моделирования» (2 часть), который ориентирован на приложение математических методов дискретного или непрерывно-дискретного характера в будущей профессиональной деятельности. Сложные доказательства некоторых теорем и утверждений опущены и вместо них приведено достаточное количество иллюстрирующих теорию примеров. Отсутствие доказательства в тексте отмечено знаком «*», конец доказательства – знаком «□». Нумерация формул, теорем и утверждений, примеров и рисунков ведется по темам внутри каждого раздела.

Для активизации самостоятельной работы студентов после каждого раздела приведен перечень вопросов и заданий для самоконтроля. К некоторым заданиям приведены ответы или указания, облегчающие поиск решения задач. Упражнения, встречающиеся в тексте теоретического материала, обязательны для выполнения студентами, претендующими на 8 – 10 баллов.

Весь теоретический материал сопровождается многочисленными примерами подробного решения заданий, аналогичных тем, которые предлагаются студентам для аудиторного и домашнего выполнения. Кроме того, в УМК приведены индивидуальные задания, включающие 24 варианта, для выполнения их на практических занятиях. Индивидуальные задания разработаны для двух разделов: «Основы теории графов» и «Элементы математического моделирования».

В список литературы включены основные источники, использованные при составлении УМК. При самостоятельном изучении материала студенты могут использовать также и другую литературу, соответствующую стандартам образования.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

1. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ДИСЦИПЛИНЫ

1.1. Цель преподавания дисциплины

Дисциплина «Дискретная математика» является спецкурсом, позволяющим студентам машиностроительного факультета ознакомиться с математическими методами дискретного и дискретно-непрерывного характера, применяемыми при организации и управлении современным технологическим производством.

Данный курс позволяет глубже усвоить специальные и профилирующие дисциплины, такие, например, как «Теория резания», «Технологическое оборудование», «Математическое моделирование и САПР», «Организация производства и менеджмент в машиностроении» и др.

Целью изучения дисциплины «Дискретная математика» является:

− овладение основами теоретических знаний по дискретной математике;

− ознакомление с основными прикладными задачами и методами дискретной математики;

− приобретение студентами навыков описания дискретных объектов с помощью математических моделей;

− развитие интеллектуального потенциала студентов и способностей их к логическому и алгоритмическому мышлению;

− обучение основным математическим методам научного познания.

1.2. Задачи изучения дисциплины

В результате изучения дисциплины «Дискретная математика» студенты должны *знать*:

− основные понятия и объекты теории множеств: множество, отношение, функция;

− высказывания, предикаты, булевы функции;

− основные понятия и объекты теории графов;

− элементы математического моделирования, включающие задачу линейного программирования, дискретного программирования, теории расписаний;

уметь:

− выполнять операции над множествами;

− находить декартово произведение двух множеств;

− определять характер отношений между элементами двух множеств;

− строить таблицы истинности для формул, реализующих некоторую булеву функцию;

− применять алгебру логики высказываний для исследования переключательных схем;

− применять основные алгоритмы теории графов для решения соответствующих типов прикладных задач;

− составлять математическую модель задачи линейного программирования и решать ее графическим способом.

Задачи преподавания дискретной математики состоят в том, чтобы на примерах математических понятий, утверждений, методов продемонстрировать сущность научного подхода при изучении окружающих явлений и процессов.

При обучении дискретной математике необходимо развивать способности и умения самостоятельно получать знания; прививать навыки изучения литературы по дискретной математике и ее приложениям; использовать ЭВМ и глобальные информационные ресурсы.

2. СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

2.1. Название лекционных тем, их содержание, объем в часах

№№ п/п	Название темы	Содержание	Объем в часах
1	2	3	4
Раздел 1. Элементы теории множеств			
1.	Множества. Операции над множествами	Множество. Способы задания множеств. Подмножество. Универсум. Булеан. Операции над множествами. Декартово произведение множеств.	2
2.	Мощность множества	Конечные, счетные, континуальные множества. Мощность множества.	1
3.	[Элементы комбинаторики]	[Комбинаторные принципы сложения и умножения. Вывод формул перестановок, сочетаний и размещений. Формула включений и исключений. Бином Ньютона и свойства биноминальных коэффициентов. Полиномиальная формула.]	
4.	Бинарные отношения	Бинарное отношение. Способы задания отношений. Обратное отношение. Композиция отношений. Свойства бинарных отношений. Отношение эквивалентности, отношение частичного порядка.	2
5.	Отображения	Функция. Область определения функции, область значений функции. Образ, прообраз. Свойства отображений. Обратное отображение. Композиция отображений. [Основные алгебраические системы.]	1
Раздел 2. Булевы функции			
6.	Высказывания. Предикаты	Высказывания. Предикаты. Логические операции над высказываниями. Формулы логики высказываний. Применение алгебры высказываний в технике. [Булевы алгебры.]	2

1	2	3	4
Раздел 2. Булевы функции			
7.	Булевы функции. Способы задания	Булевы функции. Способы задания булевых функций. Существенная и фиктивная переменная.	1
8.	Реализация функций формулами	Формула. Реализация функций формулами. Эквивалентность формул.	1
9.	СДНФ и СКНФ	Совершенная дизъюнктивная и конъюнктивная нормальная формы булевых функций. Функциональные схемы.	1
Раздел 3. Основы теории графов			
10.	Графы, орграфы	Основные понятия графов и орграфов. Связность графов. Изоморфизм графов. Степень вершин. Представление графов в компьютере. [Выявление маршрутов с заданным количеством ребер (дуг). Упорядочение вершин и дуг орграфа.]	2
11.	Деревья. Остовные деревья	Деревья. Остовные деревья. Методы построения остовных деревьев. Теорема Кирхгофа. Алгоритм Краскала и алгоритм Прима.	2
12.	Алгоритм Дейкстры	Нахождение кратчайших путей. Алгоритм Дейкстры.	1
13.	Эйлеровы и гамильтоновы циклы	Пути и циклы Эйлера. Пути и циклы Гамильтона. Задача коммивояжера. Алгоритм Литтла.	3
14.	Планарные графы	Планарные графы. Грань, граница. Теорема Эйлера. Критерии планарности графов.	1
15.	Сети. Поток в сетях	Сеть. Пропускная способность дуги. Поток в сети. Постановка задачи о построении максимального потока в сети. Разрез на сети. Теорема Форда – Фалкерсона.	2
16.	[Паросочетания]	[Паросочетание. Методы построения максимального паросочетания. Задача о назначениях.]	
17.	Элементы сетевого планирования	Сетевой график. Работа, событие. Построение сетевого графика. Основные параметры сетевого графика.	2

1	2	3	4
Раздел 4. Элементы математического моделирования			
18.	Математическая модель.	Математическая модель. Модель задачи математического программирования.	1
19.	Линейное программирование	Виды задач линейного программирования (ЗЛП). [Форма записи ЗЛП.] Геометрическая интерпретация ЗЛП. Графический метод решения ЗЛП.	3
20.	Транспортная задача (ТЗ)	Постановка ТЗ и ее математическая модель. Метод потенциалов.	2
21.	Дискретное программирование	Классификация задач целочисленного программирования. Суть методов дискретной оптимизации. Метод ветвей и границ. Общая задача целочисленного программирования. [Задача о назначении. Алгоритм венгерского метода. Задача о рюкзаке.]	2
22.	Элементы теории расписаний	Предмет теории расписаний и классификация задач. Формы представления расписаний. [Задача теории расписаний с одним обслуживающим устройством.] Задача теории расписаний с двумя последовательными обслуживающими устройствами. Алгоритм Джонсона.	2
		Итого:	34

Примечание: теоретический материал, взятый в квадратные скобки, предлагается для самостоятельного изучения.

2.2. Практические занятия, их содержание и объем в часах

№№ п/п	Тема занятия	Содержание	Объем в часах
1	2	3	4
1.	Множества. Операции над множествами	Множество. Способы задания множеств. Подмножество. Универсум. Булеан. Операции над множествами.	2

1	2	3	4
2.	Законы и свойства в теории множеств.	Доказательство равенств в теории множеств. Декартово произведение. [Решение задач с использованием комбинаторных принципов сложения и умножения, формулы включения и исключения.]	2
3.	Бинарные отношения	Способы задания бинарных отношений. Обратное отношение. Композиция отношений. Свойства бинарных отношений. Отношение эквивалентности, отношение частичного порядка.	2
4.	Отображения	Функция. Образ, прообраз. Свойства отображений. Обратное отображение, композиция отображений.	2
5.	Проверочная работа	Тест-теория и контрольная работа по теме «Элементы теории множеств»	2
6.	Высказывания. Предикаты.	Логические операции над высказываниями. Формулы логики высказываний. Применение алгебры логики высказываний в технике.	1
7.	Булевы функции	Способы задания булевых функций. Существенная и фиктивная переменная. Формула. Реализация функций формулами. Построение таблиц истинности. Эквивалентные преобразования формул.	2
8.	СДНФ и СКНД	Построение СДНФ и СКНФ.	1
9.	Самостоятельная работа	Аудиторная самостоятельная работа по теме «Булевы функции».	1
10.	Графы, орграфы.	Основные понятия графов и орграфов. Связность графов. Изоморфизм графов. Степень вершин. Представление графов в компьютере.	1
11.	Остовные деревья (◊)	Остовные деревья. Методы построения остовных деревьев. Теорема Кирхгофа. Алгоритм Краскала и алгоритм Прима.	2
12.	Алгоритм Дейкстры (◊)	Построение орграфа. Нахождение кратчайшего пути с помощью алгоритма Дейкстры.	2
13.	Эйлеровы и гамильтоновы циклы (◊)	Решение задачи о переналадке поточной линии с помощью алгоритма Литтла.	2
14.	Планарные графы	Планарные графы. Грань, граница. Теорема Эйлера. Критерии планарности графов.	2

1	2	3	4
15.	Сети. Поток в сети (◊)	Решение задачи о формировании потока максимальной мощности в сети с помощью теоремы Форда-Фалкерсона.	2
16.	Элементы сетевого планирования (◊)	Построение сетевого графика. Расчет основных параметров сетевого графика. Построение графика Ганта	2
17.	Линейное программирование (◊)	Графический метод решения задачи линейного программирования.	2
18.	Транспортная задача (◊)	Решение транспортной задачи с помощью метода потенциалов.	2
19.	Элементы теории расписаний (◊)	Решение задачи теории расписаний с двумя последовательными обслуживающими устройствами.	2
		Итого:	34

Примечание: символом (◊) отмечены практические занятия, на которых студенты выполняют индивидуальные задания и отчитываются о выполнении преподавателю.

РАЗДЕЛ 1

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

1. МНОЖЕСТВА. ОПЕРАЦИИ НАД МНОЖЕСТВАМИ. ДЕКАРТОВО ПРОИЗВЕДЕНИЕ

1.1. Множество. Способы задания множеств

Понятие множества является настолько общим, что трудно дать ему какое-либо определение, которое не сводилось бы к замене слова «множество» его синонимами: совокупность, собрание элементов и т. п.

Например, в интуитивном определении, принадлежащем немецкому математику Георгу Кантору, «множеством называется любая совокупность объектов, называемых элементами множества», существенным является то обстоятельство, что собрание предметов само рассматривается как один предмет, мыслится как единое целое. Расплывчатость, недостаточность этого определения стала понятней, когда в 1879 году итальянский логик Бурали-Форти, а немного позже выдающийся философ и логик Бертран Рассел открыли парадоксы, указывающие на внутреннюю противоречивость канторовой теории множеств. Чтобы устранить такие противоречия и парадоксы, для теории множеств были предложены аксиоматические системы. Наиболее известны системы Цермело – Френкеля фон Неймана (ZF), Гильберта – Бернайса – Геделя и Рассела – Уайтхеда. По сути, мы оставим понятие множества неопределенным и будем считать множество заданным, если его элементы однозначно определены и это не приводит к каким-либо противоречиям.

Множества будем обозначать прописными буквами латинского алфавита: $A, B, X, Y, A_1, A_2, \ldots$, элементы множеств – строчными буквами: $a, b, x, y, a_1, a_2, \ldots$.

Утверждение «элемент a принадлежит множеству A» символически записывается так: $a \in A$; запись $a \notin A$ означает, что элемент a не принадлежит множеству A.

Различают множества:

1) конечные (частный случай – единичное или одноэлементное множество);

2) бесконечные (например, множество натуральных чисел $\mathbb{N}$);

3) пустое – множество, не содержащее ни одного элемента, обозначается символом $\varnothing$.

Способы задания (описания) множеств

1) Множество A определяется непосредственным *перечислением всех своих элементов* $a_1, a_2, ..., a_n$, т.е. записывается в виде $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$. При задании множества перечислением обозначения элементов обычно заключают в фигурные скобки и разделяют запятыми. Перечислением можно задавать только *конечные* множества.

2) Множество A определяется как совокупность тех и только тех элементов из некоторого основного множества T, которые обладают общим свойством $P(x)$. В этом случае используется обозначение $A = \{x \mid x \in T \wedge P(x)\}$, т.е. множество задается *характеристическим предикатом.* Характеристическим предикатом можно задать как *конечные*, так и *бесконечные* множества.

3) Множество A можно задать *порождающей процедурой* (рекурсивное задание, задание алгоритмом). Используется обозначение $A = \{x \mid x := f\}$. Порождающая процедура – это процедура, которая в процессе работы порождает некоторые объекты, являющиеся элементами определенного множества.

Пример 1.1. M ={токарные, сверлильные, строгальные, резьбофрезерные, …} – множество станков. □

Пример 1.2. $A = \{1; 2; 3; 4\}$ – множество натуральных чисел от 1 до 4. Множество задано перечислением всех своих элементов. Причем, например, элемент $3 \in A$, а $5 \notin A$.

Данное множество A можно задать следующим характеристическим предикатом: $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge 1 \le x \le 4\}$. □

Пример 1.3. Зададим рекурсивно множество X алгоритмом:

1) $3 \in X$;
2) если $x \in X$, то элемент $\frac{1}{x}$ и $(1 - x)$ принадлежат X;
3) других элементов в X нет.

Заметим, что это множество – конечное, поэтому его можно задать, записав все элементы:

$$X = \left\{3, \frac{1}{3}, -2, -\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right\}. \qquad \square$$

Частным случаем рекурсивного описания множества является способ задания, основанный на процедуре, называемой математической индукцией. Рассмотрим его на примере задания множества натуральных чисел.

Пример 1.4. Множество $\mathbb{N}$ задается следующими правилами:

1) задается базис индукции (исходный элемент):

$$1 \in \mathbb{N};$$

2) указывается индуктивный переход:

$$\text{если } n \in \mathbb{N}, \text{ то } (n+1) \in \mathbb{N};$$

3) устанавливается правило замыкания:

других элементов, кроме построенных по правилам 1 и 2, в $\mathbb{N}$ нет. $\square$

1.2. Подмножество. Равенство множеств. Универсум. Булеан

Определение 1.1. Множество A называется *подмножеством* множества B (обозначается $A \subseteq B$), если каждый элемент A есть элемент B, т.е. если $x \in A$, то $x \in B$.

В частности, каждое множество есть подмножество самого себя, т.е. $A \subseteq A$.

Пример 1.5. Пусть $B = \{1; 2; 3\}$ и $A = \{1; 2; 3; 4\}$. Тогда $B \subseteq A$. Но $C = \{\{1; 2\}; 3\} \not\subseteq A$. $\square$

Определение 1.2. Пусть A и B – некоторые множества. Говорят, что A *равно* B (записывается $A = B$), если для любого элемента x имеем: $x \in A$ тогда и только тогда, когда $x \in B$.

Иначе говоря, $A = B$ тогда и только тогда, когда $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$.

Если $A \subseteq B$ и $A \neq B$, то это записывается $A \subset B$, и говорят, что A есть *собственное подмножество* множества B. Пустое множество есть подмножество любого данного множества A, т.е. $\varnothing \subset A$.

Таким образом, доказательство равенства двух множеств A и B состоит из двух этапов:

1) доказать, что A есть подмножество B;
2) доказать, что B есть подмножество A.

Определение 1.3. *Универсальное множество* U (или *универсум*) есть множество, обладающее таким свойством, что все рассматриваемые множества являются его подмножествами.

В теории чисел универсальное множество обычно совпадает с множеством всех целых или натуральных чисел. В математическом анализе универсальным множеством может быть множество всех действительных чисел или множество всех точек n-мерного пространства. Следует отметить, что универсальное множество U, хотя и названо универсальным, однозначно не определено, если точно не указана область рассмотрения (предметная область). Конечно, любое множество, содержащее U, может быть использовано как универсальное множество.

По определению, каждое множество есть подмножество универсального множества.

Пример 1.6. Для множества $A = \{1; 2; 3; 4\}$ за универсум можно взять, например, множество натуральных чисел, т.е. $U = \mathbb{N}$. □

Определение 1.4. *Булеаном* множества A (обозначается $P(A)$) называется множество, состоящее из всех подмножеств множества A.

Пример 1.7. Пусть $A = \{1; 2; 3\}$. Следовательно, булеан множества A есть множество $P(A) = \{\varnothing; \{1\}; \{2\}; \{3\}; \{1;2\}; \{1;3\}; \{2;3\}; \{1;2;3\}\}$. □

Множество A из примера 1.7. содержит три элемента, а булеан $P(A)$ состоит из $2^3 = 8$ элементов. В общем случае, если множество A содержит n элементов, множество $P(A)$ включает 2^n элементов, т.к. A имеет 2^n подмножеств. По этой причине $P(A)$ иначе обозначают через 2^A.

1.3. Операции над множествами

Множество часто задают графически с помощью *диаграмм Эйлера* [Л. Эйлер (1707-1783) – швейцарский математик, механик и физик].

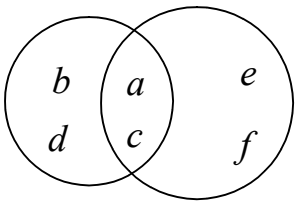


Рис. 1.1

Задание множеств $M_1 = \{a, b, c, d\}$ и $M_2 = \{a, c, e, f\}$ приведено на рисунке 1.1, где замкнутые линии, называемые кругами Эйлера, ограничивают элементы одного множества.

Изображение множеств с помощью фигур на плоскости восходит к XIII в. Известный создатель первого «философского компьютера» Р. Луллий (ок. 1235 г. – ок. 1315 г.) «вычислял» с помощью сочетания кругов на плоскости, цвета, букв и цифр такую «величину», как «судьба человека».

В дальнейшем графическое изображение множеств было плодотворно исследовано Дж. Венном (1834 – 1923), создавшим диаграммную теорию изучения множеств различной природы.

Диаграммы, задающие множества, будем называть *диаграммами Эйлера – Венна*.

Если имеются некоторые множества, то с помощью определенных операций из них можно получать новые. Для наглядного изображения операций над множествами воспользуемся диаграммами Эйлера – Венна.

Определение 1.5. *Объединением множеств A и B* называется множество, состоящее из всех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A или B, обозначается $A \bigcup B$, рис. 1.2.

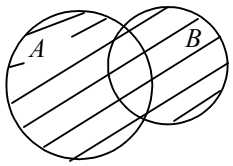


Рис. 1.2

$$A \bigcup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}.$$

Определение 1.6. *Пересечением множеств A и B* называется множество, которое состоит из общих элементов этих множеств, обозначается $A \bigcap B$, рис. 1.3.

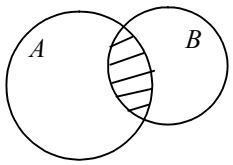
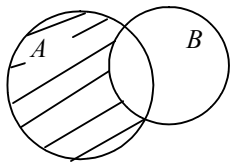


Рис. 1.3

$$A \bigcap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

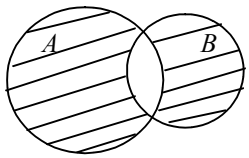
Определение 1.7. *Разностью множеств* A *и* B называется множество всех тех и только тех элементов множества A, которые не принадлежат множеству B, обозначается $A \setminus B$, рис. 1.4.



$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

Рис. 1.4

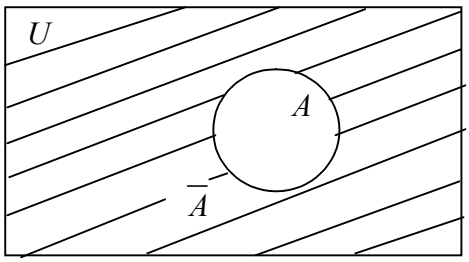
Определение 1.8. *Симметрическая разность множеств* A *и* B есть множество $(A \setminus B) \bigcup (B \setminus A)$, обозначается $A \Delta B$, рис. 1.5.



$$A \Delta B = \{x \mid (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B)\}$$

Рис. 1.5

Определение 1.9. Дополнением множества A называется множество элементов некоторого универсального множества, содержащего A (универсума U), которые не принадлежат A; обозначается $\overline{A}$, т.е. $\overline{A} = U \setminus A$, рис. 1.6.



$$\overline{A} = U \setminus A = \{x \mid x \in U \wedge x \notin A\}$$

Рис. 1.6

Пример 1.8.

Пусть $A = \{1; 2; 3; 4\}$ и $B = \{3; 4; 5\}$. Тогда:

1) $A \bigcup B = \{1; 2; 3; 4; 5\}$. Заметим, что элементы 3 и 4 встречаются и в множестве A, и в множестве B. Вместе с тем, при записи множества $A \bigcup B$ каждый из этих элементов указывается один раз.

2) $A \bigcap B = \{3; 4\}$;

3) $A / B = \{1; 2\}$;

4) если $U = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$, то $\overline{A} = \{0; 5\}$. □

Операции пересечения и объединения допускают следующее обобщение. Пусть задано семейство множеств $\{A_i\}_{i \in I}$, где $I = \{1; 2; 3; ...; k\}$. Тогда

$$\bigcup_{i \in I} A_i = A_1 \bigcup A_2 \bigcup A_3 \bigcup ... \bigcup A_k = \{x \mid \exists i \in I, \text{ что } x \in A_i\};$$

$$\bigcap_{i \in I} A_i = A_1 \bigcap A_2 \bigcap A_3 \bigcap ... \bigcap A_k = \{x \mid \forall i \in I, x \in A_i\}.$$

Операции над множествами обладают рядом важных свойств.

Теорема 1.1. *Пусть задан универсум* U. *Тогда для* $\forall\ A,\ B,\ C \subset U$ *выполняются следующие свойства*:

1. Свойства коммутативности: $A \bigcup B = B \bigcup A$,
   $A \bigcap B = B \bigcap A$.
2. Свойства ассоциативности: $A \bigcup (B \bigcup C) = (A \bigcup B) \bigcup C$,
   $A \bigcup (B \bigcup C) = (A \bigcup B) \bigcup C$.
3. Свойства дистрибутивности: $A \bigcap (B \bigcup C) = (A \bigcap B) \bigcup (A \bigcap C)$,
   $A \bigcup (B \bigcap C) = (A \bigcup B) \bigcap (A \bigcup C)$.
4. Свойства тождества: $A \bigcup \varnothing = A$, $A \bigcap \varnothing = \varnothing$,
   $A \bigcup U = U$, $A \bigcap U = A$.
5. Законы идемпотентности: $A \bigcup A = A$,
   $A \bigcap A = A$.
6. Свойства поглощения: $A \bigcup (A \bigcap B) = A$,
   $A \bigcap (A \bigcup B) = A$.
7. Двойное дополнение: $\overline{\overline{A}} = A$.
8. Свойства дополнения: $A \bigcup \overline{A} = U$,
   $A \bigcap \overline{A} = \varnothing$.
9. Законы де Моргана: $\overline{A \bigcup B} = \overline{A} \bigcap \overline{B}$,
   $\overline{A \bigcap B} = \overline{A} \bigcup \overline{B}$.
10. Разность множеств: $A \setminus B = A \bigcap \overline{B}$.

Доказательство. Для примера докажем свойство дистрибутивности объединения множеств «$\bigcup$» относительно пересечения «$\bigcap$»:

$$A \bigcup (B \bigcap C) = (A \bigcup B) \bigcap (A \bigcup C).$$

Пусть $M = A \bigcup (B \bigcap C)$ и $K = (A \bigcap B) \bigcap (A \bigcup C)$.

1) Докажем, что $M \subseteq K$, рис. 1.7.

Пусть элемент $x \in M$, тогда

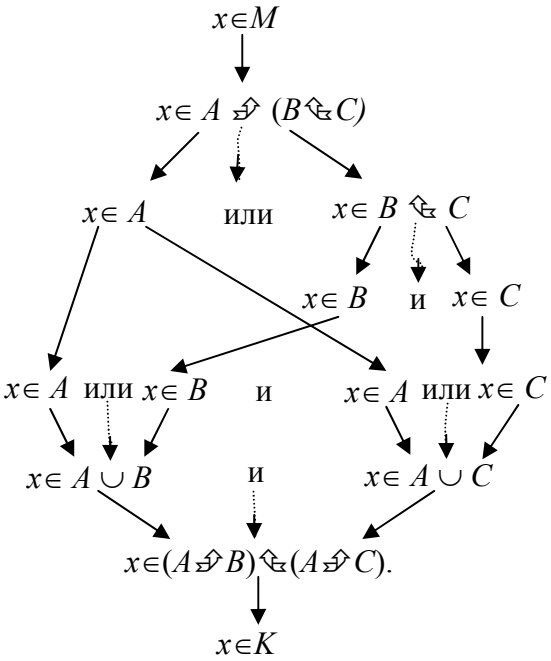


Рис. 1.7

Значит, $M \subseteq K$.

2) Докажем, что $K \subseteq M$, рис. 1.8.

Пусть элемент $x \in K$, тогда

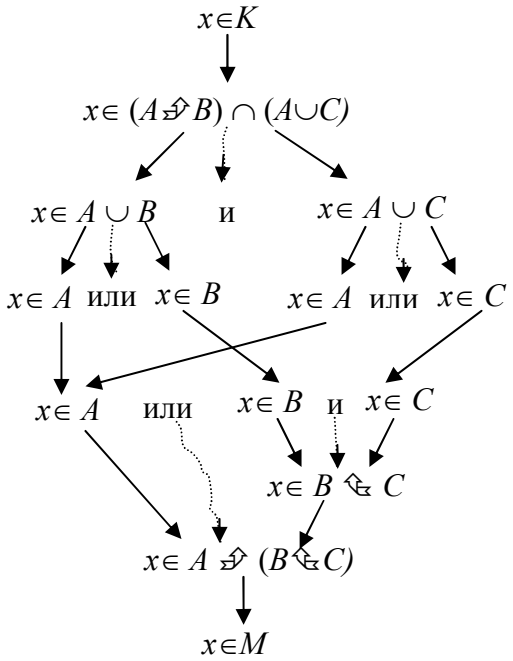


Рис. 1.8

Значит, $K \subseteq M$.

Так как $M \subseteq K$ и $K \subseteq M$, то $M = K$, то есть

$$A \bigcup (B \bigcap C) = (A \bigcup B) \bigcap (A \bigcup C).$$

Остальные тождества доказываются аналогично. □

Определение 1.10. *Покрытием множества* A называется набор подмножеств A_i, $i \in I$, где $I = \{1; 2; 3; ...; k\}$ – некоторое множество индексов, если каждый элемент множества A принадлежит хотя бы одному из подмножеств A_i.

Пример 1.9.

Пусть $A=\{\square,\Delta,\bigcirc,\nabla\}$. Тогда набор подмножеств

$$\{\{\square\},\{\Delta,\square\},\{\Delta,\bigcirc,\nabla\}\}$$

является покрытием множества A. □

Определение 1.11. *Разбиением множества* A называется набор его попарно непересекающихся подмножеств A_i, $i\in I$, где I – некоторое множество индексов, обозначается $\langle A\rangle$.

Таким образом, $\langle A\rangle=\{A_i \mid i\in I\}$ является разбиение множества A, если выполняются два условия:

1) $A_i\cap A_j=\varnothing$ для всех $i\neq j$;

2) $A=\bigcup\limits_{i\in I}A_i$, т.е. $a\in A$ тогда и только тогда, когда $a\in A_i$ для некоторого $i\in I$.

Пример 1.10.

Пусть $A=\{\square,\Delta,\bigcirc,\nabla\}$. Тогда множество $\langle A\rangle=\{\{\square\},\{\Delta,\bigcirc,\nabla\}\}$ является разбиением множества A. □

1.4. Декартово произведение множеств

Упорядоченная пара $(x;y)$ интуитивно определяется как совокупность, состоящая из двух элементов x и y, расположенных в определенном порядке. Две пары $(x;y)$ и $(u;v)$ считаются равными тогда и только тогда, когда $x=u$ и $y=v$.

Пусть A и B – два множества.

Определение 1.12. *Прямым* (*декартовым*) *произведением* двух множеств A и B называется множество всех упорядоченных пар, в котором первый элемент каждой пары принадлежит A, а второй принадлежит B:

$$A\times B=\{(a,b) \mid a\in A\wedge b\in B\}.$$

Пример 1.11.

Пусть $A=\{1;2;3\}$ и $B=\{r;s\}$. Тогда

$$A\times B=\{(1;r),(1;s),(2;r),(2;s),(3;r),(3;s)\}.$$

$$B \times A = \{(r,1),(r,2),(r,3),(s,1),(s,2),(s,3)\}. \qquad \square$$

Пример 1.12.

На координатной плоскости построить множество $C = A \times B$, где $A = (-1;3]$, $B = [1;3)$.

Решение. Первое множество помещаем на оси Ox, второе на оси Oy. Множество всех пар, т.е. декартово произведение, изображается точками заштрихованного прямоугольника, но без левой и нижней стороны, рис. 1.9.

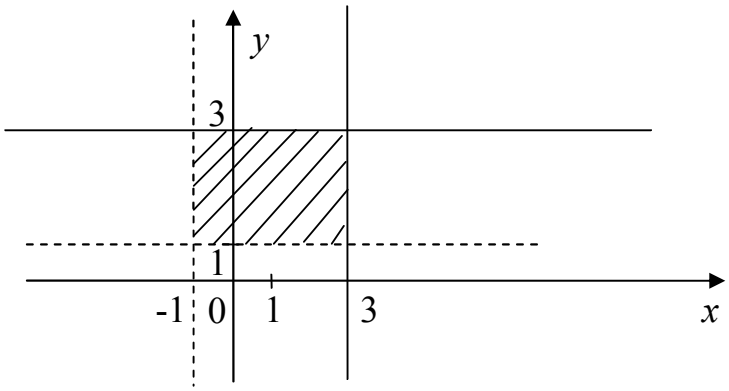


Рис. 1.9 $\square$

Точка на плоскости может быть задана упорядоченной парой координат, то есть двумя точками на координатных осях. Поэтому координатную плоскость можно задать в виде $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Метод координат ввел в употребление Рене Декарт (1596 – 1650), что и дало название «декартово произведение».

В частности, если из двух множеств A и B пусто A или B, то, по определению, $A \times B$ − пусто.

Понятие прямого произведения допускает обобщение.

Прямое произведение множеств $A_1, A_2, ..., A_n$ – это множество наборов (*кортежей*):

$$A_1 \times A_2 \times ... \times A_n = \{(a_1; a_2; \ldots; a_n) \mid a_1 \in A_1 \wedge a_2 \in A_2 \wedge \ldots \wedge a_n \in A_n\}.$$

Множества A_i не обязательно различны.

Степенью множества A называется его прямое произведение самого на себя, обозначается $A^n = \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{n \text{ раз}}$.

Следовательно, $A^0 = \varnothing, A^1 = A, A^2 = A \times A$, $A^n = A \times A^{n-1}$.

Пример 1.13.

Пусть $B = \{0, 1\}$. Описать множество B^n.

Решение.

Множество B^n состоит из последовательностей нулей и единиц длины n. Они называются *строкой бит* или *битовой строкой* длины n. □

2. МОЩНОСТЬ МНОЖЕСТВА. ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

2.1. Мощность множества

Говорят, что между множествами A и B установлено *взаимно однозначное соответствие*, если каждому элементу множества A соответствует один и только один элемент множества B и каждому элементу множества B соответствует некоторый элемент множества A. В этом случае говорят также, что множества A и B *изоморфны* и используют обозначение $A \sim B$.

Определение 2.1. Два множества A и B называются *эквивалентными*, или *равномощными*, если между этими множествами может быть установлено взаимно однозначное соответствие. В этом случае пишут: $A \sim B$, или $|A| = |B|$, и говорят, что множества A и B имеют *равные мощности.*

Пример 2.1.

Множество десятичных цифр равномощно множеству пальцев на руках человека.

Множество четных натуральных чисел равномощно множеству всех натуральных чисел. □

Определение 2.2. Множество A называется *конечным*, если оно эквивалентно J_n при некотором n, где $J_n = \{1, 2, ..., n\}$ – множество n первых натуральных чисел.

Определение 2.3. *Мощностью конечного множества* A, которое содержит k элементов, называется число его элементов, обозначается

$|A| = k$. Пустое множество считается конечным с числом элементов равным нулю, т.е. $|\varnothing| = 0$.

Таким образом, если множество A конечно, т.е. $|A| = k$, то элементы A всегда можно перенумеровать, то есть поставить в соответствие элементам номера из отрезка натурального ряда 1, 2,..., k с помощью некоторой процедуры. Наличие такой процедуры подразумевается, когда употребляется запись $A = \{a_1, a_2, ..., a_k\}$.

Пример 2.2.

В компьютере все множества реальных объектов конечны: множество адресуемых ячеек памяти, множество выполняемых программ, множество тактов работы процессора. □

Множества, которые не являются конечными, называются *бесконечными*. Если некоторое множество A равномощно множеству натуральных чисел $\mathbb{N}$, т.е. $A \sim \mathbb{N}$, то множество A называется *счетным* (в зарубежной литературе множество называется счетным, если оно конечно или счетно бесконечно). Счетное множество A – это такое множество, все элементы которого могут быть занумерованы в бесконечную последовательность $a_1, a_2, ..., a_n, ...$, так, чтобы при этом каждый элемент получил лишь один номер n и каждое натуральное число n было бы номером лишь одного элемента множества A. Мощность счетного множества принято обозначать через $\aleph_0$ ($\aleph$ – первая буква древнееврейского алфавита, называемая «алеф», символ $\aleph_0$ читается: «алеф-нуль»), в частности $|\mathbb{N}| = \aleph_0$.

Пример 2.3.

Доказать, что множество целых чисел $\mathbb{Z}$ – счетно.

Решение. Рассмотрим множество целых чисел $\mathbb{Z}$:

$$..., -n, ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ..., n, ...$$

На первый взгляд, кажется, что это множество невозможно перенумеровать. Однако нумерацию можно осуществить, применив следующую «хитрость»: двигаясь не в одном направлении, а все время изменяя его. Иными словами, будем нумеровать так: числу 0 присвоим номер 1, числу 1 – номер 2, числу –1 – номер 3, числу 2 – номер 4, числу –2 – номер 5 и т.д. Таким

образом, получаем взаимно однозначное соответствие между множествами $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{N}$. Это означает, что множество $\mathbb{Z}$ счетно. □

Множество A называется *несчетным*, если его мощность больше мощности множества $\mathbb{N}$. В таком случае множество A называется *континуальным* или *континуумом*. Мощность континуума обозначается $C = 2^{\aleph_0}$.

Теорема 2.1*. *Множество всех действительных чисел имеет мощность континуума, т.е.* $|\mathbb{R}| = C$.

2.2. Элементы комбинаторики

Выше были введены операции над множествами, которые позволяют из заданных множеств формировать новые множества. Особо в математике уделяют внимание двум видам операций, которые выполняются над самими элементами заданного конечного множества. Этими операциями являются: отбор подмножеств и упорядочивание элементов. Изучением операций данного вида занимается такой раздел математики, как комбинаторный анализ.

В задачах комбинаторного анализа исследуются дискретные множества, т.е. множества, составленные из отдельных обособленных элементов. В большинстве случаев эти множества конечные, но не исключается и рассмотрение множеств, состоящих из бесконечного числа элементов.

Прежде чем перейти к рассмотрению основных понятий комбинаторики, рассмотрим комбинаторные принципы сложения и умножения.

Теорема 2.2 (***комбинаторный принцип сложения***).

Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *– конечные попарно непересекающиеся множества, т.е.* $X_i \cap X_j = \varnothing, i \neq j, i = \overline{1,n}, j = \overline{1,n}$. *Тогда*

$$|X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_n| = |X_1| + |X_2| + \ldots + |X_n|. \qquad (2.1)$$

Доказательство.

Докажем теорему методом математической индукции.

Базис индукции. Пусть $n = 2$. Пусть множества $X_1 = A$ и $X_2 = B$, мощности которых соответственно равны k_1 и k_2, т.е. $|A| = k_1$, $|B| = k_2$. Так как $A \cap B = \varnothing$, то

$$|A \cup B| = k_1 + k_2 = |A| + |B|.$$

Индуктивный переход. Пусть теорема верна для n множеств. Покажем, что для $n+1$ множества теорема также будет справедлива. Тогда

$$\left|X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_n \cup X_{n+1}\right| = \left|\left(X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_n\right) \cup X_{n+1}\right| =$$

$$= \left|\left(X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_n\right)\right| + \left|X_{n+1}\right| == \left|X_1\right| + \left|X_2\right| + \ldots + \left|X_n\right| + \left|X_{n+1}\right|. \qquad \square$$

Теорема 2.3 (***комбинаторный принцип умножения***).

Пусть заданы конечные множества $X_1, X_2, \ldots, X_n$. *Тогда число элементов декартова произведения множеств равно произведению количеств элементов сомножителей*:

$$\left|X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n\right| = \left|X_1\right|\left|X_2\right| \ldots \left|X_n\right|. \qquad (2.2)$$

Доказательство.

Докажем теорему методом математической индукции.

Базис индукции. Пусть $n = 2$. Пусть множества $X_1 = A$ и $X_2 = B$, мощности которых соответственно равны k_1 и k_2, т.е. $|A| = k_1$, $|B| = k_2$. Первый компонент упорядоченной пары можно выбрать k_1 способами, второй – k_2 способами. Таким образом, всего имеется $k_1 \cdot k_2$ различных упорядоченных пар. Значит,

$$\left|A \times B\right| = k_1 \cdot k_2 = \left|A\right| \cdot \left|B\right|.$$

Индуктивный переход. Предположим справедливость утверждения теоремы для n множеств. Покажем, что для $n+1$ множества теорема также будет справедлива. В самом деле, добавляя еще одно множество в декартово произведение, получаем

$$\left|X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n \times X_{n+1}\right| = \left|\left(X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n\right) \times X_{n+1}\right| =$$

$$= \left|\left(X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n\right)\right|\left|X_{n+1}\right| = \left|X_1\right|\left|X_2\right| \ldots \left|X_n\right|\left|X_{n+1}\right|. \qquad \square$$

Пример 2.4. Сколько существует целых чисел между 0 и 1000, содержащих только одну цифру 6?

Решение. Пусть S – множество целых чисел между 0 и 1000, содержащих ровно одну цифру 6. Рассмотрим три подмножества S_1, S_2, и S_3 множества S.

S_1 – множество, которое содержит число, состоящее из одной цифры, и эта цифра 6;

S_2 – множество, содержащее двузначные числа только с одной цифрой, равной 6;

S_3 – множество, содержащее трехзначные числа только с одной цифрой, равной 6.

Множество S_1 содержит только один элемент – число 6. Значит, $|S_1| = 1$.

В множестве S_2 каждый элемент, содержащий только одну цифру 6, имеет ее в своей записи либо первой, либо второй цифрой. Если 6 – вторая цифра, то существует 8 различных чисел, которые будут стоять на первом месте, поскольку первое число не может быть 0 или 6. Если 6 – первая цифра, то таких чисел 9, поскольку вторая цифра не может быть 6. Таким образом, S_2 содержит $8 + 9 = 17$ элементов, т.е. $|S_2| = 17$.

Элемент из S_3 содержит 6 как первую, вторую или третью цифру в своей записи. Если 6 – первая цифра, то существует 9 вариантов выбора второй цифры и 9 вариантов выбора третьей цифры. Согласно комбинаторному принципу умножения, S_3 содержит $9 \cdot 9 = 81$ чисел с первой цифрой. Если 6 – вторая цифра, то имеются 9 вариантов выбора третьей цифры и 8 вариантов выбора первой цифры, поскольку первая цифра не может быть нулем. Следовательно, S_3 содержит $9 \cdot 8 = 72$ числа, у которых 6 – вторая цифра. Аналогично, S_3 содержит 72 числа, у которых 6 – третья цифра. Следовательно, всего S_3 содержит $81 + 72 + 72 = 225$ элементов, т.е. $|S_3| = 225$.

Поскольку $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ и множества S_1, S_2 и S_3 попарно непересекающиеся, то

$$|S| = |S_1 \cup S_2 \cup S_3| = |S_1| + |S_2| + |S_3| = 1 + 17 + 225 = 243. \qquad \square$$

Рассмотрим несколько важных понятий комбинаторики.

Пусть $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ – конечное множество.

Определение 2.4. Любой упорядоченный набор $(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n})$ из n различных элементов множества X называется *перестановкой* из n элементов множества X, обозначается P_n.

Определение 2.5. Любой упорядоченный набор $(x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_n})$ из m ($m \le n$) различных элементов множества X называется *размещением* из n элементов по m, обозначается A_n^m. В частности, для $m = n$ размещение будет перестановкой.

Определение 2.6. Любой неупорядоченный набор, т.е. подмножество $\{x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_n}\}$ из m ($m \le n$) различных элементов множества X называется *сочетанием* из n элементов по m, обозначается C_n^m.

Если в размещении и сочетании из n элементов по m убрать требование наличия различных элементов и разрешить повторение элементов из множества X, то такие размещение и сочетание называются *с повторениями.* Обозначение будет следующим: число $\widehat{A}(n,m)$ всех размещений из n элементов по m с повторениями и число $\widehat{C}(n,m)$ всех сочетаний из n элементов по m с повторениями.

Теорема 2.4. *Справедливы следующие формулы*:

$$P_n = n!, \tag{2.3}$$

$$A_n^m = n(n-1)\ldots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}, \tag{2.4}$$

$$C_n^m = \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}, \tag{2.5}$$

$$\widehat{A}(n,m) = n^m, \tag{2.6}$$

$$\widehat{C}(n,m) = C_{n+m-1}^m = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!}. \tag{2.7}$$

Доказательство.

1) На первое место в перестановке можно поставить любой из n элементов множества X, на второе место – уже любой из $n-1$ оставшихся элементов и т.д. На последнее место остается только один элемент. Тем самым будет всего $P_n = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!$ перестановок.

2) Аналогично в размещении из n элементов по m получим

$$A_n^m = n \cdot (n-1) \cdot \ldots (n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

При этом для $m = n$ имеем $A_n^n = P_n = n!$, так как по определению $0! = 1$.

3) Рассмотрим число сочетаний C_n^m. Каждое сочетание (подмножество) из m элементов можно сопоставить с классом всех перестановок в нем. Число элементов в таком классе равно $P_m = m!$. Тогда объединением всех таких классов будет множество всех размещений из n элементов по m и, следовательно, $A_n^m = m! \cdot C_n^m$. Таким образом, $C_n^m = \frac{A_n^m}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$.

4) Рассмотрим размещение с повторениями из n элементов по m. На первое место в таком размещении можно поставить любой из n элементов множества X, после чего этот элемент возвращается в X. Поэтому на второе и остальные места до m можно снова поставить любой из n элементов. Тем самым имеем $\widehat{A}(n,m) = \underbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{m} = n^m$.

5) Рассмотрим сочетание с повторением из n элементов по m. Поступим следующим образом. Перенумеруем элементы множества X произвольным образом. Каждое сочетание с повторением закодируем последовательностью 1 и 0 по правилу. Если элемент множества X участвует в данном сочетании k_1 раз, то в коде сочетания поставим вначале ровно k_1 единиц и затем завершающий нуль, который «отделяет код» данного элемента от последующих. Если элемент множества X не участвует в данном сочетании, то в коде этого сочетания ставим нуль, и так до последнего элемента из множества X. Только для последнего элемента множества X в коде не будем ставить завершающий нуль, так как больше нечего отделять. Таким образом, в коде сочетания с повторением будут 1 в количестве $k_1 + k_2 + \ldots + k_n = m$ штук и 0 – в количестве $n-1$ штук. Например, код (1100111) показывает, что первый элемент из множества X в сочетании присутствует два раза, второй элемент не присутствует, а третий элемент присутствует в сочетании три раза и он последний во множестве X. Число единиц – 5, а число нулей – $2 = 3 - 1$. Следовательно, это сочетание с повторением из трех элементов по 5. Итак, необходимо подсчитать число двоичных последовательностей из 0 и 1 длины $(n+m-1)$, в которых ровно m единиц. Следовательно,

$$\widehat{C}(n,m) = C_{n+m-1}^{m} = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!}. \qquad \square$$

Рассмотрим следующую комбинаторную задачу: требуется разбить конечное множество X из n элементов на m подмножеств

$$X = X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_m,$$

причем $X_i \cap X_j = \varnothing, i \neq j,\ |X_i| = k_i,\ k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$. Сколькими способами можно сделать такое разбиение?

Отметим, что некоторые подмножества могут быть пустыми.

Число таких разбиений обозначим через $N(n; k_1, k_2, \ldots, k_m)$.

Теорема 2.5. *Число разбиений конечного множества X из n элементов на m попарно непересекающихся подмножеств, каждое из которых содержит k_i элементов, определяется по формуле*

$$N(n; k_1, k_2, \ldots, k_m) = \frac{n!}{k_1! k_2! \ldots k_m!}. \tag{2.8}$$

Упражнение 2.1. *Доказательство теоремы провести самостоятельно.*

Пример 2.5. Целые числа в компьютере представляются строчкой из N двоичных знаков. Первый из них отведен на знак «+» или «−», а остальные $N-1$ знаков отвечают за модуль целого числа. Сколько различных целых чисел может использовать компьютер?

Решение. Двоичная цифра – это 0 или 1. Для записи числа используется N таких цифр. Заметим, что двоичные строки, представляющие числа, могут иметь повторяющиеся цифры, и порядок их следования, естественно, существенен для данной задачи. Поэтому имеем дело с $\widehat{A}(2,N)$ размещениями с повторениями. Общее количество таких строк равно 2^N. Практически всегда различные размещения изображают различные числа, за исключением двух строк:

$$-000000...00$$

и

$$+000000...00,$$

которые изображают число 0. Таким образом, компьютер может оперировать $2^N - 1$ целыми числами. $\square$

Пример 2.6. В магазине продается 4 сорта пирожных: безе, эклеры, наполеоны, песочные. Сколькими способами можно выбрать 7 пирожных?

Решение. Каждая покупка – это сочетание с повторением из 4 элементов по 7. Как следует из теоремы 2.4, покупке, например, двух безе, одного эклера и четырех песочных пирожных ставится в соответствие последовательность (1101001111). Всего покупок

$$\widehat{C}_4^7 = C_{7+4-1}^7 = C_{10}^7 = \frac{10!}{7!\cdot 3!} = 120. \qquad \square$$

Пример 2.7. При игре в домино игроки делят поровну 28 костей. Сколькими способами это можно сделать?

Решение.

$$N(28; 7, 7, 7, 7) = \frac{28!}{7!\cdot 7!\cdot 7!\cdot 7!} = 472518347558400. \qquad \square$$

Сочетания C_n^m обладают рядом свойств, два из них приведены в следующей теореме.

Теорема 2.6.

$$1)\quad C_n^r = C_n^{n-r}; \tag{2.9}$$

$$2)\quad C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k. \tag{2.10}$$

Упражнение 2.2. *Доказательство теоремы провести самостоятельно.*

Числа сочетаний C_n^m называются также *биномиальными коэффициентами*. Смысл этого названия объясняется тем, что сочетания C_n^m являются коэффициентами слагаемых в формуле, которая носит название *бинома Ньютона.* Введем эту формулу без доказательства. Бином Ньютона имеет вид

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k. \tag{2.11}$$

Исторически название *бинома Ньютона* (Исаак Ньютон (1643 – 1727) – английский физик, астроном и математик) несправедливо, так как формула $(a+b)^n$ была известна еще среднеазиатским математикам, начиная с Омара Хайяма (около 1100 г.) (Гийас ад-Дин Абу-л-Фатх Омар ибн Ибрахим Хайям (около 1048 – после 1122) – иранский математик, астроном и поэт). В Европе до Ньютона данную формулу получил Паскаль (Блез

Паскаль (1623 – 1662) – французский математик). Заслуга Ньютона состоит в том, что он обобщил эту формулу для нецелого показателя n.

Из формулы (2.10) вытекает эффективный способ реккурентного вычисления значений биноминальных коэффициентов, который можно представить в графической форме, известной как *треугольник Паскаля*, рис. 2.1.

$$
\begin{array}{ll}
n=0 & 1 \\
n=1 & 1 \quad 1 \\
n=2 & 1 \quad 2 \quad 1 \\
n=3 & 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
n=4 & 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
 & \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots
\end{array}
$$

Рис. 2.1

В равнобедренном треугольнике каждое число (кроме единиц на боковых сторонах) является суммой двух чисел, стоящих над ним.

Формула бинома Ньютона используется для двух слагаемых. Существует обобщенная формула бинома на случай k слагаемых, которая носит название *полиномиальная формула*. Итак, полиномиальная формула имеет вид

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_k)^n = \sum_{\substack{r_1 \ge 0,\, r_2 \ge 0,\, \ldots,\, r_k \ge 0 \\ r_1 + r_2 + \ldots + r_k = n}} \frac{n!}{r_1! \cdot r_2! \cdot \ldots \cdot r_k!} a_1^{r_1} a_2^{r_2} \ldots a_k^{r_k}, \qquad (2.12)$$

где суммирование проводится по всем решениям уравнения $r_1 + r_2 + \ldots + r_k = n$ в целых неотрицательных числах.

Пример 2.8. Найти коэффициент A в одночлене $Ax_1^2 x_2^3 x_3^5$, полученном после приведения подобных членов в выражении $(x_1 + x_2 + x_3)^{10}$.

Решение. В соответствии с формулой (2.12) получаем

$$A = \frac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 5!} = 2520. \qquad \square$$

Пример 2.9. Найти коэффициент при $x^3 y^6 z^3$ в разложении $(x + 2y + 3z)^{12}$.

Решение. В соответствии с формулой (2.12) получаем

$$C = \frac{12!}{3! \cdot 6! \cdot 3!} \cdot 2^6 \cdot 3^3 = 31933440. \qquad \square$$

Рассмотрим задачу определения числа элементов в объединении

$$X = X_1 \cup X_2 \cup ... \cup X_m$$

конечных множеств $X_i, i = \overline{1,m}$, которые могут иметь непустые пересечения между собой, т.е. объединение может быть не разбиением. В общем случае имеет место следующая теорема.

Теорема 2.7* (формула включений и исключений).

Для конечных множеств $X_i, i = \overline{1,m}$ *справедлива формула включений и исключений*:

$$\left|X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_m\right| =$$

$$= \sum_{1 \le i \le m} \left|X_i\right| - \sum_{1 \le i < j \le m} \left|X_i \cap X_j\right| + \sum_{1 \le i < j < k \le m} \left|X_i \cap X_j \cap X_k\right| + \ldots + \qquad (2.13)$$

$$+(-1)^{m-1} \sum_{1 \le i < j < \ldots < l \le m} \left|X_i \cap X_j \cap \ldots \cap X_l\right|.$$

В частности для двух множеств эта формула примет вид:

$$\left|A \cup B\right| = \left|A\right| + \left|B\right| - \left|A \cap B\right|.$$

Для трех множеств формула включений и исключений имеет вид

$$\left|X_1 \cup X_2 \cup X_3\right| = \left|X_1\right| + \left|X_2\right| + \left|X_3\right| - \left|X_1 \cap X_2\right| - \left|X_1 \cap X_3\right| - \left|X_2 \cap X_3\right| + \left|X_1 \cap X_2 \cap X_3\right|.$$

Название теоремы 2.7 подчеркивает использование последовательных включений и исключений элементов подмножеств.

Пример 2.10. Сколько положительных целых чисел, меньших 1001, делится на 2, 3 или 5?

Решение. Пусть X – множество положительных целых чисел, которые делятся на 2, 3 или 5. Рассмотрим три подмножества X_1, X_2 и X_3 множества X:

X_1 – множество положительных целых чисел, которые делятся на 2. Число элементов или мощность этого множества составляет $\left|X_1\right| = \left[\dfrac{1001}{2}\right] = 500$,

X_2 – множество положительных целых чисел, которые делятся на 3. Число элементов или мощность этого множества составляет $|X_2| = \left[\frac{1001}{3}\right] = 333$,

X_3 – множество положительных целых чисел, которые делятся на 5. Число элементов или мощность этого множества составляет $|X_3| = \left[\frac{1001}{5}\right] = 200$.

Тогда множество $X_1 \cap X_2$ – множество положительных целых чисел, которые делятся на 2 или 3. Число элементов (мощность) этого множества равно $|X_1 \cap X_2| = \left[\frac{1001}{2 \cdot 3}\right] = 166$. Множество $X_1 \cap X_3$ – множество положительных целых чисел, которые делятся на 2 или 5. Число элементов этого множества равно $|X_1 \cap X_3| = \left[\frac{1001}{2 \cdot 5}\right] = 100$. Множество $X_2 \cap X_3$ – множество положительных целых чисел, которые делятся на 3 или 5. Число элементов этого множества равно $|X_2 \cap X_3| = \left[\frac{1001}{3 \cdot 5}\right] = 66$.

Множество $X_1 \cap X_2 \cap X_3$ – множество положительных целых чисел, которые делятся на 2, 3 или 5. Число элементов (мощность) этого множества равно $|X_1 \cap X_2 \cap X_3| = \left[\frac{1001}{2 \cdot 3 \cdot 5}\right] = 33$.

Чтобы найти число элементов множества X, воспользуемся формулой включения и исключения:

$$|X| = |X_1 \cup X_2 \cup X_3| = |X_1| + |X_2| + |X_3| - |X_1 \cap X_2| - |X_1 \cap X_3| - |X_2 \cap X_3| +$$

$$+ |X_1 \cap X_2 \cap X_3| = 500 + 333 + 200 - 166 - 100 - 66 + 33 = 734. \qquad \square$$

3. ОТНОШЕНИЯ НА МНОЖЕСТВАХ. СВОЙСТВА БИНАРНЫХ ОТНОШЕНИЙ

3.1. Бинарные отношения

Когда говорят о родстве двух человек, например, Сергей и Анна, то подразумевают, что есть некая семья, к членам которой они относятся. Упорядоченная пара (Сергей, Анна) отличается от других упорядоченных

пар людей тем, что между Сергеем и Анной есть некое родство (отец, кузина, брат и т.д.).

В математике среди всех упорядоченных пар прямого произведения $A \times B$ двух множеств A и B также выделяются некоторые пары в связи с тем, что между их компонентами есть некоторые «родственные» отношения, которых нет у других. В качестве примера рассмотрим множество S студентов какого-нибудь университета и множество K читаемых там курсов. В прямом произведении $S \times K$ можно выделить большое подмножество упорядоченных пар (s,k), обладающих свойством: студент s слушает курс k. Построенное подмножество отражает отношение «… слушает …», естественно возникающее между множествами студентов и курсов.

Для строгого математического описания любых связей между элементами двух множеств введем понятие бинарного отношения.

Определение 3.1. *Бинарным* (*двухместным*) *отношением* ρ между множествами A и B называется произвольное подмножество $A \times B$:

$$a\rho b = (a,b) \in \rho, \text{ где } \rho \subseteq A \times B.$$

В частности, если $A = B$ (то есть $\rho \subseteq A^2$), то говорят, что ρ есть отношение на множестве A.

Элементы a и b называются *компонентами* (*координатами*) отношения ρ.

Для обозначения отношений между элементами множеств условимся использовать греческий алфавит: ρ, τ, φ, σ, ω и т.д.

Определение 3.2. *Областью определения* бинарного отношения ρ называется множество $D_\rho = \{a \mid \exists b, \text{ что } a\rho b\}$. *Областью значений* бинарного отношения ρ называется множество $R_\rho = \{b \mid \exists a, \text{ что } a\rho b\}$.

Пример 3.1. Пусть даны два множества $A = \{1; 3; 5; 7\}$ и $B = \{2; 4; 6\}$. Отношение зададим следующим образом $\tau = \{(x,y) \mid x + y = 9, (x,y) \in A \times B\}$. Это отношение будет состоять из следующих пар: $(3;6)$, $(5;4)$ и $(7;2)$, которые можно записать в виде $\tau = \{(3;6), (5;4), (7;2)\}$. В данном примере $D_\tau = \{3; 5; 7\}$ и $R_\tau = B = \{2; 4; 6\}$. □

Пример 3.2. Отношение равенства на множестве действительных чисел есть множество $\rho = \left\{ (x, y) \middle| x = y, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$. Для этого отношения существует специальное обозначение «=». Область определения совпадает с областью значений и является множеством действительных чисел, $D_\rho = R_\rho = \mathbb{R}$. □

Пример 3.3. Пусть A – множество товаров в магазине, а B – множество действительных чисел. Тогда

$\varphi = \left\{ (x, y) \middle| y \text{ – цена товара } x, (x, y) \in A \times B \right\}$ – отношение множеств A и B.

□

Способы задания отношений:

1) с помощью подходящего предиката;
2) как множество упорядоченных пар;
3) в графической форме: пусть A и B – два конечных множества и ρ – бинарное отношение между ними. Элементы этих множеств изображают точками на плоскости. Для каждой упорядоченной пары отношения ρ рисуют стрелку, соединяющую точки, представляющие компоненты пары. Такой объект называется *ориентированным графом* или *орграфом*, точки же, изображающие элементы множеств, принято называть вершинами графа.
4) в виде матрицы: пусть $A = \{ a_1, a_2, ..., a_n \}$ и $B = \{ b_1, b_2, ..., b_m \}$, ρ – отношение на $A \times B$. *Матричным представлением* ρ называется матрица $M = \left[M_{ij} \right]_{m \times n}$, элементы которой определяются следующим образом:

$$M_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } (a_i, b_j) \in \rho \\ 0, & \text{если } (a_i, b_j) \notin \rho \end{cases}.$$

Заметим, что матричное представление является представлением отношения в компьютере.

Пример 3.4. Пусть даны два множества $A = \{ 1; 3; 5; 7 \}$ и $B = \{ 2; 4; 6 \}$. Отношение задано следующим образом: $\tau = \left\{ (x, y) \middle| x + y = 9, (x, y) \in A \times B \right\}$. Требуется задать данное отношение как множество упорядоченных пар, орграфом, в виде матрицы.

Решение.

1) $\tau = \{(3;6),(5;4),(7;2)\}$ − есть задание отношения как множества упорядоченных пар;

2) соответствующий ориентированный граф показан на рисунке 3.1.

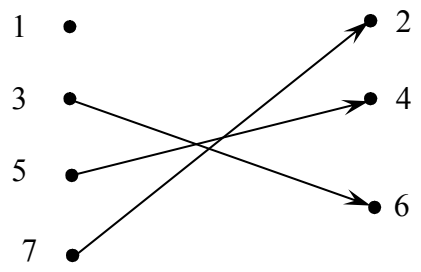


Рис. 3.1

3) в матричном представлении это отношение имеет вид

$$M = \left(\begin{array}{c|ccc} & 2 & 4 & 6 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

□

Пример 3.5. Рассмотрим предложенную Дж. фон Нейманом (1903 – 1957) блок-схему ЭВМ последовательного действия, которая состоит из множества устройств M :

$$M = \{a, b, c, d, e\},$$

где a – устройство ввода, b – арифметическое устройство (процессор), c – устройство управления, d – запоминающее устройство, e – устройство вывода.

Рассмотрим информационный обмен между устройствами m_i и m_j, которые находятся в отношении ρ, если из устройства m_i поступает информация в устройство m_j.

Это бинарное отношение можно задать перечислением всех его 14 упорядоченных пар элементов:

$$\rho = \{(a,b),(a,c),(a,d),(b,c),(b,e),(b,d),$$
$$(c,a),(c,b),(c,d),(c,e),(d,b),(d,c),(d,e),(e,c)\}.$$

Соответствующий орграф, задающий это бинарное отношение, представлен на рисунке 3.2.

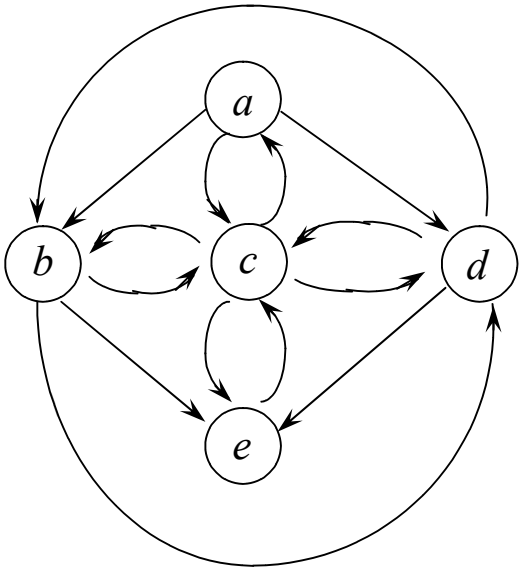


Рис. 3.2

Матричное представление этого бинарного отношения имеет вид

$$S(\rho)=\left(\begin{array}{c|ccccc} & a & b & c & d & e \\ \hline a & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ b & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ c & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ d & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ e & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

□

Для бинарных отношений обычным образом определены теоретико-множественные операции: объединение, пересечение и т.д.

Введем обобщенное понятие отношения.

Определение 3.3. *n-местное* (*n-арное*) отношение ρ – это подмножество прямого произведения n множеств, то есть множество упорядоченных наборов (кортежей).

$$\rho \subseteq A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \left\{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \middle| a_1 \in A_1 \wedge a_2 \in A_2 \wedge \ldots \wedge a_n \in A_n\right\}.$$

Многоместные отношения удобно задавать с помощью *реляционных таблиц*. Такое задание соответствует перечислению множества «n-ок» от-

ношения ρ. Реляционные таблицы широко используются в компьютерной практике в реляционных базах данных. Заметим, что реляционные таблицы также широко используются в повседневной практике: производственные, финансовые, научные и другие отчеты часто имеют форму реляционных таблиц.

Слово «*реляционная*» происходит от латинского слова *relation*, которое в переводе на русский язык означает «отношение». Поэтому в литературе для обозначения отношения используют латинскую букву R или греческую букву ρ.

Далее будем рассматривать только двухместные (бинарные) отношения, при этом опуская слово «бинарные».

Определение 3.4. Пусть $\rho \subseteq A \times B$ есть отношение на $A \times B$. Тогда отношение ρ^{-1} называется *обратным отношением* к данному отношению ρ на $A \times B$ и определяется следующим образом:

$$\rho^{-1} = \{(b,a) \mid (a,b) \in \rho\}.$$

Определение 3.5. Пусть $\rho \subseteq A \times B$ есть отношение на $A \times B$, а $\sigma \subseteq B \times C$ – отношение на $B \times C$. *Композицией отношений* ρ и σ называется отношение $\tau \subseteq A \times C$, которое определяется следующим образом:

$$\tau = \sigma \circ \rho = \{(a,c) \mid \exists b \text{ такое, что } (a,b) \in \rho, (b,c) \in \sigma\}.$$

Пример 3.6. Пусть $A = \{1; 2; 3\}$, $B = \{x; y\}$ и $C = \{\square, \Delta, \bigcirc, \nabla\}$. Пусть отношение ρ на $A \times B$ и отношение σ на $B \times C$ заданы в виде

$$\rho = \{(1,x),(1,y),(3,x)\}, \quad \sigma = \{(x,\square),(x,\Delta),(y,\bigcirc),(y,\nabla)\}.$$

Найти ρ^{-1}, $\sigma \circ \rho$, $\rho \circ \sigma$.

Решение.

1) По определению, $\rho^{-1} = \{(x,1),(y,1),(x,3)\}$.
2) Используя определение композиции двух отношений, получаем

$$\sigma \circ \rho = \{(1,\square),(1,\Delta),(1,\bigcirc),(1,\nabla),(3,\square),(3,\Delta)\},$$

поскольку из $(1,x) \in \rho$ и $(x,\square) \in \sigma$ следует $(1,\square) \in \sigma \circ \rho$;

из $(1,x)\in\rho$ и $(x,\Delta)\in\sigma$ следует $(1,\Delta)\in\sigma\circ\rho$;

из $(1,y)\in\rho$ и $(y,\bigcirc)\in\sigma$ следует $(1,\bigcirc)\in\sigma\circ\rho$;

…

из $(3,x)\in\rho$ и $(x,\Delta)\in\sigma$ следует $(3,\Delta)\in\sigma\circ\rho$.

3) $\rho\circ\sigma=\varnothing$. □

Теорема 3.1. *Для любых бинарных отношений выполняются следующие свойства*:

1) $(\rho^{-1})^{-1}=\rho$;

2) $(\sigma\circ\rho)^{-1}=\rho^{-1}\circ\sigma^{-1}$;

3) $\tau\circ(\sigma\circ\rho)=(\tau\circ\sigma)\circ\rho$ − ассоциативность композиции.

Доказательство.

Свойство 1 очевидно.

Докажем свойство 2. Для этого покажем, что множества, записанные в левой и правой частях равенства, состоят из одних и тех же элементов. Если $(a,b)\in(\sigma\circ\rho)^{-1}$, то $(b,a)\in\sigma\circ\rho$. Это означает, что существует элемент c такой, что $(b,c)\in\rho$ и $(c,a)\in\sigma$. Тогда $(c,b)\in\rho^{-1}$ и $(a,c)\in\sigma^{-1}$, а $(a,b)\in\rho^{-1}\circ\sigma^{-1}$. □

Упражнение 3.1. *Доказать свойство 3.*

3.2. Свойства бинарных отношений

Рассмотрим специальные свойства бинарных отношений на множестве A.

Свойства бинарных отношений

1. Отношение ρ на $A\times A$ называется *рефлексивным*, если (a,a) принадлежит ρ для всех a из множества A.

2. Отношение ρ называется *антирефлексивным*, если из $(a,b)\in\rho$ следует, что $a\neq b$.

3. Отношение ρ *симметрично*, если для a и b, принадлежащих множеству A, из $(a,b)\in\rho$ следует, что $(b,a)\in\rho$.

4. Отношение ρ называется *антисимметричным*, если для a и b из множества A, из принадлежности (a,b) и (b,a) отношению ρ следует, что $a=b$.

5. Отношение ρ *транзитивно*, если для a, b и c из множества A из того, что $(a,b)\in\rho$ и $(b,c)\in\rho$, следует, что $(a,c)\in\rho$.

Пример 3.7. Пусть $A=\{\square,\Delta,\bigcirc,\nabla\}$ и отношение ρ на $A\times A$ определено в виде

$$\rho=\{(\square,\square),(\square,\Delta),(\square,\nabla),(\Delta,\square),(\nabla,\square),(\nabla,\nabla),(\bigcirc,\nabla),(\bigcirc,\bigcirc)\}.$$

Какими свойствами обладает данное отношение?

Решение. Отношение ρ не является рефлексивным, так как $\Delta\in A$, но $(\Delta,\Delta)\notin\rho$.

Отношение ρ не является антирефлексивным, поскольку $(\bigcirc,\bigcirc)\in\rho$, но неверно, что $\bigcirc\neq\bigcirc$.

Отношение ρ не является симметричным, поскольку $(\bigcirc,\nabla)\in\rho$, но $(\nabla,\bigcirc)\notin\rho$.

Отношение ρ не является антисимметричным, поскольку $(\Delta,\square)\in\rho$ и $(\square,\Delta)\in\rho$, но $\square\neq\Delta$.

Отношение ρ не является транзитивным, т.к. $(\Delta,\square)\in\rho$ и $(\square,\nabla)\in\rho$, но $(\Delta,\nabla)\notin\rho$. $\square$

Пример 3.8. Пусть $A=\{1;2;3;4;5;6\}$. На этом множестве задано отношение $\rho\subseteq A^2$, которое имеет вид

$$\rho=\{(1;1),(2;2),(3;3),(4;4),(5;5),(6;6),(1;2),\\(1;4),(2;1),(2;4),(3;5),(5,3),(4;1),(4,2)\}.$$

Какими свойствами обладает данное отношение?

Решение.

Отношение рефлексивно, так как для каждого $a\in A$, $(a,a)\in\rho$.

Отношение не является антирефлексивным, так как не выполняется условие этого свойства. Например, $(2;2)\in\rho$, но отсюда не следует, что $2\neq 2$.

Рассмотрим все возможные случаи, показав, что отношение ρ является симметричным, табл. 3.1.

Таблица 3.1

Случай	$(a,b)\in\rho$	(b,a)	$(b,a)\in\rho$?
1	$(1;2)$	$(2;1)$	да
2	$(1;4)$	$(4;1)$	да
3	$(2;1)$	$(1;2)$	да
…	…	…	…

Отношение не является антисимметричным, поскольку $(1;2)\in\rho$ и $(2;1)\in\rho$, но отсюда не следует, что $1=2$.

Используя метод прямого перебора, можно показать, что отношение ρ транзитивно, табл. 3.2.

Таблица 3.2

Случай	$(a,b)\in\rho$	$(b,c)\in\rho$	(a,c)	$(a,c)\in\rho$?
1	$(1;2)$	$(2;1)$	$(1;1)$	да
2	$(1;2)$	$(2;2)$	$(1;2)$	да
3	$(1;2)$	$(2;4)$	$(1;4)$	да
4	$(1;4)$	$(4;1)$	$(1;1)$	да
5	$(1;4)$	$(4;2)$	$(1;2)$	да
…	…	…	…	…

□

Свойства бинарного отношения можно определить по матрице представления следующим образом:

1. Рефлексивность: на главной диагонали стоят все единицы, звездочками обозначены нули или единицы.

$$M=\begin{pmatrix} 1 & * & \dots & * \\ * & 1 & \dots & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ * & * & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Антирефлексивность: на главной диагонали все нули.

3. Симметричность: $M=M^T$.

4. Антисимметричность: все элементы вне главной диагонали равны нулю, на главной диагонали также могут быть нули.

$$M \odot M^T = \begin{pmatrix} * & 0 & \dots & 0 \\ 0 & * & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & * \end{pmatrix}.$$

Операция «$\odot$» выполняется по следующему правилу: $M \odot M^T = \left(m_{ij} \cdot m_{ij}^T\right)$, где $0 \cdot 0 = 0$, $1 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 0$, $1 \cdot 1 = 1$.

5. Транзитивность: если $M \bullet M \subseteq M$. Операция «$\bullet$» выполняется по обычному правилу умножения, при этом надо учитывать: $1+1=1$, $1+0=0+1=1$, $0+0=0$.

3.3. Отношение эквивалентности

Отношение эквивалентности является формализацией такой ситуации, когда говорят о сходстве (одинаковости) двух элементов множества.

Определение 3.6. Отношение ρ на A есть *отношение эквивалентности,* если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно, отношение эквивалентности $a\rho b$ обозначается $a \sim b$.

Пример 3.8 (продолжение). Выше показано, что данное отношение обладает свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности, а значит, это отношение является отношением эквивалентности. □

Пример 3.9. Отношение равенства на множестве целых чисел есть отношение эквивалентности. □

Пример 3.10. Пусть $\mathbb{Z}$ − множество целых чисел. Два числа x и y из множества $\mathbb{Z}$ называют *сравнимыми по модулю* m $(m \in \mathbb{N})$ и записывают $x = y \bmod(m)$, если равны остатки этих чисел от деления их на m, т.е. разность $(x - y)$ делится на m.

Отношение «сравнимых по модулю m целых чисел» есть отношение эквивалентности на множестве целых чисел $\mathbb{Z}$. Действительно,

1) отношение рефлексивно, т.к. для $\forall x \in \mathbb{Z}$ имеем $x - x = 0$, и, следовательно, разность делится на m;

2) отношение симметрично, т.к. если $(x-y)$ делится на m, то и $(y-x)$ также делится на m;

3) отношение транзитивно, т.к. если $(x-y)$ делится на m, то для некоторого целого t_1 имеем $x-y=t_1m$, а если $(y-z)$ делится на m, то для некоторого целого t_2 имеем $y-z=t_2m$. Тогда $x-z=(t_1+t_2)m$, т.е. $(x-z)$ делится на m. □

Определение 3.7. Подмножество $[x]=\{y\in X \mid y\sim x\}$ называется *классом эквивалентности*, содержащим x (это множество всех элементов X, эквивалентных данному элементу x).

Любой элемент $y\in[x]$ называется *представителем* этого класса.

Пример 3.11. Отношение сравнимости по модулю m на множестве целых чисел $\mathbb{Z}$, порождает следующие классы эквивалентности: вместе с любым числом $a\in\mathbb{Z}$ в этом же классе эквивалентности содержатся все числа вида $a+qm$, где q – целое число.

Очевидно, что числа $0,1,2,...,m-1$ порождают различные классы эквивалентности, которые обозначаются $[0],[1],[2],\ldots,[m-1]$. Они называются *классами вычетов по модулю m*.

Все остальные классы эквивалентности для этого отношения совпадают с ними, так как любое число $a\in\mathbb{Z}$ можно представить в виде $a=qm+r$, где $0\le r<m$. □

Теорема 3.2*. *Пусть* ρ *– отношение эквивалентности на множестве* X. *Тогда:*

1) *для* $\forall x\in X$ имеем $x\in[x]$;

2) *если* $x,y\in X$ и $x\rho y$, то $[x]=[y]$.

Другими словами, класс эквивалентности порождается любым своим элементом.

Теорема 3.3*. *Всякое отношение эквивалентности* ρ *определяет разбиение множества* X *на классы эквивалентности относительно этого отношения* ρ.

Теорема 3.4*. *Пусть задано разбиение множества* X *на попарно непересекающиеся подмножества. Тогда эти подмножества будут клас-*

сами эквивалентности по некоторому отношению эквивалентности на множестве X.

Определение 3.8. Совокупность классов эквивалентности элементов множества X по отношению эквивалентности ρ называется *фактор-множеством* множества X *по отношению* ρ и обозначается X/ρ.

3.4. Отношение частичного порядка

Определение 3.9. Отношение ρ на множестве A *есть отношение частичного порядка,* если оно рефлексивно, антисимметрично и транзитивно, обозначается символом «$\preceq$».

Частичный порядок важен в тех ситуациях, когда мы хотим как-то охарактеризовать старшинство (главенство; іными словами, решить, при каких условиях считать, что один элемент множества превосходит другой.

Пример 3.12. Отношение $x \le y$ на множестве действительных чисел есть отношение частичного порядка. □

Пример 3.13. Во множестве подмножеств некоторого универсального множества U отношение $A \subseteq B$ есть отношение частичного порядка. □

Пример 3.14. Схема организации подчинения в учреждении есть отношение частичного порядка на множестве должностей. □

Определение 3.10. Отношение частичного порядка на множестве X, для которого любые два элемента сравнимы, называется отношением *линейного порядка*, обозначается «$\prec$». Тогда для любых $x, y \in X$: $x \prec y$ или $y \prec x$.

Элемент a частично упорядоченного множества X называется *максимальным* (*минимальным*), если из того, что $a\rho x$ $(x\rho a)$, следует, что $x = a$, т.е. в X нет ни одного элемента $x \ne a$ такого, что $a\rho x$ $(x\rho a)$.

Элемент a частично упорядоченного множества X называется *наибольшим* (*наименьшим*), если $x\rho a$ $(a\rho x)$ для всех $x \in X$.

Рассмотрим непустое конечное множество X, на котором задано отношение частичного порядка $x \preceq y$, т.е. $x \neq y$. Говорят, что элемент y покрывает элемент x, если $x \preceq y$ и не существует такого элемента u, что $x \preceq u \preceq y$. Тогда $x \preceq y$ равносильно тому, что существуют такие элементы $x_1, x_2, \ldots, x_n$, что $x = x_1 \preceq x_2 \preceq \ldots \preceq x_n = y$, где x_{i+1} покрывает x_i.

Любое частично упорядоченное множество можно представить в виде схемы, в которой каждый элемент изображается точкой на плоскости, и если элемент y покрывает элемент x, то соответствующие точки x и y соединяют отрезком, причем точку, соответствующую x, располагают ниже точки, соответствующей y. Такие схемы называются *диаграммами Хассе* (Хельмут Хассе (1898 – 1979) – немецкий математик).

Пример 3.15. Пусть $X = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$. На этом восьмиэлементном множестве рассмотрим отношение частичного порядка $x \preceq y$: «y делится на x». Диаграмма Хассе для этого отношения изображена на рисунке 3.3.

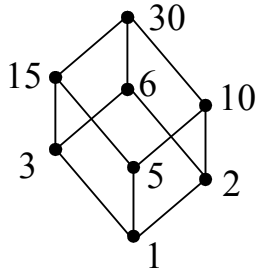


Рис. 3.3 □

Пример 3.16. На множестве $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ рассмотрим отношение линейного порядка «$\prec$». Диаграмма Хассе данного отношения изображена на рисунке 3.4.

Рис. 3.4 □

Прообразом отношения частичного порядка является интуитивное понятие отношения предпочтения (предшествования). Отношение предпочтения выделяет класс задач, которые можно объединить как *задачу о проблеме выбора наилучшего объекта.*

Постановка задачи: пусть имеется совокупность объектов A и требуется сравнить их по предпочтительности, т.е. задать отношение предпочтения на множестве A и определить наилучшие объекты.

Отношение предпочтения P, которое можно определить как $aPb = \{a, b \in A |$ объект a не менее предпочтителен, чем объект b $\}$, является по смыслу рефлексивным и антисимметричным (каждый объект не хуже самого себя, и, если объект a не хуже b и b не хуже a, то они одинаковы по предпочтительности). Естественно считать, что отношение P транзитивно (хотя в случае, когда, например, предпочтения обсуждаются группой лиц с противоположными интересами, это свойство может быть нарушено), т.е. P – отношение частичного порядка.

Один из возможных способов решения задачи сравнения объектов по предпочтительности – *ранжирование*, т.е. упорядочение объектов в соответствии с убыванием их предпочтительности или равноценности. В результате ранжирования мы выделяем «наилучшие» или «наихудшие» с точки зрения отношения предпочтения объекты.

Области применения задачи о проблеме выбора наилучшего объекта: теория принятия решений, прикладная математика, техника, экономика, социология, психология.

4. ОТОБРАЖЕНИЯ (ФУНКЦИИ)

Функции играют центральную роль в математике, где они используются для описания любых процессов, при которых элементы одного множества каким-то образом «переходят» в элементы другого. Такие преобразования элементов – фундаментальная идея, имеющая первостепенное значение для всех вычислительных процессов.

Определение 4.1. Отношение f на $A \times B$ называется *отображением* (*функцией*) из A в B, если для каждого элемента $x \in A$ существует один и только один элемент $y \in B$. Обозначается $f : A \to B$ или $y = f(x)$.

Множество A называется *областью определения функции.* Множество B – *областью значений функции.*

Если $y = f(x)$, то x называют *аргументом*, а y – *значением функции.*

Пусть $f : A \to B$, тогда *множество определения* функции: $f_A = Dom\ f = \{x \in A | \exists y \in B, y = f(x)\}$; *множество значений* функции: $f_B = Im\ f = \{y \in B \mid \exists x \in A, y = f(x)\}$.

Множество определения функции является подмножеством области определения, т.е. $Dom\ f \subseteq A$, а множество значений функции является подмножеством области значений функции, т.е. $Im\ f \subseteq B$. Если $f_A = A$, то функция называется *тотальной*, а если $f_A \neq A$ – *частичной функцией*. Диаграмма Венна служит удобной иллюстрацией функции, определенной на множестве A со значениями в множестве B, рис. 4.1.

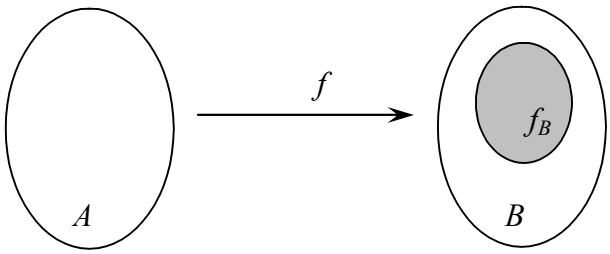


Рис. 4.1

Способы задания функции:

1) словесный;
2) аналитический;
3) графический;
4) табличный.

Определение 4.2. Если $M \subseteq A$, то множество

$$f(M) = \{y | f(x) = y \text{ для некоторого } x \in M\}$$

называется *образом* множества M.

Если $K \subseteq B$, то множество $f^{-1}(K) = \{x | f(x) \in K\}$ называется *прообразом* множества K.

Пример 4.1. Дано отображение $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$, где $f(x) = x^3 - 5$ для всех $x \in \mathbb{Q}$. Найти:

1) образ элемента 1;
2) $f^{-1}(3)$;
3) $f^{-1}(5)$.

Решение.

1) Сначала нужно убедиться, что $1 \in \mathbb{Q}$. Это верно, так как 1 − натуральное и, следовательно, рациональное число. Используем определение образа. Чтобы найти образ элемента, достаточно в отображение подставить вместо x число 1. Получаем $f(1) = 1^3 - 5 = -4$, причем $-4 \in \mathbb{Z}$. Значит, элемент 1 имеет образ, и он равен -4.

2) Сначала убедимся, что $3 \in \mathbb{Z}$. Это верно, так как 3 − натуральное и, следовательно, целое число. Используем определение прообраза. Чтобы найти прообраз, вместо $f(x)$ подставляем 3 и решаем уравнение $x^3 - 5 = 3$. Получаем $x = 2$, причем $2 \in \mathbb{Q}$. Значит, $f^{-1}(3) = 2$.

3) По аналогии находим прообраз 5. Заметим, что $5 \in \mathbb{Z}$. Решаем уравнение $x^3 - 5 = 5$ и получаем $x = \sqrt[3]{10}$. Но $\sqrt[3]{10} \notin \mathbb{Q}$. Значит, $f^{-1}(5) = \varnothing$.

Ответ: 1) -4; 2) 2; 3) $\varnothing$. □

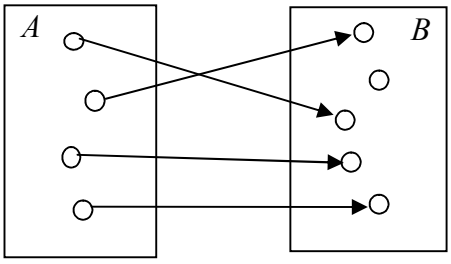
Определение 4.3. Функция $f : A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \to B$ называется *функцией n аргументов*, или *n-местной функцией*. Такая функция отображает кортеж $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ в элемент $b \in B$, $b = f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Свойства отображений (функций)

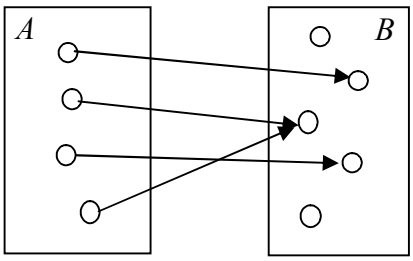
1) Отображение $f : A \to B$ называется *инъективным* (*инъекцией*), если оно различные элементы из A отображает в различные элементы из B:

$$y = f(x_1) \wedge y = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Это свойство можно показать с помощью диаграмм Венна, рис. 4.2.



Инъективное отображение

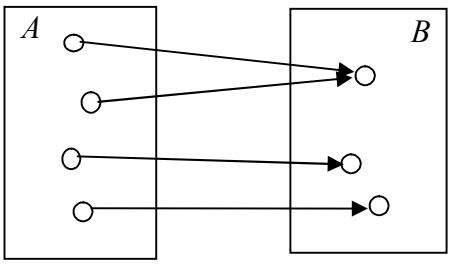


Отображение не является инъективным

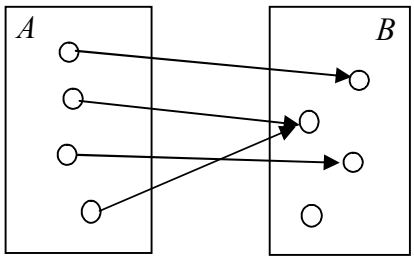
Рис. 4.2

2) Отображение $f: A \to B$ называется *сюръективным* (*сюръекцией*) или отображением на все множество B, если в каждый элемент множества B отображается хотя бы один элемент из A: $\forall y \in B, \exists x \in A, y = f(x)$.

Это свойство также можно показать с помощью диаграмм Венна, рис. 4.3.



Сюръективное отображение



Отображение не является сюръективным

Рис. 4.3

3) Отображение $f: A \to B$, которое одновременно инъективно и сюръективно, называется *биективным* (*биекцией*) или взаимно однозначным отображением множества A на множество B.

Пример 4.2. Пусть A и B – множества действительных чисел и $f: A \to B$ определена таким образом, что $f(x) = 3x + 5$.

Даная функция инъективна, так как если $f(x_1) = f(x_2)$, тогда $3x_1 + 5 = 3x_2 + 5$ и, следовательно, $x_1 = x_2$.

Функция f является также сюръекцией. Чтобы это показать, для любого действительного числа y требуется найти такое x, что $f(x) = y$ или $y = 3x + 5$. Решая это уравнение относительно x, находим, что если $x = \dfrac{y-5}{3}$, тогда $f(x) = y$.

Следовательно, f представляет собой взаимно однозначное соответствие, иначе, является биекцией. □

Пример 4.3. Пусть A и B – множества действительных чисел и $f: A \to B$ определена таким образом, что $f(x) = x^2$.

Функция f не является инъективной, так как, например, $f(2) = f(-2)$, но $2 \neq -2$.

Функция f не является также и сюръективной, поскольку не существует такого действительного числа x, для которого $f(x) = -1$. □

Определение 4.4. Пусть f – биективное отображение множества A в множество B. Если поставить в соответствие каждому элементу из B связанный с ним элемент из A, то такое соответствие является отображением B в A. Это отображение обозначается f^{-1} и называется *отображением, обратным отображению* f.

Теорема 4.1. *Если* $f : A \to B$ *– биекция, то*

1) $f(f^{-1}(y)) = y$ *для любого* y *из множества* B;

2) $f^{-1}(f(x)) = x$ *для любого* x *из множества* A.

Доказательство.

1) Пусть $y \in B$ и $x = f^{-1}(y)$. Тогда $f(x) = y$. Но поскольку $x = f^{-1}(y)$, то $f(f^{-1}(y)) = f(x) = y$.

2) Аналогично доказывается, что $f^{-1}(f(x)) = x$ для любого $x \in A$. □

Определение 4.5. *Композицией* (*суперпозицией, произведением*) отображений $f : A \to B$ и $g : B \to C$ называется отображение множества A в множество C, которое обозначается $g \circ f$.

Такой способ записи суперпозиции функций объясняется тем, что обозначение функции принято писать слева от списка аргументов: $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Пример 4.4. Рассмотрим две функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ и $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 4x + 3$. Вычислить $g \circ f$, $f \circ g$, $f \circ f$, $g \circ g$.

Решение. Все четыре новые функции будут определены на $\mathbb{R}$ со значениями в $\mathbb{R}$.

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = 4x^2 + 3$;

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(4x + 3) = (4x + 3)^2 = 16x^2 + 24x + 9$;

$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(x^2) = (x^2)^2 = x^4$;

$(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g(4x + 3) = 4(4x + 3) + 3 = 16x + 15$. □

5. ОСНОВНЫЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

5.1. Алгебраическая операция

Пусть A − произвольное непустое множество.

Определение 5.1. Произвольное отображение множества A^2 в A называется (*бинарной*) *алгебраической операцией*, *заданной на множестве* A. Иными словами, на множестве A задана алгебраическая операция, если каждой упорядоченной паре (a,b) элементов множества A поставлен в соответствие однозначно определенный элемент $c \in A$. Этот элемент c называют *композицией элементов* a *и* b *относительно заданной алгебраической операции*.

Обычно алгебраические операции называют сложением, вычитанием, умножением и т.д., а для обозначения композиции пользуются соответственно символами «$+$», «$-$», «$\cdot$» и т.д. Используют также и другие символы, например «$\circ$», «$*$», и записывают $a \circ b = c$ или $a * b = c$.

Заметим, что определение алгебраической операции на множестве A требует, чтобы композиция принадлежала множеству A и была однозначной; допускает, что композиция c зависит от порядка элементов a и b.

Множество A с алгебраической операцией $\circ$ обозначается символом $(A,\circ)$.

Пример 5.1. $(\mathbb{Z},+)$ − множество целых чисел с операцией сложения; $(\mathbb{Z},\cdot)$ − множество целых чисел с операцией умножения. □

Если $A = \{a_1, a_2, .., a_n\}$, то алгебраическую операцию на этом множестве можно записать с помощью таблицы Кэли, табл. 5.1.

Таблица 5.1

$\circ$	a_1	a_2	…	a_n
a_1	$a_1 \circ a_1$	$a_1 \circ a_2$	…	$a_1 \circ a_n$
a_2	$a_2 \circ a_1$	$a_2 \circ a_2$	…	$a_2 \circ a_n$
…	…	…	…	…
a_n	$a_n \circ a_1$	$a_n \circ a_2$	…	$a_n \circ a_n$

В этой таблице в клетке, расположенной на пересечении строки, начинающейся с элемента a_k, и столбца, начинающегося с элемента a_l, пишется композиция $a_k \circ a_l$.

Определение 5.2. Алгебраическая операция $\circ$ называется *коммутативной* на множестве A, если $a \circ b = b \circ a$ для $\forall a, b \in A$.

Определение 5.3. Алгебраическая операция $\circ$ называется *ассоциативной* на множестве A, если $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ для $\forall a, b, c \in A$.

Пример 5.2. Сложение и умножение на множестве $\mathbb{Z}$ − коммутативные и ассоциативные алгебраические операции, а вычитание − нет. □

Пример 5.3. Композиция функций на $\mathbb{R}$ – ассоциативна, но не коммутативна.

Для иллюстрации рассмотрим три функции: $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, где $f_1(x) = x^2$; $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, где $f_2(x) = 2x + 3$; $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, где $f_3(x) = \sqrt[3]{x}$.

Покажем, что коммутативность не выполняется для композиции двух функций. Например, возьмем функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$.

$f_1 \circ f_2 = f_1\big(f_2(x)\big) = f_1(2x+3) = (2x+3)^2 = 4x^2 + 12x + 9$;

$f_2 \circ f_1 = f_2\big(f_1(x)\big) = f_2(x^2) = 2x^2 + 3$.

Таким образом, $f_1 \circ f_2 \neq f_2 \circ f_1$.

Покажем, что ассоциативность имеет место.

$f_1 \circ (f_2 \circ f_3) = f_1 \circ \Big(f_2\big(f_3(x)\big)\Big) = f_1\Big(2\sqrt[3]{x} + 3\Big) = \Big(2\sqrt[3]{x} + 3\Big)^2 = 4\sqrt[3]{x^2} + 12\sqrt[3]{x} + 9$;

$(f_1 \circ f_2) \circ f_3 = \Big(f_1\big(f_2(x)\big)\Big) \circ f_3 = (2x+3)^2 \circ f_3 = (4x^2 + 12x + 9) \circ f_3 =$

$= 4\sqrt[3]{x^2} + +12\sqrt[3]{x} + 9$.

Таким образом, $f_1 \circ (f_2 \circ f_3) = (f_1 \circ f_2) \circ f_3$.

Действительно, в общем случае,

$f_1 \circ (f_2 \circ f_3) = f_1 \circ \Big(f_2\big(f_3(x)\big)\Big) = f_1\Big(f_2\big(f_3(x)\big)\Big) = \Big[f_1\big(f_2(x)\big)\Big] \circ f_3 = (f_1 \circ f_2) \circ f_3$.

□

Пример 5.4. Операция «вычитание по модулю»: $a \Theta b = |a - b|$, определенная на множестве целых чисел, является коммутативной, но не является ассоциативной. □

Упражнение 5.1. *В истинности утверждения примера 5.4 убедиться самостоятельно.*

Рассмотрим $(A,\circ)$.

Определение 5.4. Элемент $n \in A$ называется: *левым нейтральным элементом относительно алгебраической операции* $\circ$, если $n \circ a = a$ для $\forall a \in A$; *правым нейтральным элементом относительно алгебраической операции* $\circ$, если $a \circ n = a$ для $\forall a \in A$; *нейтральным элементом относительно алгебраической операции* $\circ$, если $a \circ n = n \circ a = a$ для $\forall a \in A$.

Определение 5.5. Элемент $b \in A$ называется *симметричным элементу* $a \in A$ *относительно алгебраической операции* $\circ$, если $a \circ b = b \circ a = n$, где n − нейтральный элемент множества A.

Заметим, что часто бывает удобно называть алгебраическую операцию умножением или сложением. Если операция называется умножением, то композиция элементов a и b называется *произведением* и записывается в виде ab. Нейтральный элемент при этом называется *единицей* и обозначается символом 1 или e. Элемент, симметричный элементу a, называется *обратным* и обозначается a^{-1}. Если же алгебраическая операция называется сложением, то композиция элементов a и b называется суммой и обозначается $a+b$. Нейтральный элемент называется при этом *нулем* и обозначается символом 0, а элемент, симметричный элементу a, называется *противоположным* и обозначается $-a$.

Определение 5.6 Элемент $a \in A$ называется *идемпотентом*, если $a \circ a = a$.

Определение 5.7. Элемент $v \in A$ называется *аннулирующим*, если $a \circ v = v$ (*правый аннулирующий элемент*) и $v \circ a = v$ (*левый аннулирующий элемент*) для $\forall a \in A$.

Пример 5.5. Укажем для множества $\mathbb{N}$ с заданной операцией «$\Diamond$», где $x \Diamond y = \max\{x; y\}$ для всех $x, y \in \mathbb{N}$, «замечательные» элементы: идемпотент, левый (правый) аннулирующий элемент, левый (правый) нейтральный элемент, левый (правый) симметричный элемент. В данном случае:

1) $x \Diamond x = \max\{x; x\} = x$, поэтому любой $x \in \mathbb{N}$ является идемпотентом;

2) $x \Diamond 1 = \max\{x; 1\} = x$, $1 \Diamond x = \max\{1; x\} = x$, поэтому $1 \in \mathbb{N}$ является левым и правым нейтральным элементом;

3) $x \Diamond x^{-1} = \max\left\{x; x^{-1}\right\} \neq 1$, поэтому, кроме $x = 1$, ни один элемент из $\mathbb{N}$ не имеет левого и правого симметричного элемента;

4) $x \Diamond (x+k) = \max\left\{x; (x+k)\right\} = \max\left\{(x+k); x\right\} = (x+k) \Diamond x = x + k$, где $k \in \mathbb{N}$, т.е. из двух различных натуральных чисел выбираем большее, поэтому для всех $x \in \mathbb{N}$ нельзя указать левый (правый) аннулирующий элемент в силу бесконечности множества $\mathbb{N}$. □

5.2. Полугруппа. Группа

Определение 5.8. *Полугруппой* называется непустое множество A с заданной на нем ассоциативной алгебраической операцией. Если эта операция – умножение, то полугруппа называется *мультипликативной*, а если сложение – *аддитивной*.

Пример 5.6. Полугруппой является множество $\mathbb{N}$ с обычной операцией сложения или умножения. □

Определение 5.9. *Группой относительно заданной операции* называется непустое множество G с заданной на нем алгебраической операцией $\circ$, удовлетворяющей аксиомам:

1) эта операция ассоциативна, т.е. $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c, \quad \forall a, b, c \in G$;

2) в G существует нейтральный относительно заданной операции элемент, т.е. $a \circ n = n \circ a = a, \quad \forall a \in G$;

3) для каждого элемента множества G в этом множестве существует симметричный элемент относительно заданной операции, т.е. $\forall a \in G: \quad a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = n$.

Заметим, что если операция в группе (групповая операция) коммутативна, то группу называют *коммутативной* или *абелевой*. Согласно аксиоме 1, каждая группа является полугруппой. Группа, в которой групповая операция названа умножением, называется *мультипликативной,* нейтральный элемент – *единицей группы* (e), симметричный элемент – *обратным*. Если же групповая операция сложение, то группа называется *аддитивной*, нейтральный элемент – *нулем группы* (0), симметричный элемент – *противоположным.* Если группа состоит из конечного числа элементов, то она на-

зывается *конечной группой*, и *бесконечной* – в противном случае. Число элементов в конечной крупе называется ее *порядком*.

Пример 5.7. Следующие множества с обычным умножением являются группами:

1) $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$;

2) множество положительных рациональных чисел. □

Пример 5.8. Доказать, что множество $\{+1;-1\}$, состоящее из двух чисел, образует коммутативную группу по умножению.

Решение. Действительно, операция умножения определена на указанном множестве, так как

$$(+1)\cdot(+1)=+1, \quad (+1)\cdot(-1)=(-1)\cdot(+1)=-1, \quad (-1)\cdot(-1)=1.$$

Следовательно, произведение элементов есть элемент того же множества.

Ассоциативность умножения очевидна.

Из выше полученных равенств следует, что существует нейтральный элемент $n=+1$.

Кроме того, каждый элемент имеет обратный: $(+1)^{-1}=+1,\ (-1)^{-1}=-1$.

Таким образом, все три условия в определении группы выполняются. Из полученных равенств следует, что умножение коммутативно, поэтому данная группа коммутативна. □

Непосредственно из определения группы получаем следующие свойства мультипликативной группы:

1) в G существует единственная единица;

2) каждый элемент $a \in G$ имеет единственный обратный a^{-1};

3) уравнение $ax=b$ $(ya=b)$, где $a,b \in G$, имеет в G решение и притом единственное (решением является элемент $a^{-1}b$ (ba^{-1})).

Свойства аддитивной группы:

1) в G существует единственный нуль;

2) каждый элемент $a \in G$ имеет единственный противоположный $-a$;

3) уравнение $a+x=b$ $(y+a=b)$, где $a,b \in G$, имеет в G решение и притом единственное.

5.3. Кольцо. Поле

Определение 5.10. *Кольцом относительно заданных операций сложения и умножения* называется непустое множество K, на котором заданы две алгебраические операции, называемые сложением и умножением, если $(K,+,\cdot)$ удовлетворяет следующим аксиомам:

1) относительно сложения K является абелевой группой;
2) K образует полугруппу по умножению;
3) умножение дистрибутивно относительно сложения, т.е.

$$a(b+c)=ab+ac,$$
$$(a+b)c=ac+bc,$$

для $\forall\, a,b,c\in K$.

Заметим, что кольцо называется *ассоциативным*, если умножение в нем ассоциативно. Ассоциативное кольцо, в котором умножение коммутативно, называется *коммутативным*.

Таким образом, кольцо – это множество K с заданными на нем двумя алгебраическими операциями – сложением и умножением, удовлетворяющими следующим аксиомам.

1. Сложение ассоциативно.
2. Сложение коммутативно.
3. Существует такой элемент 0 (нуль), что $a+0=a$ для любого $a\in K$.
4. Для каждого $a\in K$ существует такой элемент $-a\in K$, что $a+(-a)=0$.
5. Умножение ассоциативно.
6. Сложение и умножение связаны двумя законами дистрибутивности.

Определение 5.11. Элементы a и b кольца K называются *делителями нуля*, если $ab=0$, хотя $a\neq 0$ и $b\neq 0$.

Определение 5.12. Если в кольце содержится такой элемент e, что $ea=ae=a$ при любом $a\in K$, то этот элемент называется единицей кольца K.

Определение 5.13. Элемент a кольца K с единицей называется обратимым, если $a^{-1}\in K$. Множество обратимых элементов кольца K обозначается K^*.

Пример 5.9. Следующие множества с соответствующими операциями являются кольцами:

1) $\mathbb{Z}$ с обычным сложением и умножением; это кольцо коммутативно, содержит единицу 1, обратимые элементы в нем 1 и -1;

2) $C[a,b]$ (множество функций, непрерывных на отрезке $[a,b]$) с поточечным сложением и умножением; это кольцо коммутативно, содержит единицу, обратимые элементы в нем – функции, которые не обращаются в нуль ни в одной точке отрезка $[a,b]$. □

Пример 5.10. Рассмотрим множество положительных действительных чисел $\mathbb{R}^+$ и две операции, определенные на этом множестве: умножения $(a \cdot b)$ и возведения в положительную степень $(a \uparrow b = a^b)$. Докажем, что операция «$\uparrow$» возведение в степень дистрибутивна справа относительно умножения, но не дистрибутивна слева.

В самом деле, для любых положительных действительных чисел a, b, c справедливы равенства

$$(a \cdot b) \uparrow c = (a \cdot b)^c = a^c \cdot b^c = (a \uparrow c) \cdot (b \uparrow c).$$

Следовательно, операция «$\uparrow$» дистрибутивна справа относительно операции умножения чисел. Дистрибутивность «$\uparrow$» слева относительно умножения можно опровергнуть примером

$$2 \uparrow (3 \cdot 2) = 2^{3 \cdot 2} = 2^6 = 64 \neq 32 = 2^3 \cdot 2^2 = (2 \uparrow 3) \cdot (2 \uparrow 2). \qquad \square$$

Определение 5.14. Коммутативное кольцо с единицей, в котором содержится не менее двух элементов $(e \neq 0)$ и каждый ненулевой элемент обратим, называется полем.

Таким образом, поле – это множество P с заданными на нем двумя алгебраическими операциями, которые называются сложением и умножением и удовлетворяют следующим аксиомам.

1. Сложение ассоциативно.

2. Сложение коммутативно.

3. Существует такой элемент $0 \in P$ (нуль), что $a + 0 = a$ для любого $a \in P$.

4. Для каждого $a \in P$ существует такой элемент $-a \in P$ (противоположный элементу a), что $a + (-a) = 0$.

5. Умножение ассоциативно.

6. Умножение коммутативно.

7. Существует такой элемент $e \in P$, $e \neq 0$ (единица), что $ae = a$ для любого $a \in P$.

8. Для любого $a \in P$, $a \neq 0$ существует такой элемент a^{-1} (обратный элементу a), что $aa^{-1} = e$.

9. Сложение и умножение связаны законом дистрибутивности:

$$a(b+c) = ab + ac.$$

Пример 5.11. Кольцо $\mathbb{Q}$ рациональных чисел является полем, а кольцо целых чисел $\mathbb{Z}$ – нет. □

Пример 5.12. Множество чисел вида $a + b\sqrt{3}$, где $a, b \in \mathbb{Q}$, с обычным сложением и умножением является полем. □

Пример 5.13. На множестве $M_3 = \{0, 1, 2\}$ трех целых чисел определены две операции: «сложение по модулю 3» – остаток от деления суммы $a + b$ на 3 (обозначим через $a \overset{3}{+} b$), «умножение по модулю 3» – остаток от деления произведения ab на 3 (обозначим через $a \overset{3}{\cdot} b$). Доказать, что множество M_3 является полем относительно введенных операций.

Решение. Будем обозначать остаток от деления целого числа a на 3 через $\{a\}_3$. Прежде всего, напомним простые свойства деления целых чисел с остатком:

– остаток от деления на 3 суммы не изменится, если слагаемое (или несколько слагаемых) заменить его остатком при делении на 3:

$$\{a+b\}_3 = \{a + \{b\}_3\}_3;$$

– остаток от деления на 3 произведения не изменится, если множитель (или несколько множителей) заменить его остатком при делении на 3:

$$\{ab\}_3 = \{a \cdot \{b\}_3\}_3.$$

Рассматриваемые операции «сложения по модулю 3» и «умножения по модулю 3» можно представить в виде

$$a \overset{3}{+} b = \{a+b\}_3 \quad \text{и} \quad a \overset{3}{\cdot} b = \{ab\}_3,$$

а указанные свойства остатков записать так:

$$a \overset{3}{+} b = a \overset{3}{+} \{b\}_3 \quad \text{и} \quad a \overset{3}{\cdot} b = a \overset{3}{\cdot} \{b\}_3.$$

Заметим, что введенные операции $a \overset{3}{+} b$ и $a \overset{3}{b}$ определены на множестве M_3. Составим таблицы «сложения по модулю 3» (табл. 5.2) и «умножения по модулю 3» (табл. 5.3).

Таблица 5.2

$a \backslash b$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

Таблица 5.3

$a \backslash b$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

Покажем, что множество M_3 является коммутативным кольцом с единицей. Операция «сложения по модулю 3» коммутативна и ассоциативна. Это следует из коммутативности и ассоциативности сложения чисел. Действительно, из равенства $a+b=b+a$ следует, что

$$a \overset{3}{+} b = \{a+b\}_3 = \{b+a\}_3 = b \overset{3}{+} a,$$

т.е. имеет место коммутативность сложения. Заметим, что коммутативность «сложения по модулю 3» наглядно представлена в таблице 5.2: слагаемые a и b в таблице можно поменять местами, при этом таблица не изменится.

Из равенства $a+(b+c)=(a+b)+c$ следует, что

$$a \overset{3}{+} \left(b \overset{3}{+} c \right) = \left\{ a + \{b+c\}_3 \right\}_3 = \{a+b+c\}_3 = \left\{ \{a+b\}_3 + c \right\}_3 = \left(a \overset{3}{+} b \right) \overset{3}{+} c,$$

т.е. имеет место ассоциативность сложения.

Нулевым элементом в данном случае является число 0. Согласно таблице 5.2 «сложения по модулю 3» определяем для каждого элемента a из M_3 противоположный элемент $(-a)$:

$$(-0)=0, (-1)=2, (-2)=1.$$

Действительно, имеем

$$0 \overset{3}{+} (-0) = 0 \overset{3}{+} 0 = 0; \quad 1 \overset{3}{+} (-1) = 1 \overset{3}{+} 2 = 0; \quad 2 \overset{3}{+} (-2) = 2 \overset{3}{+} 1 = 0.$$

Итак, множество M_3 относительно операции «сложения по модулю 3» является коммутативной группой.

Операция «умножения по модулю 3» ассоциативна и коммутативна, что следует из ассоциативности и коммутативности умножения целых чисел, а также свойств остатков:

$$\overset{3}{a}\cdot\left(\overset{3}{b}\cdot c\right)=\left\{a\cdot\{b\cdot c\}_3\right\}_3=\{a\cdot b\cdot c\}_3=\left\{\{a\cdot b\}_3\cdot c\right\}_3=\left(\overset{3}{a}\cdot b\right)\overset{3}{\cdot}c;$$

$$\overset{3}{a}\cdot b=\{a\cdot b\}_3=\{b\cdot a\}_3=b\overset{3}{\cdot}a.$$

Проверим дистрибутивность:

$$\overset{3}{a}\cdot\left(\overset{3}{b}+c\right)=\left\{a\cdot\{b+c\}_3\right\}_3=\{a\cdot(b+c)\}_3=\{ab+ac\}_3=$$

$$=\left\{\{ab\}_3+\{ac\}_3\right\}=\left(\overset{3}{a}\cdot b\right)\overset{3}{+}\left(\overset{3}{a}\cdot c\right).$$

Следовательно, операция «умножения по модулю 3» дистрибутивна слева относительно операции «сложения по модулю 3». Дистрибутивность справа можно не проверять, так как обе операции коммутативны.

Единичным элементом является число 1 (таблица 5.3 «умножения по модулю 3»). Следовательно, M_3 – коммутативное кольцо с единицей.

Покажем существование обратных элементов. Для любого $a\in M_3$, отличного от нуля, существует обратный элемент a^{-1}: $1^{-1}=1,\ 2^{-1}=2$. В самом деле, по таблице 5.3: $\overset{3}{1}\cdot 1^{-1}=1\overset{3}{\cdot}1=1$ и $\overset{3}{2}\cdot 2^{-1}=2\overset{3}{\cdot}2=1$.

Таким образом, множество M_3 с введенными операциями является полем. □

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Перечислить способы задания множеств. Привести примеры.

2. Дано множество $A=\{x\mid x\in\mathbb{R}\wedge -2<x<3\}$. Выяснить, истинны ли следующие высказывания: $-1\in A$; $1{,}5\notin A$; $\sqrt{2}\in A$; $3\notin A$; $\dfrac{10}{3}\in A$?

3. Сформулировать определение подмножества. Привести пример.

4. Дать определение равенства двух множеств.

5. Какое множество называется универсальным?

6. Можно ли для множества $A=\{x|\ x\in\mathbb{R}\ \wedge -2<x<3\}$ за универсум взять множество:

$\mathbb{N}$; $\mathbb{Z}$; $\mathbb{R}$; $B_1=\{x|\ x\in\mathbb{Z}\ \wedge -2\le x\le 3\}$; $B_2=\{x|\ x\in\mathbb{N}\wedge -2\le x\le 3\}$; $B_3=\{x|x\in\mathbb{R}\wedge -5<x\le 5\}$? Почему?

7. Что называют булеаном множества?

8. Если множество A содержит $n=3$; 4; 5; 6 элементов, то сколько элементов содержит булеан $P(A)$?

9. Каким образом задаются в словесной форме, графически и символически операции над множествами?

10. С помощью диаграмм Эйлера – Венна доказать: свойства коммутативности, ассоциативности, дистрибутивности, поглощения; законы де Моргана; получить выражение для разности.

11. Что называют покрытием множества A? Что называют разбиением множества A?

12. Установить, какие из приведенных ниже совокупностей элементов составляют разбиение множества $A=\{1,2,3,4,5,6,7\}$:

1) $\{\{1,2\},\{3,4,5\},\{6,7\}\}$;
2) $\{\{1,5\},\{3,4,5\},\{2,6,7\}\}$;
3) $\{\{1,7\},\{3,4,6\}\}$;
4) $\{\{1,7\},\{3,5\},\{2,4\},\{6\}\}$.

13. Сформулировать определение декартового произведения двух множеств.

14. Даны два множества $A=\{1\}$ и $B=\{-2;3\}$. Какое из перечисленных множеств является множеством $A\times B$, а какое – $B\times A$? Почему?

1) $\{(1;-2),(1;3)\}$; 2) $\{(-2;1),(3;1)\}$;
3) $\{(-2;3),(1;1)\}$; 4) $\{(-2;1),(1;3)\}$.

15. Дано множество $A=\{x|\ x\in\mathbb{R}\ \wedge -2<x<3\}$. Что представляют собой множества A^2 и A^3?

16. Дать определение мощности конечного множества.

17. Какое множество называется счетным? Какое множество называется континуальным?

18. Сформулировать и доказать комбинаторный принцип сложения.

19. Сформулировать и доказать комбинаторный принцип умножения.

20. Вывести формулы, по которым находятся перестановки; сочетания без повторения и с повторением; размещения без повторения и с повторением.

21. Сформулировать и доказать теорему 2.5, в которой выводится формула числа разбиений конечного множества на несколько попарно непересекающихся подмножеств.

22. Студентам была предложена задача: «Из 15 деталей необходимо выбрать произвольно 3 детали. Сколькими способами можно произвести выбор?»

Были предложены следующие решения: $n = 15,\ m = 3$,

1) $A_{15}^{3} = \dfrac{15!}{12!} = 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 = 32760$;

2) $C_{15}^{3} = \dfrac{15!}{3! \cdot 12!} = \dfrac{15 \cdot 14 \cdot 13}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 455$;

3) $A_{15}^{3} = \dfrac{15!}{12!} = 15 \cdot 14 \cdot 13 = 2730$;

4) $C_{15}^{3} = \dfrac{15!}{3! \cdot 13!} = \dfrac{15 \cdot 14}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35$.

Которое из решений является правильным? Почему? Какие ошибки сделаны в неверных решениях?

23. Доказать свойства биноминальных коэффициентов.

24. Записать бином Ньютона.

25. Записать полиноминальную формулу.

26. Сформулировать определение бинарного отношения.

27. Что называют областью определения бинарного отношения? Что называют областью значений бинарного отношения?

28. Перечислить способы задания отношений.

29. Сформулировать определение n-местного отношения.

30. Какое отношение называется обратным к данному отношению?

31. Что называют композицией двух отношений?

32. Сформулировать и доказать свойства обратного отношения и композиции отношений.

33. Какие рассматривают свойства бинарного отношения, заданного на некотором множестве.

34. Дано множество $A=\{a,b,c\}$. На этом множестве задано следующее бинарное отношение $\rho=\{(a;a),(b;b),(c;c)\}$. Какое из следующих утверждений будет верным? Почему?

1) Это отношение обладает свойствами рефлексивности, антисимметричности, транзитивности.

2) Это отношение обладает свойствами рефлексивности, симметричности, антисимметричности, транзитивности.

3) Это отношение обладает свойствами антирефлексивности, симметричности, транзитивности.

35. Какое отношение называется отношением эквивалентности? Какое отношение называется отношением частичного порядка?

36. Какие классы эквивалентности порождаются при рассмотрении отношения сравнимости по модулю 5 на множестве целых чисел $\mathbb{Z}$?

Указание: *воспользуйтесь примером* 3.11. *из* 3.3.

37. Дать определение функции.

38. Что называют образом для данного отображения? Что называют прообразом данного отображения?

39. Дано отображение $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{N}$, где $f(x)=\sqrt[3]{x}+2x$ для любого $x\in\mathbb{Z}$. Какие из следующих высказываний будут истинными:

1) образ элемента 8 равен 18;

2) образ элемента –3 равен ≈ –7,44;

3) прообраз элемента 0 равен 0 и $-\frac{1}{8}$;

4) прообраз элемента 3 равен 1?

40. Какими свойствами может обладать функция?

41. Сформулировать определение обратного отображения.

42. Что называют композицией двух отображений.

43. Дать определение бинарной алгебраической операции.

44. Привести примеры множеств с заданной алгебраической операцией.

45. Какая алгебраическая операция называется коммутативной? Какая алгебраическая операция называется ассоциативной?

46. Какие «замечательные» элементы может иметь множество A с заданной алгебраической операцией «$\circ$», т.е. $(A, \circ)$? Сформулировать определение для каждого «замечательного» элемента.

47. Сформулировать определение полугруппы.

48. Какие бывают полугруппы по отношению к алгебраическим операциям?

49. Сформулировать определение группы.

50. Какая группа называется абелевой?

51. Сформулировать определение кольца.

52. Сформулировать определение поля.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

1. Способы задания множеств. Равенство множеств. Булеан

1.1. Указать, какие из перечисленных множеств конечные, бесконечные, пустые. Указанные множества задать перечислением всех своих элементов (если возможно).

1) $D=\{\, x \mid x\in\mathbb{Z}, -3\le x\le 5\}$.

2) $K=\{\, x \mid x\in\mathbb{N}, -3\le x\le 5\}$.

3) $E=\{\, x \mid x\in\mathbb{N}, x+2=0\}$.

4) $F=\{\, x \mid x\in\mathbb{Z}, x+3\in\mathbb{N}\}$.

5) $M=\left\{\, x \mid x\in\mathbb{R}, x+\dfrac{1}{x}\le 2 \wedge x>0\right\}$.

6) $B=\{\, x \mid x\in\mathbb{N}, x\,\vdots\, 5 \ \wedge\ x\,\vdots\, 10 \ \wedge\ x\le 35\}$.

1.2. Описать следующие множества при помощи характеристического предиката:

1) $\{\, 3,\ 6,\ 9,\ 12,\ 15,\ 18,\ 21,\ 24\}$;

2) $\{\, а,\ б,\ в,\ г,\ в,\ е,\ ё,\ ж,\ з,\ и\}$;

3) $\{$Пинск, Полоцк, Поставы, ...$\}$.

1.3. Изобразить на координатной плоскости следующие множества:

1) $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2-y^2>0\right\}$;

2) $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, y>\sqrt{2x+1} \ \wedge 2x-1\ge 0\right\}$.

1.4. Выяснить, равны ли множества A и B:

1) $A=\left\{x \,\middle|\, x-\text{корни уравнения } x^2-3x+2=0\right\}$ и $B=\{x \mid x\in\mathbb{N}\wedge x<3\}$;

2) $A=\{1,2,3\}$ и $B=\{\{1,2\},\{2,3\}\}$;

3) $A=\varnothing$ и $B=\{\varnothing\}$.

1.5. Построить булеан множества M.

1) $M=\{\, 1,2\}$;

2) $M=\{\{\, 1,2\},3\}$;

3) $M=\{a,b,c,f\}$;

4) $M=\{k\}$, определить $P(P(M))$;

5) $M=\varnothing$, определить $P(P(M))$ и $P(P(P(M)))$;

6) $M=\{\varnothing,\{\varnothing\},\{a,b,\{a,b\}\}\}$.

2. Операции над множествами

2.1. На рисунке 1 изображены множества A, B и C, а также универсальное множество U.

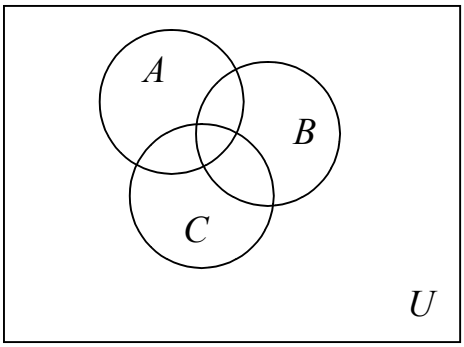


Рис. 1

Построить следующие множества:

1) $M = (A \bigcap B) \bigcup C$;

2) $K = \overline{(A \bigcap B)} \setminus C$;

3) $T = \overline{A} \setminus (\overline{B} \bigcup \overline{C})$;

4) $D = (C \bigcup B) \setminus (\overline{A} \Delta B)$.

2.2. Пусть $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $C = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, а $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Определить следующие множества:

1) $A \bigcup C$; 2) $\overline{A \bigcap B}$; 3) $A \setminus C$;

4) $A \Delta B$; 5) $(A \bigcap B) \bigcup C$; 6) $(A \bigcup C) \setminus \overline{B}$.

2.3. В качестве универсального множества данной задачи зафиксируем $U = \{p, q, r, s, t, u, v, w\}$. Пусть $A = \{p, q, r, s\}$, $B = \{t, r, v\}$ и $C = \{p, s, t, u\}$. Найти элементы следующих множеств:

1) $B \bigcap C$; 2) $B \setminus \overline{A}$;

3) $A \Delta C$; 4) $(A \bigcup B) \bigcap (\overline{A \bigcap C})$.

2.4. Найти $A \bigcap B$, $A \bigcup B$, $A \setminus B$, $B \Delta A$, $\overline{A}$, $\overline{A \bigcap B}$, $\overline{A \bigcup B}$ (универсальное множество U выбрать произвольно):

1) $A = [0, 1) \cup \{2\}$, $B = [1, 5]$;

2) $A = \{x | x \in \mathbb{R}, -1 \le x \le 5\}$, $B = \{0, 4, 6\}$;

3) $A=\mathbb{Z}$, $B=\mathbb{N}$;
4) A – множество всех прямоугольников, B – множество всех ромбов;
5) A – множество всех точек плоскости, у которых ордината положительная; B – множество всех точек плоскости, у которых абсцисса положительная;
6) $A=\{x|x$ – областные города Республики Беларусь$\}$,
$B=\{x|x$ – города Республики Беларусь, название которых начинается на букву М$\}$.

2.5. Найти множества A и B, если:
1) $A\setminus B=\{a,b\}$, $B\setminus A=\{c,d\}$, $A\bigcap B=\{x,y,z\}$;
2) $A\bigcup B=\{a,b,c,d,e,f\}$, $A\bigcap B=\{c,d\}$, $A\setminus B=\{a,e,f\}$;
3) $A\bigcup B=\{a,b,c,d\}$, $A\bigcap B=\varnothing$, $A\setminus B=\{a\}$.

2.6. Существуют ли такие множества A, B и C, что $A\bigcap B=\varnothing$, $A\bigcap C=\varnothing$, $(A\bigcap B)\setminus C=\varnothing$?

2.7. Каким условиям должны удовлетворять множества A и B, чтобы:
1) $A\bigcap B=A\bigcup B$;
2) $(A\setminus B)\bigcup B=A$;
3) $(A\bigcup B)\setminus B=A$?

Ответ: 1) $A=B$; 2) $B\subseteq A$; 3) $A\bigcap B=\varnothing$.

2.8. Определить операции «$\bigcup$», «$\bigcap$», «$\setminus$» через:
1) «$\Delta,\bigcap$»; 2) «$\Delta,\bigcup$»; 3) «$\Delta,\setminus$».

2.9. Доказать, что для произвольных множеств A,B,C и универсального множества U справедливы следующие равенства:
1) $A\bigcup(B\bigcap C)=(A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap C)$;
2) $\overline{A\bigcup B}=\overline{A}\bigcap\overline{B}$;
3) $A\setminus(A\setminus B)=A$;
4) $A\setminus(B\bigcup C)=(A\bigcap B)\setminus(A\bigcap C)$;
5) $A\setminus(B\bigcup C)=(A\setminus B)\setminus C$;
6) $B\bigcap(A\setminus B)=\varnothing$.

Покажем образец доказательства на примере равенства

$$(A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B) = B.$$

Способ 1 (с помощью диаграмм Эйлера – Венна).

Сделаем рисунок для левой части равенства, рис. 2. Сравним с правой частью, которая представляет собой множество B.

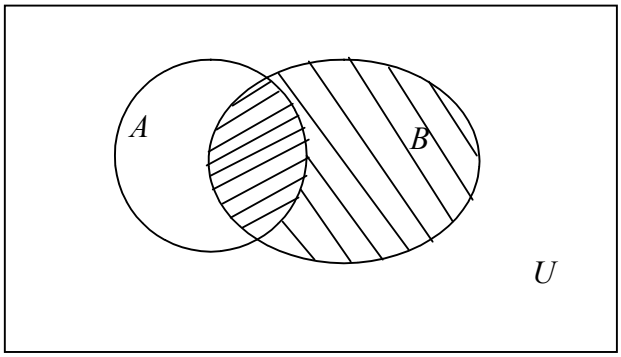


Рис. 2

Способ 2 (аналитически).

Докажем два встречных включения множеств $M = (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B)$ и $K = B$, т.е. $M \subseteq K$ и $K \subseteq M$, что позволит сделать вывод: $M = K$.

Пусть x – произвольный элемент множества M. Значит, $x \in (A \cap B)$ или $x \in (\overline{A} \cap B)$, согласно определению объединения. Следовательно, $x \in A$ и $x \in B$ или $x \in \overline{A}$ и $x \in B$, согласно определению пересечения. В обоих случаях $x \in B$. Таким образом, $x \in K$, и, следовательно, $M \subseteq K$.

Пусть $x \in K$, т.е. $x \in B$. Если $x \in B$, то $x \in A$ либо $x \in \overline{A}$. Следовательно, $x \in (A \cap B)$ либо $x \in (\overline{A} \cap B)$, согласно определению пересечения. Тогда $x \in (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B)$, согласно определению объединения. Значит, $x \in M$, т.е. $K \subseteq M$.

Два встречных включения дают равенство $M = K$.

Способ 3 (с использованием свойств и законов множества для преобразования равенства).

Преобразуем левую часть равенства:

$(A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B) = (A \cup \overline{A}) \cap B = U \cap B = B.$ □

2.10. Доказать, что для любых подмножеств A, B и C универсального множества U:

1) $A \subseteq B \Leftrightarrow \overline{B} \subseteq \overline{A}$;

2) $A \bigcup B \subseteq C \Leftrightarrow A \subseteq C$ и $B \subseteq C$;

3) $A \subseteq B \Rightarrow (A \setminus C) \subseteq (B \setminus C)$;

4) $A \bigcap B = \varnothing \Leftrightarrow A \subseteq \overline{B} \Leftrightarrow B \subseteq \overline{A}$.

Указание: *воспользуйтесь диаграммами Эйлера – Венна*.

2.11. Найти множество X из системы уравнений:

1) $\begin{cases} A \setminus X = B, \\ A \bigcup X = C, \end{cases}$ где A, B и C – данные множества и $B \subseteq A \subseteq C$;

2) $\begin{cases} A \setminus X = B, \\ X \setminus A = C, \end{cases}$ где A, B и C – данные множества и $B \subseteq A$, $A \bigcap C = \varnothing$.

Указание: *воспользуйтесь диаграммами Эйлера – Венна*.

Ответ: 1) $X = C \setminus B$; 2) $X = (A \setminus B) \bigcap C$.

3. Декартово произведение

3.1. Найти $A \times B$ и $B \times A$. Дать геометрическую иллюстрацию соответствующих декартовых произведений.

1) $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 3, 4\}$;

2) $A = \{-2, -1, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$;

3) $A = \{-3\}$, $B = \{1, 3, 4, 6\}$.

3.2. Изобразить прямое произведение множеств A и B.

1) $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \wedge -1 < x \le 2\}$ и $B = \{x \mid x - \text{корни уравнения } x^2 - 4 = 0\}$;

2) $A = [0; 1]$ и $B = [-2; 3)$;

3) $A = (-\infty; 3)$ и $B = [-2; +\infty)$;

4) $A = \mathbb{R}$ и $B = [-1; 1]$;

5) $A = (1; 4)$ и $B = \mathbb{N}$;

6) $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge 2 \le x < 6\}$ и $A = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge 1 < x < 4\}$.

3.3. Изобразить в трехмерном пространстве следующие множества:

1) $M \times N$, где $M = \{(x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, x^2 + y^2 = 1\}$, $N = \{z \mid z \in \mathbb{R}, 1 \le z \le 2\}$;

2) $X \times Y \times Z$, где $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{3, 4\}$, $Z = \{2\}$;

3) A^3, где $A = [3,5]$.

3.4. Пусть $U = \{x_1, x_2, x_3\}$ – универсальное множество, а $X = \{x_1, x_2\}$, $Y = \{x_2, x_3\}$, $Z = \{x_3\}$ – его подмножества. Определите перечисленные множества: $X \times X$, $Z \times Z$, $X \times Y$, $Y \times X$, $X \times Y \bigcap Y \times X$, $X \times Y \bigcup Y \times X$, $X \times \varnothing$.

3.5. Доказать, что при любых множествах X, Y, Z:

1) $(X \bigcup Y) \times Z = (X \times Z) \bigcup (Y \times Z)$;

2) $(X \bigcap Y) \times Z = (X \times Z) \bigcap (Y \times Z)$;

3) $(X \setminus Y) \times Z = (X \times Z) \setminus (Y \times Z)$.

Рассмотрим доказательство на примере равенства

$$(X \bigcup Y) \times Z = (X \times Z) \bigcup (Y \times Z).$$

Доказательство: В случае операций над декартовыми произведениями множеств можно воспользоваться прямоугольными диаграммами, считая все встречающиеся множества подмножествами множества действительных чисел. Построив диаграмму левой и правой частей рассматриваемого равенства, убеждаемся, что получившиеся фигуры совпадают, рис. 3.

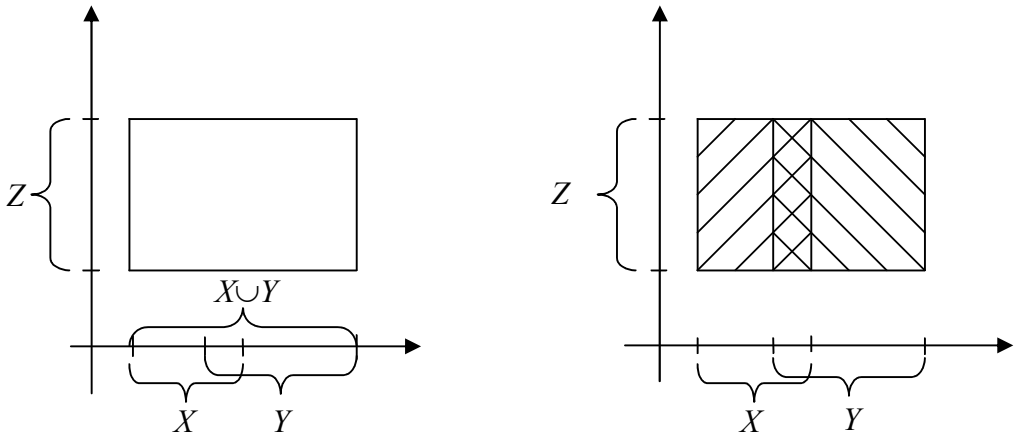


Рис. 3

3.6. Проверить, справедливо ли для любых множеств A, B, C, D равенство:

1) $(A \bigcap B) \times (C \bigcap D) = (A \times C) \bigcap (B \times D)$;

2) $(A \bigcup B) \times (C \bigcup D) = (A \times C) \bigcup (B \times D)$.

3.7. Доказать, что:

1) $X \times Y = \varnothing \Leftrightarrow X = \varnothing \vee Y = \varnothing$;

2) $A \times B = (A \times D) \bigcap (C \times B)$, где $A \subseteq C$ и $B \subseteq D$;

3) $U^2 \setminus (A \times B) = [(U \setminus A) \times A] \bigcup [U \times (U \setminus B)]$.

4. Комбинаторные принципы сложения и умножения

4.1. Множество A состоит из n элементов, а множество B – из m элементов ($m > n$). Какое наибольшее и наименьшее число элементов могут содержать множества $A \bigcap B$, $A \bigcup B$, $A \setminus B$, $B \Delta A$?

4.2. Сколько имеется пятизначных чисел, которые делятся на 5?

Ответ: 18000.

4.3. Сколько есть двузначных чисел, у которых обе цифры четные?

Ответ: 20.

4.4. Пассажир оставил вещи в автоматической камере хранения, а когда пришел получать их, выяснилось, что он забыл номер. Он только помнит, что в номере были числа 23 и 37. Чтобы открыть камеру, нужно правильно набрать пятизначный номер. Какое наибольшее количество номеров нужно перебрать, чтобы открыть камеру?

Ответ: 60.

4.5. У женщины в шкафу шесть платьев, пять юбок и три блузки. Сколько разных нарядов она может составить из своей одежды?

4.6. В кафе в качестве первого блюда предлагают на выбор суп или салат. Из мясных блюд имеются 10 различных бифштексов и 5 разнообразных куриных блюд. На гарнир можно выбрать картофель фри, печеный картофель, макароны с сыром или рис. Из напитков предлагают кофе, чай, молоко или колу. На десерт подают сладкий пирог, мороженое или то и другое вместе. Сколько можно составить различных вариантов меню?

4.7. Компьютерный пароль содержит 3 символа (4 символа; 7 символов), которые могут быть цифрой или буквой латинского алфавита (всего 26 букв). Сколько существует паролей, начинающихся с буквы?

5. Перестановки. Размещения. Сочетания

5.1. В первенстве участвую 19 команд. Сколькими способами могут распределиться золотая, серебряная и бронзовая медали?

5.2. В роте имеется три офицера и сорок солдат. Сколькими способами может быть выделен наряд, состоящий из одного офицера и трех солдат?

Ответ: 29640.

5.3. Сколькими способами можно посадить за круглый стол n мужчин и n женщин так, чтобы никакие два лица одного пола не сидели рядом?

Ответ: $2 \cdot (n!)^2$.

5.4. Пусть $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$. Сколько существует:

1) трехэлементных подмножеств множества A?
2) пятиэлементных подмножеств множества A, содержащих b?
3) пятиэлементных подмножеств множества A, не содержащих b?
4) подмножеств множества A, содержащих хотя бы три элемента?

5.5. Код азбуки Морзе использует пятизначные шифры из точки и тире. Почему для кодирования русских слов нельзя обойтись меньшим числом знаков?

5.6. Сколько решений имеет данное уравнение, если каждое x_i – неотрицательное целое число:

1) $x_1 + x_2 + x_3 = 13$;
2) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 25$.

5.7. Если в урне имеются 20 красных, 20 зеленых и 20 синих шаров, то сколькими различными способами можно выбрать 10 шаров?

Ответ: 66.

6. Число разбиений множества

6.1. Сколькими различными способами можно расставить буквы в слове *seceeded*?

Ответ: 840.

6.2. Предположим, что нужно расставить на полке 26 книг, среди которых 8 одинаковых учебников по математике, 6 одинаковых учебников по ин-

форматике, 9 одинаковых учебников по физике и 3 – по химии. Сколькими способами это можно сделать?

6.3. В бейсбольной команде 24 игрока. В гостинице они остановились в шести четырехместных номерах. Сколькими способами можно расселить игроков?

7. Бином Ньютона. Полиномиальная формула

7.1. Построить разложение:

1) $(2x+3y^2)^4$, используя бином Ньютона;

2) $(a+b)^8$, используя треугольник Паскаля.

7.2. Найти коэффициент:

1) при x^4y^6 в разложении $(3x+4y)^{10}$;

2) при a^4b^9 в разложении $(5a-2b)^{13}$.

7.3. Определить, сколько рациональных членов содержится в разложении $(\sqrt{2}+\sqrt[3]{3})^{20}$.

7.4. Доказать:

1) $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$;

2) $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = 0$;

3) $\sum\limits_{k=0}^{n} kC_n^k = n\cdot 2^{n-1}$.

7.5. Сколько различных делителей имеет число 2310?

Ответ: 32.

7.6. Найти коэффициент:

1) при ab^2c^3 в разложении $(a+b+c)^6$;

2) при $a^3b^2c^3$ в разложении $(2a+3b+c)^8$;

3) при $w^4x^5y^6z^3$ в разложении $(2w+4x+y+5z)^{18}$.

8. Формула включений и исключений

8.1. Доказать формулу включений и исключений

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

8.2. Сколько целых чисел между 1 и 401 делится на 7 или на 11?

Ответ: 88.

8.3. Из 100 студентов 28 изучают английский язык, 30 – немецкий, 42 – французский, 8 – английский и немецкий, 10 – английский и французский, 5 – немецкий и французский и 3 студента изучают все три языка. Сколько студентов не изучает ни одного языка; изучают только французский язык?

Ответ: не изучает – 20; только французский – 30.

8.4. Группа, в которой обучается 33 студента, писала контрольную работу по высшей математике. В контрольную работу входило три задания. С I заданием справилось 19 студентов, со II –20, с III – 15. С I и II заданиями справилось 10 студентов, со II и III – 9, с I и III – 7. Сколько студентов справилось с тремя заданиями, если два студента в группе не решило ни одного задания? Сколько студентов справилось только с I заданием?

Ответ: 3; 5.

8.5. Согласно опросу 250 телезрителей, 95 из них нравится смотреть новости, 125 предпочитают смотреть спорт, 125 – комедии, 25 – новости и комедии, 45 – спорт и комедии, 35 – новости и спорт, 5 любят все три вида программ.

1) Сколько телезрителей смотрят новости, но не смотрят спорт?
2) Сколько телезрителей смотрят новости или спорт, но не любят комедии?
3) Сколько телезрителей не любят смотреть ни новости, ни спорт?

Ответ: 1) 60; 2) 120; 3) 65.

8.6. На вопрос: «Какая погода была в одном из летних месяцев?» получен ответ: «80 % дней была теплая погода, 80 % дней было облачно и 60 % дней было ветрено».

Сколько процентов составляют дни, когда было тепло, облачно и ветрено одновременно? (Найти наибольшее и наименьшее их число.)

Ответ: наибольшее – 60 %, наименьшее – 20 %.

Указание: *при решении задач* 8.3 − 8.6 *воспользуйтесь диаграммами Эйлера – Венна*.

9. Бинарные отношения. Свойства бинарных отношений

9.1. Пусть ρ – отношение на множестве $M=\{1,2,3,4\}$, определяемое условием: $x\rho y$ тогда и только тогда, когда $x+2y$ – нечетное число. Представить отношение ρ следующими способами: множеством упорядоченных пар, орграфом, в виде матрицы.

9.2. Пусть $A=\{a,b,c,d,e\}$, а ρ, τ, σ − отношения на A, где

$\rho=\{(a,a),(a,b),(b,c),(b,d),(c,e),(e,d),(c,a)\}$;

$\sigma=\{(a,b),(b,a),(b,c),(b,d),(e,e),(d,e),(c,b)\}$;

$\tau=\{(a,b),(a,a),(b,b),(b,a),(e,e),(d,d),(c,b),(c,c),(a,c),(c,a)\}$.

Описать следующие отношения: $\varphi=\tau\cap\rho$, $\mu=\rho\cup\sigma$, $\nu=\tau\setminus\sigma$. Представить отношения φ, μ, τ графически и в виде матрицы.

9.3. Пусть заданы множества

$A=\{1,2,3,4,5\}$, $B=\{6,7,8,9\}$, $C=\{10,11,12,13\}$, $D=\{\square,\Delta,\bigcirc,\nabla\}$.

Пусть заданы отношения $\rho\subseteq A\times B$, $\sigma\subseteq B\times C$ и $\tau\subseteq C\times D$, которые определены следующим образом:

$\rho=\{(1,7),(4,6),(5,6),(2,8)\}$;

$\sigma=\{(6,10),(6,11),(7,10),(8,13)\}$;

$\tau=\{(11,\Delta),(10,\Delta),(13,\nabla),(12,\square),(13,\bigcirc)\}$.

Определить отношения:

1) ρ^{-1} и σ^{-1}; 2) $\sigma\circ\rho$;

3) $\sigma^{-1}\circ\tau^{-1}$; 4) $\tau\circ(\sigma\circ\rho)$;

5) $(\tau\circ\sigma)\circ\rho$.

9.4. Пусть отношения $\tau\subseteq\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ и $\varphi\subseteq\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ определены следующим образом: $\tau=\left\{(x,y)\middle|y=x^2+5\right\}$ и $\varphi=\{(x,y)|y=3x\}$.

1) Описать отношения τ^{-1} и φ^{-1}.

2) Описать отношения $\varphi\circ\tau$ и $\tau\circ\varphi$.

9.5. На множестве $\mathbb{N}$ для каждого из следующих отношений найти область определения и область значений. Какими свойствами обладает каждое отношение?

1) $\rho = \{(1,1)\}$;
2) $\rho = \{(1,5)\}$;
3) $\rho = \{(3,5),(5,3),(3,3),(5,5)\}$;
4) $x\rho y \Leftrightarrow x \le y$;
5) $x\rho y \Leftrightarrow y = 2x+1$;
6) $x\rho y \Leftrightarrow (x-y) \vdots 3$.

9.6. Пусть $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Отношение $\rho \subseteq B^2$. Изобразить отношение ρ графически. Какими свойствами обладает данное отношение? Проверить с помощью матрицы представления, является ли отношение ρ рефлексивным, симметричным, антисимметричным, транзитивным:

$$\rho = \{(1,1),(1,2),(1,4),(2,2),(2,4),(3,3),(3,2),(3,4),(4,4)\}.$$

9.7. Доказать, что если отношения ρ_1 и ρ_2 рефлексивны, то рефлексивны отношения $\rho_1 \cup \rho_2$ и $\rho_1 \cap \rho_2$.

9.8. Доказать, что если отношения ρ_1 и ρ_2 симметричны, то симметричны отношения $\rho_1 \cup \rho_2$ и $\rho_1 \cap \rho_2$.

9.9. Пусть A – множество всех прямых на плоскости. Являются ли эквивалентностями следующие отношения:

1) параллельность прямых;
2) перпендикулярность прямых?

10. Отображения, функции

10.1. Пусть $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ и $B = \{a,b,c,d\}$. Отображение $f : A \to B$ задано таблицей

A	1	2	3	4	5
$f(A)$	b	c	b	d	a

Найти:

1) $f(1)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(7)$;
2) образы подмножеств $M_1 = \{1, 3, 5\}$, $M_2 = \{1, 4\}$, $M_3 = A$ множества A;
3) $f^{-1}(a)$, $f^{-1}(b)$, $f^{-1}(c)$, $f^{-1}(d)$, $f^{-1}(m)$;

4) прообразы подмножеств $K_1 = \{b,c\}$, $K_2 = \{a,b,c\}$, $K_3 = \{c,d\}$, $K_4 = B$ множества B.

10.2. Дано отображение $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, где $f(x) = \dfrac{1}{x}$ для всех $x \in \mathbb{N}$. Найти:

1) образы элементов 2, 3, 15;

2) $f(M)$, если $M = \{1, 5\}$;

3) $f^{-1}\left(\dfrac{2}{9}\right), f^{-1}\left(\dfrac{1}{6}\right), f^{-1}(-0{,}5)$;

4) $f^{-1}(K)$, где $K = \left\{1, \dfrac{1}{5}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{7}, -\dfrac{1}{5}, 0\right\}$.

10.3. Определить, какие из следующих отношений являются отображениями. Какие из отображений инъективные, сюръективные, биективные?

1) $\varphi = \left\{(x,y) \middle| (x,y) \in [0,+\infty) \times (-\infty,+\infty), y = x^2\right\}$.

2) $\varphi = \left\{(x,y) \middle| (x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, x - y = 3\right\}$.

3) $\varphi = \left\{(x,y) \middle| (x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, y - x = 3\right\}$.

4) $\varphi = \left\{(x,y) \middle| (x,y) \in [-1,1] \times [-1,0], x^2 + y^2 = 1\right\}$.

5) $\varphi = \left\{(x,y) \middle| (x,y) \in [-1,0] \times [-1,1], x^2 + y^2 = 1\right\}$.

10.4. Какими из свойств обладают следующие отображения?

1) A – множества слов русского языка, B – множества букв алфавита русского языка, f – отображение, которое каждое слово из A отображает в его первую букву, g – отображение, которое каждое слово из A отображает в его вторую букву;

2) $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{x, y, z, t\}$,

A	a	b	c	d
$f(A)$	x	y	x	t

A	a	b	c	d
$g(A)$	t	x	z	y

10.5. Найти композиции $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$, $g \circ g$, $f \circ f \circ f$, если:

1) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, $g(x) = 1 - x$;

2) $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{x}$, если $x \geq 0$.

11. Алгебраическая операция

11.1. Какие операции определены на множествах $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$? Какие операции коммутативны, ассоциативны?

11.2. Определена ли на множестве $\{-1, 0, 1\}$ операция: умножения чисел; сложения чисел?

11.3. Определите, какие из операций – сложение, вычитание, умножение, деление – являются алгебраическими на следующих подмножествах из $\mathbb{R}$; какие из алгебраических операций коммутативны, ассоциативны?

1) $2\mathbb{N} = \{2n, n \in \mathbb{N}\}$.

2) $\{2n+1 | n \in \mathbb{N}\}$.

3) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

4) $\{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$.

5) $\{0\}$.

6) $\{1\}$.

Образец решения примера: Определите, какие из операций являются алгебраическими на подмножестве $4\mathbb{Z} = \{4k, k \in \mathbb{Z}\}$ из $\mathbb{R}$; какие из алгебраических операций коммутативны, ассоциативны?

Решение.

1) Проверим операцию сложения. Пусть $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.

$$4k_1 + 4k_2 = 4(k_1 + k_2) \in \mathbb{Z}, \text{ так как } k_1 + k_2 \in \mathbb{Z}.$$

Таким образом, операция сложения является алгебраической операцией, так как она определена и полученный элемент принадлежит $\mathbb{Z}$.

Проверим, является ли операция сложения коммутативной и ассоциативной.

$4k_1 + 4k_2 = 4k_2 + 4k_1$ – выполняется для $\forall k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$,

$4k_1 + (4k_2 + 4k_3) = (4k_1 + 4k_2) + 4k_3$ – выполняется $\forall k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$.

Значит, операция сложения коммутативна и ассоциативна.

2) По аналогии проверяем операцию вычитания.

$4k_1 - 4k_2 = 4(k_1 - k_2) \in \mathbb{Z}$, так как $k_1 - k_2 \in \mathbb{Z}$,

$4k_1 - 4k_2 \neq 4k_2 - 4k_1$,

$4k_1 - (4k_2 - 4k_3) \neq (4k_1 - 4k_2) - 4k_3$.

Операция вычитания определена, но она не является коммутативной и ассоциативной.

3) Проверяем операцию умножения.

$4k_1 \cdot 4k_2 = 4 \cdot 4 \cdot k_1 \cdot k_2 \in \mathbb{Z}$, так как $k_1 \cdot k_2 \in \mathbb{Z}$.

$4k_1 \cdot 4k_2 = 4k_2 \cdot 4k_1$ – выполняется для $\forall k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.

$4k_1 \cdot (4k_2 \cdot 4k_3) = (4k_1 \cdot 4k_2) \cdot 4k_3$ – выполняется для $\forall k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$.

Операция умножения определена, и она является коммутативной и ассоциативной.

4) Проверяем операцию деления.

$4k_1 : 4k_2 = \dfrac{4k_1}{4k_2} = \dfrac{k_1}{k_2}$, если $|k_1| < |k_2|$, то $\dfrac{k_1}{k_2} \notin \mathbb{Z}$ $(k_1 \neq 0)$.

Значит, операция деления не является алгебраической.

Ответ: операции «$+$», «$-$», «$\cdot$» − алгебраические.

11.4. Укажите, какие из следующих операций являются алгебраическими на подмножестве $\{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$ множества $\mathbb{R}$; какие из алгебраических операций коммутативны, ассоциативны:

1) $a \circ b = \dfrac{a+b}{2}$;

2) $a \circ b = ab^2$;

3) $a \circ b = a + b - 1$;

4) $a \circ b = \sqrt{ab}$;

5) $a \circ b = a^2$;

6) $a \circ b = \log_b a$.

11.5. Укажите, какие из приведенных множеств имеют идемпотенты, левый (правый) аннулирующий элемент, левый (правый) нейтральный элемент, левый (правый) симметричный элемент:

1) $(\mathbb{N}, +)$;

2) $(\mathbb{N}, \cdot)$;

3) $(\mathbb{Z}, +)$;

4) $(\mathbb{Z}, -)$;

5) $(\mathbb{Z},\cdot)$; 6) $(\mathbb{Q},+)$;

7) $(\mathbb{Q},-)$; 8) $(\mathbb{Q},\cdot)$;

9) $(\mathbb{N},\Diamond)$, где $x\Diamond y=\min\{x,y\}$ для всех $x,y\in\mathbb{N}$;

10) $(\mathbb{N},*)$, где $x*y=x^y$ для всех $x,y\in\mathbb{N}$;

11) $(\mathbb{Q},*)$, где $x*y=2xy$ для всех $x,y\in\mathbb{N}$;

12) $(P,\hookleftarrow)$, где P – множество поворотов квадрата вокруг его центра, при которых квадрат совмещается сам с собой, $\hookleftarrow$ – операция, состоящая в последовательном выполнении поворотов.

13) $(M,\cdot)$, где $M=\left\{\begin{pmatrix}0 & 0\\ x & y\end{pmatrix}\middle| x,y\in\mathbb{R}\right\}$.

12. Полугруппа. Группа

12.1. Какие из приведенных множеств из **5.1**. и **5.3** являются полугруппами, группами?

12.2. Докажите, что следующие подмножества из R являются мультипликативными группами:

1) четных чисел относительно сложения;

2) рациональных чисел, знаменатели которых – степени числа 2 с целыми неотрицатеотными показателями относительно сложения;

3) $\{x\in\mathbb{R}|x>0\}$;

4) $A=\left\{a+b\sqrt{3}\middle|a,b\in\mathbb{Q},a^2+b^2\geq 0\right\}$; 5) $M=\left\{\begin{pmatrix}a & b & c\\ 0 & a & b\\ 0 & 0 & a\end{pmatrix}\middle| a,b,c\in\mathbb{R}\right\}$.

12.3. Докажите, что следующие множества чисел являются аддитивными группами:

1) $2\mathbb{Z}$; 2) $\mathbb{R}$; 3) $\left\{\frac{a}{7^k}\middle| a\in\mathbb{Z},k\in\mathbb{N}\right\}$.

12.4. Докажите, что каждое из следующих множеств с законом композиции, заданным таблицей Кэли, является группой:

1) $M=\{e,a\}$

$*$	e	a
e	e	a
a	a	e

2) $M=\{e, a, b\}$

$*$	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

12.5. Докажите, что следующее множество функций с операцией – композицией преобразований – является группой $H=\{h_1,h_2,h_3,h_4,h_5,h_6\}$, где $h_1(x)=x$, $h_2(x)=1-x$, $h_3(x)=\dfrac{1}{x}$, $h_4(x)=\dfrac{1}{1-x}$, $h_5(x)=-\dfrac{x}{1-x}$, $h_6(x)=-\dfrac{1-x}{x}$, $D(h_i)=\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$.

13. Кольцо. Поле

13.1. Докажите, что каждое из следующих числовых множеств с обычным сложением и умножением является кольцом. Какие из этих колец – поля?

1) $2\mathbb{Z}$; 2) множество нечетных чисел; 3) $\left\{a+b\sqrt{3}\,\middle|\,a,b\in 2\mathbb{Z}\right\}$;

4) $\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}\middle|\,a,b\in\mathbb{Z}\right\}$; 5) $\left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}\middle|\,a\in\mathbb{Q}\right\}$;

6) множество всех линейных функций, определенных на $\mathbb{R}$, относительно поточечного сложения функций и умножения функций как отображений.

13.2. Докажите, что множество $\{0,1\}$ с операциями – сложением и умножением, заданными таблицами Кэли, является полем:

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

.

РАЗДЕЛ 2

БУЛЕВЫ ФУНКЦИИ

1. ВЫСКАЗЫВАНИЯ. ПРЕДИКАТЫ

При построении математической теории обычно применяется *аксиоматический подход*, при котором сначала определяются основные объекты и основные отношения между ними, которые формулируются в виде аксиом – утверждений, принимаемых без доказательств. Используя основные объекты и отношения, вводятся новые понятия, изучаются свойства, формулируются теоремы. При этом требуется, чтобы каждое новое утверждение (теорема, лемма и т.п.) доказывалось на основе аксиом или ранее доказанных теорем.

Часть утверждений обосновывается опытным путем, т.е. *эмпирически*, другая же, обычно большая, часть – с помощью логических средств. Эти логические средства изучаются в разделе математики, называемой *математической логикой*.

Математическая логика возникла не сразу, а на базе классической (формальной) логики – науки, традиционно относящейся к гуманитарному циклу. Основоположником формальной логики считается древнегреческий философ Аристотель (384 – 322 гг. до н.э.), впервые разработавший теорию дедукции, иначе − теорию логического вывода. Ему принадлежит открытие формального характера логического вывода, состоящего в том, что в наших рассуждениях одни предложения выводятся из других в силу определенной связи между их формой, структурой независимо от их конкретного содержания.

Аристотель и его ученики ввели понятие *силлогизма*, т.е. рассуждения, в котором из заданных двух суждений выводится третье. Примером силлогизма может служить такое рассуждение: «Все млекопитающие имеют скелет. Все киты – млекопитающие. Следовательно, все киты имеют скелет». Ту же форму имеет силлогизм: «Все квадраты – ромбы. Все ромбы – параллелограммы. Следовательно, все квадраты – параллелограммы». В общем виде этот силлогизм имеет форму: «Все A суть B. Все B суть C. Следовательно, все A суть C». А вот пример силлогизма неправильной формы: «Все квадраты – ромбы. Некоторые ромбы имеют острый угол. Следовательно, некоторые квадраты имеют острый угол». Хотя оба утверждения, из которых сделан вывод, правильные, сам вывод о сущест-

вовании квадратов с острым углом неверный. Значит, силлогизм, имеющий форму «Все *A* суть *B*. Некоторые *B* суть *C*. Значит, некоторые *A* суть *C*», может привести и к ложным выводам. Логика Аристотеля дополнялась, изменялась и усовершенствовалась в течение многих веков отдельными философами и целыми философскими школами. Однако значительный прогресс этой науки был достигнут лишь в XIX в., когда к логике стали применять математические методы. Таким образом, возникла математическая логика.

Развитию математической логики и применению ее к теории математического доказательства способствовали труды многих выдающихся математиков и логиков XIX и XX вв., в том числе таких математиков, как И.И. Жегалкина, В.И. Гливенко, А.Н. Колмогорова, П.С. Новикова, А.А. Маркова, Н.А. Шанина и многочисленных их учеников.

Математическая логика сделала возможным усовершенствование аксиоматического метода и сама усовершенствовалась с помощью этого метода.

1.1. Высказывания

В каждой теории выделяется класс утверждений, которые по законам этой теории являются либо истинными, либо ложными. Такие утверждения называются постоянными высказываниями или просто высказываниями.

Определение 1.1. *Высказыванием* называется всякое повествовательное предложение, которое определенно является истинным или ложным.

Если то, что высказывается в предложении, верно, соответствует действительности, то предложение – *истинное высказывание*, если же неверно, не соответствует действительности, то предложение – *ложное высказывание*.

Высказывания могут выражаться с помощью слов, а также математических, химических и прочих знаков.

Пример 1.1. Выяснить, будут ли следующие предложения являться высказываниями?

1) «$2+6>8$»;
2) «Какого цвета этот дом?»;
3) «Луна – спутник Земли»;
4) «Прочитайте главу к следующему занятию»;

5) «Минск – столица Республики Беларусь»;

6) «Город стоит на берегу реки»;

7) «Стой!»;

8) «5 – простое число»;

9) «$x^2 + 2x - 3 = 0$»;

10) «Число 19 делится на 2»;

11) «$x + y < 8$».

Решение. Для того чтобы ответить на поставленный вопрос, воспользуемся определением высказывания.

1) Является высказыванием, причем оно ложно.

2) Не является высказыванием, так как данное предложение представляет собой вопрос.

3) Является высказыванием, причем оно истинно.

4) Не является высказыванием, так как данное предложение представляет собой просьбу или приказ.

5) Является высказыванием, причем оно истинно.

6) Не является высказыванием, так как нет достаточной точности. Какой город? Какая река?

7) Не является высказыванием, так как данное предложение представляет собой восклицание.

8) Является высказыванием, причем оно истинно.

9) Не является высказыванием, так как нельзя сказать, истинно оно или ложно, поскольку не дано фиксированного значения переменной x.

10) Является высказыванием, причем оно ложно.

11) Не является высказыванием, так как нельзя сказать, истинно оно или ложно, поскольку не даны фиксированные значения переменных x и y.

Вывод. Под номерами 3, 5, 8 даны истинные высказывания; под номерами 1 и 10 даны ложные высказывания; предложения под номерами 2, 4, 6, 7, 9, 11 не являются высказываниями.

□

В логике высказываний интересуются не содержанием, а *истинностью* или *ложностью* высказываний, т.е. их *истинностным значением*. Истинностные значения – *истина* или *ложь* – будем обозначать *И* и *Л* соответственно.

Как видно из примера 1.1, не всякое предложение является высказыванием. Восклицательные, вопросительные, повелительные предложения высказываниями не являются (например, предложения под номерами 2, 4, 7).

Не являются высказываниями и определения. Например, «Отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны, называется медианой». Здесь лишь устанавливается название некоторого объекта. Поэтому определения не могут быть истинными или ложными, они только фиксируют принятое использование терминов.

Не являются высказыванием и предложения, если в них нет достаточной точности. Например, предложения под номерами 6, 9, 11 из примера 1.1.

Предложения с переменными обращаются в высказывания лишь при подстановке вместо переменных каких-либо их значений и называются *высказывательными формами* или *предикатами*.

Все приведенные примеры высказываний рассматриваются как элементарные, т.е. не расчленяемые на другие. Мы будем обозначать высказывания буквами латинского алфавита: $a, b, p, q, s, \ldots, p_1, p_2, \ldots$. Например,

a: 5 – простое число;

p: Полоцк является столицей Республики Беларусь;

s: $3^2 + 2 \cdot 4 = 10$.

Замечание 1.1. *При данном способе задания высказывания предложение в кавычки не берется.*

1.2. Предикаты

Выше, кроме высказываний, были рассмотрены также особые предложения с переменными, которые называются *высказывательными формами* или *предикатами*.

Определение 1.2. *Предикатом* $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется соответствие (функция), переменные которого принимают значения из некоторого множества M, а само оно принимает два значения: *И* (истинно) или *Л* (ложно).

Предикаты будем обозначать прописными буквами латинского алфавита. Предикаты бывают *одноместными*, *двуместными*, …, *n-местными*, если в них входят соответственно одна, две, …, *n* переменных. Например,

$P(x)$: $3 + x = 5$ – одноместный предикат;

$Q(x, y)$: $x^2 + y < 3$ – двуместный предикат;

$A(a, b, c)$: $a^3 - b^3 = c$ – трехместный предикат;

$P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$: $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0$ – n-местный предикат.

Напомним, что для суммы n первых слагаемых используется еще другая запись: $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$.

Сами высказывания считаются нуль-местными предикатами. Предикаты становятся высказываниями, когда их переменным присваивается значение из некоторого множества. Например, для предиката $P(x)$: $3 + x = 5$: $P(2)$: $3 + 2 = 5$ – истинное высказывание, а $P(7)$: $3 + 7 = 5$ – ложное.

Пример 1.2. Пусть дан предикат $A(x, y)$: Город x стоит на берегу реки y. Выяснить истинностное значение при следующих значениях x и y:

1) x − Полоцк, y − Западная Двина;

2) x − Полоцк, y − Днепр;

3) x − Витебск, y − Западная Двина.

Решение. При подстановке x и y получаем следующие высказывания:

1) «Город Полоцк стоит на берегу реки Западная Двина» − истинное высказывание;

2) «Город Полоцк стоит на берегу реки Днепр» − ложное высказывание;

3) «Город Витебск стоит на берегу реки Западная Двина» − истинное высказывание.

□

Определение 1.3. Совокупность значений переменных, при которых предикат принимает значение *И* (истинно), называется *областью истинности* данного предиката.

Например, для предиката $P(x)$: $3 + x = 5$ область истинности состоит из одного элемента – это $x = 2$; для предиката $B(x, y)$: $x^2 + y^2 \geq 0$ область истинности состоит из пар чисел (x, y), где x и y – любые действительные числа.

1.3. Логические операции

В обыденной речи для образования сложного предложения из простых используются связки – особые части речи, соединяющие отдельные предложения. Наиболее часто употребляются связки *и*, *или*, *нет*, *если* …

то, *только если* и *тогда и только тогда*. В отличие от обыденной речи, в логике смысл таких связок должен быть определен однозначно. Истинность сложного высказывания однозначно определяется истинностью или ложностью составляющих его частей. Высказывание, не содержащее связок, называется *простым*. Высказывание, содержащее связки, называется *сложным*.

Чтобы уметь однозначно выявить истинностное значение сложного высказывания по заданным значениям составляющих его элементарных высказываний, надо точно определить все логические операции, с помощью которых сконструировано это сложное высказывание из простых.

Определение 1.4. *Отрицанием* высказывания p называется высказывание, которое является ложным, если p – истинное, и истинным, если p – ложное.

При отрицании чего-либо обычно используют частицу «не» или слова «неверно, что» (частица «не» ставится перед сказуемым, слова «неверно, что» – перед всем отрицаемым высказыванием).

Отрицание высказывания p обозначается $\neg p$ или $\overline{p}$, читается так: «не p» или «неверно, что имеет место p».

Пример 1.3. Для высказывания

a: 5 – простое число

отрицанием будет:

$\overline{a}$: 5 не является простым числом

или

$\overline{a}$: Неверно, что 5 является простым числом.

Для высказывания

p: Полоцк является столицей Республики Беларусь

отрицанием будет:

$\overline{p}$: Полоцк не является столицей Республики Беларусь

или

$\overline{p}$: Неверно, что Полоцк является столицей Республики Беларусь.

Для высказывания

$$s:\ 3^2 + 2 \cdot 4 = 10$$

отрицанием будет:

$$\overline{s}:\ 3^2 + 2 \cdot 4 \neq 10.$$

□

Логические операции удобно записывать в виде так называемой таблицы истинности.

В таблице истинности (табл. 1.1) для операции отрицания показывается, какие истинностные значения принимает высказывание $\overline{p}$ в зависимости от истинностных значений высказывания p:

Таблица 1.1

p	$\overline{p}$
И	*Л*
Л	*И*

Для каждой речевой связки *и*, *или*, *если … то*, *тогда и только тогда* соответствует своя логическая операция.

Определение 1.5. *Конъюнкцией* высказываний p и q называется высказывание, которое считается истинным, если истинны оба высказывания p, q, и ложным во всех остальных случаях.

Конъюнкция высказываний p и q читается «p и q» и обозначается следующим образом:

$$p \wedge q; \quad p \,\&\, q \ (\& \text{ – амперсанд}).$$

Таблица истинности (табл. 1.2) имеет вид:

Таблица 1.2

p	q	$p \wedge q$
И	*И*	*И*
И	*Л*	*Л*
Л	*И*	*Л*
Л	*Л*	*Л*

Термин «конъюнкция» происходит от латинского слова «*conjunction*» – соединение, связь.

Пример 1.4. Высказывание «Число 2 – четное и простое», которое читается так: «Число 2 является четным числом и 2 является простым числом», – истинное. А высказывание «$3 < 6$ и $6 > 7$» – ложное. □

Определение 1.6. *Дизъюнкцией* высказываний p и q называется высказывание, которое считается ложным, если ложны оба высказывания p, q, и истинным во всех остальных случаях.

Дизъюнкция высказываний p, q читается «p или q» и обозначается так: $p \vee q$.

Таблица истинности (табл. 1.3) имеет вид:

Таблица 1.3

p	q	$p \vee q$
И	*И*	*И*
И	*Л*	*И*
Л	*И*	*И*
Л	*Л*	*Л*

Термин «дизъюнкция» происходит от латинского слова «*disjunction*» – разделение.

Пример 1.5. Высказывание «$3 < 7$ или $3 = 7$» является истинным высказыванием, т.к. истинно высказывание «$3 < 7$». Поэтому исходное высказывание можно короче записать «$3 \le 7$».

□

Определение 1.7. *Импликацией* высказываний p и q называется высказывание, которое ложно лишь в том случае, если высказывания p – истинно, а q – ложно.

Импликация высказываний p, q читается «если p, то q» или «из p следует q» и т.п. Обозначается так: $p \to q$. В импликации $p \to q$ высказывание p называется *условием*, а q – *заключением* или *следствием*.

Таблица истинности (табл. 1.4) имеет вид:

Таблица 1.4

p	q	$p \to q$
И	*И*	*И*
И	*Л*	*Л*
Л	*И*	*И*
Л	*Л*	*И*

Термин «импликация» происходит от латинского слова «*implico*» – связываю.

Пример 1.6. Высказывание «Если углы – вертикальные, то они равны», что подразумевает «Если углы являются вертикальными, то эти углы равны», является истинным.

□

На первый взгляд, импликацию «Если $2+3=6$, то Полоцк – столица Республики Беларусь» можно признать ложной, поскольку для людей, не связанных с математикой, истинность высказывания «p влечет q» означает, что p по смыслу должно влечь за собой q. Но тогда связка «влечет» зависит от смысла самих этих высказываний. Однако обороты типа «из p следует q» и «p влечет q» можно использовать таким образом, чтобы под ними каждый раз подразумевалась некоторая операция, не зависящая от смысла высказываний. Высказывания «$2+3=6$» и «Полоцк – столица Республики Беларусь» ложны, и, тем не менее, импликация этих высказываний истинна.

Определение 1.8. *Эквиваленцией* (или *эквивалентностью*) высказываний p и q называется высказывание, которое ложно лишь в том случае, когда одно из высказываний p, q – истинно, а другое – ложно.

Эквиваленция высказываний p, q читается «p равносильно q», «p эквивалентно q», «p тогда и только тогда, когда q» и т.п. Обозначается так: $p \leftrightarrow q$ или $p \sim q$.

Таблица истинности (табл. 1.5) имеет вид:

Таблица 1.5

p	q	$p \leftrightarrow q$
И	*И*	*И*
И	*Л*	*Л*
Л	*И*	*Л*
Л	*Л*	*И*

Термин «эквиваленция» происходит от латинского слова «*aquivalens*» – равноценное, равнозначное.

Пример 1.7. Высказывание «Параллелограмм является ромбом тогда и только тогда, когда его диагонали взаимно перпендикулярны», что подразумевает следующее «Параллелограмм является ромбом тогда и только тогда, когда у параллелограмма диагонали взаимно перпендикулярны», является истинным. Данное высказывание содержит две импликации:

1) «Если параллелограмм является ромбом, то его диагонали взаимно перпендикулярны»;

2) «Если диагонали параллелограмма перпендикулярны, то такой параллелограмм является ромбом». □

В связи с этим эквивалентность иногда называют двойной импликацией. Поэтому истинность эквиваленции вытекает из одинаковых значений входящих в нее простых высказываний. А значит, высказывание «$2 \cdot 2 = 5$ тогда и только тогда, когда параллельные прямые пересекаются» будет истинным.

Над предикатами, как и над высказываниями можно тоже производить обычные логические операции. В результате получаются новые предикаты. Не останавливаясь на соответствующих определениях, ограничимся лишь примером.

Пример 1.8. Из двух предикатов $P(x)$ и $Q(x)$ с помощью операций конъюнкции и дизъюнкции составить новые предикаты. Найти области истинности новых предикатов.

$P(x)$: Натуральное число x делится на 3;

$Q(x)$: Натуральное число x делится на 2.

Решение. Конъюнкция двух предикатов подразумевает одновременное выполнение двух условия, т.е. такие натуральные числа, которые делятся и на 3, и на 2. Такими натуральными числами являются числа, которые делятся на 6. Таким образом,

$P(x) \wedge Q(x)$: Натуральные числа, которые делятся на 6.

Областью истинности нового предиката будут натуральные числа, кратные 6, т.е. $x = 6;\ 12;\ 18; \ldots$.

Дизъюнкцией двух предикатов будет следующий предикат:

$P(x) \vee Q(x)$: натуральные числа, которые делятся на 2 или на 3.

Областью истинности этого предиката будут натуральные числа, кратные 2 или 3, или 6, т.е. $x = 2;\ 3;\ 4;\ 6;\ 8;\ 9;\ 10;\ 12;\ 14; \ldots$.

□

Поскольку уравнения и неравенства можно рассматривать как предикаты, то при решении уравнений, неравенств или системы уравнений, системы неравенств некоторые символы заменяют нам логические операции.

Например, пусть предикатами являются уравнения от двух переменных: $f(x, y) = 0$ и $g(x, y) = 0$. Тогда конъюнкцией этих двух предикатов по существу является новый предикат, который представляет собой систему уравнений, т.е.

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad f(x, y) = 0 \wedge g(x, y) = 0.$$

Область истинности нового предиката есть пересечение областей истинности двух уравнений. Это же относится и к системе неравенств.

Например, уравнение $f(x) \cdot g(x) = 0$ представляет по существу дизъюнкцию двух предикатов $f(x) = 0$ и $g(x) = 0$, которая является совокупностью этих уравнений, т.е.

$$f(x) \cdot g(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = 0 \vee g(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} f(x) = 0 \\ g(x) = 0 \end{array}\right..$$

Область истинности этого предиката есть объединение областей истинности двух уравнений $f(x) = 0$ и $g(x) = 0$.

Здесь для записи мы использовали символ «$\Leftrightarrow$», который называется «равносильностью».

1.4. Формулы логики высказываний

С помощью логических операций, рассмотренных выше, можно, исходя из простейших высказываний, строить новые, более сложные высказывания, которые называются *формулами*. Например, $(p \vee q) \to r$, где p, q, r – «простейшие» высказывания. Отвлекаясь от конкретного содержания высказываний p, q, r, будем называть их *высказывательными переменными*. Вместо них можно подставить в эту формулу любое истинное или ложное высказывание, и в результате выполнения операций, входящих в формулу, получим новые высказывания, которые могут оказаться как истинными, так и ложными.

Пусть $x, y, z, \ldots$ – высказывательные переменные. Введем еще две специфические высказывательные переменные: *И* и *Л*. Специфика их заключается в том, что вместо *И* разрешается подставлять любые истинные

высказывания и только их, а вместо *Л* любые ложные высказывания и только их. Общее понятие формулы логики высказываний дается следующим определением, в котором используется так называемая *рекурсия*.

Определение 1.9.

1) Каждая отдельно взятая высказывательная переменная считается формулой;

2) если A и B – формулы, то выражения $\overline{A}$, $\overline{B}$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \to B)$, $(A \leftrightarrow B)$ также считаются формулами;

3) не существует никаких других формул, кроме тех, которые можно получить в результате применения конечного числа раз (в любом порядке) п. 1) и п. 2) этого определения.

Принимается также соглашение, состоящее в том, что иногда признаются формулами выражения, у которых внешние скобки опущены.

Например, выражение $F(x_1, x_2) = (x_1 \to x_2) \vee (x_1 \leftrightarrow \overline{(x_1 \wedge x_2)})$ является формулой, а выражение $F(x_1, x_2) = x_1 \to x_2) \vee \leftrightarrow \overline{x_1}$ формулой не является.

Подставляя в данную формулу вместо всех входящих в нее переменных значения *И* или *Л*, в результате получаем высказывание. Значение истинности таких высказываний можно свести в таблицу, которая называется *таблицей истинности*.

Пример 1.9. Пусть даны высказывания:

a: Фрэд любит футбол;

b: Фрэд любит гольф;

c: Фрэд любит теннис.

Записать следующее высказывание в символической форме и указать соответствующую ему таблицу истинности:

«Фред любит футбол и неверно, что он любит гольф или теннис».

Решение. Чтобы составить сложному высказыванию символическую форму, разобьем это высказывание на части. Высказыванию «Он любит гольф или теннис» соответствует высказывание «Фрэд любит гольф или Фрэд любит теннис», которое символически записывается так: $b \vee c$. Высказывание «Неверно, что Фрэд любит гольф или теннис» символически записывается так: $\overline{b \vee c}$. Значит, исходное высказывание «Фред любит футбол и неверно, что он любит гольф или теннис» можно записать так: $a \wedge \overline{(b \vee c)}$.

Составим таблицу истинности для данного высказывания:

a	b	c	$b \vee c$	$\overline{(b \vee c)}$	$a \wedge \overline{(b \vee c)}$
И	*И*	*И*	*И*	*Л*	*Л*
И	*И*	*Л*	*И*	*Л*	*Л*
И	*Л*	*И*	*И*	*Л*	*Л*
И	*Л*	*Л*	*Л*	*И*	*И*
Л	*И*	*И*	*И*	*Л*	*Л*
Л	*И*	*Л*	*И*	*Л*	*Л*
Л	*Л*	*И*	*И*	*Л*	*Л*
Л	*Л*	*Л*	*Л*	*И*	*Л*

.

□

Пример 1.10. Найти истинностные значения формулы

$$F(x_1, x_2) = (x_1 \to \overline{x_2}) \vee (x_1 \leftrightarrow \overline{(x_1 \wedge x_2)}).$$

Решение. Составляем комбинируемую таблицу истинности, где в каждом столбце будем находить истинностные значения каждой операции в отдельности.

x_1	x_2	$x_1 \to \overline{x_2}$ $*$	$\overline{(x_1 \wedge x_2)}$	$x_2 \leftrightarrow \overline{(x_1 \wedge x_2)}$ ∇	$F(x_1, x_2) = (*) \vee (\nabla)$
И	*И*	*Л*	*Л*	*Л*	*Л*
И	*Л*	*И*	*И*	*И*	*И*
Л	*И*	*И*	*И*	*И*	*И*
Л	*Л*	*И*	*И*	*И*	*И*

□

Если сравнить истинностные значения формулы $F(x_1, x_2)$ из примера 1.10 с истинностными значениями формулы $\overline{x_1 \wedge x_2}$, то можно сделать вывод, что эти значения совпадают. В этом случае говорят об эквивалентности двух формул. Под этим подразумевается, что формулу $F(x_1, x_2)$ можно заменить формулой $\overline{x_1 \wedge x_2}$, более упрощенной.

Определение 1.10. Формулы *A* и *B* называются *равносильными* (*эквивалентными*), если при одних и тех же наборах значений высказывательных переменных они принимают одинаковые значения.

Сформулируем понятие равносильных предикатов.

Определение 1.11. Два предиката, заданные на одном и том же множестве переменных, называются *равносильными* (*эквивалентными*), если области истинности совпадают.

Пример 1.11. Предикаты $A(x): x^2 \le x$ и $B(x)$: $x(x-1) \le 0$ – равносильны. Поэтому можно записать так:

$$A(x) \Leftrightarrow B(x) \quad \text{или} \quad x^2 \le x \;\Leftrightarrow\; x(x-1) \le 0. \qquad \square$$

Теорема 1.1. *Используя таблицы истинности, можно доказать следующие логические эквивалентности:*

1) *Свойство коммутативности*: $p \wedge q \equiv q \wedge p$; $\quad p \vee q \equiv q \vee p$.
2) *Свойство ассоциативности*: $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$;
$p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$.
3) *Свойство дистрибутивности*: $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$;
$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$.
4) *Законы идемпотентности*: $p \wedge p \equiv p$;
$p \vee p \equiv p$.
5) *Закон двойного отрицания*: $\overline{\overline{p}} \equiv p$.
6) *Законы де Моргана*: $\overline{p \wedge q} \equiv \overline{p} \vee \overline{q}$;
$\overline{p \vee q} \equiv \overline{p} \wedge \overline{q}$.
7) *Законы поглощения*: $p \wedge (p \vee q) \equiv p$;
$p \vee (p \wedge q) \equiv p$.
8) *Свойство импликации*: $p \to q \equiv \overline{p} \vee q$.
9) *Свойство эквиваленции*: $p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p)$.

Доказательство**.** Докажем, например, свойство дистрибутивности операции конъюнкция относительно дизъюнкции:

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r).$$

I способ.

Рассмотрим две формулы $F_1(p,q,r) = p \wedge (q \vee r)$ и $F_2(p,q,r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$, т.е. левую и правую части исходного свойства. С помощью таблиц истинности покажем, что эти формулы принимают одинаковые истинностные значения при одних и тех же значениях переменных p, q, r.

p	q	r	$q \vee r$	$F_1 = p \wedge (q \vee r)$
И	*И*	*И*	*И*	*И*
И	*И*	*Л*	*И*	*И*
И	*Л*	*И*	*И*	*И*
И	*Л*	*Л*	*Л*	*Л*
Л	*И*	*И*	*И*	*Л*
Л	*И*	*Л*	*И*	*Л*
Л	*Л*	*И*	*И*	*Л*
Л	*Л*	*Л*	*Л*	*Л*

,

p	q	r	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$F_2 = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
И	*И*	*И*	*И*	*И*	*И*
И	*И*	*Л*	*И*	*Л*	*И*
И	*Л*	*И*	*Л*	*И*	*И*
И	*Л*	*Л*	*Л*	*Л*	*Л*
Л	*И*	*И*	*Л*	*Л*	*Л*
Л	*И*	*Л*	*Л*	*Л*	*Л*
Л	*Л*	*И*	*Л*	*Л*	*Л*
Л	*Л*	*Л*	*Л*	*Л*	*Л*

Вывод: совпадение истинностных значений обеих формул доказывает данное свойство.

II способ.

Данное свойство можно доказать, заменив символ тождественно равно «≡» на логическую операцию эквиваленция «↔»:

$$p \wedge (q \vee r) \leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r).$$

Тогда с помощью таблицы истинности доказывается то, что при любых значениях переменных формула всегда принимает значение *И*.

□

***Упражнение* 1.1.** *С помощью таблиц истинности доказать утверждения под номерами* 6, 7, 8, 9.

Отметим, что благодаря свойству ассоциативности высказывания $p \wedge (q \wedge r)$ и $(p \wedge q) \wedge r$ могут быть записаны в виде $p \wedge q \wedge r$. Аналогично

можно записать свойство ассоциативности относительно операции дизъюнкция.

Определение 1.12. Высказывание, истинное во всех случаях, называется *логически истинным* или *тавтологией.*

Определение 1.13. Высказывание, построенное так, что оно ложно в каждом случае, называется *логически ложным* или *противоречием.*

Надо отметить, что теоремы в математике являются тавтологиями.

Высказывание, например, «Студент сдаст или не сдаст экзамен» является тавтологией, поскольку одно событие либо другое обязательно должно иметь место. Данное высказывание в символической форме имеет вид $a \vee \overline{a}$. Каждое высказывание данного вида является тавтологией.

Рассмотрим некоторые свойства, связанные с логически истинностными и логически ложными высказываниями. Пусть символ *И* обозначает высказывание, которое есть тавтология, и поэтому имеет таблицу истинности, состоящую из одних *И*. Символом *Л* обозначим противоречие, т.е. высказывание, таблица истинности которого содержит *Л* во всех строках. Имеет место следующая теорема.

Теорема 1.2*. *Справедливы следующие логические эквивалентности:*

1) $p \wedge И \equiv p$; $\quad p \wedge Л \equiv Л$;

   $p \vee И \equiv И$; $\quad p \vee Л \equiv p$.

2) $p \wedge \overline{p} \equiv Л$; $\quad p \to p \equiv И$.

***Упражнение* 1.2.** *С помощью таблиц истинности доказать утверждения из теоремы* 1.2.

В каждом высказывании можно заменить любую его компоненту на логически эквивалентное ей высказывание. Полученное в результате такой замены высказывание будет логически эквивалентно исходному, поскольку истинностное значение высказывания зависит исключительно от истинностных значений составляющих его компонент (но не от их формы или сложности).

Пример 1.12. С помощью эквивалентных преобразований доказать, что:

$$(x_1 \to \overline{x_2}) \vee (x_1 \leftrightarrow \overline{(x_1 \wedge x_2)}) \equiv \overline{(x_1 \wedge x_2)}.$$

Решение. Сделаем допущение, вместо символа тождественно равно «≡» будем использовать символ «=»:

$(x_1 \to \overline{x_2}) \vee (x_1 \leftrightarrow \overline{(x_1 \wedge x_2)}) =$

$= |$используем свойство импликации и эквиваленции$| =$

$= (\overline{x_1} \vee \overline{x_2}) \vee ((x_2 \to \overline{(x_1 \wedge x_2)}) \wedge (\overline{(x_1 \wedge x_2)} \to x_2) =$

$= |$используем свойство импликации, опускаем первые скобки$| =$

$= \overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee ((\overline{x_2} \vee \overline{(x_1 \wedge x_2)}) \wedge (\overline{\overline{(x_1 \wedge x_2)}} \vee x_2)) = |$используем закон де Моргана$| =$

$= \overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee ((\overline{x_2} \vee (\overline{x_1} \vee \overline{x_2})) \wedge ((x_1 \wedge x_2) \vee x_2)) =$

$= |$используем свойство ассоциативности, закон поглощения$| =$

$= \overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee ((\overline{x_2} \vee \overline{x_1}) \wedge x_2)) = |$используем свойство дистрибутивности$| =$

$= \overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee ((\overline{x_1} \wedge x_2) \vee \underbrace{(\overline{x_2} \wedge x_2)}_{Л}) = |$используем свойство дизъюнкции с $Л| =$

$= \overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee (\overline{x_1} \wedge x_2) = |$используем свойство дистрибутивности$| =$

$= \overline{x_1} \vee ((\overline{x_2} \vee \overline{x_1}) \wedge \underbrace{(\overline{x_2} \vee x_2)}_{И}) =$

$= |$используем свойство конъюнкции с $И$, свойство ассоциативности$| =$

$= \overline{x_1} \vee \overline{x_2} = |$используем закон де Моргана$| = \overline{(x_1 \wedge x_2)}$.

□

1.5. Применение алгебры высказываний в технике

Достижения логики находят широкое применение в современной технике. Это связанно с тем, что понятийно-терминологический аппарат логики высказываний оказался пригодным при конструировании и наладке систем, работающих в двузначном режиме (по принципу «да – нет»): «замкнуто – разомкнуто», «есть импульс – нет импульса», «есть напряжение – нет напряжения», «состояние *Т* – состояние не-*Т*» и т.д. Возможность такого рода приложений обусловлена глубоким сходством (изоморфиз-

мом) между отношениями в логике высказываний и в технических устройствах дискретного (прерывистого) действия.

Как известно, высказывание может принимать два истинностных значения: истинно (*И*) или ложно (*Л*). В электрической сети это можно интерпретировать, как замкнутый (1) или разомкнутый (0) контакт.

Таким образом, каждому контакту X электрической сети можно поставить в соответствие некоторую высказывательную переменную x, которая принимает значение 1, если контакт замкнут, и значение 0, если контакт разомкнут.

1) Дизъюнкции $p \vee q$ ставится в соответствие схема (рис. 1.1), состоящая из параллельного соединения контактов P и Q, которая замкнута тогда и только тогда, когда хотя бы один из контактов P или Q замкнут.

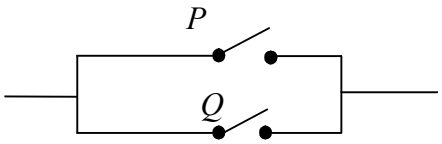


Рис. 1.1

Таблица 1.6

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

2) Конъюнкции $p \wedge q$ ставится в соответствие схема (рис. 1.2), состоящая из последовательного соединения контактов P и Q, которая замкнута тогда и только тогда, когда оба контакта P и Q замкнуты.

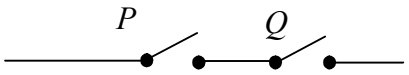


Рис. 1.2

Таблица 1.7

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

3) Отрицанию $\overline{p}$ может быть поставлен в соответствие контакт $\overline{P}$, который замкнут, если контакт P разомкнут, и разомкнут, когда контакт P замкнут.

Так как любая электрическая сеть состоит из замыкающих и размыкающих контактов, то ее можно выразить с помощью логики высказываний, используя лишь знаки конъюнкции, дизъюнкции и отрицания. Верно и обратное − каждой формуле алгебры высказываний ставится в соответствие некоторая схема, которая называется *последовательно-параллельной* или *переключательной*, или *контактной схемой*.

Таким образом, формулы логики высказываний являются математическими моделями переключательных схем.

Первая задача, решаемая в технике с помощью средств логики высказываний, – определение структуры дискретного устройства по заданным условиям его работы. Это задача *синтеза* структуры устройства. Вторая, обратная задача, связана с ее *анализом*, т.е. с определением условий работы устройства по уже известной ее логической структуре. Нередко разработчики и эксплуатационники сталкиваются с задачей упрощения структурной схемы устройства. Она решается путем *упрощения* соответствующей структурной формулы по законам логики высказываний.

Пример 1.13. По данной формуле

$$f(p;g;r) = ((\overline{p} \wedge g) \vee \overline{r}) \vee ((\overline{p} \vee \overline{g}) \wedge \overline{r})$$

построить переключательную схему с помощью трёх переключателей P, G, R. Определить, при каких положениях переключателей ток в сети отсутствует.

Решение. Для данной формулы логики высказываний соответствует следующая переключательная схема (рис. 1.3).

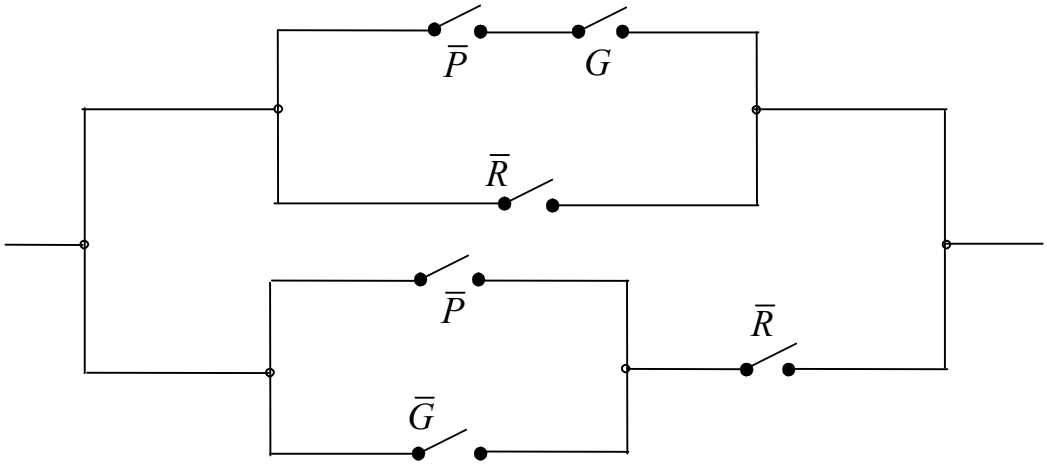


Рис. 1.3

Определим, при каких положениях переключателей ток в сети на рис 1.3 отсутствует. В таблицу 1.8 запишем все возможные наборы значений переменных p, g и r и найдем для них соответствующие значения формулы логики высказываний.

Таблица 1.8

p	g	r	$\overline{p}$	$\overline{p} \wedge g$	$\overline{r}$	$(\overline{p} \wedge g) \vee \overline{r}$	$\overline{g}$	$\overline{p} \vee \overline{g}$	$(\overline{p} \vee \overline{g}) \wedge \overline{r}$	$f(p;g;r)$
0	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0
0	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1
1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0
1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0

Вывод. Из последнего столбца таблицы следует, что ток в сети отсутствует в трех случаях:

1) переключатель R замкнут, а переключатели P и G разомкнуты;
2) переключатели P и R замкнуты, а переключатель G разомкнут;
3) все переключатели замкнуты.

□

Пример 1.14. Провести анализ и, если возможно, упрощение схемы (рис. 1.4):

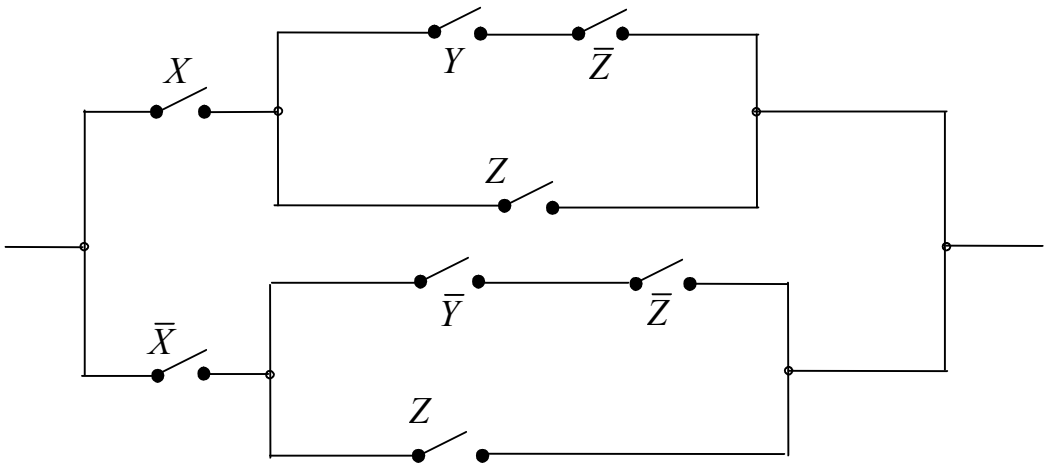


Рис. 1.4

Решение. По данной схеме записываем ее структурную формулу:

$$f(x;y;z)=(x\wedge((y\wedge\overline{z})\vee z))\vee(\overline{x}\wedge((\overline{y}\wedge\overline{z})\vee z)).$$

Упрощаем эту формулу, используя законы и свойства логики высказываний:

$$f(x;y;z)=(x\wedge((y\wedge\overline{z})\vee z))\vee(\overline{x}\wedge((\overline{y}\wedge\overline{z})\vee z))=(x\wedge((y\vee z)\wedge\underbrace{(\overline{z}\vee z)}_{1}))\vee$$

$$\vee(\overline{x}\wedge((\overline{y}\vee z)\wedge\underbrace{(\overline{z}\vee z)}_{1}))=(x\wedge(y\vee z))\vee(\overline{x}\wedge(\overline{y}\vee z))=$$

$$=(x\wedge y)\vee(x\wedge z)\vee(\overline{x}\wedge\overline{y})\vee(\overline{x}\wedge z)=(x\wedge y)\vee(\overline{x}\wedge\overline{y})\vee(z\wedge(x\vee\overline{x}))=$$

$$=(x\wedge y)\vee(\overline{x}\wedge\overline{y})\vee z.$$

Схема, соответствующая этой формуле, изображена на рисунке. Она выполняет те же функции, но является проще, чем схема, данная в условии задачи (рис. 1.5).

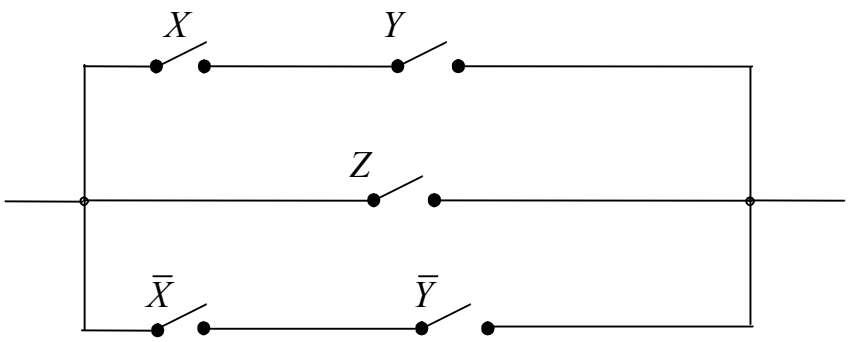


Рис. 1.5

□

Пример 1.15 (синтез схемы). Из трех контактов A, B, C составить схему с одним входом и одним выходом так, чтобы на выходе появлялся сигнал (загоралась лампочка), если хотя бы два из трех контактов A, B, C замкнуты.

Решение. По заданным условиям работы схемы можем составить таблицу соответствующей формулы $f(a;b;c)$, табл. 1.9.

Исходя из табличного задания, получаем следующую формулу:

$$f(a;b;c)=(\overline{a}\wedge b\wedge c)\vee(a\wedge\overline{b}\wedge c)\vee(a\wedge b\vee\overline{c})\vee(a\wedge b\wedge c).$$

Упростив ее, получаем формулу $f(a;b;c)=(b\wedge c)\vee(a\wedge(b\vee c))$. Схема, соответствующая данной формуле, представлена на рис. 1.6.

Таблица 1.9

a	b	c	$f(a;b;c)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

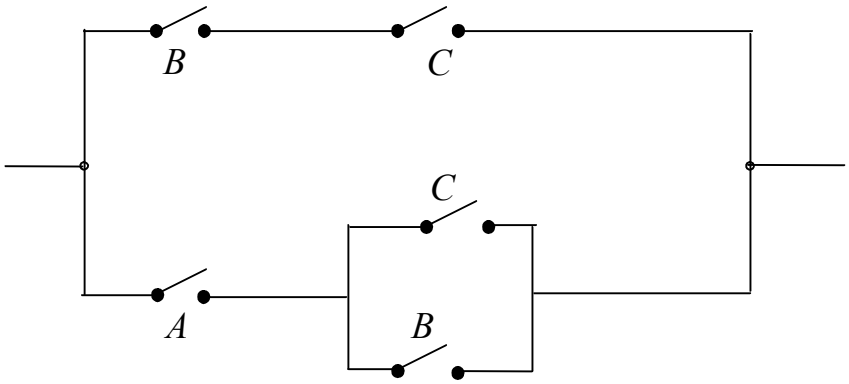


Рис. 1.6

Надо отметить, что после упрощения формулы можно получить еще одну эквивалентную ей формулу $f(a;b;c)=(a\wedge b)\vee(c\wedge(b\vee a))$, которой будет соответствовать другая схема.

□

Схему, которая рассматривается в примере 1.15, можно использовать, например, в качестве устройства контроля за работой какого-либо механизма. Этот механизм должен состоять из трех отдельных узлов (причем по условию работы механизма требуется, чтобы всегда работали хотя бы два из трех узлов). Если механизм работает, то замыкает (через соответствующее реле) один из контактов A, B, C, а если не работает, то размыкает его.

2. БУЛЕВЫ АЛГЕБРЫ

Можно заметить, что законы и свойства, связанные с заданными в теории множеств и логике высказываний операциями, похожи друг на друга. Это вызвано тем, что обе эти теории являются интерпретацией одной и той же математической системы, а именно булевой алгебры.

Булева алгебра названа по имени английского математика Джорджа Буля, который в 1854 году опубликовал труд «Исследование законов мышления», положивший основу современной математической логики. Целью этой работы было «исследовать основные законы тех операций ума, посредством которых проводятся рассуждения, выразить их на символическом языке».

Математическая система является булевой алгеброй, если она удовлетворяет известному определенному набору требований, или иначе аксиом. Из этих основных аксиом можно логически вывести остальные положения булевой алгебры.

Введем понятия бинарной и унарной операции.

Определение 2.1. Операция, заданная на некотором множестве, называется *бинарной,* если она действует на два элемента этого множества и ее результатом является элемент этого же множества.

Определение 2.2. Операция, заданная на множестве, называется *унарной,* если она действует на один элемент множества и ее результатом является элемент этого же множества.

Определение 2.3. *Булева алгебра* есть множество B, содержащее специальные элементы 1 и 0, на котором заданы бинарные операции $\oplus$ и $\odot$ и унарная операция «$'$». При этом для всех x, y и z из B должны выполняться *следующие аксиомы*:

1. *Законы коммутативности*: $x \odot y = y \odot x$,
$x \oplus y = y \oplus x$.
2. *Законы ассоциативности*: $x \odot (y \odot z) = (x \odot y) \odot z$,
$x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$.
3. *Законы дистрибутивности*: $x \odot (y \oplus z) = (x \odot y) \oplus (x \odot z)$,
$x \oplus (y \odot z) = (x \oplus y) \odot (x \oplus z)$.
4. *Законы тождества*: $x \oplus 0 = x$,

$$x \odot 1 = x.$$

5. *Законы дополнения*: $x \odot x' = 0$

$$x \oplus x' = 1.$$

Элемент 1 называется *единичным элементом*, или *единицей*; элемент 0 называется *нулевым элементом*, или *нулем*; а элемент x' называется *дополнением* x.

Замечание 2.1. *Аксиомы* 1 – 5 *не являются независимыми. Например, закон ассоциативности можно вывести из остальных.*

Теорема 2.1. *Пусть* B *– булева алгебра. Тогда для нее справедливы следующие утверждения:*

1) *Элементы* 0 *и* 1 *являются единственными.*
2) *Для каждого* $x \in B$ *существует единственное дополнение* x'.
3) *Для каждого элемента* $x \in B$: $(x')' = x$.
4) $0' = 1,\ 1' = 0$.
5) *Для каждого* $x \in B$ *справедливы законы идемпотентности*
$$x \odot x = x, \quad x \oplus x = x.$$
6) *Для каждого* $x \in B$ *справедливы свойства констант*
$$x \oplus 1 = 1, \quad x \odot 0 = 0.$$
7) *Для каждого* $x \in B$ *и* $y \in B$ *справедливы законы поглощения*
$$x \oplus (x \odot y) = x, \quad x \odot (x \oplus y) = x.$$
8) *Для каждого* $x \in B$ *и* $y \in B$ *справедливы законы де Моргана*
$$(x \oplus y)' = y' \odot x', \quad (x \odot y)' = y' \oplus x'.$$

Доказательство.

Докажем некоторые утверждения данной теоремы.

1) Пусть 0_1 и 0_2 – два нулевых элемента множества B, для которых выполняются законы тождества. Таким образом, для всех $x \in B$ выполняется $x \oplus 0_1 = x$ и $x \oplus 0_2 = x$. Тогда $0_2 \oplus 0_1 = 0_2$ и $0_1 \oplus 0_2 = 0_1$. Но, по закону коммутативности, $0_1 \oplus 0_2 = 0_2 \oplus 0_1$. Тогда $0_1 = 0_2$. Следовательно, нулевой элемент единственный.

Аналогично доказывается, что элемент 1 является единственным.

2) Докажем закон идемпотентности относительно операции $\oplus$:

$$x \oplus x = (x \oplus x) \odot 1 = (x \oplus x) \odot (x \oplus x') = x \oplus (x \odot x') = x \oplus 0 = x.$$

Аналогично доказывается закон идемпотентности относительно операции $\odot$.

3) Докажем один из законов поглощения:
$x \oplus (x \odot y) = (x \odot 1) \oplus (x \odot y) = x \odot (1 \oplus y) = x \odot 1 = x$. ■

Следует обратить внимание на то, что каждая аксиома булевой алгебры состоит из пары равенств, которые являются двойственными в том смысле, что если в одном равенстве заменить операцию $\oplus$ на операцию $\odot$, операцию $\odot$ на операцию $\oplus$, элемент 1 на элемент 0 и элемент 0 на элемент 1, то получим второе равенство. В результате каждое утверждение теоремы 2.1, кроме второго и третьего, также обладает свойством двойственности.

Приведем некоторые интерпретации булевой алгебры.

1) Если под элементами множества B понимать множества, а операцию $\oplus$ трактовать как операцию $\bigcup$, операцию $\odot$ – как операцию $\bigcap$, то аксиомы булевой алгебры выполняются в соответствии с теоремой 1.1 раздела 1 (свойства 1, 2, 3, 4, 8). Здесь роль нулевого элемента выполняет пустое множество $\varnothing$, роль единичного элемента – универсальное множество U, для каждого множества x множество x' является его дополнением. Это означает, что алгебра множеств является интерпретацией (или моделью) данной системы аксиом и, следовательно, булевой алгеброй.

2) Другой интерпретацией булевой алгебры является алгебра логики. Под элементами множества B будем понимать множества составных высказываний, которые можно образовать из истинных и ложных высказываний, используя многократно и всеми возможными способами операции $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$. Правило образования составных высказываний задается понятием формулы логики высказываний. При этом можно исключить операции импликации и эквиваленции, выразив эти операции через отрицание, конъюнкцию, дизъюнкцию. Каждому составному высказыванию будет соответствовать элемент из множества $\{И, Л\}$, и два составных высказывания будут равносильными, если они принимают одинаковые истинностные значения.

Тогда, если под операцией $\oplus$ подразумевать дизъюнкцию высказываний, под операцией $\odot$ – конъюнкцию высказываний, под дополнением – отрицание высказывания, под единичным элементом – истинное высказывание, под нулевым – ложное высказывание, и знак равенства понимать

как равносильность, то для такой интерпретации выполняются все аксиомы булевой алгебры.

Пример 2.1. Пусть B состоит из двух элементов $B = \{0, 1\}$, операции $\oplus$ и $\odot$ заданы таблицами 2.1 и 2.2 соответственно, и 0 является нулевым элементом, а 1 – единичным элементом, $0' = 1$, $1' = 0$.

Показать, что множество B с заданными операциями является булевой алгеброй.

Таблица 2.1

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	1

Таблица 2.2

$\odot$	0	1
0	0	0
1	0	1

Решение. Чтобы показать, что множество B с заданными операциями является булевой алгеброй, непосредственной проверкой надо убедиться в выполнении аксиом 1 – 5.

1) Выполнение аксиомы 1 следует из заданных таблиц.

2) На отдельных равенствах покажем выполнение аксиомы 2.

2.1) $0 \oplus (0 + 1) = (0 \oplus 0) \oplus 1$,

$0 \oplus 1 = 0 \oplus 1$,

$1 = 1$.

2.2) $1 \oplus (1 \oplus 0) = (1 \oplus 1) \oplus 0$,

$1 \oplus 1 = 1 \oplus 1$,

$1 = 1$.

2.3) $0 \odot (0 \odot 1) = (0 \odot 0) \odot 1$,

$0 \odot 0 = 0 \odot 1$,

$0 = 0$.

Аналогично можно путем перебора проверить все случаи аксиомы 2.

3) Аксиома 3 проверяется так же, как и аксиома 2.

$0 \oplus (0 \odot 1) = (0 \oplus 0) \odot (0 \oplus 1)$,

$0 \odot 0 = 0 \odot 1$,

$0 = 0$.

4) Выполнение аксиом 4 и 5 следует из таблиц. □

3. БУЛЕВЫ ФУНКЦИИ. СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ

Определение 3.1. Функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, определенная на множестве $B^n = \{0;1\}^n$ и принимающая значения из множества $B = \{0,1\}$, называется *булевой функцией* (*функцией алгебры логики*, *переключательной функцией*):

$$f : \underbrace{B \times B \times \ldots \times B}_{n\ раз} \to B, \text{ где } B = \{0,1\}.$$

Множество булевых функций от n переменных обозначим через P_2:

$$P_2 = \left\{ f \,\middle|\, f : B^n \to B \right\}.$$

Для обозначения булевых функций и переменных используются те же обозначения, что были введены в первом разделе при изучении общей теории функций: $f, g, h, \ldots$ – обозначение функций, $x, y, z, \ldots$, $x_1, x_2, x_3, \ldots$ – обозначение переменных.

Переменные в булевых функциях могут принимать только два значения: 0 и 1. Такие переменные называются *булевыми*. С этими переменными сталкивались выше, когда рассматривали переключательные схемы. Переменным 0 и 1 можно придать и смысловую интерпретацию, объектами которой являются высказывания. Так, значению переменной «1» соответствует значение высказывания «*истинно*», а значению переменной «0» – «*ложно*».

Булевы функции, как и булевы алгебры, названы в честь английского математика Джорджа Буля.

Способы задания булевых функций не отличаются от способов задания обычных функций анализа. К таковым способам задания относятся:

1) табличный;
2) графический;
3) аналитический.

3.1. Табличный способ задания булевых функций

Пусть $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – булева функция n аргументов и $B = \{0,1\}$. Область определения данной функции можно рассматривать как множество упорядоченных наборов (или векторов, или двоичных наборов):

$$D_f = \left\{ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \middle| x_i \in B = \{0,1\}, i = \overline{1,n} \right\},$$

на каждом из которых функция принимает одно из двух значений $B = \{0,1\}$.

Используя теорему умножения, можно рассчитать количество наборов $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Мощность множества D_f равна:

$$|D_f| = \left| \underbrace{B \times B \times \ldots \times B}_{n \text{ раз}} \right| = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{n \text{ раз}} = 2^n .$$

Из определения булевой функции следует, что для ее задания достаточно указать, какое значение функции соответствует каждому из наборов значений аргументов, т.е. возможно задать ее *таблицей истинности*, табл. 3.1:

Таблица 3.1

x_1	…	x_{n-1}	x_n	$f(x_1,\ldots,x_{n-1},x_n)$
0	…	0	0	$f(0,\ldots,0,0)$
0	…	0	1	$f(0,\ldots,0,1)$
0	…	1	0	$f(0,\ldots,1,0)$
…	…	…	…	…
1	…	1	1	$f(1,\ldots,1,1)$

Легко видеть, что n переменных принимают 2^n различных значений, то есть в таблице истинности имеется 2^n строк.

Нетрудно определить и количество всех функций, так же воспользовавшись теоремой умножения. Отдельная функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ задана, если определены ее значения $\{f_1, f_2, \ldots, f_{2^n}\}$ на всех наборах $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D_f$, где $f_j \in B = \{0,1\}$ – значение функции на j-том наборе $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D_f$ и $j = \overline{1;2^n}$.

$$|P_2| = \left| \underbrace{B \times B \times \ldots \times B}_{2^n \text{ раз}} \right| = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{2^n \text{ раз}} = 2^{2^n} .$$

Если нужно задать несколько (например, k) булевых функций от n переменных, то это удобно сделать с помощью одной таблицы, где исполь-

зуется k столбцов для значений функций. Для удобства мы будем употреблять стандартное расположение наборов (кортежей) булевых значений аргумента: если набор рассматривать как запись числа в двоичном исчислении, то расположение наборов соответствует естественному порядку следования чисел 0, 1, …, $2^n - 1$.

3.2. Графический способ задания булевых функций

При обсуждении задач, связанных с булевыми функциями, очень полезно использовать геометрическую интерпретацию.

Область определения булевой функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ n аргументов составляется из наборов координат точек вершин единичного n-мерного куба.

В частности, рассмотрим представление булевой функции трех аргументов $f(x, y, z)$. Множество наборов области определения функции $D_f = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in B = \{0, 1\}\}$ является множеством координат вершин единичного трехмерного куба. Способ графического представления булевой функции в данном случае предполагает необходимость отметить каким-то образом вершины куба, в которых функция принимает значение 1. Это можно показать на рисунке 3.1 следующим образом.

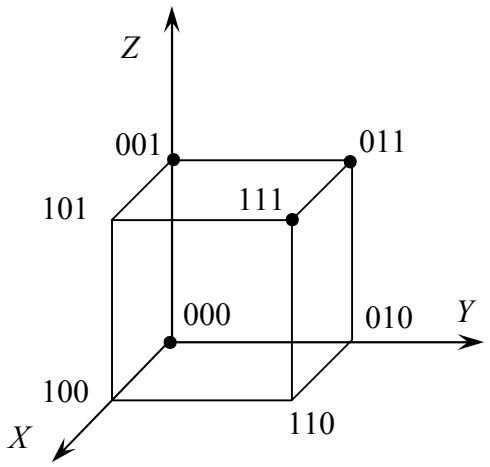


Рис. 3.1

3.3. Аналитический способ задания булевых функций

Выше определили число булевых функций от n переменных: 2^{2^n}. Теоретически таблицей можно задать любую булеву функцию, но при

большом числе переменных этот способ практически не применим. Поэтому используется способ задания булевых функций в виде формул, аналогичный аналитическому заданию элементарных функций в математическом анализе.

Ниже приведем обозначения и названия булевых функций от одной и двух переменных, записав в виде таблицы истинности.

Рассмотрим булевы функции от одной переменной, табл. 3.2.

Таблица 3.2

x	$f_1(x)=0$	$f_2(x)=1$	$f_3(x)=x$	$f_4(x)=\overline{x}$
0	0	1	0	1
1	0	1	1	0

В данном случае:

1) $f_1(x)=0$ – *константа* 0;

2) $f_2(x)=1$ – *константа* 1;

3) $f_3(x)=x$ – *тождественная функция*;

4) $f_4(x)=\overline{x}$ – *отрицание* x ($\overline{x}$ читается «не x», обозначение $\overline{x}$ или $\neg x$).

Две из указанных функций фактически являются константами, поскольку их значения не зависят от значений аргумента.

Рассмотрим булевы функции от двух переменных. В данном случае их общее число будет составлять 16, причем две из них являются константами, четыре – зависят от одной переменной и только десять – существенно зависят от обеих переменных. Так как из 16 булевых функций от двух переменных чаще рассматриваются только девять функций, которые имеют название и обозначение, то подробно остановимся на их описании, табл. 3.3, 3.4 и 3.5.

Таблица 3.3

x_1 x_2	$f_1(x_1,x_2)=0$	$f_2(x_1,x_2)=1$	$f_3(x_1,x_2)=x_1 \wedge x_2$	$f_4(x_1,x_2)=x_1 \vee x_2$
0 0	0	1	0	0
0 1	0	1	0	1
1 0	0	1	0	1
1 1	0	1	1	1

Таблица 3.4

x_1	x_2	$f_5(x_1, x_2) = x_1 \to x_2$	$f_6(x_1, x_2) = x_1 \leftrightarrow x_2$	$f_7(x_1, x_2) = x_1 \oplus x_2$
0	0	1	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	0

Таблица 3.5

x_1	x_2	$f_8(x_1, x_2) = x_1 \downarrow x_2$	$f_9(x_1, x_2) = x_1 \mid x_2$
0	0	1	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	0	0

В данном случае:

1) $f_1(x_1, x_2) = 0$ – *константа* 0;

2) $f_2(x_1, x_2) = 1$ – *константа* 1;

3) $f_3(x_1, x_2) = x_1 \wedge x_2$ называется *конъюнкцией* x_1 и x_2 (читается «x_1 и x_2»). Эту функцию часто называют *логическим умножением.* Возможны следующие обозначения: $x_1 \wedge x_2$ или $x_1 \,\&\, x_2$, или $x_1 \cdot x_2$, или $\min(x_1, x_2)$;

4) $f_4(x_1, x_2) = x_1 \vee x_2$ называют *дизъюнкцией* x_1 и x_2 (читается «x_1 или x_2»). Эту функцию часто называют *логическим сложением.* Возможны следующие обозначения: $x_1 \vee x_2$ или $\max(x_1, x_2)$;

5) $f_5(x_1, x_2) = x_1 \to x_2$ называется *импликацией* x_1 и x_2 (читается «x_1 имплицирует x_2» или «из x_1 следует x_2»). Эту функцию часто называют *логическим следованием*. Возможны следующие обозначения: $x_1 \to x_2$ или $x_1 \supset x_2$;

6) $f_6(x_1, x_2) = x_1 \leftrightarrow x_2$ называется *эквиваленцией* (или *эквивалентностью*) x_1 и x_2 (читается «x_1 эквивалентно x_2»). Обозначается: $x_1 \leftrightarrow x_2$;

7) $f_7(x_1, x_2) = x_1 \oplus x_2$ называется *сложением* x_1 и x_2 *по* $\mathrm{mod}\,2$ (читается «x_1 плюс x_2»). Обозначается: $x_1 \oplus x_2$;

8) $f_8(x_1, x_2) = x_1 \downarrow x_2$ называется *стрелкой Пирса* x_1 и x_2 (читается «ни x_1, ни x_2» или «не x_1 и не x_2»). В технической литературе данная

функция обычно называется *антидизъюнкцией* или «*не – или*», а также *функцией Даггера* или *функцией Вебба*. Обозначается: $x_1 \downarrow x_2$;

9) $f_9(x_1, x_2) = x_1 | x_2$ называется *штрихом Шеффера* x_1 и x_2 (читается «не x_1 или не x_2» или «x_1 и x_2 не совместны»). В технической литературе данная функция называется обычно *антиконъюнкцией* или «*не – и*». Обозначается: $x_1 | x_2$.

Данные функции часто употребляют в математической логике и кибернетике и играют такую же роль, как, например, x^n или $sinx$ в математическом анализе, поэтому их можно считать «элементарными». Символы $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \oplus, |, \downarrow$, участвующие в обозначениях элементарных функций, называются *логическими связками* (*операциями*) или *функциональными символами*.

3.4. Существенная и фиктивная переменная

Введенное выше понятие функции несовершенно, поскольку оно не позволяет выполнить переход от функции большего числа первоначальных аргументов к функции меньшего числа аргументов. Данная потребность возникает в случае, если определенные аргументы не оказывают влияния на значение функции.

Определение 3.2. Функция $f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ из P_2 *зависит существенно* от аргумента x_i, если существуют такие значения $a_1, ..., a_{i-1}$, $a_{i+1}, ..., a_n$ переменных $x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n$, что

$$f(a_1, \ldots, a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \ldots, a_n) \neq f(a_1, \ldots, a_{i-1}, 1, a_{i+1}, \ldots, a_n).$$

В этом случае переменная x_i называется *существенной*, в противном случае – *несущественной* (*фиктивной*) переменной.

Пример 3.1. Пусть булевы функции $f_1(x_1, x_2)$ и $f_2(x_1, x_2)$ заданы таблицей истинности:

x_1	x_2	f_1	f_2
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	1	0
1	1	1	0

Для этих функций переменная x_1 – существенная, а переменная x_2 – фиктивная. □

Пусть для функции $f(x_1,\ldots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\ldots,x_n)$ переменная x_i является фиктивной. Возьмем для данной функции таблицу и по ней построим новую путем вычеркивания всех строк вида $(a_1,\ldots,a_{i-1},1,a_{i+1},\ldots,a_n)$ и вычеркивания столбца для аргумента x_i.

Полученная таблица будет определять некоторую функцию $g(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots x_n)$.

Будем говорить, что функция $g(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots x_n)$ получена из $f(x_1,\ldots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\ldots,x_n)$ *путем удаления фиктивной переменной* x_i, а также, что функция $f(x_1,\ldots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\ldots,x_n)$ получается из $g(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots x_n)$ *путем введения фиктивной переменной* x_i.

Определение 3.3. Функции f_1 и f_2 называются *равными*, если функцию f_2 можно получить из f_1 путем введения и (или) удаления фиктивных переменных.

В дальнейшем всюду функции рассматриваются с точностью до фиктивных переменных, т.е. мы считаем, что если задана функция f_1, то задана и любая равная ей функция f_2.

Существует два типа функций, которые не имеют существенных переменных: функции первого типа тождественно равны 0, а второго – 1. Ввиду этого целесообразно включать в рассмотрение константы 0 и 1, рассматривая их как булевы функции от пустого множества переменных.

4. РЕАЛИЗАЦИЯ ФУНКЦИЙ ФОРМУЛАМИ

4.1. Формулы. Реализация функций формулами

Из курса математического анализа известно понятие сложной функции. Поэтому рассмотрим задачу построения сложной функции из булевых.

Пусть X – некоторый фиксированный *алфавит переменных*, $\sigma=\{\neg,\wedge,\vee,\rightarrow,\leftrightarrow,\oplus,|,\downarrow\}$ – множество *функциональных символов* (*ба-*

зис) и $\mathcal{F}$ – множество булевых функций, соответствующих функциональным символам σ, т.е. являющиеся подмножеством множества функций P_2.

Определение 4.1. *Формулой над* σ называется всякое, и только такое, выражение, которое имеет вид:

1) x – любая переменная из множества X;

2) $(\neg A), (A \wedge B), (A \vee B), (A | B), (A \downarrow B), (A \leftrightarrow B), (A \to B), (A \oplus B)$,

где A, B – это формулы над σ.

В дальнейшем будем обозначать формулы прописными буквами латинского алфавита. В тех случаях, когда нужно обратить внимание на множество тех переменных, которые участвуют в построении формулы, записывают $A(x_1,\ldots,x_n)$. Если A – произвольная формула над σ, то формулы, которые использовались для ее построения, будем называть *подформулами* формулы A.

Пример 4.1. Пусть $\mathcal{F}$ – множество «элементарных» функций.

1) $G_1 = ((x \vee y) \leftrightarrow z)$;

2) $A(x_1, x_2) = ((\overline{x}_1 \wedge (x_2 \oplus x_1)) \to x_2)$;

3) $G_2 = \neg x) \to \neg(\neg y \wedge x$.

Выражения G_1, $A(x_1, x_2)$ являются формулами над σ, а выражение G_2 формулой не является. □

Для формул над множеством функциональных символов (логических связок) σ принимаются некоторые соглашения:

1) внешние скобки у формул опускаются;

2) формула $(A \wedge B)$ записывается в виде $(A \cdot B)$ или (AB);

3) считается, что операция «$\neg$» сильнее любой двуместной операции из множества σ;

4) связка «$\wedge$» считается сильнее, чем любая другая двуместная связка из множества σ.

Сопоставим теперь каждой формуле G некоторую функцию f_G. Понятие булевой функции f_G, реализуемой формулой G, вводится рекурсивно по следующим правилам:

1) Формуле $G = x$, где $x \in X$, сопоставляется функция $f_G(x) = x$;

2) если G равна одной из формул $(\neg A), (A \wedge B), (A \vee B), (A|B)$, $(A \downarrow B), (A \leftrightarrow B), (A \to B), (A \oplus B)$, где A, B – это формулы над σ, то f_G равно соответствующей элементарной булевой функции $\neg f_A, f_A \wedge f_B$, $f_A \vee f_B$, $f_A | f_B, f_A \downarrow f_B$, $f_A \leftrightarrow f_B, f_A \to f_B, f_A \oplus f_B$. Если $f_G(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x_i \in X$, то значение ее на произвольном наборе $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $a_i \in \{0,1\}$ совпадает со значением на этом наборе для соответствующей ей элементарной булевой функции.

Таким образом, зная таблицы истинности элементарных функций (*функций базиса*), можно вычислить и таблицу истинности функции f_G, которую реализует формула G.

Пример 4.2. Пусть $f(x_1, x_2)$ – функция, которой соответствует формула $A(x_1, x_2) = [((x_1 \wedge x_2) \oplus x_1) \oplus x_2]$.

Эта формула состоит из трех подформул: $(x_1 \wedge x_2)$, $((x_1 \wedge x_2) \oplus x_1)$, $[((x_1 \wedge x_2) \oplus x_1) \oplus x_2]$. В таблице истинности (табл. 4.1) приводятся соответствующие им функции.

Таблица 4.1

x_1	x_2	$x_1 \wedge x_2$	$(x_1 \wedge x_2) \oplus x_1$	$((x_1 \wedge x_2) \oplus x_1) \oplus x_2$
0	0	0	0	0
0	1	0	0	1
1	0	0	1	1
1	1	1	0	1

.

Последний столбец определяет функцию $f(x_1, x_2)$. Очевидно, что $f(x_1, x_2) = x_1 \vee x_2$. □

4.2. Эквивалентность формул

Поскольку функция рассматривается с точностью до фиктивных переменных, мы считаем, что формула A реализует и любую функцию, равную f. Если функция $f(x_1, \ldots, x_n)$, реализуемая формулой $A(x_1, \ldots, x_n)$, имеет несущественную переменную x_i, то при $n > 1$ переменную x_i можно

удалить, заменив функцию f равной ей функцией f', а формулу A – формулой A', получающейся из A в результате отождествления переменной x_i с любой из оставшихся переменных. Очевидно, что A' является формулой над σ и реализует функцию f'.

Определение 4.2. Формулы G_1 и G_2 над σ называются *эквивалентными*, если они реализуют равные булевы функции f_{G_1} и f_{G_2}.

При оперировании с формулами, которые реализуют булевы функции, могут быть использованы приведенные ниже эквивалентности. Символ «$\circ$» в данном случае обозначает любой из указанных функциональных символов.

1. $x \circ y = y \circ x$ – коммутативность связки $\circ$, где $\circ$ – общее обозначение для логических операций $\wedge$, $\vee$, $\oplus$, $\leftrightarrow$, $|$, $\downarrow$.

2. $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$ – ассоциативность связки $\circ$, где $\circ$ – общее обозначение для логических операций $\wedge$, $\vee$, $\oplus$, $\leftrightarrow$.

3. 1) $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ – дистрибутивность конъюнкции относительно дизъюнкции;

2) $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ – дистрибутивность дизъюнкции относительно конъюнкции;

3) $x \wedge (y \oplus z) = (x \wedge y) \oplus (x \wedge z)$ – дистрибутивность конъюнкции относительно сложения по $\mathrm{mod}\,2$.

4. Правила де Моргана:

1) $\overline{x \wedge y} = \overline{x} \vee \overline{y}$; 2) $\overline{x \vee y} = \overline{x} \wedge \overline{y}$.

5. Правила поглощения:

1) $x \vee (x \wedge y) = x$; 2) $x \wedge (x \vee y) = x$.

6. 1) $x \wedge \overline{x} = x \wedge 0 = x \oplus x = 0$;

2) $x \vee \overline{x} = x \vee 1 = x \leftrightarrow x = x \to x = 1$;

3) $x \vee x = x \wedge x = x \wedge 1 = x \vee 0 = x \oplus 0 = x$;

4) $x \oplus 1 = x \to 0 = x \leftrightarrow 0 = x \,|\, x = x \downarrow x = \overline{x}$;

5) $\overline{\overline{x}} = x$.

7. 1) $x \oplus y = (x \wedge \overline{y}) \vee (\overline{x} \wedge y) = (x \vee y) \wedge (\overline{x} \vee \overline{y})$;

2) $x \leftrightarrow y = \overline{x \oplus y} = (x \wedge y) \vee (\overline{x} \wedge \overline{y}) = (x \vee \overline{y}) \wedge (\overline{x} \vee y)$;

3) $x \to y = \overline{x} \vee y = ((x \wedge y) \oplus x) \oplus 1$.

8. а) $x \mid y = \overline{x \wedge y} = \overline{x} \vee \overline{y}$; б) $x \downarrow y = \overline{x \vee y} = \overline{x} \wedge \overline{y}$.

Данные тождества легко могут быть проверены путем сопоставления функций, соответствующих правой и левой частям тождеств.

Упражнение 4.1. *Убедиться в справедливости тождеств.*

Очевидно, что *если A' – подформула формулы A, и если заменить любое из ее вхождений на эквивалентную формулу B', то формула A перейдет в формулу B, которая будет эквивалентная A.*

Этот принцип вместе с тождествами для элементарных функций, к которым присоединяются все тождества, получаемые подстановкой вместо переменных любых формул, позволяет осуществлять эквивалентные преобразования и тем самым получить новые тождества.

Пример 4.3. Используя основные тождества, установить эквивалентность формул

$$A(x, y, z) = (x \downarrow \overline{y}) \to (\overline{x} \wedge z \to ((\overline{x} \mid (y \leftrightarrow z)) \vee (\overline{x \wedge y} \oplus z))) \quad \text{и}$$

$$B(x, y, z) = ((x \to y) \mid (x \downarrow (y \wedge \overline{z})) \vee \overline{y \wedge z}).$$

Решение.

$$A(x, y, z) = (x \downarrow \overline{y}) \to (\overline{x} \wedge z \to ((\overline{x} \mid (y \leftrightarrow z)) \vee (\overline{x \wedge y} \oplus z))) =$$

$$= \left| \text{раскрытие стрелки Пирса, импликации, штриха Шеффера} \right| =$$

$$= \overline{\overline{x \vee \overline{y}}} \vee (\overline{\overline{x} \wedge z} \vee (\overline{\overline{x}} \vee (\overline{y \leftrightarrow z})) \vee ((\overline{x \wedge y} \wedge \overline{z}) \vee (\overline{\overline{x \wedge y}} \wedge z))) =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{использование двойного отрицания, законов де Моргана,} \\ \text{раскрытие эвиваленции, ликвидация лишних скобок} \end{array} \right| =$$

$$= x \vee \overline{y} \vee \overline{\overline{x}} \vee \overline{z} \vee x \vee \overline{(y \vee \overline{z}) \wedge (\overline{y} \vee z)} \vee (\overline{x \wedge y} \wedge \overline{z}) \vee (x \wedge y \wedge z) =$$

$$= x \vee \overline{y} \vee \overline{z} \vee \overline{(y \vee \overline{z})} \vee \overline{(\overline{y} \vee z)} \vee ((\overline{x} \vee \overline{y}) \wedge \overline{z}) \vee (x \wedge y \wedge z) =$$

$$= x \vee \overline{y} \vee \overline{z} \vee (\overline{y} \wedge z) \vee (y \wedge \overline{z}) \vee (\overline{x} \wedge \overline{z}) \vee (\overline{y} \wedge \overline{z}) \vee (x \wedge y \wedge z) =$$

$= \left|\text{использование правила поглощения}\right| =$

$= x \vee \overline{y} \vee \overline{z} \vee (\overline{x} \wedge \overline{z}) \vee (\overline{y} \wedge \overline{z}) \vee (x \wedge y \wedge z) =$

$= \left|\text{использование правила поглощения}\right| = x \vee \overline{y} \vee \overline{z}$.

Преобразуем формулу B, используя соответствующие эквивалентности:

$B(x, y, z) = ((x \to y)\left|(x \downarrow (y \wedge \overline{z}))\right) \vee \overline{y \wedge z} =$

$= \left|\text{раскрытие стрелки Пирса, импликации}\right| =$

$= \overline{(\overline{x} \vee y)} \vee \overline{(x \downarrow (y \wedge \overline{z}))} \vee \overline{y} \vee \overline{z} =$

$= \left|\text{законы де Моргана, раскрытие стрелки Пирса, двойное отрицание}\right| =$

$= (x \wedge \overline{y}) \vee (x \vee (y \wedge \overline{z})) \vee \overline{y} \vee \overline{z} = (x \wedge \overline{y}) \vee x \vee (y \wedge \overline{z}) \vee \overline{y} \vee \overline{z} =$

$= \left|\text{используем правила поглощения}\right| = x \vee \overline{y} \vee \overline{z}$.

Таким образом, эквивалентность формул A и B доказана. □

Пример 4.4. Показать, что x – фиктивная переменная функции f, реализовав для этой цели функцию f формулой, не содержащей явно переменную x: $f = ((x \oplus y) \to z) \wedge (\overline{z \to y})$.

Решение.

Преобразуем функцию:

$f = ((x \oplus y) \to z) \wedge \overline{z \to y} = \left|\text{раскрываем связки } \oplus \text{ и } \to\right| =$

$= (\overline{(x \vee y) \wedge (\overline{x} \vee \overline{y})} \vee z) \wedge \overline{(\overline{z} \vee y)} = \left|\text{используем законы де Моргана}\right| =$

$= \left[\overline{(x \vee y)} \vee \overline{(\overline{x} \vee \overline{y})} \vee z\right] \wedge (z \wedge \overline{y}) = \left[(\overline{x} \wedge \overline{y}) \vee \left(x \wedge y\right) \vee z\right] \wedge z \wedge \overline{y} =$

$= \left[(\overline{x} \wedge \overline{y}) \vee \left(x \wedge y\right) \vee z\right] \wedge (z \vee 0) \wedge \overline{y} = (z \vee \left[((\overline{x} \wedge \overline{y}) \vee (x \wedge y) \wedge 0\right]) \wedge \overline{y} =$

$= \left(z \vee 0\right) \wedge \overline{y} = z \wedge \overline{y}$ □

Булевы функции можно использовать для решения некоторого класса логических задач.

Пример 4.5. По каналу связи могут передаваться три сообщения: *A*, *B* и *C*. Известно, что к данному моменту времени осуществилось каждое из следующих событий:

1) передано не более чем одно из сообщений *A* и *B*;

2) сообщение *A* могло быть передано в том и только в том случае, если были переданы оба сообщения *B* и *C*;

3) передано хотя бы одно из сообщений *A* и *C*.

Вытекает ли отсюда, что сообщение *B* не передавалось, а сообщение *C* было передано?

Решение. Сопоставим сообщениям *A*, *B* и *C* булевы переменные *x*, *y* и *z* соответственно. Считаем, что $x=1$ (аналогично $y=1$ и $z=1$) в том и только в том случае, если сообщение *A* (соответственно сообщение *B* и сообщение *C*) было передано по каналу связи.

Событию 1) отвечает булева функция $(x\wedge\overline{y})\vee(\overline{x}\wedge y)\vee(\overline{x}\wedge\overline{y})=$ $=\overline{x}\vee\overline{y}$; событиям 2) и 3) отвечают соответственно следующие булевы функции: $x\leftrightarrow(y\wedge z)$ и $x\vee z$. Каждое из этих событий осуществляется тогда и только тогда, когда $\overline{x\wedge y}=1, (x\leftrightarrow(y\wedge z))=1, x\vee z=1$.

Булева функция $f(x;y;z)$, соответствующая всем трем событиям, имеет вид

$$f(x;y;z)=(\overline{x}\vee\overline{y})\wedge(x\leftrightarrow(y\wedge z))\wedge(x\vee z).$$

Преобразуем это выражение:

$$f(x;y;z)=(\overline{x}\vee\overline{y})\wedge(x\leftrightarrow(y\wedge z))\wedge(x\vee z)=(\overline{x}\vee\overline{y})\wedge(x\vee\overline{y\wedge z})\wedge(\overline{x}\vee(y\wedge z))\wedge$$

$$\wedge(x\vee z)=(\overline{x}\vee\overline{y})\wedge(x\vee\overline{y}\vee\overline{z})\wedge(\overline{x}\vee y)\wedge(\overline{x}\vee z)\wedge(x\vee z)=$$

$$=(\overline{x}\vee(\overline{y}\wedge y))\wedge(x\vee\overline{y}\vee\overline{z})\wedge(z\vee(\overline{x}\wedge x))=\overline{x}\wedge(x\vee\overline{y}\vee\overline{z})\wedge z=\overline{x}\wedge\overline{y}\wedge z.$$

Отсюда следует, что $f(x;y;z)=1$ тогда и только тогда, когда $x=0$, $y=0$ и $z=1$, т.е. когда сообщения *A* и *B* не передавались, а сообщение *C* было передано.

Таким образом, на вопрос, поставленный в задаче, ответ утвердительный.

Последний шаг в решении данной задачи можно расписать подробнее: для выяснения того, вытекает ли событие, указанное в вопросе задачи, из осуществимости событий 1), 2) и 3), надо посмотреть, выполняется ли

эквивалентность $f(x;y;z)\to(\overline{y}\wedge z)=1$ (функция $\overline{y}\wedge z$ соответствует событию «сообщение *B* не передавалось, а сообщение *C* было передано»).

Имеем

$$(\overline{x}\wedge\overline{y}\wedge z)\to(\overline{y}\wedge z)=\overline{(\overline{x}\wedge\overline{y}\wedge z)}\vee(\overline{y}\wedge z)=x\vee y\vee\overline{z}\vee(\overline{y}\wedge z)=$$

$$=x\vee y\vee\overline{z}\vee\overline{y}=1,$$

т.е. действительно $f(x;y;z)\to(\overline{y}\wedge z)=1$.

□

4.3. Совершенные дизъюнктивная и конъюнктивная нормальная формы (СДНФ и СКНФ) булевых функций

Рассмотрим следующие виды аналитического задания булевых функций, которые называются *совершенной дизъюнктивной нормальной формой* (*СДНФ*) и *совершенной конъюнктивной нормальной формой* (*СКНФ*).

Пусть булева функция $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ задана таблицей 4.2.

Таблица 4.2

x_1	…	x_{n-1}	x_n	$f(x_1,\ldots,x_{n-1},x_n)$
0	…	0	0	$f(0,\ldots,0,0)$
0	…	0	1	$f(0,\ldots,0,1)$
0	…	1	0	$f(0,\ldots,1,0)$
…	…	…	…	…
1	…	1	1	$f(1,\ldots,1,1)$

Определение 4.3. Булева функция $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ вида

$$K_\sigma(x)=x_1^{\sigma_1}\wedge x_2^{\sigma_2}\wedge\ldots\wedge x_n^{\sigma_n}$$

называется *совершенной элементарной конъюнкцией* или *конъюнктом*.

Здесь участвуют все переменные или их отрицания без повторений и обозначены через $x_i^{\sigma_i},\sigma_i\in\{0,1\}$, переменная $x_i^1=x_i$ или ее отрицание $x_i^0=\overline{x}_i$. Например, $x\wedge\overline{y}\wedge\overline{z}$ – элементарная конъюнкция, $x\wedge\overline{y\wedge z}$ – неэлементарная конъюнкция.

Число различных конъюнктов n переменных равно 2^n. Каждый конъюнкт обладает следующим важным свойством, которое сформулируем в виде теоремы.

Теорема 4.1*. *Конъюнкт* $K_\sigma(x) = x_1^{\sigma_1} \wedge x_2^{\sigma_2} \wedge \ldots \wedge x_n^{\sigma_n}$ *равен* 1 *лишь на одном наборе* $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ *нулей и единиц, когда* $x_i = \sigma_i$, *т.е.* $K_\sigma(\sigma) = 1$.

Из этой теоремы следует, что дизъюнкция m различных конъюнктов равна 1 лишь на m наборах из нулей и единиц, соответствующих этим конъюнктам.

Теорема 4.2*. *Если булева функция* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *не является тождественно равной нулю и задана таблицей с* $m \geq 1$ *единичными значениями, то существует единственная дизъюнкция m различных конъюнктов, соответствующих этим значениям, которая задает булеву функцию*

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bigvee_{\sigma,\, f(\sigma)=1} K_\sigma(x) = \bigvee_{f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)=1} x_1^{\sigma_1} \wedge x_2^{\sigma_2} \wedge \ldots \wedge x_n^{\sigma_n}$$

и называется совершенной дизъюнктивной нормальной формой (*СДНФ*) *данной булевой функции.*

По аналогии можно ввести понятия *совершенной элементарной дизъюнкции*, а также *совершенной конъюнктивной нормальной формы* (СКНФ).

Определение 4.3. Булева функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ вида

$$D_\sigma(x) = x_1^{\sigma_1} \vee x_2^{\sigma_2} \vee \ldots \vee x_n^{\sigma_n}$$

называется *совершенной элементарной дизъюнкцией* или *дизъюнктом*.

Теорема 4.3*. *Дизъюнкт* $D_\sigma(x) = x_1^{\sigma_1} \vee x_2^{\sigma_2} \vee \ldots \vee x_n^{\sigma_n}$ *равен* 0 *лишь на одном наборе* $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ *нулей и единиц, когда* $x_i = \overline{\sigma}_i$, *т.е.* $D_\sigma(\sigma) = 0$.

Теорема 4.4*. *Если булева функция* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *не является тождественно равной единице и задана таблицей с* $m \geq 1$ *нулевыми значениями, то существует единственная конъюнкция m различных дизъюнктов, соответствующих этим значениям, которая задает булеву функцию*

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bigwedge_{\sigma,\, f(\sigma)=0} D_\sigma(x) = \bigwedge_{f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)=0} x_1^{\overline{\sigma}_1} \vee x_2^{\overline{\sigma}_2} \vee \ldots \vee x_n^{\overline{\sigma}_n}$$

и называется совершенной конъюнктивной нормальной формой (*СКНФ*) *данной булевой функции.*

Пример 4.6. Составить СДНФ и СКНФ для следующих функций:

$$x \to y, \quad x \oplus y, \quad x \downarrow y.$$

Решение. Воспользуемся соответствующей им таблицей истинности:

x	y	$x \to y$	$x \oplus y$	$x \downarrow y$
0	0	1	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	1	0
1	1	1	0	0

Чтобы представить функции в СДНФ, определяем, на каких наборах значения переменной функция принимает значение равное 1.

Для функции $x \to y$: (0, 0), (0, 1), (1, 1);

для функции $x \oplus y$: (0, 1), (1, 0);

для функции $x \downarrow y$: (0, 0).

Отсюда следует

$$(x \to y)_{СДНФ} = (\overline{x} \wedge \overline{y}) \vee (\overline{x} \wedge y) \vee (x \wedge y);$$

$$(x \oplus y)_{СДНФ} = (\overline{x} \wedge y) \vee (x \wedge \overline{y});$$

$$(x \downarrow y)_{СДНФ} = \overline{x} \wedge \overline{y}.$$

Чтобы представить функции в СКНФ, определяем, на каких наборах значения переменной функция принимает значение равное 0.

Для функции $x \to y$: (1, 0);

для функции $x \oplus y$: (0, 0), (1, 1);

для функции $x \downarrow y$: (0, 1), (1, 0), (1, 1).

Отсюда следует

$$(x \to y)_{СКНФ} = \overline{x} \vee y;$$

$$(x \oplus y)_{СКНФ} = (x \vee y) \wedge (\overline{x} \vee \overline{y});$$

$$(x \downarrow y)_{СКНФ} = (x \vee \overline{y}) \wedge (\overline{x} \vee y) \wedge (\overline{x} \vee \overline{y}).$$

□

Пример 4.7. Для функции, заданной табличным способом, составить СДНФ и СКНФ:

x	y	z	$f(x, y, z)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

Решение. Чтобы представить функции в СДНФ, определяем, на каких наборах значений переменной функция принимает значение равное 1. Соответствующие этим наборам конъюнкции запишем рядом с таблицей.

Для представления функции в СКНФ определяем, на каких наборах значений переменной функция принимает значение равное 0. И тоже рядом с таблицей запишем дизъюнкции, соответствующие этим наборам.

x	y	z	$f(x, y, z)$		
0	0	0	0		$x \vee y \vee z$
0	0	1	0		$x \vee y \vee \overline{z}$
0	1	0	1	$\overline{x} \wedge y \wedge \overline{z}$	
0	1	1	0		$x \vee \overline{y} \vee \overline{z}$.
1	0	0	1	$x \wedge \overline{y} \wedge \overline{z}$	
1	0	1	1	$x \wedge \overline{y} \wedge z$	
1	1	0	1	$x \wedge y \wedge \overline{z}$	
1	1	1	0		$\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z}$

Таким образом, получаем следующие СДНФ и ДКНФ для данной функции:

$$f(x, y, z)_{СДНФ} = (\overline{x} \wedge y \wedge \overline{z}) \vee (x \wedge \overline{y} \wedge \overline{z}) \vee (x \wedge \overline{y} \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge \overline{z});$$

$$f(x, y, z)_{СКНФ} = (x \vee y \vee z) \wedge (x \vee y \vee \overline{z}) \wedge (x \vee \overline{y} \vee \overline{z}) \wedge (\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z}).$$

□

Итак, в качестве средства для задания булевых функций наряду с таблицами можно использовать язык формул над множеством функций, состоящим из отрицания, конъюнкции и дизъюнкции.

Поскольку табличный язык по громоздкости примерно эквивалентен языку СДНФ (СКНФ), то можно утверждать, что язык формул, использующий отрицания, конъюнкции и дизъюнкции, не хуже языка таблиц. Можно показать, что на самом деле он существенно лучше табличного языка. Для пояснения рассмотрим функцию

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_{20}) = x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_{20}.$$

Данная функция в правой части насчитывает 39 символов (20 символов переменных и 19 символов $\vee$), таблица для $f(x_1, x_2, \ldots, x_{20})$ содержит 2^{20}, т.е. более миллиона строк.

4.4. Схемы из функциональных элементов

Всякое дискретное устройство имеет n входов $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ и k выходов $\{y_1, y_2, \ldots, y_k\}$. Отвлекаясь от конкретного внутреннего строения устройства, его можно считать черным ящиком, рис. 4.1.

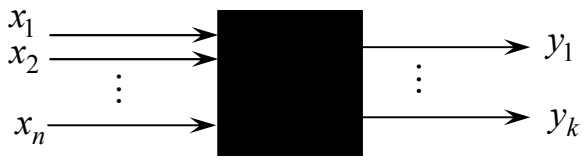


Рис. 4.1

Значения на входе и выходе устройства считаются бинарными 0 или 1. При этом предполагается, что дискретное устройство – функциональная система, т.е. каждому конкретному набору значений на своем входе устройство вырабатывает единственный набор значений на своем выходе.

Дискретные устройства могут быть реализованы из разных элементов. Простейшими дискретными устройствами можно считать устройства, собранные из контактных схем (рис. 4.2 и 4.3), которые рассмотрены в пункте 1.5.

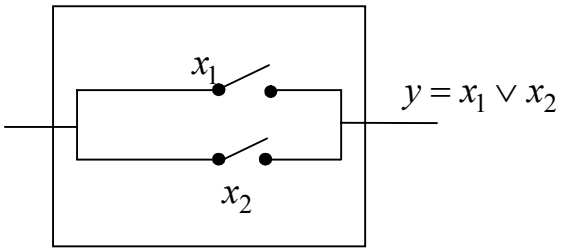


Рис. 4.2

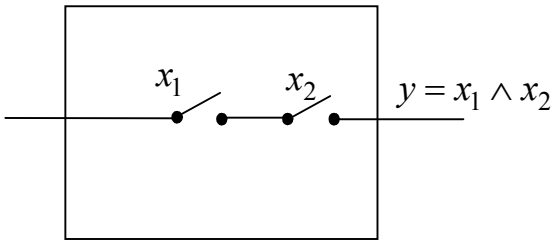


Рис. 4.3

Кроме термина «*контактная схема*» или «*переключательная схема*» используют термин «*коммутационная схема*», или «*переключательная функция*». Связь переключательных функций с булевыми функциями впервые исследовал К. Шеннон.

Каждый контакт обозначается как переменная x. Контакт может быть в любом исполнении – механический, электрический, электронный или др. Замыкание контакта соответствует значению переменной $x = 1$, размыкание – значению переменной $x = 0$. Если контакт обозначен $\overline{x}$, то замыкание контакта соответствует, наоборот, значению $x = 0$, а размыкание – $x = 1$. Если на выходе контактной схемы есть электрический потенциал (цепь замкнута), то считают значение на выходе $y = 1$. Если потенциала на выходе нет (цепь разомкнута), то принимают значение на выходе $y = 0$.

Всякой контактной схеме можно сопоставить экспериментальную таблицу значений ее выхода для различных входов, проведя измерения ее выхода для всевозможных 2^n входных наборов. Очевидно, для каждой контактной схеме с одним выходом ее экспериментальная таблица является некоторой булевой функцией. Такая булева функция является математической моделью контактной схемы.

Как уже отмечалось выше, различают три типа задач, которые связаны с контактными схемами.

Задача анализа. Дана контактная схема с одним выходом. Требуется найти ее математическую модель в виде булевой функции.

Задача синтеза. Дана математическая модель контактной схемы в виде булевой функции. Требуется построить соответствующую этой модели контактную схему с одним выходом.

Задача минимизации. Даны контактные схемы с одним выходом, некоторая числовая характеристика L_{KC} – сложность контактной схемы (например, число контактов в контактной схеме). Требуется найти контакт-

ную схему с такой же экспериментальной таблицей, но с минимальной сложностью.

На рис. 4.2 и 4.3 изображены две контактные схемы и приведены их математические модели в виде булевых функций. Отметим, что последовательное соединение контактов соответствует операции конъюнкции переменных, а параллельное соединение – дизъюнкции переменных.

Определение 4.4. Если дискретные устройства выполнены не из контактных, а из некоторых базовых дискретных устройств, то про такие устройства говорят, что они – *схемы из функциональных элементов*, а сами базовые дискретные устройства называют *функциональными элементами.*

В качестве функциональных элементов обычно берут такие устройства, для которых их булевы функции образуют базис в классе всех булевых функций. В этом случае из таких функциональных элементов можно получить схемы любых дискретных устройств, моделируемых булевыми функциями. На рис. 4.4 приведены функциональные элементы, соответствующие стандартному базису булевых функций $\{\wedge, \vee, \neg\}$. Эти элементы называют *конъюнктором*, *дизъюнктором*, *инвертором.*

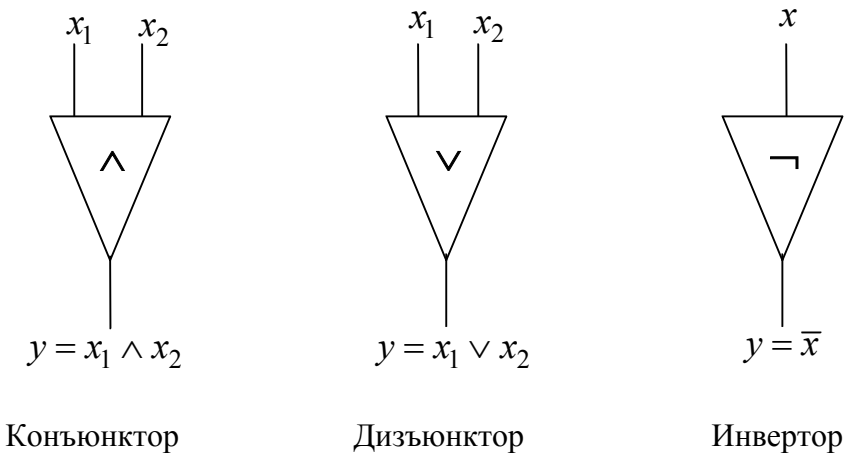


Рис. 4.4

2-битовый сумматор – это устройство, которое вычисляет сумму двузначных двоичных чисел, выдавая в качестве ответа трехзначное двоичное число. Обратим внимание на то, что это дискретное устройство является центральным в компьютерной технике. Изобретение такого сумматора в середине XX века позволило главному теоретику Джону фон Нейману создать первую электронную вычислительную машину.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Сформулировать определение высказывания. Привести примеры.

2. Сформулировать определение предиката. Привести примеры.

3. Какое высказывание называется простым? Какое высказывание называется сложным?

4. Дайте определения логическим операциям: отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, импликация, эквиваленция. Для каждой операции составьте таблицу истинности.

5. Укажите, какие из следующих предложений являются высказываниями, какие предикатами. Установите истинность простых высказываний. В сложных высказываниях определите логическую операцию, установите истинность:

1) «$8833 < 88^2 + 33^2$»;
2) «Марс и Венера – планеты Солнечной системы»;
3) «Какой сегодня день?»;
4) «Если 18 делится на 4, то 18 делится на 2»;
5) «$x^2 - y + 1 = 0$»;
6) «Река впадает в море»;
7) «Будь решительней!»;
8) «А.С. Пушкин родился в 1799 году»;
9) «Христофор Колумб открыл Америку или Африку»;
10) «$10 < 9 + 1$ тогда и только тогда, когда $9 < 8 + 1$».

6. Сформулируйте определение формулы логики высказывания.

7. Какие формулы называются равносильными? Какие предикаты называются равносильными?

8. Сформулируйте свойства и законы логики высказывания.

9. Какие высказывания называются тавтологией? Какие – противоречием?

10. Как интерпретируются в электрической сети истинностные значения высказываний? Какое устанавливается соответствие между контактом X электрической сети и высказывательной переменной x?

11. Какая схема соответствует дизъюнкции $p \vee q$; конъюнкции $p \wedge q$; отрицанию $\overline{p}$?

12. Чем являются формулы логики высказывания для переключательных схем?

13. Дайте определение булевой функции.

14. Как обозначается и записывается множество булевых функций?

15. Какими способами можно задать булеву функцию?

16. Что представляет собой область определения булевой функции от n аргументов?

17. Пусть булева функция содержит две переменные. Запишите область определения этой функции. Определите количество булевых функций от двух переменных.

18. Булева функция от двух переменных принимает значение 1 на следующем наборе значений переменных: $(1,1)$. Представьте эту функцию графически.

19. Перечислите булевы функции от одной переменной. Какие значения принимают булевы функции в зависимости от значений переменной?

20. Перечислите булевы функции от двух переменных. Какие значения принимают булевы функции в зависимости от наборов значений переменной?

21. Булева функция от двух переменных принимает значение 1 на следующем наборе значений переменных: $(1,1)$. Представьте эту функцию аналитически.

22. Какая переменная называется существенной, а какая – фиктивной?

23. Как происходит удаление фиктивной переменной?

24. Какие функции называются равными?

25. Сформулируйте определение формулы в теории булевых функций.

26. Из приведенных выражений выберите те, которые будут формулами. Обоснуйте свой выбор.

1) $M_1 = ((\overline{x_1 \wedge x_2}) \leftrightarrow x_1) \vee \overline{x}_2$;

2) $M_2 = x_1 \wedge (x_2 \leftrightarrow) \wedge \overline{x}_2$;

3) $M_3(x, y) = ((x \to y \wedge) \vee \overline{y})$;

4) $M_4(a,b,c) = ((a \to \overline{b}) \vee (\overline{a} \wedge c)) \leftrightarrow b$.

27. Поясните, как булева функция реализуется формулой.

28. Что называют СДНФ и СКНФ?

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

1. Высказывания. Формулы логики высказываний

1.1. Пусть p, q и r обозначают следующие высказывания:

p: *Он купит компьютер.*

q: *Он будет праздновать всю ночь.*

r: *Он выиграет в лотерею.*

Требуется:

1) записать в символической форме такие высказывания:

1.1) *Неверно, что он выиграет в лотерею и купит компьютер.*

1.2) *Он купит компьютер и будет праздновать всю ночь или выиграет в лотерею.*

1.3) *Если он выиграет в лотерею, то он купит компьютер и будет праздновать всю ночь.*

2) Интерпретировать следующие выражения как обычные высказывания:

2.1) $r \to q$; 2.2) $(\overline{p} \vee \overline{q}) \to r$.

1.2. Выполнить упражнение 1.1. из п. 1.4.

1.3. Выполнить упражнение 1.2. из п. 1.4.

1.4. Построить таблицы истинности формул. Определить, какие из следующих формул являются тавтологиями, а какие – противоречиями:

1) $((x \wedge x) \to \overline{x}) \vee x$; 5) $\overline{(a \to b) \leftrightarrow (\overline{b} \to \overline{a})}$;

2) $p \wedge (q \wedge (\overline{p} \vee \overline{q}))$;

3) $\overline{(\overline{a} \wedge b)} \vee (b \wedge ((a \wedge b) \vee b))$;

4) $((a \vee \overline{b}) \to b) \wedge (\overline{a} \vee b)$;

6) $\overline{(\overline{a} \vee b) \wedge (\overline{b} \vee c)} \vee \overline{a} \vee c$;

7) $(q \to r) \to ((p \vee q) \to (p \vee r))$;

8) $(\overline{(x \vee y)} \to (x \vee z)) \leftrightarrow (\overline{y} \to z)$.

1.5. При каких значениях переменных x, y, z следующие формулы принимают значение ложь:

1) $(x \vee y) \vee ((\overline{x} \leftrightarrow y) \vee (x \to \overline{y}))$;

2) $((x \to (y \wedge z)) \to (\overline{y} \to \overline{x})) \to \overline{y}$;

3) $((x \vee y) \vee z) \to ((x \vee y) \wedge (x \vee z))$?

1.6. Доказать, что если формулы $(a \vee b)$ и $(\overline{a} \vee c)$ тождественно истинны, то формула $(b \vee c)$ тождественно истинна.

1.7. Пусть каждому множеству поставлено в соответствие некоторая высказывательная переменная, т.е. $A \Rightarrow a, B \Rightarrow b, C \Rightarrow c, U \Rightarrow И$. Каждой операции из теории множеств ставится в соответствие операция из теории логики высказываний, т.е. $\bigcup \Rightarrow \vee, \bigcap \Rightarrow \wedge$, дополнение множества $\overline{X} \Rightarrow$ отрицание $\overline{x}$. $A \setminus B = A \bigcap \overline{B}$, значит, в логике высказываний $A \setminus B \Rightarrow a \wedge \overline{b}$.

Доказать, что для произвольных множеств A, B и C и универсального множества U справедливы следующие равенства:

1) $A \bigcap (B \bigcup C) = (A \bigcap B) \bigcup (A \bigcap C)$;

2) $\overline{A \bigcup B} = \overline{A} \bigcap \overline{B}$;

3) $A \setminus (A \setminus B) = A \bigcap B$;

4) $B \bigcap (A \setminus B) = \varnothing$.

1.8. Используя законы алгебры логики, упростить следующие формулы:

1) $S(x; y) = x \wedge (y \wedge (\overline{x} \vee \overline{y}))$;

2) $A(a; b; c) = (a \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge \overline{(b \wedge c)})$;

3) $M(p; q; r) = (\overline{p} \vee r) \wedge \overline{p \wedge r} \wedge (q \vee \overline{r}) \wedge \overline{q \wedge r}$.

2. Переключательные схемы

2.1. Построить переключательные схемы для заданных формул логики высказываний. Определить, при каких положениях переключателей ток в сети отсутствует.

1) $((a \vee b) \wedge \overline{b}) \vee (\overline{a} \wedge b)$;

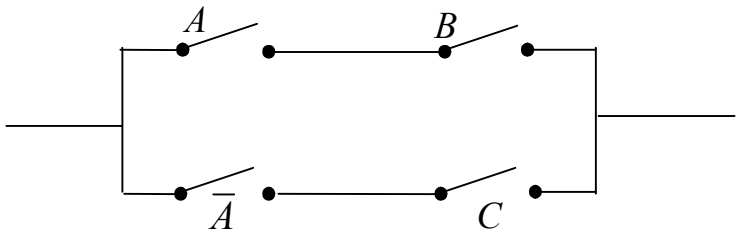
2) $(x \wedge (\overline{y} \vee z)) \vee (y \wedge (\overline{x} \vee z))$;

3) $(p \wedge q) \vee (\overline{p} \wedge q) \vee (\overline{p} \wedge \overline{q})$;

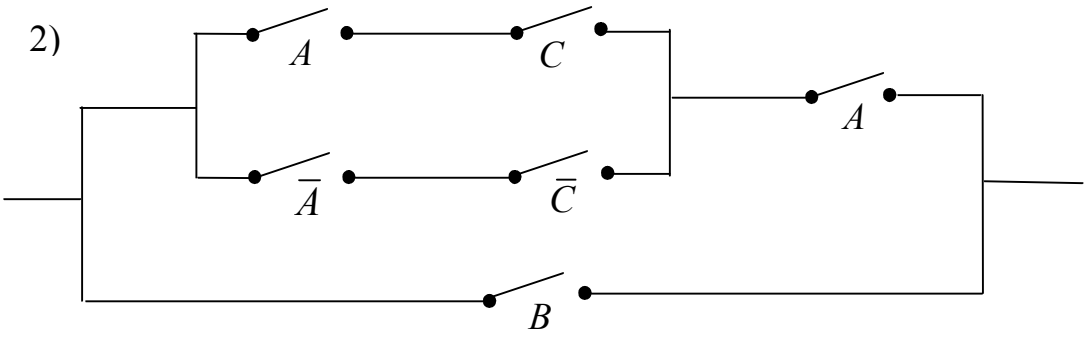
4) $a \vee (\overline{b} \wedge c \wedge d) \vee (\overline{b} \wedge \overline{c} \wedge \overline{d}) \vee b \vee (\overline{b} \wedge \overline{c} \wedge d)$.

2.2. Составить формулы логики высказываний для следующих схем, если возможно, формулы упростить:

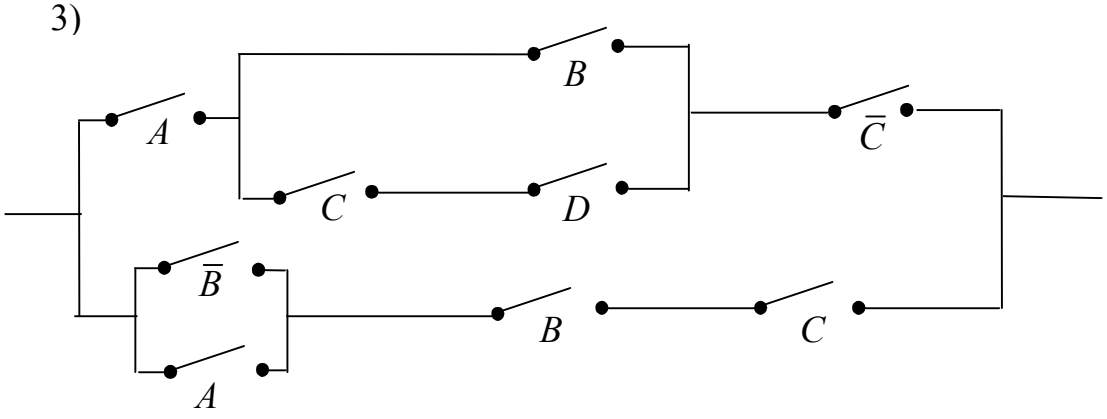
1)



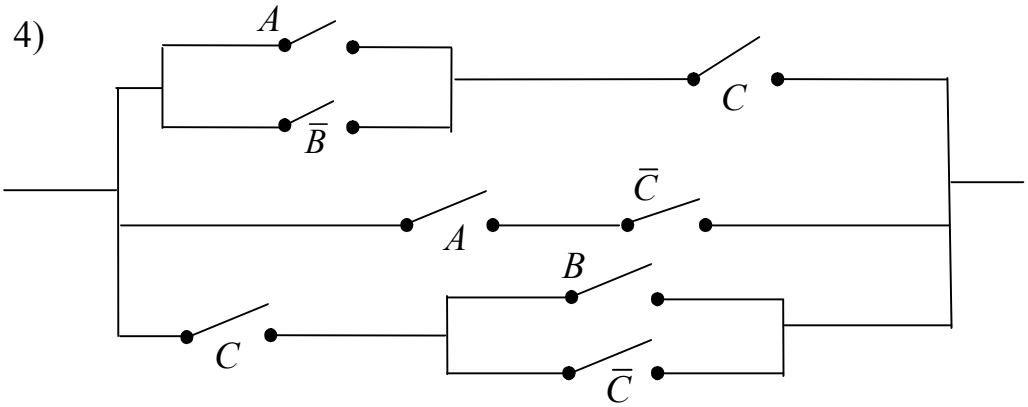
2)



3)



4)



2.3. По установленному сигналу каждый игрок замыкает или размыкает переключатель, находящийся под его управлением. Построить схему так, чтобы в случае если игроки делают одно и то же, загоралась сигнальная лампочка.

3. Булевы функции. Реализация функций формулами

3.1. Выполнить упражнение 4.1. из п. 4.2.

3.2. Построить таблицы истинности для указанных формул. Определить, при каких значениях переменных формула принимает значение, равное 1.

1) $G_1 = ((x \to \overline{y}) \vee (x \oplus \overline{x})) \wedge (y \mid x)$;

2) $G_2 = \overline{(x \to y) \vee (\overline{y} \to x)} \downarrow ((x \oplus y) \vee \overline{y})$;

3) $A(x, y, z) = ((x \vee y) \oplus (x \to (y \wedge z))) \mid (x \downarrow z)$;

4) $G(x, y, z) = \overline{(\overline{x} \vee y)} \oplus (((x \to z) \leftrightarrow y) \wedge \overline{z})$;

3.3. Построив таблицы истинности соответствующих функций, выяснить, эквивалентны ли формулы A и B:

1) $A(x, y, z) = (x \to y) \oplus ((y \to \overline{z}) \to (x \wedge y))$ и $B(x, y, z) = \overline{(y \wedge z) \to x}$;

2) $A(x, y, z) = (x \wedge \overline{y}) \downarrow (\overline{x} \to (y \to z))$ и $B(x, y, z) = \overline{y \to (x \vee z)}$;

3) $A(x, y, z) = \overline{(x \downarrow y) \vee (x \leftrightarrow z)} \mid (x \oplus (y \wedge z))$ и

$B(x, y, z) = (\overline{x} \wedge (y \wedge z)) \vee \overline{x \to z}$;

4) $A(x, y, z) = (x|\overline{y}) \to ((y \downarrow \overline{z}) \to (x \oplus z))$ и

$$B(x, y, z) = (x \wedge y \wedge z) \oplus (\overline{x} \to z);$$

5) $A(x, y, z) = \overline{x \oplus (y \wedge z)} \wedge \overline{\overline{y} \to (x \wedge z)} \wedge (\overline{x} \downarrow y)$ и

$$B(x, y, z) = \overline{((x \wedge y) \to (y \downarrow z)) \vee (x \wedge z)} \wedge z.$$

3.4. Используя эквивалентности, упростить следующие формулы:

1) $B(x, y) = ((\overline{x} \to y) \wedge (\overline{x} \to \overline{y})) \to x$;

2) $S(x, y, z) = (x \wedge \overline{z}) \vee (z \wedge (y \vee \overline{z})) \vee ((x \vee \overline{y}) \wedge z)$;

3) $C(a, b, c, d) = a \vee d \vee (\overline{a} \wedge b \wedge c) \vee (\overline{a} \wedge \overline{b} \wedge c) \vee (\overline{a} \wedge \overline{b} \wedge \overline{c})$;

4) $W(a, b, c) = \overline{a \vee b \vee c} \vee \overline{b} \vee (\overline{a \vee \overline{b} \vee c} \wedge \overline{\overline{a} \vee b \vee c}) \vee (\overline{a} \wedge \overline{b})$;

5) $B(p, q, r) = (p \to r) \wedge \overline{((q \to r) \to (p \vee q)) \to r}$.

3.5. Используя эквивалентности, доказать эквивалентность формул A и B:

1) $A(x, y) = (\overline{x} \to y) \to ((\overline{x} \wedge y) \leftrightarrow (x \oplus y))$ и $B(x, y) = (\overline{(x \wedge y)} \to x) \to y$;

2) $A(x, y, z) = (x \oplus (y \wedge z)) \to (\overline{x} \to (y \to z))$ и

$$B(x, y, z) = x \to ((y \to z) \to x);$$

3) $A(x, y, z) = (\overline{x} \to (\overline{y} \to (x \leftrightarrow z))) \wedge (x \leftrightarrow (y \to (z \vee (x \to y))))$ и

$$B(x, y, z) = (x \to (y \to z)) \to x.$$

3.6. Показать, что x_1 – фиктивная переменная функции f, реализовав для этой цели функцию f формулой, не содержащей явно переменную x_1:

1) $f(x_1, x_2) = (x_2 \to x_1) \wedge (x_2 \downarrow x_1)$;

2) $f(x_1, x_2) = (x_1 \leftrightarrow x_2) \vee (x_1 | x_2)$;

3) $f(x_1, x_2, x_3) = (((x_1 \vee x_2) \to (x_1 \leftrightarrow x_3)) \wedge x_1) \to (x_2 \vee x_3)$;

4) $f\left(x_1, x_2, x_3\right) = ((x_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3) \to ((x_1 \wedge x_2)|x_3)) \oplus ((x_2 \to x_1) \wedge x_3)$;

5) $f\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right) = ((x_1 \wedge x_2) \vee (x_3 \wedge x_4)) \wedge (x_1 \oplus x_2 \oplus x_3) \to x_4) \oplus$

$$\oplus((x_1 \wedge x_2) \wedge (x_3 \to x_4) \vee (x_3 \wedge x_4)).$$

3.7. Перечислить существенные переменные следующих функций:

1) $f\left(x_1, x_2\right) = ((x_1 \vee x_2) \to (x_1 \wedge x_2)) \oplus ((x_1 \to x_2) \wedge (x_2 \to x_1))$;

2) $f\left(x_1, x_2\right) = (x_1 \to ((x_2 \to x_1) \to x_2))) \leftrightarrow (x_1 \vee x_2)$;

3) $f\left(x_1, x_2\right) = (x_1 \oplus (x_2 \to (x_1 \leftrightarrow x_2))) \vee \overline{x_1 \to x_2}$;

4) $f\left(x_1, x_2, x_3\right) = ((x_1 \downarrow (x_2 | x_3)) \downarrow (x_2|(x_1 \downarrow x_3))) \downarrow (x_1|x_2)$.

4. Совершенная дизъюнктивная и совершенная конъюнктивная нормальные формы

4.1. Для булевых функций, заданных таблично, построить СДНФ и СКНФ:

1)

p	q	r	$f(p,q,r)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

2)

a	b	c	$f(a,b,c)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

4.2. Для данных булевых функций построить таблицы истинности. По таблицам истинности построить СДНФ и СКНФ:

1) $f(x_1, x_2) = \overline{(x_1 \wedge x_2)} \vee (x_1 \downarrow (x_2 \vee (\overline{x}_1 \to x_2)))$;

2) $f(x_1, x_2, x_3) = (\overline{x}_1 \to (x_2 \to x_3)) \oplus (x_1 \wedge \overline{x}_2 \wedge x_3)$;

3) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \leftrightarrow x_2) \vee ((x_1 \wedge x_3) \leftrightarrow x_4) \vee (x_2 \wedge \overline{x}_3)$.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение ... 3
Рабочая программа ... 4
Раздел 1. Элементы теории множеств ... 11
1. Множества. Операции над множествами. Декартово произведение ... 11
1.1. Множество. Способы задания множеств ... 11
1.2. Подмножество. Равенство множеств. Универсум. Булеан ... 13
1.3. Операции над множествами ... 14
1.4. Декартово произведение множеств ... 19
2. Мощность множества. Элементы комбинаторики ... 21
2.1. Мощность множества ... 21
2.2. Элементы комбинаторики ... 23
3. Отношения на множествах. Свойства бинарных отношений ... 32
3.1. Бинарные отношения ... 32
3.2. Свойства бинарных отношений ... 38
3.3. Отношение эквивалентности ... 41
3.4. Отношение частичного порядка ... 43
4. Отображения (функции) ... 45
5. Основные алгебраические системы ... 50
5.1. Алгебраическая операция ... 50
5.2. Полугруппа. Группа ... 53
5.3. Кольцо. Поле ... 55
Вопросы и задания для самоконтроля ... 59
Задания для практических занятий ... 63
1. Способы задания множеств. Равенство множеств. Булеан ... 63
2. Операции над множествами ... 65
3. Декартово произведение ... 68
4. Комбинаторные принципы сложения и умножения ... 70
5. Перестановки. Размещения. Сочетания ... 71
6. Число разбиений множества ... 71
7. Бином Ньютона. Полиномиальная формула ... 72
8. Формула включений и исключений ... 73
9. Бинарные отношения. Свойства бинарных отношений ... 74
10. Отображения, функции ... 75
11. Алгебраическая операция ... 77
12. Полугруппа. Группа ... 79
13. Кольцо. Поле ... 80
Раздел 2. Булевы функции ... 81
1. Высказывания. Предикаты ... 81
1.1. Высказывания ... 82
1.2. Предикаты ... 84
1.3. Логические операции ... 85
1.4. Формулы логики высказываний ... 91
1.5. Применение алгебры высказываний в технике ... 97
2. Булевы алгебры ... 103
3. Булевы функции. Способы задания ... 107
3.1. Табличный способ задания булевых функций ... 107

3.2. Графический способ задания булевых функций 109
3.3. Аналитический способ задания булевых функций 109
3.4. Существенная и фиктивная переменная 112
4. Реализация функций формулами 113
4.1. Формулы. Реализация функций формулами 113
4.2. Эквивалентность формул 115
4.3. Совершенные дизъюнктивная и конъюнктивная нормальная формы (СДНФ и СКНФ) булевых функций 120
4.4. Схемы из функциональных элементов 124
Вопросы и задания для самоконтроля 127
Задания для практических занятий 129
1. Высказывания. Формулы логики высказываний 129
2. Переключательные схемы 130
3. Булевы функции. Реализация функций формулами 132
4. Совершенная дизъюнктивная и совершенная конъюнктивная нормальные формы 134

Учебное издание

КАПУСТО Анна Владимировна
КУНЦЕВИЧ Ирина Павловна

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

Учебно-методический комплекс
для студентов машиностроительных специальностей

В двух частях

Часть 1

Редактор *А. Э. Цибульская*

Дизайн обложки *В. А. Виноградовой*

Подписано в печать 03.05.10. Формат 60x84 1/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Ризография. Усл. печ. л. 7,89. Уч.-изд. л. 6,34. Тираж 175 экз. Заказ 732.

Издатель и полиграфическое исполнение:
учреждение образования «Полоцкий государственный университет»

ЛИ № 02330/0548568 от 26.06.2009 ЛП № 02330/0494256 от 27.05.2009

211440 г. Новополоцк, ул. Блохина, 29