Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Полоцкий государственный университет»

Н. В. Цывис, О. В. Скоромник

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ
ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Учебно-методический комплекс
для студентов технических специальностей

Под общей редакцией
Н. В. Цывиса

Новополоцк
ПГУ
2012

УДК 517(075.8)
ББК 22.161я73
Ц93

Рекомендован к изданию учебно-методической комиссией
радиотехнического факультета в качестве учебно-методического комплекса
(протокол № 1 от 14.09.2011)

РЕЦЕНЗЕНТЫ:
доктор педагогических наук, профессор кафедры алгебры и методики
преподавания математики УО «ВГТУ им. П. М. Машерова» К. О. АНАНЧЕНКО;
кандидат педагогических наук, доцент кафедры высшей математики
УО «ПГУ» В. С. ВАКУЛЬЧИК

Цывис, Н. В.

Ц93 Высшая математика. Функции комплексной переменной. Операционное исчисление : учеб.-метод. комплекс для студентов техн. специальностей / Н. В. Цывис, О. В. Скоромник; под общ. ред. Н. В. Цывиса. – Новополоцк : ПГУ, 2012. – 240 с.

ISBN 978-985-531-331-2.

Освещены следующие разделы программы курса высшей математики для технических специальностей вузов: функции комплексной переменной, теория вычетов, операционное исчисление и его применение к решению дифференциальных и интегральных уравнений и систем. Основные понятия рассматриваемых вопросов изложены в сжатой, но доступной для понимания форме. В конце каждой главы даны контрольные вопросы, примеры и упражнения.

Предназначено для преподавателей и студентов технических специальностей высших учебных заведений.

УДК 517(075.8)
ББК 22.161я73

ISBN 978-985-531-331-2

ВВЕДЕНИЕ

Современная наука и техника предъявляют высокие требования к математической подготовке инженеров. Поэтому программы вузовских курсов высшей математики систематически изменяются и расширяются; в зависимости от специализации вузов в них вводятся те или иные дополнительные главы. Теоретический материал по этим новым разделам программ разбросан по различным источникам, из-за чего студенты, особенно заочной формы обучения, испытывают большие затруднения при его самостоятельном изучении.

Данный учебно-методический комплекс содержит следующие разделы: функции комплексной переменной и теория вычетов, операционное исчисление и его применение к интегрированию линейных дифференциальных уравнений и систем.

Для того чтобы студенты усвоили большой по объему и очень разнообразный по содержанию материал в ограниченное время, основные понятия рассматриваемых вопросов изложены в сжатой, но доступной для понимания форме. В тексте, кроме теоретического материала, приведено значительное число примеров. В конце каждой главы даны вопросы для самоконтроля и большое количество задач для упражнений. В книге принята следующая нумерация формул: первое число в обозначении формулы указывает главу, второе – порядковый номер формулы в этой главе. Аналогично пронумерованы рисунки.

ЧАСТЬ 1
ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

ГЛАВА 1. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА И ПОНЯТИЕ О ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

§1. Комплексные числа и действия над ними

1.1. Определение и изображение комплексных чисел

Определение 1. *Комплексным числом* Z называется выражение вида $x+iy$, где x и y – действительные числа, а $i=\sqrt{-1}$ – мнимая единица; x называется действительной частью комплексного числа Z, а y – мнимой, и обозначаются соответственно $\operatorname{Re} Z = x;$ $\operatorname{Im} Z = y$.

Действительные числа – частный случай комплексных чисел при $y=0$. Комплексное число $iy,\ y\neq 0$.

Определение 2. Комплексные числа $Z=x+iy$ и $\overline{Z}=x-iy$ называют *комплексно-сопряженными*. Для любого комплексного числа Z справедливо соотношение $Z=\overline{Z}$ тогда и только тогда, когда Z является действительным числом.

Определение 3. Комплексное число $Z=x+iy$ равно нулю тогда и только тогда, когда $x=0$ и $y=0$.

Определение 4. Комплексные числа $Z_1=x_1+iy_1$ и $Z_2=x_2+y_2 i$ равны тогда и только тогда, когда равны между собой соответственно их действительные и мнимые части, т. е $x_1=x_2$ и $y_1=y_2$.

К комплексным числам неприменимы понятия «больше» и «меньше».

Определение 5. Комплексное число $Z=x+iy$ называют *алгебраической формой* записи комплексного числа.

Геометрическое изображение комплексных чисел

Комплексное число $Z=x+iy$ изображается на плоскости в декартовых прямоугольных координатах (называемой комплексной плоскостью) точкой Z, имеющей координаты (x,y). Соответствие между комплексными числами и точками комплексной плоскости взаимно однозначно. Действительные числа изображаются точками оси абсцисс, а мнимые – точками оси ординат, поэтому ось абсцисс называют действительной осью, а ось ординат – мнимой осью. Точки $Z = x + iy$ и $\overline{Z} = x - iy$ (комплексно-сопряженные числа) симметричны относительно действительной оси (относительно оси OX); а точки $Z = x + iy$ и $-Z = -x - iy$ (противоположные комплексные числа) симметричны относительно точки $O = (0,0)$ (начала координат).

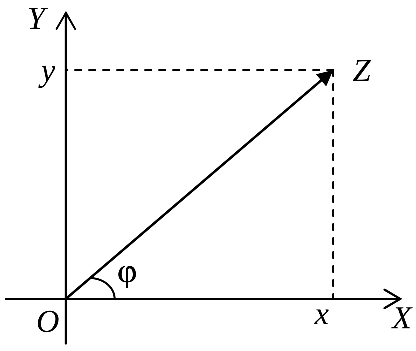


Рис. 1.1

Комплексное число изображается вектором на комплексной плоскости с началом в точке O и концом в точке Z с координатами (x, y) (рис. 1.1).

Определение 6. *Модулем комплексного числа* $Z = x + iy$ называют длину вектора, изображающего данное комплексное число, и обозначают $|Z|$, или r:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}\,. \tag{1.1}$$

К модулям комплексных чисел применимы понятия «больше», «меньше», «равно». Из равенства комплексных чисел следует равенство их модулей, но из равенства модулей комплексных чисел не следует равенство комплексных чисел. Действительно, например,

$$|4 + 3i| = |3 + 4i| = 5, \text{ но } 4 + 3i \neq 3 + 4i\,.$$

Отметим, что модуль действительного числа получается из модуля комплексного числа, как частный случай. В самом деле, имеем

$$|x + 0 \cdot i| = \sqrt{x^2 + 0^2} = \sqrt{x^2} = |x|\,.$$

Из определения модуля комплексного числа имеем

$$|\operatorname{Re} Z| = |x| \leq |Z|; \quad |\operatorname{Im} Z| = |y| \leq |Z|, \tag{1.2}$$

$|Z| = 0$ тогда и только тогда, когда $Z = 0$.

Формула (1.1) имеет простой геометрический смысл: она выражает длину гипотенузы прямоугольного треугольника с катетами $|x|$ и $|y|$.

Формулы (1.2) с геометрической точки зрения означают, что гипотенуза $|Z|$ в прямоугольном треугольнике больше любого катета $|x|$ или $|y|$.

Определение 7. Аргументом комплексного числа $Z = x + iy$ называют величину угла φ, образованного вектором $\overline{OZ}$ и положительным направлением оси OX.

Аргумент комплексного числа Z обозначают $\operatorname{Arg} Z = \varphi$, при $Z \neq 0$ аргумент φ имеет бесконечное множество значений, отличающихся друг от друга на число, кратное 2π. Аргумент не определен лишь для числа 0, модуль которого равен нулю. Среди значений аргумента комплексного числа $Z \neq 0$ существует одно и только одно значение, заключенное между $-\pi$ и π, включая последнее значение. Его называют главным значением аргумента и обозначают $\arg Z$.

Итак, $\varphi = \operatorname{Arg}\, Z = \arg Z + 2\pi n, \ \ (n = 0; \pm 1; \pm 2; ...)$, а $-\pi < \arg Z \leq \pi$.

Для главного значения аргумента комплексного числа $Z = x + iy$ справедливы следующие формулы:

$$\arg Z = \operatorname{arg\,tg}\frac{y}{x}, \qquad x > 0;$$

$$\arg Z = \operatorname{arg\,tg}\frac{y}{x} + \pi, \quad x < 0, \quad y \geq 0;$$

$$\arg Z = \operatorname{arg\,tg}\frac{y}{x} - \pi, \quad x < 0, \quad y < 0;$$

$$\arg Z = \frac{\pi}{2}, \qquad x = 0, \quad y > 0;$$

$$\arg Z = -\frac{\pi}{2}, \qquad x = 0, \quad y < 0;$$

$$\arg Z = 0, \qquad x > 0, \quad y = 0;$$

$$\arg Z = \pi, \qquad x < 0, \quad y = 0.$$

Тригонометрическая форма комплексного числа

Пусть задано комплексное число $Z = x + iy$. Из определения модуля и аргумента данного числа Z имеем (см. рис. 1.1)

$$x = r \cdot \cos\varphi; \quad y = r \cdot \sin\varphi, \tag{1.3}$$

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \ \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \ \operatorname{tg}\,\varphi = \frac{y}{x}, \tag{1.4}$$

следовательно,

$$Z = r \cdot (\cos\varphi + i \sin\varphi). \tag{1.5}$$

Определение 8. Запись комплексного числа Z в виде (1.5) называют тригонометрической формой записи этого числа.

Замечание 1. Не всякая запись комплексного числа через тригонометрические функции является тригонометрической формой этого числа. Например, запись числа i в виде

$$i=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{5}{2}\pi \quad \text{или} \quad i=(-1)\cdot\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$$

не является тригонометрической формой числа i, т. к. в первом случае у косинуса и синуса разные аргументы, а во втором – имеется отрицательный множитель. Тригонометрическая форма комплексного числа i имеет вид

$$i=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}.$$

Замечание 2. Так как аргумент комплексного числа Z определен с точностью до $2\pi n$, $n=0;\ \pm1;\pm2;...$, то справедливо равенство

$$r(\cos\varphi+i\sin\varphi)=r(\cos(\varphi+2\pi n)+i\sin(\varphi+2\pi n)).$$

Определение 9. Два комплексных числа, заданных в тригонометрической форме, равны тогда и только тогда, когда их модули равны, а аргументы отличаются на величину, кратную 2π.

Следовательно, если

$$r_1\cdot(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)=r_2\cdot(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2), \tag{1.6}$$

то

$$r_1=r_2; \quad \varphi_2=\varphi_1+2\pi n \quad (n=0;\ \pm1;\ \pm2). \tag{1.7}$$

Если комплексное число $Z=x+iy$ задано в тригонометрической форме (1.5), то комплексно сопряженное к нему число $\overline{Z}=x-iy$ записывается в форме $\overline{Z}=r\cdot(\cos(-\varphi)+i\sin(-\varphi))$, поэтому $|Z|=|\overline{Z}|$, $\arg Z=-\arg\overline{Z}$, т.е. при переходе от числа Z к комплексно сопряженному числу $\overline{Z}$ модуль $\overline{Z}$ не меняется, а аргумент изменяет лишь знак (рис. 1.2).

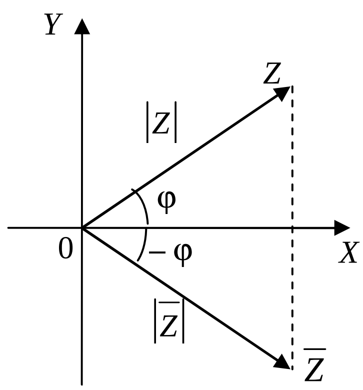


Рис. 1.2

Замечание 3. Сумма и произведение сопряженных комплексных чисел есть действительные числа. Действительно,

$$Z+\overline{Z}=(x+yi)+(x-yi)=2x;$$

$$Z\cdot\overline{Z}=(x+yi)\cdot(x-yi)=x^2+y^2=|Z|^2.$$

Теорема. *Для любых комплексных чисел* Z_1 *и* Z_2 *справедливо*:

1. $\overline{Z_1 + Z_2} = \overline{Z_1} + \overline{Z_2}$; 3. $\overline{Z_1 \cdot Z_2} = \overline{Z_1} \cdot \overline{Z_2}$;

2. $\overline{Z_1 - Z_2} = \overline{Z_1} - \overline{Z_2}$; 4. $\overline{Z_1 : Z_2} = \dfrac{\overline{Z_1}}{\overline{Z_2}}$.

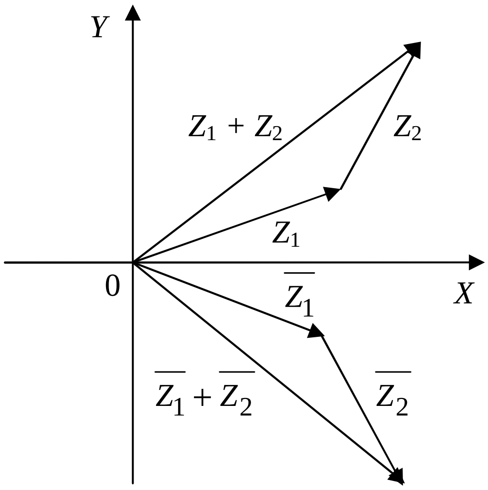


Рис. 1.3

Доказательство. Докажем, что выполняется первое равенство. Пусть $Z_1 = x_1 + y_1 i$, $Z_2 = x_2 + y_2 i$. Равенство $(x_1 + x_2) - (y_1 + y_2)i = (x_1 - y_1 i) + (x_2 - y_2 i)$ означает, что имеет место равенство $\overline{Z_1 + Z_2} = \overline{Z_1} + \overline{Z_2}$. Геометрически равенство $\overline{Z_1 + Z_2} = \overline{Z_1} + \overline{Z_2}$ имеет интерпретацию, изображенную на рис. 1.3.

Доказательство второго, третьего и четвертого равенств данной теоремы проводится аналогично.

1.2. Операции над комплексными числами, заданными в алгебраической форме

Определение 1. Сумма двух комплексных чисел $Z_1 = x_1 + iy_1$ и $Z_2 = x_2 + iy_2$, заданных в алгебраической форме, есть комплексное число

$$Z_3 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).$$

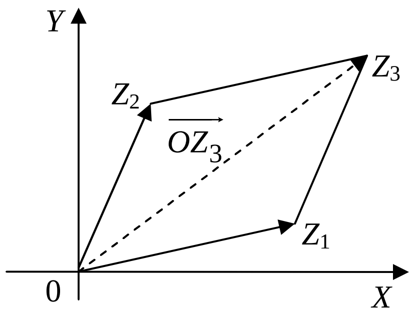


Рис. 1.4

С геометрической точки зрения сумма двух комплексных чисел $Z_1 = x_1 + iy_1$ и $Z_2 = x_2 + iy_2$ есть вектор $\overline{OZ_3} = \overline{OZ_1} + \overline{OZ_2}$ (рис. 1.4).

Основные свойства суммы комплексных чисел

1. *Существование и единственность суммы* комплексных чисел следует из существования и единственности суммы соответствующих векторов.

2. *Коммутативность*:

$$Z_1 + Z_2 = (x_1 + y_1 i) + (x_2 + y_2 i) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i =$$

$$= (x_2 + x_1) + (y_2 + y_1)i = (x_2 + y_2 i) + (x_1 + y_1 i) = Z_2 + Z_1.$$

3. *Ассоциативность*:

$$(Z_1+Z_2)+Z_3=\left[(x_1+y_1i)+(x_2+y_2i)\right]+(x_3+y_3i)=$$

$$=(x_1+x_2+(y_1+y_2)i)+(x_3+y_3i)=x_1+x_2+x_3+(y_1+y_2+y_3)i=$$

$$=(x_1+y_1i)+\left[(x_2+y_2i)+(x_3+y_3i)\right]=Z_1+(Z_2+Z_3)\,.$$

Определение 2. *Разностью* комплексных чисел $Z_1=x_1+iy_1$ и $Z_2=x_2+iy_2$ называется комплексное число Z_3, равное сумме первого комплексного числа $Z_1=x_1+iy_1$ и числа противоположного второму $-Z_2=-x_2-y_2i$.

Из определения имеем

$$Z_3=Z_1-Z_2=(x_1+y_1i)-(x_2+y_2i)=(x_1+y_1i)+(-x_2-y_2i)=$$
$$=(x_1+(-x_2))+(y_1+(-y_2))i=(x_1-x_2)+(y_1-y_2)i\,,$$

т. е. $Z_3=(x_1-x_2)+(y_1-y_2)i$ – правило вычитания для комплексных чисел.

С геометрической точки зрения разность комплексных чисел $Z_1=x_1+iy_1$ и $Z_2=x_2+iy_2$ есть вектор $\vec{Z}_3=\vec{Z}_1-\vec{Z}_2$, совпадающий со второй диагональю параллелограмма, построенного на векторах $\vec{Z}_1$ и $\vec{Z}_2$ (рис. 1.5).

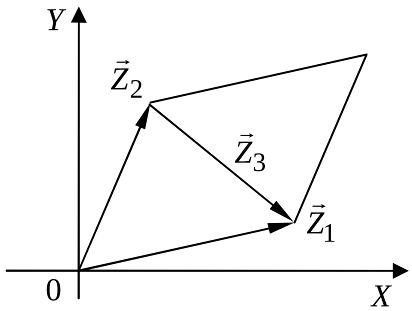


Рис. 1.5

Определение 3. *Произведение (умножение)* двух комплексных чисел $Z_1=x_1+y_1i$ и $Z_2=x_2+y_2i$ есть комплексное число Z, которое находится по правилу умножения многочленов с учетом условия $i^2=-1$.

Из определения имеем

$$Z=Z_1\cdot Z_2=(x_1+y_1i)\cdot(x_2+y_2i)=x_1x_2+x_1y_2i+y_1x_2i+y_1y_2i^2=$$
$$=(x_1x_2-y_1y_2)+(x_1y_2+x_2y_1)i\,,$$

т. е. $Z=(x_1x_2-y_1y_2)+(x_1y_2+x_2y_1)i$.

В частности, если $Z=x+iy$, то $Z\cdot\overline{Z}=x^2+y^2$ – действительное число.

Основные свойства произведения комплексных чисел

1. *Существование и единственность произведения:*

$$Z_1\cdot Z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+(x_1y_2+x_2y_1)i$$

(выражения $x_1x_2-y_1y_2$ и $x_1y_2+x_2y_1$ существуют и единственны в множестве действительных чисел).

2. *Коммутативность:*

$$Z_1 \cdot Z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_2 + iy_2) \cdot (x_1 + iy_1) = Z_2 Z_1 .$$

3. *Ассоциативность:*

$$(Z_1 Z_2) \cdot Z_3 = ((x_1 + y_1 i) \cdot (x_2 + y_2 i)) \cdot (x_3 + iy_3) =$$

$$= (x_1 + y_1 i) \cdot ((x_2 + y_2 i) \cdot (x_3 + iy_3)) = Z_1 \cdot (Z_2 \cdot Z_3) .$$

4. *Дистрибутивность:*

$$Z_1 \cdot (Z_2 + Z_3) =$$

$$= (x_1 + y_1 i) \cdot \left[(x_2 + y_2 i) + (x_3 + y_3 i)\right] = (x_1 + y_1 i) \cdot \left[(x_2 + x_3) + (y_2 + y_3) i\right] =$$

$$= \left[(x_1 x_2 + x_1 x_3) - (y_1 y_2 + y_1 y_3)\right] + \left[y_1 (x_2 + x_3) + x_1 (y_2 + y_3)\right] i =$$

$$= \left[(x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1) i\right] + \left[(x_1 x_3 - y_1 y_3) + (x_1 y_3 + x_3 y_1) i\right] =$$

$$= Z_1 \cdot Z_2 + Z_1 \cdot Z_3 .$$

Определение 4. *Частным от деления* комплексного числа $Z_1 = x_1 + y_1 i$ на комплексное число $Z_2 = x_2 + y_2 i \neq 0$ называется комплексное число $Z_3 = x_3 + y_3 i$ такое, что $Z_1 = Z_2 \cdot Z_3$, т. е. $x_1 + y_1 i = (x_2 + y_2 i) \cdot (x_3 + y_3 i)$ или

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_1^2 + y_1^2} + \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_1^2 + y_1^2} i .$$

Правило деления комплексных чисел:

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{x_1 + y_1 i}{x_2 + y_2 i} = \frac{(x_1 + y_1 i) \cdot (x_2 - y_2 i)}{(x_2 + y_2 i) \cdot (x_2 - y_2 i)} =$$

$$= \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + (x_2 y_1 - x_1 y_2) i}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} i .$$

Число, обратное комплексному числу $Z = x + iy$, определяем по формуле $Z^{-1} = \dfrac{1}{Z}$, тогда

$$Z^{-1} = \frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2} i = \frac{x - yi}{x^2 + y^2} .$$

Определение 5. Натуральной степенью n числа $Z = x + iy$ называют комплексное число $Z^n = \underbrace{Z \cdot Z \cdot Z \cdot Z}_{n \text{ раз}}$.

При возведении в степень комплексного числа пользуются формулой бинома Ньютона

$$(x+y)^n = x^n + nx^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}y^2 + \ldots + y^n.$$

С помощью этой формулы получаем

$$(x+yi)^n = x^n + nx^{n-1}(yi) + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}(yi)^2 + \ldots + (yi)^n,$$

при этом учитывая, что

$$i^0 = 1;\ i^1 = i;\ i^2 = -1;\ i^3 = -i;\ i^4 = 1;\ i^{4n} = 1;\ i^{4n+1} = i;\ i^{4n+2} = -1,$$

где $n \in N$.

Используя определение степени комплексного числа, можно предложить метод нахождения корня *n-й* степени из комплексного числа, заданного в алгебраической форме. Рассмотрим метод извлечения квадратного корня из комплексного числа $(a+bi)$.

Пусть $\sqrt{a+bi} = x + yi$.

Тогда $(a+bi) = (x+yi)^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi$, т. е. $\begin{cases} x^2 - y^2 = a, \\ 2xy = b. \end{cases}$

Следовательно, задача сводится к нахождению действительных решений полученной системы. Возводя оба уравнения в квадрат, а затем сложив их, получим

$$\begin{cases} (x^2 + y^2)^2 = a^2 + b^2, \\ x^2 - y^2 = a. \end{cases}$$

Выбираем только положительный корень, т. к. $x^2 + y^2 > 0$.

Теперь из системы уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}, \\ x^2 - y^2 = a \end{cases}$ находим

$$x^2 = \frac{\sqrt{a^2+b^2} + a}{2},\quad y^2 = \frac{\sqrt{a^2+b^2} - a}{2}.$$

Для x и y имеем по два значения, что дает четыре комбинации (x, y), но из условия $2xy = b$ следует, что знак произведения xy должен совпадать со знаком числа b. Это дает только две пары (x, y), т. е. два корня:

$$\sqrt{a+bi} = \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right), \quad b > 0,$$

$$\sqrt{a+bi} = \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right), \quad b < 0.$$

1.3. Операции над комплексными числами, заданными в тригонометрической форме

Все алгебраические действия с комплексными числами, заданными в тригонометрической форме, совершаются по тем же правилам, что и с комплексными числами, заданными в алгебраической форме. Складывать и вычитать комплексные числа проще и удобнее, когда они заданы в алгебраической форме, а умножать и делить – в тригонометрической форме.

Теорема 1. *При умножении любого конечного числа комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются.*

Доказательство. (Ограничимся двумя сомножителями: общий случай доказывается методом математической индукции).

Пусть $Z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $Z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, тогда

$$\begin{aligned}
&Z_1 \cdot Z_2 = r_1 \cdot r_2(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = \\
&= r_1 r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + i^2\sin\varphi_1\sin\varphi_2) = \\
&= r_1 r_2((\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_2\cos\varphi_1)) = \\
&= r_1 r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)).
\end{aligned}$$

Геометрическая интерпретация умножения комплексных чисел

На комплексной плоскости числа Z_1 и Z_2 представим направленными отрезками $\overline{OM_1}$ и $\overline{OM_2}$ соответственно (рис. 1.6).

Чтобы построить направленный отрезок $\overline{OM}$, изображающий комплексное число $Z = Z_1 \cdot Z_2$, надо направленный отрезок $\overline{OM_1}$ повернуть на угол φ_2 против часовой стрелки, затем умножить его длину на число r_2.

В частности, т. к. $i = 1 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} \right)$, умножение любого комплексного числа Z на комплексное число i с геометрической точки зрения можно рассматривать как операцию поворота направленного отрезка, изображающею число Z, на угол $\varphi = \frac{\pi}{2}$ в положительном направлении.

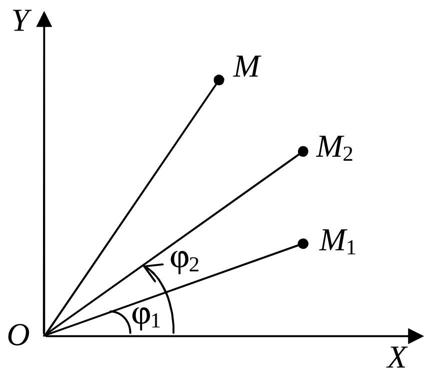


Рис. 1.6

Теорема 2. *При делении комплексных чисел их модули делятся, а аргументы вычитаются, т. е.*

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)).$$

Доказательство.

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)} =$$

$$= \frac{r_1}{r_2}((\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_2\cos\varphi_1)) =$$

$$= \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)).$$

Таким образом, при делении комплексных чисел их модули делятся, а аргументы вычитаются.

Из формулы деления комплексных чисел следует, если

$$Z_1 = 1 = 1 \cdot (\cos 0 + i\sin 0) \text{ и } Z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \neq 0,$$

тогда

$$Z^{-1} = \frac{1}{Z} = \frac{1}{r}(\cos(0 - \varphi) + i\sin(0 - \varphi)); \; Z^{-1} = r^{-1}(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)),$$

т. е. модуль комплексного числа Z^{-1}, обратного числу Z, равен обратной величине модуля числа Z, а его главное значение аргумента отличается от главного значения аргумента Z только знаком.

Геометрическая интерпретация деления комплексных чисел

Для построения направленного отрезка $\overline{OM}$, изображающего комплексное число $Z=\dfrac{Z_1}{Z_2}$, нужно направленный отрезок $\overline{OM_1}$, изображающий комплексное число Z_1, повернуть на угол φ_2 по часовой стрелке и уменьшить его длину в r_2 раз.

В частности, деление комплексного числа Z на комплексное число i с геометрической точки зрения рассматривают как операцию поворота направленного отрезка (или радиус-вектора точки Z) на угол $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$ по часовой стрелке.

Возведение в n-ю степень комплексного числа в тригонометрической форме

Теорема 3. *Пусть комплексное число* $Z\neq 0$ *представлено в тригонометрической форме* $Z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$.

Тогда для любого $n\in Z$ *имеем*

$$Z^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi). \tag{1.8}$$

Доказательство. Докажем сначала теорему для $n\in N$ методом математической индукции.

Проверим справедливость формулы при $n = 1$:

$$Z^1=Z,$$

$$r^1(\cos(1\cdot\varphi)+i\sin(1\cdot\varphi))=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)=Z,$$

$$Z^1=r^1(\cos(1\cdot\varphi)+i\sin(1\cdot\varphi)).$$

Допустим, что формула справедлива для любого натурального n, и докажем справедливость ее при $(n + 1)$.

Действительно,

$$Z^{n+1}=Z^n\cdot Z=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)\cdot r(\cos\varphi+i\sin\varphi)=$$

$$=r^{n+1}(\cos(n+1)\varphi+i\sin(n+1)\varphi),$$

$$Z^{n+1}=r^{n+1}(\cos(n+1)\varphi+i\sin(n+1)\varphi).$$

Таким образом, доказана справедливость формулы для $n\in N$.

Докажем справедливость формулы для произвольных целых n. Пусть $n=-k,\;\; k\in N$.

Тогда имеем

$$Z^n = Z^{-k} = \frac{1}{Z^k} = \frac{1}{r^k(\cos k\varphi + i\sin k\varphi)} = \frac{\cos 0 + i\sin 0}{r^k(\cos k\varphi + i\sin k\varphi)} =$$

$$= \frac{1}{r^k}(\cos(0 - k\varphi) + i\sin(0 - k\varphi)) = r^{-k}(\cos(-k\varphi) + i\sin(-k\varphi) =$$

$$= r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

Таким образом, теорема доказана полностью.

Замечание 1. Формула (1.8) имеет место и при $n = 0$. Действительно, $Z^0 = r^0(\cos(0\cdot\varphi) + i\sin(0\cdot\varphi)) = 1(1+0) = 1$.

Замечание 2. Для дробных и иррациональных показателей формулу (1.8) можно принять в качестве определения. В этом случае результат будет многозначным (φ – определяется с точностью до $2\pi k$). Правила действия со степенями остаются те же, что и при действительном основании.

Замечание 3. Пусть $\overline{Z} = r(\cos\varphi - i\sin\varphi)$ комплексно-сопряженное число для $Z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Тогда, в силу формулы (1.8) имеем

$$(\overline{Z})^n = (r(\cos\varphi - i\sin\varphi)^n = (r(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)))^n =$$

$$= r^n(\cos(-n\varphi) + i\sin(-n\varphi)) = r^n(\cos n\varphi - i\sin n\varphi) = \overline{\left(Z^n\right)}.$$

Таким образом, доказано, что $(\overline{Z})^n = \overline{\left(Z^n\right)}$.

Замечание 4. Формулу (1.8) называют формулой Муавра. В частном случае при $r = 1$ из этой формулы получаем

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi.$$

Извлечение корня n-й степени из комплексного числа

Определение 1. Корнем *n*-й степени из комплексного числа *Z* называется комплексное число *a*, такое что $a^n = Z$.

Обозначается корень *n*-й степени из комплексного числа Z через $\sqrt[n]{Z}$.

Представим комплексные числа Z и *a* в тригонометрической форме:

$$Z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \quad a = \rho(\cos\psi + \text{i}\sin\psi),$$

где $r = |Z|$, $\varphi = \arg Z$, $\rho = |\text{a}|$, $\psi = \arg a$.

Тогда по определению корня n-й степени из комплексного числа имеем

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \rho(\cos\psi + i\sin\psi),$$

$$r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \rho^n(\cos\psi + i\sin\psi)^n.$$

В силу формулы Муавра получим

$$r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \rho^n(\cos n\psi + i\sin n\psi)^n,$$

а из равенства комплексных чисел следует, что $\rho^n = r$

и $n\psi = \varphi + 2k\pi$, т. е. $\rho = \sqrt[n]{r}$, $\psi = \dfrac{\varphi + 2\mathrm{k}\pi}{n}$.

Полученные формулы определяют модуль ρ и аргумент числа a – корня степени n из комплексного числа Z. Обратно, если дано комплексное число

$$\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right),$$

то при любом целом k, положительном или отрицательном, n-ная степень этого числа равна комплексному числу $Z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Таким образом,

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) \qquad (1.9)$$

Так как k может принимать любые значения (положительные и отрицательные), то может показаться, что корень *n-й* степени из комплексного числа Z имеет бесконечное множество различных значений. На самом деле различных значений будет только n. Полагая $k = 0, 1, ..., n-1$, получим следующие n значений корня:

$$\begin{aligned} a_0 &= \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right), \\ a_1 &= \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi}{n}\right), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n-1} &= \sqrt[n]{r}\left(\frac{\varphi + 2(n-1)\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2(n-1)\pi}{n}\right). \end{aligned} \qquad (1.10)$$

Покажем, что среди значений $a_i (i=\overline{0,\ n-1})$ нет равных между собой. Пусть p и q – любые различные из чисел $k=\overline{0,\ n-1}$, тогда $\dfrac{\varphi+2p\pi}{n}-\dfrac{\varphi+2q\pi}{n}=\dfrac{p-q}{n}2\pi$.

Так как $\dfrac{p-q}{n}$ не является целым числом $(p<n,\ \ q<n)$, тогда число $\dfrac{p-q}{n}2\pi$ не будет кратным 2π. Таким образом, комплексные числа

$$\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2p\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2p\pi}{n}\right),\quad \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2q\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi}{n}\right)$$

не равны между собой, потому что разность их аргументов не будет кратной 2π.

Пусть k – любое натуральное число, больше (n – 1), тогда $k=nq+r$, где $0\le r\le n-1$, а значит

$$\frac{\varphi+2k\pi}{n}=\frac{\varphi+2(nq+r)\pi}{n}=\frac{\varphi+2\pi r}{n}+2q\pi,$$

т. е. значение аргумента при этом значении k отличается от значения аргумента при $k=r$ на число, кратное 2π.

Следовательно, при этом значении k получает то же значение корня, как и при $k=r$, т. е. при значении $k=\overline{0,\ n-1}$.

Таким образом, извлечение корня *n-й* степени из комплексного числа Z всегда возможно и дает n различных значений, определяемых формулами (1.10). Из этих формул следует, что все n значений корня *n-й* степени из комплексного числа Z расположены на окружности радиуса $\sqrt[n]{|Z|}$ с центром в точке (0, 0) и делят эту окружность на n равных частей.

Отметим, что корень *n-й* степени из действительного числа a также имеет n различных значений, причем действительных будет два, одно или ни одного значения, в зависимости от знака a и четности n.

Корень *n-й* степени из нуля имеет только одно значение, равное нулю, т. е. $\sqrt[n]{0}=0$.

Корень *n-й* степени из единицы определяется по формуле

$$\sqrt[n]{1}=\cos\frac{2\pi k}{n}+i\sin\frac{2\pi k}{n},\quad k=\overline{0,\ n-1}.$$

На комплексной плоскости корни *n-й* степени из единицы изображаются точками, расположенными в вершинах правильного *n*-угольника, вписанного в окружность радиуса R = 1 с центром в начале координат.

Одной из таких точек будет точка, изображающая число 1.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 4. *Если* $Z = t \cdot p \ \ (Z \neq 0)$. *Тогда корнями n-й степени из числа Z являются числа:* $u_0 v,\ u_1 v,\ u_2 v,\ \dots\ u_{n\text{-}1} v$, *где* $u_k \ \ (k = \overline{0,\ n-1})$ *– корни n-й степени из числа t;* v *– некоторый корень n-й степени из числа p.*

Доказательство. Покажем сначала, что числа $u_k \cdot v \ \ (k = \overline{0,\ n-1})$ – корни *n-й* степени из числа *Z*. Действительно, имеем $(u_k \cdot v)^n = u_k^n \cdot v^n = t \cdot p = Z$.

Покажем, что все числа $u_k \cdot v \ \ (k = \overline{0,\ n-1})$ различные. Предположим, что $u_i \cdot v = u_j \cdot v \ \ (i \neq j)$. Тогда из этого следует, что $u_i = u_j \ \ (i \neq j)$ – но это противоречие. Следовательно, все числа $u_k \cdot v \ \ (k = \overline{0,\ n-1})$ различные.

Так как из числа *Z* существует точно *n* корней *n-й* степени, то теорема доказана полностью.

Отметим, что доказанная теорема позволяет, зная все корни *n-й* степени из единицы и только один корень *n-й* степени из комплексного числа *Z*, найти все корни *n-й* степени из этого комплексного числа.

1.4. Показательная форма комплексного числа

Для получения комплексного числа в показательной форме воспользуемся формулой Эйлера, устанавливающей связь между показательной и тригонометрической функциями:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi. \qquad (1.11)$$

Определение. Показательной формой комплексного числа $Z = x + iy$ называют выражение вида

$$Z = r \cdot e^{i\varphi}, \qquad (1.12)$$

где $r = |Z|$; φ – аргумент комплексного числа Z.

Функция $e^{i\varphi}$ обладает свойствами показательной функции с действительным показателем, поэтому формулы умножения, деления, возведения в натуральную степень для комплексных чисел в показательной форме имеют простой вид.

Если $Z_1 = r_1 \cdot e^{i\varphi_1}$, $\mathrm{Z}_2 = r_2 \cdot e^{i\varphi_2}$, тогда

$$Z_1 \cdot Z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}. \qquad (1.13)$$

Если $Z_2 \neq 0$, тогда

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1 \cdot e^{i\varphi_1}}{r_2 \cdot e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}. \qquad (1.14)$$

Если $n \in N$, $Z = r \cdot e^{i\varphi}$, тогда

$$Z^n = (r \cdot e^{i\varphi})^n = r^n \cdot e^{in\varphi}. \qquad (1.15)$$

и

$$Z_k = \sqrt[n]{r \cdot e^{i\varphi}} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i \cdot \frac{\varphi + 2k\pi}{n}}, \quad k = 0,1,\ldots,n-1. \qquad (1.16)$$

Из равенства (1.11) имеем

$$e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi. \qquad (1.17)$$

Складывая и вычитая равенства (1.11) и (1.17), получим

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}; \quad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}. \qquad (1.18)$$

Полагая в равенстве (1.11) $\varphi = \pi$, получим знаменитую формулу Эйлера

$$e^{i\pi} = -1. \qquad (1.19)$$

1.5. Основные задачи на комплексные числа

Комплексные числа и их геометрическая интерпретация

Пример 1. Определить действительную и мнимую часть числа:

1) $Z = -3 + 11i$;

2) $Z = (3 + 2i)(1 - i)$;

3) $Z = \dfrac{8 + 6i}{1 + i}$;

4) Z^{-1}, если $Z = 4 + 3i$.

Решение:

1) $\operatorname{Re} Z = -3, \quad \operatorname{Im} Z = 11$;

2) Так как $Z = (3 + 2i)(1 - i) = 5 - i$, тогда $\operatorname{Re} Z = 5, \quad \operatorname{Im} Z = -1$;

3)Так как $Z = \dfrac{8 + 6i}{1 + i} = \dfrac{(8 + 6i)(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} = \dfrac{14 - 2i}{2} = 7 - i$, тогда $\operatorname{Re} Z = 7, \quad \operatorname{Im} Z = -1$;

4) В силу того, что $Z^{-1} = \dfrac{1}{Z} = \dfrac{1}{4 + 3i} = \dfrac{4}{25} - \dfrac{3}{25}i$, тогда $\operatorname{Re} Z = \dfrac{4}{25}, \quad \operatorname{Im} Z = -\dfrac{3}{25}$.

Пример 2. Найти на комплексной плоскости геометрическое место точек, соответствующих комплексным числам, которые удовлетворяют системе $\begin{cases} 2 \le |Z| \le 3, \\ \dfrac{\pi}{4} < \arg Z < \dfrac{3\pi}{4}. \end{cases}$

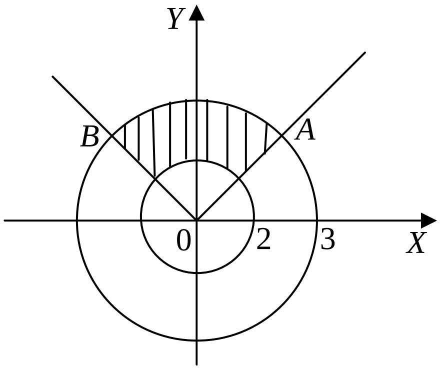


Рис. 1.7

Решение. Множество точек, удовлетворяющих неравенству $2 \le |Z| \le 3$, – это точки, лежащие внутри кольца, ограниченного окружностями $|Z| = 2$, $|Z| = 3$, включая сами окружности (рис. 1.7). Точки, удовлетворяющие неравенству $\dfrac{\pi}{4} < \arg Z < \dfrac{3\pi}{4}$, лежат между лучами *OA* и *OB*, исключая сами лучи. Пересечение этих множеств дает искомое множество точек.

Пример 3. Найти множество решений уравнения $|Z - 1 + i| = 4$.

Решение. В силу того, что модуль разности двух комплексных чисел равен расстоянию между точками, изображающими их на комплексной плоскости, имеем $|Z - (1 - i)| = 4$. Тогда множество решений данного уравнения есть окружность радиуса 4 с центром в точке (1 – *i*).

Арифметические действия над комплексными числами

Пример 4. Найдите сумму, разность, произведение и частное чисел $Z_1 = 4 + 5i$ и $Z_2 = 2 - 6i$.

Решение.

$$Z_1 + Z_2 = (4 + 5i) + (2 - 6i) = 6 - i,$$

$$Z_1 - Z_2 = (4 + 5i) - (2 - 6i) = 2 + 11i,$$

$$Z_1 \cdot Z_2 = (4 + 5i)(2 - 6i) = 38 - 14i,$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{4 + 5i}{2 - 6i} = \frac{(4 + 5i)(2 + 6i)}{(2 - 6i)(2 + 6i)} = -\frac{11}{20} + \frac{17}{20}i.$$

Пример 5. Вычислить Z^2, если $Z=(-2+3i)^2$.

Решение.

1 способ: $(-2+3i)^2=(-2+3i)(-2+3i)=-5-12i$;

2 способ: $(-2+3i)^2=(-2)^2+2(-2)\cdot(3i)+(3i)^2=-5-12i$.

Пример 6. Показать, что число $Z=1-i$ является корнем уравнения $Z^3+2Z^2-6Z+8=0$.

Решение.

$$Z=1-i; \quad Z^2=(1-i)^2=-2i; \quad Z^3=(1-i)^3=-2-2i.$$

Тогда имеем

$$Z^3+2Z^2-6Z+8=(-2-2i)+2(-2i)-6(1-i)+8=0.$$

Извлечение корней из комплексных чисел

Пример 7. Вычислить $\sqrt{8-6i}$.

Решение. Пусть $\sqrt{8-6i}=x+iy$. Возведем обе части равенства в квадрат $(i^2=-1)$. Получим однородную систему уравнений второго порядка

$$\begin{cases} x^2-y^2=8, \\ xy=-3. \end{cases}$$

Решением данной системы являются (3; –1) и (–3; 1). Следовательно, имеем два значения корня квадратного, т. е. $\sqrt{8-6i}=\pm(3-i)$.

Пример 8. Вычислить $\sqrt{2\sqrt{2}+2\sqrt{2}i}$.

Решение. Так как $2\sqrt{2}+2\sqrt{2}i=4\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

Тогда имеем

$$\sqrt{4\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)}=2\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{2}+i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{2}\right),$$

при $k=0$ имеем $Z_0=2\left(\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}\right)$, при $k=1$ имеем $Z_1=2\left(\cos\frac{9\pi}{8}+i\sin\frac{9\pi}{8}\right)$.

Заметим, что в нашем случае имеем $Z_1=-Z_0$.

Пример 9. Вычислить $\sqrt{i}$.

Решение. Так как $i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$, тогда

$$\sqrt{i} = \cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{2} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{2}, \quad k = 0,\ 1.$$

Следовательно,

$$Z_0 = \sin\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$Z_1 = \cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4} = -Z_0 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Пример 10. Вычислить $\sqrt[6]{-64}$.

Решение. Так как $(-64) = 64(\cos\pi + i\sin\pi)$, то

$$\sqrt[6]{-64} = \sqrt[6]{64}\left(\cos\frac{\pi + 2k\pi}{6} + i\sin\frac{\pi + 2k\pi}{6}\right), k = \overline{0,5}.$$

Подставляя последовательно k = 0, 1, 3, 4, 5 и учитывая, что $\sqrt[6]{64} = 2$ получим шесть значений корня 6-й степени из числа (–64).

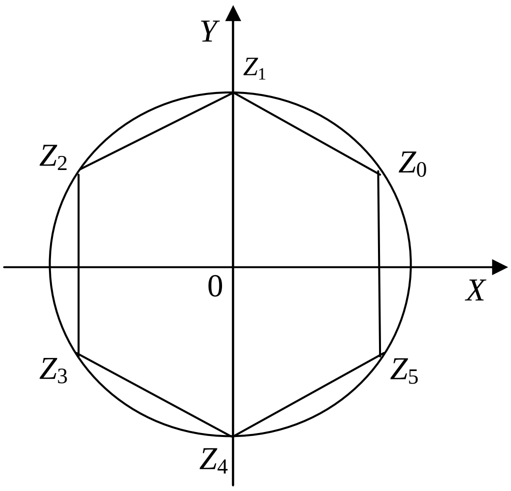


Рис. 1.8

$$Z_0 = \sqrt{3} + i; \qquad Z_3 = -\sqrt{3} - i;$$

$$Z_1 = 2i; \qquad Z_4 = -2i;$$

$$Z_2 = -\sqrt{3} + i; \qquad Z_5 = \sqrt{3} - i.$$

Отметим, что эти шесть значений – вершины правильного шестиугольника, вписанного в окружность радиуса R = 2 (рис. 1.8).

Пример 11. Выразить $\cos 3\alpha$ и $\sin 3\alpha$ через $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$.

Решение. Используя формулу Муавра и возведение в куб выражения $\cos\alpha + i\sin\alpha$, получим

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^3 = \cos 3\alpha + i\sin 3\alpha,$$

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^3 = \cos^3\alpha - 3\cos\alpha\sin^2\alpha + i(3\cos^2\alpha \cdot \sin\alpha - \sin^3\alpha).$$

Из определения равенства двух комплексных чисел имеем

$$\cos 3\alpha = \cos^3\alpha - 3\cos\alpha \cdot \sin^2\alpha,$$

$$\sin 3\alpha = 3\cos^2\alpha \cdot \sin\alpha - \sin^3\alpha.$$

Решение алгебраических уравнений на множестве комплексных чисел

Пример 12. Решить уравнения:

1) $x^2-2x+10=0;$ 3) $x^4-3x^2-4=0;$

2) $x^3-4x^2+6x-4=0;$ 4) $x^8-256=0$.

Решение:

1) Используя формулу решения квадратного уравнения, получим $x_{1,2}=\dfrac{2\pm\sqrt{-36}}{2}=\dfrac{2\pm 6i}{2}=1\pm 3i$.

Корни данного уравнения $x_1=1+3i;\ \ x_2=1-3i$.

2) Данное уравнение кубическое, поэтому оно имеет, по крайней мере, один действительный корень. И в первую очередь рассмотрим деление свободного члена (т. к. целые корни многочлена с целыми коэффициентами являются делителями свободного члена). Среди делителей $\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 4$ методом подбора устанавливаем, что число $x = 2$ – корень данного уравнения. Поэтому имеет место равенство $x^3-4x^2+6x-4=(x-2)(x^2-2x+2)$.

Тогда корни исходного уравнения

$$x_1=2;\quad x_{2,3}=\frac{2\pm 2i}{2}=1\pm i.$$

3) Заменив $y=x^2$, приводим исходное уравнение к виду $y^2-3y-4=0$. Корнями полученного квадратного уравнения будут $y_1=-1;\ \ y_2=4$. Тогда корнями исходного уравнения будут числа $x_1=2;\ x_2=-2;\ x_3=i;\ x_4=-i$.

4) Аргумент действительного числа равен нулю, поэтому $\arg 128=0;\ \ |256|=256$. Тогда исходное уравнение запишем в виде $x^8=256$. Откуда $x_k=2\cdot e^{\frac{k\pi i}{4}},\ \ k=\overline{0,7}$.

Таким образом, данное уравнение имеет восемь корней:

$$x_0=2;\qquad x_2=2e^{\frac{\pi i}{2}};\ \ x_4=2e^{\pi i};\ \ x_6=2e^{\frac{3\pi i}{2}};$$

$$x_1=2e^{\frac{\pi i}{4}};\ \ x_3=2e^{\frac{3\pi i}{4}};\ \ x_5=2e^{\frac{5\pi i}{4}};\ \ x_7=2e^{\frac{7\pi i}{4}}.$$

Замечание. В общем случае решение алгебраического уравнения степени $n > 2$ с комплексными коэффициентами:

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0=0,\quad a_n\neq 0,\ \ n\in N \tag{1.20}$$

является очень сложной задачей. Но вопрос о существовании корней этого уравнения решает основная теорема алгебры.

Теорема (Гаусса). *Каждое алгебраическое уравнение в множестве комплексных чисел имеет хотя бы один корень.*

Опираясь на данную теорему, доказано, что левую часть уравнения (1.20) можно представить в виде произведения:

$$a_n(x-x_1)^{m_1}(x-x_2)^{m_2}...(x-x_k)^{m_k},$$

где $x_1,\ x_2,\ ...,\ x_k$ – корни уравнения (1.20); $m_1,\ m_2,\ ...,\ m_k \in N$, и $m_1+m_2+...+m_k=n$.

В этом случае говорят, что число x_1 является корнем кратности m_1, x_2 – корнем кратности m_2 и т. д. Считаем корень уравнения столько раз, какова его кратность.

Имеет место следующая теорема.

Теорема. *Каждое алгебраическое уравнение степени* n *имеет в множестве комплексных чисел ровно* n *корней.*

Отметим, что данная теорема является теоремой существования, т. е. дает ответ на вопрос о существовании корней у произвольного алгебраического уравнения, но не дает метода их нахождения.

Уравнения первой, второй степени, двухчленные уравнения решаются достаточно просто.

Существуют формулы для решения уравнений третьей и четвертой степени, но они очень громоздки и на практике применяются довольно редко, ищут решения другими способами. Для уравнений степени выше четвертой подобных формул в общем случае нет.

Вопросы для самопроверки

1. Какие числа называются комплексными?

2. Какое геометрическое истолкование можно дать комплексному числу?

3. Что называется модулем и аргументом комплексного числа и как они определяются?

4. Запишите формулу Эйлера.

5. Запишите комплексное число z в алгебраической, тригонометрической и показательной формах.

6. Как производится сложение и вычитание комплексных чисел, заданных в алгебраической форме?

7. Как выполняются умножение и деление комплексных чисел, заданных в алгебраической, тригонометрической и показательной формах?

8. Как возвести комплексное число в целую положительную степень?

9. Запишите формулу Муавра?

10. Как извлекается корень целой положительной степени из комплексного числа z?

Упражнения к § 1

1. Построить с помощью вектора комплексные числа:

а) $-3-2i$;	г) 5;
б) $-6i$;	д) $2+2i$;
в) $4+4i$;	е) $4-3i$.

2. Представить комплексные числа в тригонометрической форме:

а) $z=1+i$;	и) $\sqrt{3}+i$;
б) $z=-1+\sqrt{3}$;	к) $z=-1-i$;
в) $z=-\sqrt{3}-i$;	л) $z=2-5i$;
г) $z=\sqrt{3}-i$;	м) $z=-2+5i$;
д) -3;	н) $z=-2-5i$;
е) $-i$;	п) $z=1+i\sqrt{3}$;
ж) $\dfrac{2}{1+i}$;	р) $z=i-\cos\alpha+i\sin\alpha$.

3. Изобразить на плоскости множество точек:

а) $\operatorname{Re} z<3\ (x<3)$, $\operatorname{Im} z\geq 0\ (y\geq 0)$, $-\dfrac{\pi}{2}<\arg z\leq\dfrac{\pi}{2}$;

б) $0<|z+1|<1$, $|z|<1$, $|z-2i|<2$, $|z-3-2i|>1$;

в) $|z+3-3i|>2$, $0<\operatorname{Re}(3iz)<2$, $\operatorname{Im}(iz)<2$;

г) $|z-z_1|<4\ (z_1=3-5i)$, $1<|z-i|<3$;

д) $\operatorname{Re}\left(\dfrac{1}{z}\right)>a\ \ (a=\text{const},\ a\in R)$.

4. Вычислить $\left(1+i\sqrt{3}\right)^{30}$, $\left(1+i\sqrt{3}\right)^{6}$, $\left(\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right)^{20}$.

5. Найти

а) $(z_1+z_2)z_3$, если $z_1=2+3i$, $z_2=3+2i$, $z_3=5-2i$;

б) $\dfrac{(z_1+z_3)z_2}{z_3}$, если $z_1=3+5i$, $z_2=3-4i$, $z_3=1-2i$;

в) $\dfrac{z_1(z_2+z_3)}{z_2}$, если $z_1=4+5i$, $z_2=1+i$, $z_3=7-9i$.

6. Решить уравнение $x^8-1=0$.

7. Определить комплексные числа, удовлетворяющие двум условиям:

$$\left|\frac{z-12}{z-8i}\right|=\frac{5}{3},\quad \left|\frac{z-4}{z-8}\right|=1.$$

8. Доказать тождество $|a+b|^2+|a-b|^2=4|a|^2$, если $|a|=|b|$.

9. Доказать, что $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$, $\overline{z_1-z_2}=\overline{z_1}-\overline{z_2}$, $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$.

10. Выразить $\cos 5x$ и $\sin 5x$ через $\cos x$ и $\sin x$.

11. Вычислить $(1+i)^4$, $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{i}{2}\right)^6$.

12. Найти $\cos^4 x\cdot\sin^3 x$.

13. Найти корни уравнений: а) $z^5-z^3=0$, б) $z^4+2z^2-3=0$.

14. Представить в виде $a+ib$ $(a\in R, b\in R)$ следующие числа:

а) $z_1=\dfrac{1-i}{1+i}$;

б) $z_2=\dfrac{2}{1-3i}$;

в) $z_3=\left(1+i\sqrt{3}\right)^6$;

г) $z_4=\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^5$;

д) $z_5=\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^4$.

15. Выяснить геометрический смысл соотношений:

а) $\operatorname{Re} z+\operatorname{Im} z<1$;

б) $|z-1|\geq 2|z-i|$.

16. Доказать тождества:

а) $\dfrac{|a+b|}{\left|1+\dfrac{b}{a}\right|}=a$, при $a>0, b\in C, b\neq -a$;

б) $|a|-|b|\le|a-b|\le|a|+|b|$, при $a\in C, b\in C$;

в) $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2\left(|z_1|^2+|z_2|^2\right)$;

г) $|1-ab|^2-|a-b|^2=\left(1+|ab|\right)^2-\left(|a|+|b|\right)^2$, при $a,b\in C$;

17. Вычислить $\cos x+\cos 2x+\cos 3x+...+\cos nx=...$.

18. Найти x и y, для которых $(2x+3y)+(x-y)i=2+(2+y)i$.

19. Найти комплексные числа, противоположные и сопряженные с числами: а) $2+i$; б) $1+i$.

20. Какие комплексные числа совпадают со своими сопряженными? Противоположными?

21. Выполнить действия:

а) $\dfrac{1+i}{1-i}+\dfrac{1-i}{1+i}$; г) $\left(1+i\sqrt{3}\right)^9$;

б) $\dfrac{2+i}{1+i}-\dfrac{2}{i}$; д) $(1+i\,\mathrm{tg}\,\alpha)^3$.

в) $(1+i)^{100}$;

22. Найти все комплексные числа z, для которых

а) $iz+3=2i$; б) $\dfrac{z+1}{z-1}=\dfrac{3-i}{3+i}$; в) $2z+iz=1+3i$.

23. Вычислить:

а) $\sqrt{1+i}$; б) $\sqrt{3+4i}$; в) $\sqrt{4-3i}$;

г) $\sqrt{\cos\alpha+i\sin\alpha}$ $(0<\alpha<\pi)$; д) $\sqrt{\cos 2\alpha-i\sin 2\alpha}$.

24. Решить квадратные уравнения:

а) $x^2+2x+2=0$; б) $x^2+(1+i)x+i=0$; в) $ix^2-2x+1=0$.

25. Найти все корни (комплексные) уравнений:

а) $x^4=1$; б) $x^4=-1$; в) $x^4+x^2+1=0$.

26. Изобразить точками на плоскости комплексные числа:

$$2+i,\ 1+i,\ -1-i,\ -3-2i.$$

27. Доказать, что сумма z_1-z_2 комплексных чисел z_1 и z_2 изображается четвертой вершиной параллелограмма, двумя смежными сторонами которого являются отрезки, соединяющие точки z_1 и z_2 с точкой O.

28. Точки z_1, z_2 и z_3 – вершины треугольника на плоскости. Найдите число, изображающее центр тяжести этого треугольника.

29. Найти $|z|$ и $\arg z$, если

а) $z=2$; г) $z=-i$;

б) $z=1+i$; д) $z=1-i\sqrt{3}$;

в) $z=-1-i$; е) $z=-3-4i$.

30. Записать тригонометрическую форму чисел:

а) 1; в) $12+5i$; д) $-12-5i$;

б) (–1); г) $12-5i$; е) $\sin\alpha+i\cos\alpha\ (0<\alpha<\pi)$.

31. Доказать, что расстояние между точками z_1 и z_2 равно $|z_1-z_2|$. Пользуясь этим, изобразите точки на плоскости, для которых

а) $|z-i|=1$; в) $|z-i|=|iz-1|$;

б) $|z-1|=|z+1|$; г) $1\le|z-i|\le 2$.

32. Изобразить точки плоскости, для которых

а) $\arg iz=\dfrac{\pi}{4}$; б) $\arg(iz-1)=\dfrac{\pi}{3}$.

33. Докажите следующие равенства:

а) $|z|^2=z\bar{z}$; б) $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{z_1\bar{z}_2}{|z_2|^2}$.

34. Вычислить корни и изобразите их на плоскости:

а) $\sqrt[3]{1}$; г) $\sqrt[3]{-i}$;

б) $\sqrt[3]{-1}$; д) $\sqrt[3]{3+4i}$.

в) $\sqrt[3]{i}$;

35. Решить уравнения:

а) $z^4=z$; б) $(x+i)^4+(x-i)^4=0$; в) $z^3=-z$.

36. Доказать, что все корни *n-й* степени из единицы являются степенями числа $\varepsilon=\cos\dfrac{2\pi}{n}+i\sin\dfrac{2\pi}{n}$. Вычислите затем сумму *k*-х степеней всех корней *n*-й степени из единицы.

37. Доказать, что если точки z_1, z_2, …, z_n являются вершинами выпуклого *n*-угольника, то все корни уравнения

$$\frac{1}{z-z_1}+\frac{1}{z-z_2}+\ldots+\frac{1}{z-z_n}=0$$

лежат внутри или на границе этого многоугольника.

§ 2. Области. Последовательности и ряды комплексных чисел

2.1. Области и их границы. Окрестности

Рассмотрим некоторое множество E точек плоскости комплексной переменной (Z). Точка z называется *внутренней точкой* множества E, если все точки достаточно малого круга с центром в точке z принадлежат множеству E.

Точка z, принадлежащая или не принадлежащая множеству E, называется *граничной точкой* множества E, если любой круг с центром в z содержит как точки, принадлежащие E, так и точки, не принадлежащие E.

Множество L всех граничных точек множества E называется *границей* множества E.

Точка z называется *внешней точкой* множества E, если вместе с этой точкой множеству E не принадлежит и некоторый круг с центром в z, т. е. если z не внутренняя и не граничная.

Пример 1. Круг $|z|<3$ состоит только из внутренних точек. Точки окружности $|z|=3$ являются граничными точками для этого круга. Точки, для которых $|z|>3$, являются внешними для круга $|z|<3$.

Областью называется множество D точек плоскости (Z), обладающее следующими свойствами:

1) D состоит из одних внутренних точек *(свойство открытости);*

2) любые две точки, принадлежащие D, можно соединить непрерывной линией, целиком состоящей из точек D *(свойство связности).*

Множество точек, состоящее из области D и ее границы L, называется *замкнутой областью* и обозначается через $\bar{D}$, т. е. $\bar{D}=D+L$.

Пример 2. Множество точек $\operatorname{Re} z\cdot\operatorname{Im} z>0$ $(xy>0)$, $|z|<R$ не является областью, т. к. оно не обладает свойством связности. Действительно, точки z, для которых $xy>0$ и $|z|<R$, заполняют внутренность круга $|z|<R$ в I и III квадрантах плоскости (Z), не включая осей координат. Если взять точку z_1 в I квадранте, а точку z_2 – в III (рис. 1.9), то их нельзя соединить непрерывной линией, целиком состоящей из точек, для которых $xy>0$, $|z|<R$, т. к. начало координат не принадлежит рассматриваемому множеству.

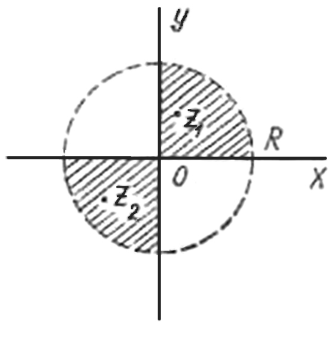


Рис. 1.9

Для дальнейшего важно понятие порядка связности. Число не связанных друг с другом частей, из которых состоит вся граница области, называется *порядком связности* этой области. Так, область, ограниченная одной непрерывной замкнутой линией (рис. 1.10), – *односвязная*. Область, ограниченная двумя не связанными друг с другом частями (рис. 1.11), – *двусвязная*. Область, изображенная на рис. 1.12, – *четырехсвязная*. Область, изображенная на рис. 1.13, – *трехсвязная*. Она ограничена тремя замкнутыми не связанными друг с другом контурами, один из которых стянут в точку a. Часть внешнего контура на рис. 1.13 – участок AB – представляет собой двойную линию (разрез).

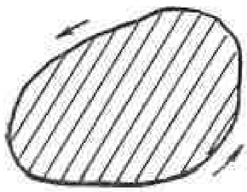


Рис. 1.10

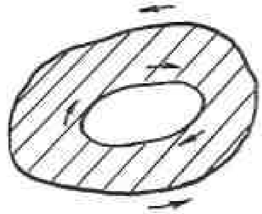


Рис. 1.11

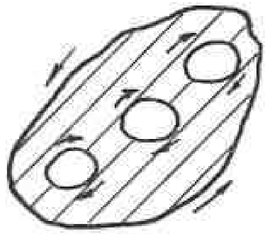


Рис. 1.12

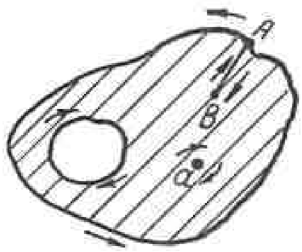


Рис. 1.13

Положительным направлением обхода границы области условимся считать такое направление, при котором область остается все время слева. На рисунках 1.10 – 1.13 это направление указано стрелками.

Под *окрестностью* точки z_0 понимается произвольная область, содержащая точку z_0. Чаще рассматриваются круговые окрестности точки z_0.

Если точка z_0 конечная, то под ε-*окрестностью* точки z_0 понимается внутренность круга ($|z-z_0|<\varepsilon$) с центром z_0 и радиусом ε.

Пример 3. На плоскости комплексной переменной (Z) построить множество точек, удовлетворяющих неравенству $|z+i|<1$. Будет ли это множество точек областью?

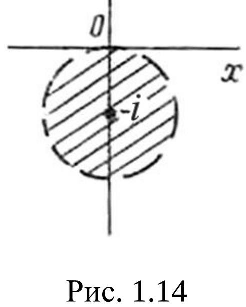


Рис. 1.14

Решение. Так как модуль разности двух комплексных чисел равен расстоянию между точками, изображающими эти числа, то, переписав заданное неравенство в виде $|z-(-i)|<1$, видим, что им определяется внутренность круга с центром в точке $z=-i$ и радиусом 1 (рис. 1.14). Неравенство $|z-(-i)|<1$ определяет область, т. к. множество точек, удовлетворяющих этому неравенству, обладает свойствами открытости и связности.

2.2. Последовательности комплексных чисел

Пусть каждому натуральному числу n соответствует вполне определенное комплексное число z_n. Записав последовательно эти числа, получим последовательность комплексных чисел (z_n):

$$z_1, z_2, ..., z_n, ...,$$

но $z_n = x_n + iy_n$, поэтому задание последовательности (z_n) равносильно заданию двух последовательностей действительных чисел (x_n) и (y_n). Например, если общий член последовательности комплексных чисел задан в виде $z_n = \frac{1}{n+1} + i\frac{n}{n+1}$, то члены последовательности запишутся следующим образом:

$$\frac{1}{2} + i\frac{1}{2};\ \frac{1}{3} + i\frac{2}{3};\ldots;\frac{1}{n+1} + i\frac{n}{n+1};\ldots$$

или

$$(x_n) = \left(\frac{1}{n+1}\right) \text{ и } (y_n) = \left(\frac{n}{n+1}\right).$$

Определение 1. Последовательность (z_n) называется ограниченной, если модули всех членов этой последовательности остаются меньше некоторого положительного числа M, т. е.

$$|z_n| = |x_n + iy_n| = \sqrt{x_n^2 + y_n^2} < M \text{ при } n = 1, 2, ...$$

Геометрически это означает, что все точки последовательности (z_n) находятся внутри круга радиусом M с центром в начале координат (рис. 1.15).

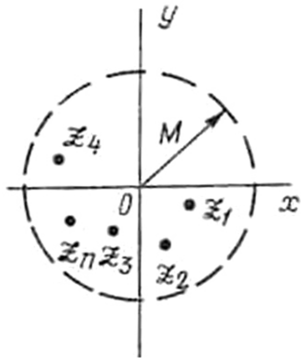


Рис. 1.15

Если последовательность комплексных чисел (z_n) *ограничена, то ограничены и последовательности действительных чисел* (x_n) *и* (y_n), т. к. совершенно очевидно, что $|x_n| \le |z_n|$ и $|y_n| \le |z_n|$.

Но, с другой стороны, $|z_n| = |x_n + iy_n| \le |x_n| + |y_n|$.

Следовательно, справедливо и обратное утверждение: *из ограниченности последовательностей* (x_n) *и* (y_n) *следует ограниченность последовательности* (z_n).

Определение 2. Число $z_0 = x_0 + iy_0$ называется пределом последовательности комплексных чисел (z_n) и записывается $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$ $(z_n \to z_0$ *при* $n \to \infty)$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N(\varepsilon)$ такой, что для всех $n \ge N(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|z_n - z_0| < \varepsilon$.

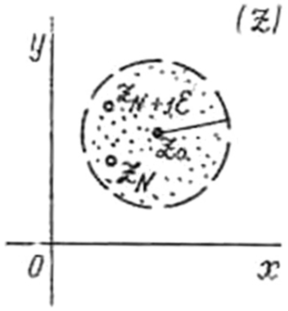


Рис. 1.16

Геометрически это означает, что, как бы мала ни была ε-окрестность точки z_0, все члены последовательности (z_n), начиная с некоторого номера N, находятся в этой ε-окрестности (рис. 1.16).

Если последовательность (z_n) *имеет конечный предел, то она ограничена.*

Теорема. *Для того чтобы* $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0 = x_0 + iy_0$, *необходимо и достаточно, чтобы* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$.

Доказательство. *Необходимость.* Дано: существует $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$; требуется доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$.

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер $N(\varepsilon)$ такой, что для $n \ge N(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|z_n - z_0| < \varepsilon$. А это значит, что при $n \ge N(\varepsilon)$ $|(x_n - x_0) + i(y_n - y_0)| = \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2} < \varepsilon$.

Поскольку $|x_n - x_0| \le |z_n - z_0| < \varepsilon$ и $|y_n - y_0| \le |z_n - z_0| < \varepsilon$ при $n \ge N(\varepsilon)$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$.

Достаточность. Дано: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$; требуется доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$.

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, то для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такой номер N_1, что при $n \ge N_1$ будет выполняться неравенство $|x_n - x_0| < \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$.

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$, то по выбранному уже $\varepsilon > 0$ найдется N_2 такое, что для $n \ge N_2$ будет выполняться неравенство $|y_n - y_0| < \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$. Если за N взять $\max(N_1, N_2)$, то для всех $n \ge N$ одновременно будут выполняться неравенства $|x_n - x_0| < \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ и $|y_n - y_0| < \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$.

Но тогда $|z_n - z_0| = \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2} < \varepsilon$ при $n \geq N$, а это и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$.

Следовательно, *соотношение* $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + iy_n) = x_0 + iy_0$ *эквивалентно двум соотношениям:* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$, *т. е. вопрос о сходимости последовательности комплексных чисел* (z_n) *эквивалентен вопросу об одновременной сходимости двух последовательностей действительных чисел* (x_n) *и* (y_n).

Это позволяет перенести всю теорию пределов последовательностей действительных чисел на последовательности комплексных чисел. Поэтому известные теоремы о пределе суммы, разности, произведения и частного двух сходящихся последовательностей действительных чисел будут справедливы и для последовательностей комплексных чисел.

Пример. Найти предел последовательности $(z_n) = \left(\frac{2n+1}{n+1} + i\frac{n}{n+1}\right)$.

Решение.

$$\lim_{n\to\infty}(z_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{n+1} + i\frac{n}{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n+1} + i\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = 2 + i.$$

2.3. Бесконечность и стереографическая проекция

Для нужд теории аналитических функций к рассмотренным выше *собственным* (конечным) комплексным числам добавляют еще одно *несобственное* (бесконечное) комплексное число, обозначаемое символом ∞; оно называется *бесконечностью* или *бесконечно удаленной точкой.* Для него понятие аргумента лишено смысла, модуль же числа ∞ равен $+\infty$ $(|\infty| = +\infty)$.

R*-окрестностью бесконечно удаленной точки* называется внешность круга $(|z| > R)$ с центром в начале координат радиусом R (рис. 1.17).

Определение. Последовательность (z_n) называют сходящейся к ∞ и записывают $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$, если для любого $R > 0$ существует номер $N(R) > 0$ такой, что для всех $n \geq N(R)$ $|z_n| > R$.

Отсюда следует, что условие $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$ эквивалентно условию $\lim\limits_{n\to\infty}|z_n| = +\infty$.

По определению устанавливаются следующие операции, в которых участвует ∞ и конечное комплексное число a: $\infty \pm a = a \pm \infty = \infty$, $\infty \cdot a = a \cdot \infty = \infty$, $\dfrac{a}{\infty} = 0$, $\dfrac{\infty}{a} = \infty$, $\dfrac{a}{0} = \infty$.

Операции $\infty \pm \infty$, $0 \cdot \infty$, $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$ лишены смысла.

Чтобы получить геометрическое изображение числа ∞, прибегают к представлению комплексных чисел точками сферы. Проще всего это представление осуществляется при помощи так называемой стереографической проекции. Рассмотрим сферу (рис. 1.18), касающуюся плоскости (Z) в точке $z = 0$.

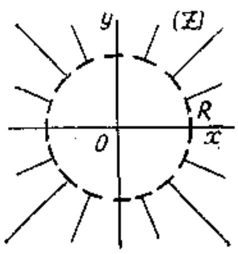


Рис. 1.17

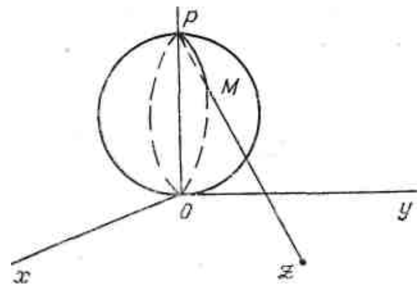


Рис. 1.18

Точка P – противоположный конец проходящего через точку $z = 0$ диаметра – называется *полюсом.*

Любая точка z плоскости (Z) проектируется на сфере в единственную точку M, являющуюся точкой пересечения сферы с прямой Pz. Таким образом, любой точке z плоскости (Z) соответствует точка M на сфере, и обратно, каждой точке M сферы, отличной от P, соответствует точка комплексной плоскости (Z). А так как между множеством комплексных чисел C и точками комплексной плоскости (Z) установлено взаимно однозначное соответствие, то можем сделать вывод.

Сфера, из которой выкинута точка P, является изображением множества всех собственных комплексных чисел.

Взаимно однозначное соответствие, определяемое стереографической проекцией, сохраняет величины углов, т. е. углу между двумя кривыми на плоскости соответствует на сфере такой же угол, и обратно. Кроме того, образы окружностей и прямых на плоскости являются всегда окружностями на сфере. Поэтому на плоскости между окружностями и прямыми различия не будет. Прямую будем рассматривать как окружность с бесконечным радиусом.

Если взять последовательность чисел (z_n), стремящуюся к бесконечности, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$, то последовательность изображающих их точек на сфере будет неограниченно приближаться к точке P. Поэтому естественно принять точку P за изображение бесконечности, а соответствующую ей единственную точку плоскости назвать *бесконечно удаленной точкой* этой плоскости.

Если к плоскости комплексной переменной (Z) присоединить и бесконечно удаленную точку (∞), то такая плоскость будет называться *замкнутой* или *расширенной*. Сфера, точки которой изображают множество всех комплексных чисел и бесконечность, называется *комплексной числовой сферой* или *сферой Римана*.

2.4. Ряды комплексных чисел

Пусть

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n \ldots \tag{1.21}$$

ряд с комплексными членами.

Так же как и в рядах с действительными членами, сходимость ряда (1.21) определяется рассмотрением предела последовательности частичных сумм:

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k .$$

Определение 1. Ряд (1.21) называется сходящимся, если последовательность S_n его частичных сумм стремится к конечному пределу, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, где S – конечное число, называемое суммой ряда.

В этом случае записывают $u_1 + u_2 + \ldots + u_n \ldots = S$.

Определение 2. Если последовательность S_n стремится к бесконечности или, оставаясь ограниченной, не стремится ни к какому пределу, то ряд (1.21) называется расходящимся.

Теорема 1. *Ряд с комплексными членами сходится тогда и только тогда, когда сходятся ряды, образованные действительными и мнимыми частями членов данного ряда.*

Доказательство. Если $u_k = x_k + iy_k$, то

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (x_k + iy_k) = \sum_{k=1}^{n} x_k + i \sum_{k=1}^{n} y_k .$$

Пусть $\sum_{k=1}^{n} x_k = \sigma_n$, а $\sum_{k=1}^{n} y_k = \gamma_n$, тогда $S_n = \sigma_n + i\gamma_n$.

Согласно теореме о пределе последовательности $(z_n) = (x_n + iy_n)$ (п. 2.2, §2, гл. 1), $\lim_{n\to\infty} S_n = S = \sigma + i\gamma$ существует тогда и только тогда, когда одновременно существуют два предела $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma$ и $\lim_{n\to\infty} \gamma_n = \gamma$, т.е. одновременно сходятся два ряда действительных чисел

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k \text{ и } \sum_{k=1}^{\infty} y_k . \tag{1.22}$$

Таким образом, *вопрос о сходимости рядов с комплексными членами сводится к определению сходимости рядов с действительными членами.* Как следствие отсюда получаем *необходимый признак сходимости рядов с комплексными членами: если ряд* (1.21) *сходится, то* $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

Действительно, если ряд (1.21) сходится, то сходятся и оба ряда (1.22). В силу этого $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ и $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$. Но тогда и

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} (x_n + iy_n) = 0.$$

Ряд (1.21) называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд, составленный из модулей его членов

$$|u_1| + |u_2| + ... + |u_n| + ... = \sum_{n=1}^{\infty} |u_n| \tag{1.23}$$

Так как абсолютная сходимость ряда (1.21) означает сходимость ряда (1.23) с действительными неотрицательными членами, то для определения абсолютной сходимости рядов комплексных чисел можно использовать любые известные признаки сходимости рядов с неотрицательными членами.

Пример. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 - in}{(2n+1)!}$.

Решение. Составим ряд из модулей членов данного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{9 + n^2}}{(2n+1)!}. \tag{1.24}$$

По признаку Д'Аламбера для ряда (1.24) имеем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{9 + (n+1)^2}\,(2n+1)!}{[2(n+1)+1]!\sqrt{9+n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2n+2)(2n+3)} = 0 < 1.$$

Следовательно, ряд (1.24) сходится, а исходный ряд абсолютно сходится.

Если иногда не удается установить абсолютную сходимость ряда (1.21) непосредственно по определению, то используют утверждение следующей теоремы.

Теорема 2. *Для абсолютной сходимости ряда (1.21) с комплексными членами необходима и достаточна абсолютная сходимость двух рядов (1.22) с действительными членами.*

Доказательство. *Необходимость.* Если ряд (1.21) абсолютно сходится, т. е. если сходится ряд (1.23), то из неравенств

$$|x_n| \le \sqrt{x_n^2 + y_n^2} = |z_n|, \; |y_n| \le \sqrt{x_n^2 + y_n^2} = |z_n|$$

и признака сравнения для рядов следует абсолютная сходимость рядов (1.22), т. е. сходятся ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|. \tag{1.25}$$

Достаточность. Если сходятся ряды (1.25), то из неравенства $|z_n| = |x_n + iy_n| \le |x_n| + |y_n|$, признака сравнения для рядов и теоремы о возможности суммирования абсолютно сходящихся рядов следует абсолютная сходимость ряда (1.21).

Вопросы для самопроверки

1. Что называется областью?
2. Что называется замкнутой областью?
3. Что называется ε-окрестностью конечной точки z_0?
4. Что называется R-окрестностью бесконечно удаленной точки?
5. Что называется порядком связности области?
6. Как определяется предел последовательности комплексных чисел?
7. Как устанавливается сходимость ряда комплексных чисел?
8. Какой ряд комплексных чисел называется абсолютно сходящимся?
9. Как устанавливается абсолютная сходимость рядов комплексных чисел?

Упражнения к § 2

1. Являются ли следующие множества точек z областями:

а) $|z|<4$; в) $\frac{\pi}{6} \le \arg z \le \frac{3\pi}{4}$; д) $\mathrm{Re}(z)<5$?

б) $2 \le |z-2| \le 3$; г) $0<|z-1|<3$;

2. Описать множества точек комплексной переменной z, определяемые следующими условиями:

а) $|z-1| \le 4$; г) $\mathrm{Im}\, z \ge 5$; ж) $|\arg z| \le \frac{\pi}{4}$.

б) $|z-i|>3$; д) $-\frac{\pi}{6} < \arg z \le \frac{\pi}{2}$;

в) $-1 \le \mathrm{Re}\, z < 2$; е) $|\mathrm{Re}\, z| \le 2$;

3. Записать с помощью неравенств следующие множества точек комплексной переменной z:

а) I квадрант без границы;

б) III квадрант с границей;

в) замкнутый круг радиусом 1 с центром в точке (2, 3);

г) круг радиусом 3 с центром в точке (– 1, 2);

д) полуплоскость, расположенную выше прямой $y=1$;

е) вертикальную полосу $-1 \le x \le 4$.

4. Найти пределы последовательностей (z_n) по их общим членам z_n:

а) $z_n = \left(1+\frac{1}{3n}\right)^n + i\frac{n+2}{3n-1}$; в) $z_n = n\,\mathrm{tg}\frac{1}{3n} + i\left(1+\frac{3}{n}\right)^n$;

б) $z_n = 2n\sin\frac{1}{n} + i\frac{5n+2}{6n-1}$; г) $z_n = \sin\frac{\pi}{2^n} + i\frac{n^2-2}{6n^2+1}$.

5. Исследовать на сходимость ряды $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, где

а) $u_n = \frac{\sin n + i\cos n}{n^3}$; в) $u_n = \sqrt{\frac{n+1}{n}} + i\frac{n}{2^n}$;

б) $u_n = \frac{1}{(n+1)(n+4)} + i\, n\ \mathrm{tg}\frac{\pi}{2^{n+1}}$; г) $u_n = \sin\frac{\pi}{3^n} + i\frac{n-1}{3^n}$.

§ 3. Функции комплексной переменной

3.1. Определение функции комплексной переменной

Понятие функции комплексной переменной является частным случаем общего математического понятия функции.

Определение. Говорят, что на множестве D задана функция $w = f(z)$, если каждому значению $z \in D$ поставлено в соответствие одно или несколько комплексных значений w, среди которых может быть и ∞.

Если каждому значению $z \in D$ соответствует только одно значение w, то функция $w = f(z)$ называется *однозначной*; в противном случае функция называется *многозначной*.

Например, функция $w = z^2$ – однозначная функция, т. к. каждому значению z, по формуле (1.8) возведения комплексного числа в степень, соответствует лишь одно значение w. Функция же $w = \sqrt{z}$ для каждого $z \neq 0$ и $z \neq \infty$ определяет два комплексных числа. Полагая, например, $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, по формуле (1.9) получим

$$w_1 = \sqrt{r}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}\right) \text{ и } w_2 = \sqrt{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{2} + \pi\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{2} + \pi\right)\right).$$

Множество D точек комплексной плоскости (Z), в которых функция $w = f(z)$ определена, называется *множеством задания функции*. Множество G всех значений, принимаемых функцией на D, называется *множеством значений функции*. Когда множества D и G являются областями, то говорят об *области задания* и *области значений* функции $w = f(z)$.

Положив $z = x + iy$ и $w = u + iv$, получим

$$w = f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y), \tag{1.26}$$

где $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$, $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$;
или, если $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ и $w = u + iv$, то

$$w = f(z) = u(r, \varphi) + iv(r, \varphi). \tag{1.27}$$

О равенствах (1.26) и (1.27) говорят, что у функции $w = f(z)$ выделены действительная и мнимая части.

Следовательно, одно комплексное соотношение $w = f(z)$ эквивалентно двум соотношениям $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$ или $[u = u(r, \varphi)$ и $v = v(r, \varphi)]$, где $u(x,y)$ или $u(r,\varphi)$ и $v(x,y)$ или $v(r,\varphi)$ – действительные функции двух действительных переменных x и y (r и φ).

Например, для функции $w=z^2$ при $z=x+iy$ и $w=u+iv$ имеем

$$w=u+iv=(x+iy)^2=(x^2-y^2)+i2xy.$$

Здесь равенство $w=z^2$ равносильно двум следующим:

$$u(x,y)=x^2-y^2 \text{ и } v(x,y)=2xy.$$

Для функции $w=z^n$ при $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ и $w=u+iv$ получим

$$w=u+iv=z^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)=r^n\cos n\varphi+ir^n\sin n\varphi.$$

Следовательно, задание функции $w=z^n$ равносильно здесь заданию двух функций $u=r^n\cos n\varphi$ и $v=r^n\sin n\varphi$.

При $x=x_0$ и $y=y_0$ функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ принимают частные значения $u(x_0,y_0)$ и $v(x_0,y_0)$, а следовательно, и функция $w=f(z)$ принимает частное значение $w_0=u(x_0,y_0)+iv(x_0,y_0)$.

3.2. Геометрическое изображение

Если значения аргумента z изображать точками комплексной плоскости (Z) (плоскости xOy), а значения функции w – точками другой комплексной плоскости (W) (плоскости uOv), то функция $w=f(z)$ устанавливает соответствие между точками множества D плоскости (Z) (точками, в которых функция определена) и точками множества G плоскости (W) (значениями, принимаемыми функцией). Другими словами, функция $w=f(z)$ *отображает* точки множества D в точки множества G (рис. 1.19). Поэтому ее часто называют *отображением.*

Точки множества G в плоскости (W), называют *образами* соответствующих точек множества D в плоскости (Z).

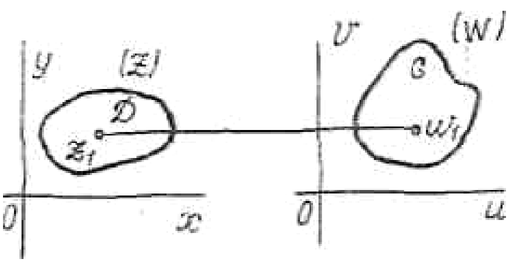


Рис. 1.19

Если каждая точка $z\in D$ при помощи функции $w=f(z)$ отображается в единственную точку множества G и, наоборот, каждая точка $w\in G$ обратной функцией $z=\varphi(w)$ отображается в единственную точку множества D, то говорят, что между множествами D и G установлено *взаимно однозначное* *соответствие.* В этом случае функции $w = f(z)$ и обратная ей $z = \varphi(w)$ – однозначные, а отображение $w = f(z)$ называется *однолистным.*

Пусть в комплексной плоскости (Z) уравнением

$$z = x(t) + iy(t) = \psi(t), \quad t_0 \le t \le T,$$

задана некоторая линия L. Чтобы определить ее образ в плоскости (W) при отображении $w = f(z)$, нужно вычислить $w = f(\psi(t))$.

Пример 1. Линия L в плоскости xOy задана параметрическими уравнениями $x = R\cos t,\ y = R\sin t,\ 0 \le t \le \pi$. Найти ее образ при отображении $w = z^2$.

Решение. Параметрическими уравнениями в плоскости xOy задана верхняя половина окружности $(0 \le t \le \pi)$ радиусом R с центром в начале координат. Запишем эту линию одним уравнением

$$z = x + iy = R\cos t + iR\sin t = R(\cos t + i\sin t) = Re^{it}.$$

С помощью функции $w = z^2$ заданная полуокружность отобразится в линию $w = z^2 = R^2 e^{i2t}$, т. е. $|w| = R^2, \arg w = 2t$. При изменении t от 0 до π аргумент $2t$ пробегает значения от 0 до 2π.

Следовательно, образом заданной полуокружности будет в плоскости (W) полная окружность радиусом R^2 с центром в начале координат (рис. 1.20).

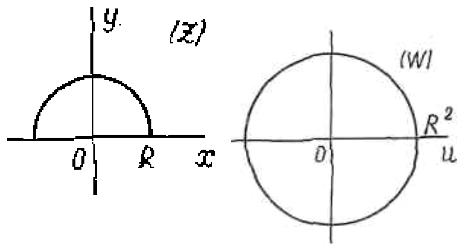


Рис. 1.20

Пример 2. Пусть $w = z^2$. Найти образ прямой $x = c$.

Решение. Если $z = x + iy$, то уравнением прямой $x = c$ на плоскости (Z) будет $z = c + iy$, где y будет параметром, $-\infty < y < +\infty$.

Тогда $w = z^2 = (c + iy)^2 = c^2 - y^2 + i2cy$, откуда найдем параметрические уравнения образа:

$$u = c^2 - y^2, v = 2cy. \tag{1.28}$$

Если $c \ne 0$, то, исключая параметр $y = \dfrac{v}{2c}$, получим

$$u = c^2 - \frac{v^2}{4c^2}. \tag{1.29}$$

В плоскости uOv уравнение (1.29) определяет параболу, симметричную относительно оси Ou, с вершиной в точке $(c^2, 0)$, с ветвями, направленными влево (рис. 1.21).

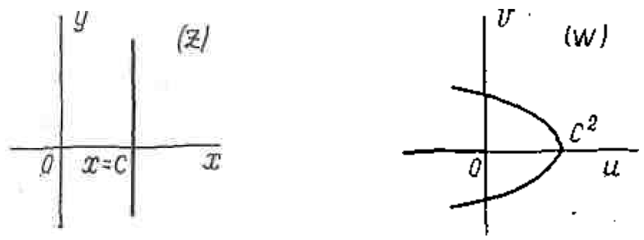


Рис. 1.21

Если $c=0$, то из уравнений (1.28) находим, что $u=-y^2$ и $v=0$. *Следовательно, образом мнимой оси* $x=0$ *является на плоскости* (W) *отрицательная* полуось, пробегаемая дважды.

3.3. Предел

Пусть $w=f(z)$ – однозначная функция, определенная для любого $z\in D$ за исключением, может быть, точки z_0.

Говорят, что функция $f(z)$ стремится к пределу $A\,(A\neq\infty)$, когда z стремится к z_0 (конечному), и пишут $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A$, если для каждого произвольно малого положительного числа ε можно подобрать положительное число $\delta=\delta(\varepsilon)$ такое, что для всех z, отличных от z_0 и удовлетворяющих неравенству $|z-z_0|<\delta$, выполняется неравенство $|f(z)-A|<\varepsilon$.

Если $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A$, то геометрически это означает (рис. 1.22), что как только z попадает в δ-окрестность точки z_0, то $w=f(z)$ попадает в ε-окрестность точки A.

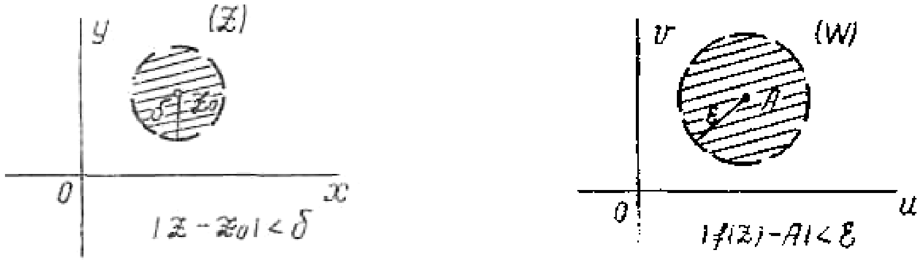


Рис. 1.22

Полагая $A=B+iC$, $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, $z_0=x_0+iy_0$, докажем справедливость следующего предложения.

Теорема. *Если существует* $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A=B+iC$, *то существуют*

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y)=B \quad \text{и} \quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y)=C.$$

Доказательство. Так как существует $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A$, то это значит, что для любого $\varepsilon>0$ найдется $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ такое, что для всех z ($z\neq z_0$), удовлетворяющих неравенству $|z-z_0|<\delta$, выполняется неравенство $|f(z)-A|<\varepsilon$.

Но $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, $A=B+iC$ и $z_0=x_0+iy_0$. Следовательно,

$$|f(z)-A|=\sqrt{[u(x,y)-B]^2+[v(x,y)-C]^2}<\varepsilon \qquad (1.30)$$

при

$$|z-z_0|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta. \qquad (1.31)$$

Из выражений (1.30) и (1.31) очевидны неравенства $|u(x,y)-B|<\varepsilon$ и $|v(x,y)-C|<\varepsilon$ при $|x-x_0|<\delta$ и $|y-y_0|<\delta$. А это значит, что $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y)=B$ и $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y)=C$.

Справедливо и обратное утверждение, доказательство которого мы опустим.

Из доказанной теоремы вытекает следующее утверждение: *если* $f(z)\to A$, *то* $|f(z)|\to|A|$, $\arg f(z)\to\arg A$ *при условии, что* $A\neq 0,\infty$.

Действительно, $|f(z)|=\sqrt{u^2+v^2}\to\sqrt{B^2+C^2}=|A|$,

$$\arg f(z)=\operatorname{arctg}\frac{v}{u}\to\operatorname{arctg}\frac{C}{B}=\arg A.$$

Доказанное предложение позволяет основные теоремы о пределах функций действительных переменных распространить без изменения на пределы функции комплексной переменной.

Например, если функции $f(z)$ и $\varphi(z)$ определены в некоторой области D и для них $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A_1$, $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A_2$, то

$$\lim_{z\to z_0}[f(z)\pm\varphi(z)]=A_1\pm A_2;$$

$$\lim_{z\to z_0} f(z)\cdot\varphi(z)=A_1\cdot A_2;$$

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{\varphi(z)}=\frac{A_1}{A_2}, \text{ если } A_2\neq 0.$$

Определение 1. Говорят, что $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=A$, $A\neq\infty$, если для любого $\varepsilon>0$ существует $N(\varepsilon)$ такое, что при $|z|>N(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|f(z)-A|<\varepsilon$. Здесь $|z|>N(\varepsilon)$ – окрестность бесконечно удаленной точки.

И последний случай, когда z_0 – конечная или бесконечно удаленная точка, а $A=\infty$.

Определение 2. Говорят, что $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$, если для любого $N > 0$ можно указать такую окрестность точки z_0, что если $z \in D$ и $z \neq z_0$ принадлежит этой окрестности, то $|f(z)| > N$.

Если $A = \infty$, то нельзя без оговорок пользоваться теоремами о пределах суммы, разности, произведения и частного функций, т. к. операции $\infty - \infty$, $a \cdot \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$ лишены смысла.

3.4. Непрерывность

Пусть функция $w = f(z)$ определена в точке z_0 и некоторой ее окрестности.

Определение 1. Функция $f(z)$ называется непрерывной в точке z_0, если

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0) \text{ и } f(z_0) \neq \infty. \tag{1.32}$$

Как и в анализе функций действительных переменных, назовем $z - z_0 = \Delta z$ *приращением аргумента,* а $f(z) - f(z_0) = \Delta w$ – *приращением функции.* Очевидно, что равенство (1.32) эквивалентно следующему: $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \Delta w = 0$, *т. е. функция* $f(z)$ *будет непрерывной в точке* z_0, *если бесконечно малому приращению аргумента* Δz *соответствует бесконечно малое приращение функции* Δw.

В силу п. 3.3, §3, гл. 1 условие непрерывности функции $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ в точке $z_0 = x_0 + iy_0$ эквивалентно двум следующим:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x, y) = u(x_0, y_0) \text{ и } \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x, y) = v(x_0, y_0),$$

выражающим непрерывность двух действительных функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ в той же точке.

Справедливо и обратное утверждение: если функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ непрерывны в точке (x_0, y_0), то функция $f(z)$ будет непрерывной в точке $z_0 = x_0 + iy_0$.

Таким образом, *функция комплексной переменной* $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ *непрерывна в точке* $z_0 = x_0 + iy_0$ *тогда и только тогда, когда функции* $u(x, y)$ *и* $v(x, y)$ *непрерывны в точке* (x_0, y_0).

Отсюда следует, что известные теоремы о непрерывности суммы, произведения и частного непрерывных функций действительных переменных будут справедливы и для непрерывных функций комплексной переменной.

Если функция $f(z)$ непрерывна в каждой точке множества D, то она называется *непрерывной на этом множестве*.

Точками разрыва функции $f(z)$ называются точки, в которых нарушается непрерывность функции.

Определение 2. Функция $f(z)$ называется *обобщенно-непрерывной* в точке $z_0 = \infty$, если $\lim\limits_{z \to \infty} f(z) = w_0$, где w_0 – конечное комплексное число, которое будем принимать за значение функции $f(z)$ в точке $z_0 = \infty$ ($f(\infty) = w_0$).

Определение 3. *Функция* $f(z)$ *называется обобщенно-непрерывной в конечной точке* z_0, *если* $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$, *и будем полагать* $f(z_0) = \infty$.

Пример. Функция $f(z) = \dfrac{1}{z}$ непрерывна в любой точке комплексной плоскости (Z), кроме точки $z = 0$, и обобщенно-непрерывна в расширенной комплексной плоскости, т. к. $\lim\limits_{z \to \infty} \dfrac{1}{z} = 0 = f(\infty)$ и $\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{1}{z} = \infty = f(0)$.

На обобщенно-непрерывные функции теоремы о непрерывности суммы, произведения, частного непрерывных функций действительных переменных не распространяются, т. к. выражения $\infty - \infty, \dfrac{0}{0}, 0 \cdot \infty, \dfrac{\infty}{\infty}$ лишены смысла.

Вопросы для самопроверки

1. Дайте определение функции комплексной переменной.
2. Что называется множеством задания и множеством значений функции $w = f(z)$?
3. Дайте геометрическое истолкование функции комплексной переменной.
4. Что означает равенство $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A$, если числа z_0 и A – конечные? Дайте геометрическое истолкование этому равенству.

5. Что означают равенства $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=A$ и $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty$, где z_0 и A – конечные комплексные числа?

6. $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, $z_0=x_0+iy_0$. Чему эквивалентно равенство $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A+iB$?

7. Дайте определение непрерывности функции $f(z)$ в точке z_0.

8. Чему эквивалентно равенство $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$, если $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ и $z_0=x_0+iy_0$?

9. Когда функция $f(z)$ называется обобщенно-непрерывной в конечной точке z_0 и в точке $z_0=\infty$?

10. В каком случае теоремы о пределе суммы, произведения, частного функций действительных переменных справедливы и для функций комплексной переменной?

11. К каким функциям комплексной переменной применимы теоремы о непрерывности суммы, произведения, частного непрерывных функций действительных переменных?

Упражнения к § 3

1. У следующих функций выделить действительную и мнимую части:

1) $w=z^2-z+1$; 2) $w=\dfrac{1}{z}$; 3) $w=|z|+\operatorname{Re} z$.

2. Вычислить значения функций, заданных в упражнении 1, в точках: $z_1=1+3i$, $z_2=3i$, $z_3=-1+i$.

3. Найти образы точки $z=1-i$ при отображениях:

1) $w=1+iz$; 2) $w=\dfrac{1}{z}$.

4. Найти образ биссектрисы второго координатного угла $z=-t+it$, $0\le t<\infty$, при отображении $w=z^3$.

5. Где непрерывны функции:

1) $w=\dfrac{z}{z-i}$; 2) $w=\dfrac{z}{2-|z|}$; 3) $w=\dfrac{2z+1}{|z-2|-3}$?

6. В каких точках следующие функции будут обобщенно-непрерывными:

1) $w=\dfrac{z}{z-i}$; 2) $w=\dfrac{z}{2-|z|}$; 3) $w=\dfrac{2z+1}{|z-2|-3}$; 4) $w=\dfrac{1}{z+3}$?

§4. Ряды функций комплексной переменной

4.1. Ряды функций

Ряд

$$u_1(z)+u_2(z)+...+u_n(z)+..., \tag{1.33}$$

членами которого являются однозначные функции комплексного аргумента, называется *функциональным рядом*.

При фиксированном значении аргумента $z=z_0$ из ряда (1.33) получается числовой ряд с комплексными членами:

$$u_1(z_0)+u_2(z_0)+...+u_n(z_0)+..., \tag{1.34}$$

Если числовой ряд (1.34) сходится, то точка $z=z_0$ называется *точкой сходимости функционального ряда* (1.33). Множество точек, в которых ряд (1.33) сходится, называется *областью сходимости этого* ряда.

Если

$$S_n(z)=u_1(z)+u_2(z)+...+u_n(z)=\sum_{k=1}^{n}u_k(z)$$

есть частичная сумма ряда (1.33), то для всех точек z из области сходимости этого ряда существует $\lim\limits_{n\to\infty}S_n(z)=f(z)$, называемый *суммой ряда* (1.33). Сумма ряда (1.33) есть функция от z.

Остаток ряда (1.33) – это $R_n(z)=f(z)-S_n(z)$.

В каждой точке сходимости ряда (1.33) $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(z)=0$. Другими словами, если ряд (1.33) в данной точке z сходится, то для любого $\varepsilon>0$ найдется номер $N(\varepsilon,z)$, начиная с которого (т. е. для $n\geq N$) модуль остатка ряда удовлетворяет неравенству $|R_n(z)|<\varepsilon$.

Ряд (1.33) называется равномерно сходящимся к функции $f(z)$ *в области* D, *если для любого* $\varepsilon>0$ *найдется номер* $N(\varepsilon)$ *такой, что для всех* $n\geq N$ *выполняется неравенство* $|f(z)-S_n(z)|=|R_n(z)|<\varepsilon$ *одновременно для всех* z *из области* D.

Равномерную сходимость ряда (1.33) часто можно установить по следующему достаточному признаку.

Признак Вейерштрасса. *Если в каждой точке z области D модули членов ряда (1.33) не превосходят соответственных членов какого-нибудь сходящегося числового знакоположительного ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots, \tag{1.35}$$

т. е. $|u_n(z)| \le a_n$ *для любого* $z \in D$, *то ряд (1.33) сходится абсолютно и равномерно в области* D.

Доказательство. Действительно, ряд

$$|u_1(z)| + |u_2(z)| + \ldots + |u_n(z)| + \ldots$$

сходится для любого $z \in D$, т. к. его члены не больше соответствующих членов сходящегося ряда (1.35). Следовательно, данный ряд (1.33) сходится абсолютно в каждой точке z области D. Если $S(z)$ – сумма ряда (1.33), а $S_n(z)$ – это частичная сумма, то

$$|S(z) - S_n(z)| \le |u_{n+1}(z)| + |u_{n+2}(z)| + \ldots \le a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots \tag{1.36}$$

для любого $z \in D$. Так как ряд (1.35) сходится по условию, то его остаток $a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots$ будет меньше ε, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, начиная с достаточно большого $n \ge N(\varepsilon)$.

Таким образом, из неравенства (1.36) получаем $|S(z) - S_n(z)| < \varepsilon$ при $n \ge N(\varepsilon)$ для любого $z \in D$, а это и доказывает равномерную сходимость ряда (1.33) в области D.

Условие равномерной сходимости ряда функций комплексной переменной гарантирует непрерывность суммы ряда и возможность почленного интегрирования этого ряда.

Нетрудно заметить, что если все члены равномерно сходящегося в области D ряда умножить на одну и ту же ограниченную по модулю функцию $\varphi(z)$, то полученный ряд

$$\varphi(z)u_1(z) + \varphi(z)u_2(z) + \ldots + \varphi(z)u_n(z) + \ldots$$

будет также равномерно сходящимся в области D.

4.2. Степенные ряды

Степенным рядом называется ряд вида

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_k (z-a)^k, \tag{1.37}$$

где $a, C_0, C_1, C_2, \ldots$ – постоянные комплексные числа; z – комплексная переменная.

Так как ряд (1.37) является частным случаем функционального ряда (1.33), то все утверждения, справедливые для функциональных рядов, справедливы и для степенных рядов.

Для степенных рядов с комплексными членами, так же как и для степенных рядов с действительными членами, имеет место теорема Абеля, которую мы сформулируем без доказательства.

Теорема Абеля. *Если степенной ряд (1.37) сходится при* $z = z_0 \neq a$, *то он абсолютно сходится в круге* $|z - a| < |z_0 - a|$. *Во всяком замкнутом круге меньшего радиуса* $|z - a| \leq r < |z_0 - a|$ *ряд (1.37) сходится равномерно.*

Если степенной ряд (1.37) расходится при $z = z_1$, то он расходится для всех z, удовлетворяющих неравенству $|z - a| > |z_1 - a|$.

Круг радиусом R такой, что ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} C_k (z-a)^k$ сходится при $|z - a| < R$ и расходится при $|z - a| > R$, называется *кругом сходимости* ряда (1.37), а положительное число R – его *радиусом сходимости.*

Радиус сходимости ряда (1.37) обычно определяют по формулам $R = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{|C_n|}}$ или $R = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{C_n}{C_{n+1}}\right|$, если указанные пределы существуют.

Пример 1. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n z^n}{n}$ имеет радиус сходимости $R = 1$, поскольку $R = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{C_n}{C_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{n} = 1$, и абсолютно сходится в круге $|z| < 1$.

Пример 2. Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n!(z-a)^n$ сходится лишь при $z = a$, поскольку в этом случае $R = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{C_n}{C_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$.

Пример 3. Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{n!}$ сходится на всей комплексной плоскости (Z), т. к. $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{C_n}{C_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)!}{n!} = \lim\limits_{n\to\infty} (n+1) = \infty$.

Пример 4. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n}(z-1)\right]^{n}$ имеет радиус сходимости $R=\dfrac{1}{e}$, поскольку

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|C_n|}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\left[\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n}\right]^{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}}=\frac{1}{e},$$

и абсолютно сходится в круге $|z-1|<\dfrac{1}{e}$.

Поведение ряда на окружности $|z-a|=R$ нужно исследовать особо. Там могут быть как точки сходимости, так и точки расходимости исследуемого ряда.

Из теоремы Абеля следует, что *степенной ряд (1.37) равномерно сходится во всяком замкнутом круге* $|z-a|\le r<R$, *т. е. внутри круга сходимости.*

Рассмотрим теперь ряд с отрицательными степенями $|z-a|$:

$$\frac{b_1}{z-a}+\frac{b_2}{(z-a)^2}+\ldots+\frac{b_n}{(z-a)^n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{(z-a)^n}. \qquad (1.38)$$

Полагая в нем

$$\frac{1}{z-a}=\eta-a, \qquad (1.39)$$

получим обычный степенной ряд вида (1.37)

$$b_1(\eta-a)+b_2(\eta-a)^2+\ldots+b_n(\eta-a)^n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}b_n(\eta-a)^n \qquad (1.40)$$

с некоторым радиусом сходимости ρ, т. е. при $|\eta-a|<\rho$ ряд (1.40) сходится, а при $|\eta-a|>\rho$ он расходится. Отсюда и из равенства (1.39) заключаем, что ряд (1.38) сходится при $|z-a|>\dfrac{1}{\rho}$ и расходится при $|z-a|<\dfrac{1}{\rho}$.

Если положить $\dfrac{1}{\rho}=r$, то областью сходимости ряда (1.38) будет внешность круга радиусом r с центром в точке $z=a$ (рис. 1.23).

Ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z-a)^n = \ldots + \frac{C_{-n}}{(z-a)^n} + \frac{C_{-n+1}}{(z-a)^{n-1}} + \ldots + \frac{C_{-1}}{z-a} +$$
$$+ C_0 + C_1(z-a) + C_2(z-a)^2 + \ldots + C_n(z-a)^n + \ldots, \qquad (1.41)$$

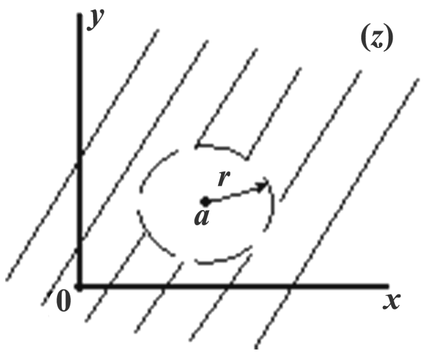
бесконечный в обе стороны, считается сходящимся тогда и только тогда, когда одновременно сходятся ряды

$$C_0 + C_1(z-a) + C_2(z-a)^2 + \ldots + C_n(z-a)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-a)^n \qquad (1.42)$$

и

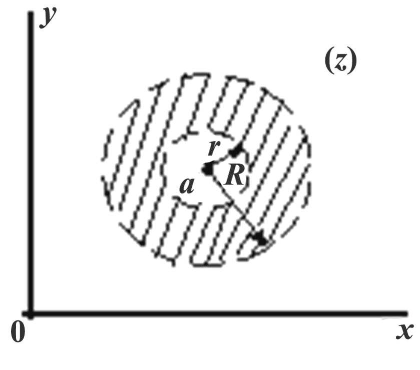
$$\frac{C_{-1}}{z-a} + \frac{C_{-2}}{(z-a)^2} + \ldots + \frac{C_{-n}}{(z-a)^n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{-n}}{(z-a)^n}. \qquad (1.43)$$

Если ряд (1.42) сходится внутри некоторого круга радиусом R с центром в точке $z=a$, а ряд (1.43) – вне круга радиусом r с центром в точке $z=a$ и $r<R$, то одновременно эти ряды сходятся в кольце $r<|z-a|<R$ (рис. 1.24). Это кольцо называется *кольцом сходимости* ряда (1.41).



$|z-a|>r$

Рис. 1.23



$r<|z-a|<R$

Рис. 1.24

Пример 5. Указать область сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{(n+2)(n+3)} \left(\frac{1+2i}{z-i}\right)^n$.

Решение. Полагая $\frac{1}{z-i} = \eta - i$, получим ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(1+2i)^n}{(n+2)(n+3)} (\eta - i)^n$,

радиус сходимости которого

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{C_n}{C_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)(1+2i)^n (n+3)(n+4)}{(n+2)(n+3)(n+2)(1+2i)^{n+1}}\right| = \frac{1}{|1+2i|} = \frac{1}{\sqrt{5}},$$

и область сходимости определится неравенством $|\eta - i| < \dfrac{1}{\sqrt{5}}$. Но тогда $\left|\dfrac{1}{z-i}\right| = |\eta - i| < \dfrac{1}{\sqrt{5}}$, а $|z-i| > \sqrt{5}$.

Следовательно, исходный ряд сходится для z, удовлетворяющих неравенству $|z-i| > \sqrt{5}$.

Вопросы для самопроверки

1. Что называется областью сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(z)$?

2. Какой ряд называется равномерно сходящимся?

3. Сформулируйте достаточный признак равномерной сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(z)$.

4. Какой ряд комплексных функций называется степенным?

5. Сформулируйте теорему Абеля.

6. Что называется радиусом и кругом сходимости степенного ряда? Как определяется радиус сходимости степенного ряда?

7. Где сходится ряд вида $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z-a)^n$?

Упражнения к §4

Указать область сходимости следующих рядов:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(1-2i)^n}{(n+1)(n+3)}(z+3i)^n$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n+1)^3}\left(\dfrac{z-1+i}{1-3i}\right)^n$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n(1+i)^n}{(z-1+2i)^n}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{3n+2}\left(\dfrac{3-4i}{z+5i}\right)^n$;

5) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\dfrac{z-1}{5}\right)^n + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{2}{z-1}\right)^n$;

6) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(z-2i)^n}{4^n(2n+1)} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+3}{(z-2i)^n}$.

§5. Элементарные трансцендентные функции комплексной переменной

5.1. Показательная, тригонометрические и гиперболические функции. Связь между ними. Периодичность

В алгебре и тригонометрии были введены и определены соответствующим образом функции e^x, $\cos x$, $\sin x$, $\log x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$ и т. д.

Если вместо x ввести комплексную переменную z, то прежние определения этих функций потеряют смысл. Поэтому показательную, тригонометрические и гиперболические функции комплексного аргумента определяют иначе, а именно: полагают по определению, что для любого значения комплексной переменной z $(z \neq \infty)$:

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}; \tag{1.44}$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n+1} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!};$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!};$$

$$\operatorname{sh} z = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \ldots + \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!};$$

$$\operatorname{ch} z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots + \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}.$$

Убедитесь самим, что данные ряды сходятся, и притом абсолютно для любого z. Учитывая, что в абсолютно сходящемся ряду допустима любая группировка членов, рассмотрим разложение в степенной ряд функций e^{iz}:

$$e^{iz} = 1 + \frac{iz}{1!} + \frac{i^2z^2}{2!} + \frac{i^3z^3}{3!} + \frac{i^4z^4}{4!} + \frac{i^5z^5}{5!} + \ldots =$$

$$= \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots\right) + i\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots\right) = \cos z + i \sin z.$$

Таким образом, получена формула Эйлера

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z, \tag{1.45}$$

введенная раньше формально. Если заменить z на $-z$, то получим

$$e^{-iz} = \cos z - i \sin z. \tag{1.46}$$

Складывая и вычитая выражения (1.45) и (1.46), найдем, что

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}; \ \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}. \tag{1.47}$$

Формулы (1.47) также называются *формулами Эйлера*. Формулы (1.45) – (1.47) связывают между собой показательные и тригонометрические функции. Отметим важные частные случаи формулы Эйлера (1.45):

$$e^{\pm 2\pi i} = 1, \quad e^{\pm \pi i} = -1, \quad e^{\pm \frac{\pi}{2} i} = \pm i, \quad e^{\pm \frac{\pi}{4} i} = \frac{1 \pm i}{\sqrt{2}}.$$

Отметим без доказательства справедливость теорем сложения для показательной, тригонометрических и гиперболических функций:

$$e^{z_1 + z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2};$$

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2;$$

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2;$$

$$\operatorname{ch}(z_1 + z_2) = \operatorname{ch} z_1 \operatorname{ch} z_2 + \operatorname{sh} z_1 \operatorname{sh} z_2;$$

$$\operatorname{sh}(z_1 + z_2) = \operatorname{sh} z_1 \operatorname{ch} z_2 + \operatorname{ch} z_1 \operatorname{sh} z_2.$$

Покажем, что $e^z \neq 0$ на всей комплексной плоскости. Действительно, $e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y) = e^x \cos y + i e^x \sin y$.

Функция e^z может быть равна нулю тогда и только тогда, когда одновременно $\begin{cases} e^x \cos y = 0; \\ e^x \sin y = 0. \end{cases}$ Но $e^x \neq 0$, значит, должно быть $\begin{cases} \cos y = 0; \\ \sin y = 0, \end{cases}$ а это при действительных значениях аргумента y невозможно. Следовательно, нет таких значений z, при которых $e^z = 0$.

Тригонометрические функции $\operatorname{tg} z$ и $\operatorname{ctg} z$ определяются с помощью равенств:

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i(e^{iz} + e^{-iz})}; \ \operatorname{ctg} z = \frac{i(e^{iz} + e^{-iz})}{e^{iz} - e^{-iz}} = \frac{1}{\operatorname{tg} z}. \tag{1.48}$$

На основании формул (1.47) и (1.48) легко убедится (сделать самим) в справедливости, например, таких тригонометрических тождеств:

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1;$$

$$\operatorname{tg} z \cdot \operatorname{ctg} z = 1. \qquad (1.49)$$

Для установления связи между показательными и гиперболическими функциями запишем разложения в ряды функций e^z и e^{-z}:

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots = (1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots) + (z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \ldots) = \operatorname{ch} z + \operatorname{sh} z;$$

$$e^{-z} = \operatorname{ch} z - \operatorname{sh} z.$$

Почленное сложение и вычитание этих двух равенств дает

$$e^z + e^{-z} = 2\operatorname{ch} z; \quad e^z - e^{-z} = 2\operatorname{sh} z,$$

откуда

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}; \quad \operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}. \qquad (1.50)$$

Непосредственно из формул (1.47) и (1.50), если положить в них значение аргумента равным iz, получим формулы, связывающие гиперболические и тригонометрические функции:

$$\cos(iz) = \frac{e^{i(iz)} + e^{-i(iz)}}{2} = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \operatorname{ch} z; \qquad (1.51)$$

$$\sin(iz) = \frac{e^{i(iz)} - e^{-i(iz)}}{2i} = i\frac{e^z - e^{-z}}{2} = i\operatorname{sh} z; \qquad (1.52)$$

$$\operatorname{ch}(iz) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z; \qquad (1.53)$$

$$\operatorname{sh}(iz) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} = i\sin z. \qquad (1.54)$$

Периодичность показательной, тригонометрических и гиперболических функций

Показательная функция e^z имеет основной период $2\pi i$, т. е. любой другой ее период равен $2k\pi i$, где k – целое число.

Действительно, $e^{z+2\pi i} = e^z \cdot e^{2\pi i} = e^z(\cos 2\pi + i\sin 2\pi) = e^z$. Тогда, согласно равенствам (1.50), и гиперболические функции $\operatorname{ch} z$, $\operatorname{sh} z$ имеют тот же основной период $2\pi i$.

Функция e^{iz} имеет основной период 2π, т. к. $e^{i(z+2\pi)} = e^{iz} \cdot e^{2\pi i} = e^{iz}$, а поэтому в силу формулы (1.47) $\cos z$ и $\sin z$ имеют тот же основной период 2π.

5.2. Логарифмическая функция

Логарифмическая функция определяется как функция, обратная показательной (т. е. так же, как в элементарной алгебре).

Если $e^w = z$, где $z \neq 0$, $z \neq \infty$, то число w называется *логарифмом комплексного числа* z (по основанию e) и обозначается $w = \operatorname{Ln} z$.

Чтобы получить формулу для вычисления логарифма комплексного числа, в равенстве $e^w = z$ положим $w = u + iv$, $z = r \cdot e^{i\varphi}$.
Тогда $e^w = e^{u+iv} = e^u \cdot e^{iv} = r \cdot e^{i\varphi}$.

По определению, два комплексных числа равны тогда, когда равны их модули, а аргументы отличаются на число, кратное 2π. Следовательно, $e^u = r$, $v = \varphi + 2k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, откуда $u = \ln r = \ln|z|$
и $w = \operatorname{Ln} z = \ln r + i(\varphi + 2k\pi)$ или

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{1.55}$$

Значение $\operatorname{Ln} z$, соответствующее некоторому фиксированному значению k, называют *ветвью*.

Значение логарифма, соответствующее главному значению аргумента числа z (при $k = 0$), называется *главным значением логарифма* z (*главной ветвью*) и обозначается через $\ln z$, т. е.

$$\ln z = \ln|z| + i \arg z . \tag{1.56}$$

Из равенства (1.55) и (1.56) следует, что

$$\operatorname{Ln} z = \ln z + i2k\pi . \tag{1.57}$$

Таким образом, всякое комплексное число $z \neq 0, \infty$ имеет бесконечное множество значений $\operatorname{Ln} z$, определяемых формулой (1.57). Все они расположены на прямой $u = \operatorname{Re} w = \ln|z|$ и отличают друг от друга на слагаемое, кратное $2\pi i$ (рис. 1.25).

На рисунке 1.25 $w_{-2} = \ln z - 2 \cdot 2\pi i$, $w_{-1} = \ln z - 2\pi i$, $w_0 = \ln z$, $w_1 = \ln z + 2\pi i$, $w_2 = \ln z + 2 \cdot 2\pi i$ и т. д.

Если $z = x$ – действительное положительное число, то $|z| = x$, а $\arg z = 0$. Поэтому главное значение логарифма действительного положительного числа совпадает с главным значением $\ln x$, приводимым обычно в таблицах натуральных логарифмов. Но, кроме этих действительных значений, логарифмы положительных чисел имеют еще и бесконечное множество комплексных значений, получаемых по формуле (1.57).

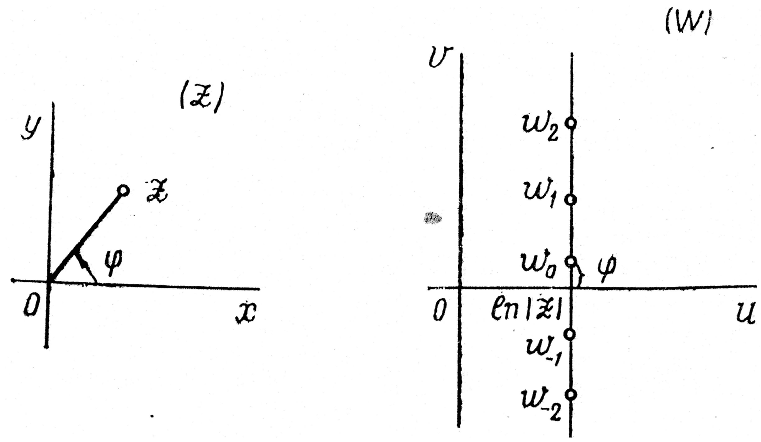


Рис. 1.25

Пример. Найти $\ln(-3)$ и $\mathrm{Ln}(-3)$.

Решение. Модуль числа – 3 равен 3, а главное значение аргумента π, поэтому

$$\ln(-3) = \ln 3 + i\pi,$$

а

$$\mathrm{Ln}(-3) = \ln 3 + i(\pi + 2k\pi),$$

где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Легко показать (сделать это самим, пользуясь определением логарифма), что известные правила о логарифме произведения и частного имеют место и для логарифма комплексных чисел; т.е. для любых z отличных от нуля и бесконечности:

$$\mathrm{Ln}(z_1 \cdot z_2) = \mathrm{Ln}\, z_1 + \mathrm{Ln}\, z_2; \tag{1.58}$$

$$\mathrm{Ln}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \mathrm{Ln}\, z_1 - \mathrm{Ln}\, z_2. \tag{1.59}$$

В каждом из этих равенств левая и правая части представляют собою бесконечные множества комплексных чисел. Равенства (1.58) и (1.59) следует понимать в том смысле, что эти множества (левой и правой частей) одинаковы, т. е. состоят из одних и тех же чисел.

В силу последнего замечания, например, $\mathrm{Ln}\, z + \mathrm{Ln}\, z \neq 2\mathrm{Ln}\, z$, т. к. сумма $\mathrm{Ln}\, z + \mathrm{Ln}\, z$ получается из множества чисел путем сложения любого из этих чисел с таким же или отличным от него числом того же множества, тогда как множество $2\mathrm{Ln}\,z$ получается путем удвоения каждого из чисел $\mathrm{Ln}\,z$, т.е. путем сложения такого числа только с самим собой.

Следовательно, $\mathrm{Ln}\,z^n \neq n\mathrm{Ln}\,z$, но $\mathrm{Ln}\sqrt[n]{z} = \frac{1}{n}\mathrm{Ln}\,z$.

5.3. Общая степенная функция

С использованием формулы $e^z = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$ действительное число e легко возводится в любую комплексную степень, например,

$$e^{3(1-3i)} = e^{3-9i} = e^3(\cos 9 - i\sin 9)$$

(аргумент записан здесь в радианах).

Если $w = z^B$, где z – произвольное, отличное от нуля и бесконечности число, и B – любое число, то по аналогии с основным логарифмическим тождеством для действительных чисел ($x^n = a^{n\log_a x}$) полагают по определению

$$w = z^B = e^{B\,\mathrm{Ln}\,z}. \tag{1.60}$$

Пусть $z = re^{i\varphi}$, где $\varphi = \varphi_0 + 2k\pi$, $-\pi < \varphi_0 \leq \pi$, и $B = \alpha + i\beta$, тогда

$$w = z^B = e^{B\,\mathrm{Ln}\,z} = e^{(\alpha+i\beta)[\ln r + i(\varphi_0+2k\pi)]} = e^{\alpha\ln r - \beta(\varphi_0+2k\pi)} \cdot e^{i[\beta\ln r + \alpha(\varphi_0+2k\pi)]}, \tag{1.61}$$

где $k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$.

Рассмотрим следующие случаи.

1. Пусть $\beta = 0$, т. е. $B = \alpha$ – действительное число. Из равенства (1.61) получаем $w = e^{\alpha\ln r}e^{i\alpha(\varphi_0+2k\pi)}$.

Если $\alpha = n$ – целое число, то функция

$$w = z^n = e^{n\ln r}e^{in(\varphi_0+2k\pi)} = r^n(\cos n\varphi_0 + i\sin n\varphi_0)$$

будет однозначной.

Если $\alpha = \frac{m}{n}$ – произвольное рациональное число, где m и n – натуральные числа, а дробь $\frac{m}{n}$ – несократимая, то $w = z^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{z^m}$ имеет n различных значений, определяемых по формуле (1.9):

$$w = z^{\frac{m}{n}} = r^{\frac{m}{n}}e^{i\frac{m(\varphi_0+2k\pi)}{n}} \quad \text{при } k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ (n-1).$$

Если α – иррациональное число, то в последовательности значений аргументов $\alpha\varphi_0 + \alpha 2k\pi$ при $k = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \ldots$ не будет членов, отличающихся друг от друга на число, кратное 2π. Поэтому функция $w = z^{\alpha} = e^{\alpha \ln r} e^{i\alpha(\varphi_0 + 2k\pi)}$ будет бесконечной.

2. Пусть $\beta \neq 0$. Из формулы (1.61) следует, что в этом случае функция $w = z^{\alpha + i\beta} = z^{B}$ имеет бесконечное множество значений, причем аргументы этих значений при $k = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \ldots$ образуют арифметическую прогрессию $\theta_k = \beta \ln r + \alpha\varphi_0 + \alpha 2k\pi,$ а модули – геометрическую прогрессию $\rho_k = e^{\alpha \ln r - \beta\varphi_0} \cdot e^{-\beta 2k\pi}$.

Пример 1. Вычислить значение $1^{\sqrt{2}}$.

Решение. Пользуясь определением (1.60), находим

$$1^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2}\,L\mathrm{n}\,1} = e^{\sqrt{2}(\ln 1 + i2k\pi)} = e^{i2\sqrt{2}k\pi} = \cos(2\sqrt{2}k\pi) + i\sin(2\sqrt{2}k\pi)$$

при $k = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \ldots$.

Здесь имеется бесконечное множество значений $w_k = 1^{\sqrt{2}}$.

Пример 2. Вычислить значение 2^{1-i}.

Решение. Согласно определению (1.60),

$$2^{1-i} = e^{(1-i)L\mathrm{n}\,2} = e^{(1-i)(\ln 2 + i2k\pi)} = e^{\ln 2 + 2k\pi + i(2k\pi - \ln 2)} = e^{\ln 2} \cdot e^{2k\pi} \cdot e^{i(2k\pi - \ln 2)} =$$
$$= 2 \cdot e^{2k\pi}\left[\cos(2k\pi - \ln 2) + i\sin(2k\pi - \ln 2)\right] = 2 \cdot e^{2k\pi}\left[\cos(\ln 2) - i\sin(\ln 2)\right].$$

при $k = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \ldots$.

5.4. Обратные тригонометрические и обратные гиперболические функции

Обратные тригонометрические и обратные гиперболические функции комплексного аргумента определяются так же, как соответсвующие функции действительного аргумента в курсе тригонометрии.

Например, арксинусом комплексного числа z называется такое число w, что $\sin w = z$, и обозначается оно так: $w = A\mathrm{rc}\sin z$.

Так как $z = \sin w = \dfrac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i}$, то $e^{iw} - e^{-iw} = 2iz$, $e^{2iw} - 2ize^{iw} - 1 = 0$, откуда $e^{iw} = iz \pm \sqrt{1 - z^2}$, а $iw = \mathrm{Ln}(iz + \sqrt{1 - z^2})$. Поэтому

$$A\mathrm{rc}\sin z = w = -i\,\mathrm{Ln}(iz + \sqrt{1 - z^2}). \tag{1.62}$$

В силу многозначности логарифма и двузначности корня в правой части выражения (1.62) $A\mathrm{rc}\sin z$ является многозначной функцией.

Аналогичные формулы можно записать и для других функций:

$$A\mathrm{rc}\cos z = -i\,\mathrm{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1});$$

$$\mathrm{Arc\ tgz} = -\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\frac{i - z}{i + z}; \tag{1.63}$$

$$\mathrm{Arc\ ctgz} = \frac{i}{2}\mathrm{Ln}\frac{z - i}{z + i}. \tag{1.64}$$

Выражения (1.63) и (1.64) теряют смысл при $z = \pm i$. Обратные гиперболические функции обозначаются так: $\mathrm{Ar\,sh}\,z$ – ареа-синус z; $\mathrm{Ar\,ch}\,z$ – ареа-косинус z; $\mathrm{Ar\,th}\,z$ – ареа-тангенс z; $\mathrm{Ar\,cth}\,z$ – ареа-котангенс z.

Через логарифмы эти функции выражаются следующим образом:

$$\mathrm{Ar\,sh}\,z = \mathrm{Ln}(z + \sqrt{z^2 + 1});$$

$$\mathrm{Ar\,ch}\,z = \mathrm{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1});$$

$$\mathrm{Ar\,th}\,z = \frac{1}{2}\mathrm{Ln}\frac{1 + z}{1 - z}; \tag{1.65}$$

$$\mathrm{Ar\,cth}\,z = \frac{1}{2}\mathrm{Ln}\frac{z + 1}{z - 1}. \tag{1.66}$$

Выражения (1.65) и (1.66) теряют смысл при $z = \pm 1$. В силу многозначности логарифма и двузначности квадратного корня обратные тригонометрические и обратные гиперболические функции многозначны.

Вопросы для самопроверки

1. Дайте определение показательной, тригонометрических и гиперболических функций комплексного аргумента. Где сходятся ряды, их представляющие?

2. Запишите формулы, связывающие между собой показательные и тригонометрические функции. Как они называются?

3. Запишите формулы, связывающие между собой показательные и гиперболические функции.

4. Как определяется логарифмическая функция комплексного аргумента?

5. Запишите формулу, по которой вычисляются значения $\mathrm{Ln}\, z$.

6. Что называется главным значением логарифма комплексного числа?

7. Как возвести число e в комплексную степень?

8. Как возвести комплексное число в комплексную степень?

9. Как определяются обратные тригонометрические и обратные гиперболические функции?

10. Пользуясь определением, выведите формулы, выражающие функции $\mathrm{Arc}\cos z$, $\mathrm{Arc\,tg} z$, $\mathrm{Ar\,sh} z$ через логарифмы.

Упражнения к § 5

1. Пользуясь известными разложениями для e^z, $\sin z$, $\cos z$, $\mathrm{sh}\, z$, $\mathrm{ch}\, z$, представить степенными рядами следующие функции:

1) $e^{\frac{z}{3}}$; 2) $\sin 3z$; 3) $\cos\left(\frac{z}{2}\right)$; 4) $\mathrm{sh}(z-2)$; 5) $\mathrm{ch}(z+1)$.

2. Найти:

1) $\mathrm{Ln}(-1)$; 2) $\ln(-1)$; 3) $\mathrm{Ln}(-i)$; 4) $\ln(-i)$; 5) $\mathrm{Ln}(1+\sqrt{3}i)$.

3. Вычислить значения: 1) $e^{2+i\frac{\pi}{2}}$; 2) 3^{2+i}; 3) i^i.

4. Найти: 1) $\sin i$; 2) $\cos(1+i)$.

5. Найти: 1) $\mathrm{Arc}\sin 2$; 2) $\mathrm{Arc\,tg}\,(1+i)$; 3) $\mathrm{Arc\,tg}\,1$.

6. Вычислить действительную и мнимую части функций:

1) $w=e^{z^2}$; 2) $w=z^2\sin z$; 3) $w=\mathrm{tg}\, z$; 4) $w=\mathrm{Ln} z$; 5) $w=z^{3+i}$.

Глава 2. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

§ 1. Дифференцирование функций комплексной переменной

1.1. Определение производной

Пусть $w = f(z)$ есть однозначная функция, определенная в области D плоскости комплексной переменной (Z). Если точки $z = x + iy$ и $z + \Delta z = (x + \Delta x) + i(y + \Delta y)$ принадлежат области D, а $w = f(z)$ и $w + \Delta w = f(z + \Delta z)$ – соответствующие им значения функции $f(z)$, то приращением функции $f(z)$ при переходе от точки z к точке $z + \Delta z$ будет

$$\Delta w = f(z + \Delta z) - f(z).$$

Определение. Если существует конечный предел отношения $\dfrac{\Delta w}{\Delta z}$ при произвольном стремлении $\Delta z \to 0$, то этот предел называется *производной функцией* $f(z)$ *в точке* z и обозначается символом

$$w' = f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}, \qquad (2.1)$$

а функция $f(z)$ называется *дифференцируемой в этой точке.*

Из дифференцируемости функции $f(z)$ в некоторой точке следует непрерывность ее в этой точке.

Действительно, из выражения (2.1) следует, что

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = f'(z) + \alpha,$$

где $\alpha \to 0$ вместе с $\Delta z \to 0$, т. е. $\Delta w = f'(z)\Delta z + \alpha \Delta z$.

Последнее соотношение показывает, что бесконечно малому приращению аргумента $(\Delta z \to 0)$ соответствует бесконечно малое приращение функции $(\Delta w \to 0)$.

Из непрерывности функции $f(z)$ в точке z дифференцируемость $f(z)$ не следует.

Если функция $w = f(z)$ имеет производную в каждой точке области D, то она называется *дифференцируемой* в этой области.

1.2. Условия дифференцируемости функции комплексной переменной

Пусть $w = f(z)$ – однозначная функция, определенная в области D плоскости переменной (Z). Точки $z = x + iy$ и $z + \Delta z = (x + \Delta x) + i(y + \Delta y)$ принадлежат области D. Тогда $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$,

$$\Delta w = f(z + \Delta z) - f(z) =$$

$$= [u(x + \Delta x, y + \Delta y) + iv(x + \Delta x, y + \Delta y)] - [u(x, y) + iv(x, y)] = \Delta u + i\Delta v,$$

где $\Delta u = u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y)$, $\Delta v = v(x + \Delta x, y + \Delta y) - v(x, y)$.

Сформулируем теперь ***необходимые условия дифференцируемости функции*** $w = f(z)$.

Если функция $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ *дифференцируема в точке* $z = x + iy$, *то в точке* (x, y) *существуют частные производные функций* $u(x, y)$ *и* $v(x, y)$, *причем эти производные удовлетворяют условиям:*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \tag{2.2}$$

называемым условиями Коши – Римана (или условиями Д'Аламбера – Эйлера).

Доказательство. Так как функция $w = f(z)$ дифференцируема в точке z, то существует конечный предел

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y} = f'(z), \tag{2.3}$$

не зависящий от того, как точка $z + \Delta z \to z$.

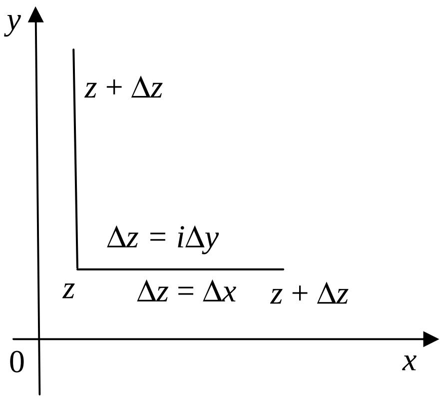


Рис. 2.1

Предположим, что точка $z + \Delta z$ приближается к точке z, например по прямой, параллельной оси Ox (рис. 2.1), при этом $\Delta y = 0$, а $\Delta z = \Delta x$.

В этом случае из равенства (2.3) получаем

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} + i\frac{\Delta v}{\Delta x} \right) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{2.4}$$

Если точка $z+\Delta z$ стремится к точке z по прямой, параллельной оси Oy, когда $\Delta x \to 0$, а $\Delta z = i\Delta y$, то на основании формулы (2.3) получаем

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{i\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \left(\frac{\Delta v}{\Delta y} - i\frac{\Delta u}{\Delta y} \right) = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}, \qquad (2.5)$$

так как $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{\Delta w}{\Delta z}$ не зависит от способа стремления $\Delta z \to 0$, то из равенств (2.4) и (2.5) имеем

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y},$$

откуда согласно определению равенства двух комплексных чисел получаем условия (2.2).

Таким образом, необходимость доказана.

Сформулируем теперь ***достаточные условия дифференцируемости функции*** $w = f(z)$.

Для того чтобы функция $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ *была дифференцируемой в точке* $z = x + iy$*, достаточно:*

1) действительные функции $u(x, y)$ *и* $v(x, y)$ *были дифференцируемыми (дифференцируемость функции многих переменных предполагает непрерывность ее частных производных) в точке* (x, y)*;*

2) их частные производные в этой точке удовлетворяли условиям (2.2).

Доказательство. Так как функции $u(x, y)$ *и* $v(x, y)$ дифференцируемы в точке (x, y), то, как известно из курса анализа функций действительных переменных, полные приращения этих функций представимы в виде

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \alpha_1, \quad \Delta v = \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + \alpha_2,$$

где α_1 и α_2 – бесконечно малые более высокого порядка, чем $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ и $\alpha_1,\ \alpha_2 \to 0$ при $|\Delta z| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \to 0$.

Тогда при условии, что частные производные функций u и v в точке (x, y) удовлетворяют условиям Коши – Римана (2.2), приращение функции $w = f(z)$ запишется в виде

$$\begin{aligned}
\Delta w &= f(z+\Delta z) - f(z) = \Delta u + i\Delta v = \\
&= \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \alpha_1 + i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + \alpha_2\right) = \\
&= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Delta x + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right)\Delta y + (\alpha_1 + i\alpha_2) =
\end{aligned} \tag{2.6}$$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Delta x + i\Delta y\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \alpha = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Delta z + \alpha = A\cdot\Delta z + \alpha,$$

где $A = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$ – некоторое постоянное комплексное число, не зависящее от Δz, а $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$ – бесконечно малая более высокого порядка, чем $|\Delta z|$, т. е. $\frac{\alpha}{\Delta z} \to 0$ при $\Delta z \to 0$.

Разделив соотношение (2.6) на Δz и перейдя к пределу при $\Delta z \to 0$, найдем, что

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{A\cdot\Delta z + \alpha}{\Delta z} = A.$$

Следовательно, $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}$ существует, конечен и не зависит от способа стремления $\Delta z \to 0$, а значит, существует и производная функции $w = f(z)$ в точке $z = x + iy$.

Если функция $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ в некоторой точке удовлетворяет достаточным условиям дифференцируемости, то производная в этой точке может быть вычислена по одной из приведенных ниже формул:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{2.7}$$

1.3. Правила дифференцирования

Из определения производной, правил алгебраических действий и теорем о пределах функций комплексной переменной следует, что основные правила дифференцирования функций действительного аргумента остаются справедливыми и для функций комплексной переменной.

Таким образом:

1. Если $f(z) \equiv C$, $\dfrac{df(z)}{dz} = 0$.

2. $\dfrac{d[Cf(z)]}{dz} = C\dfrac{df(z)}{dz}$, C = const.

3. $\dfrac{dz}{dz} = 1$.

4. $\dfrac{d}{dz}[f_1(z) \pm f_2(z)] = \dfrac{df_1(z)}{dz} \pm \dfrac{df_2(z)}{dz}$.

5. $\dfrac{d}{dz}[f_1(z) \cdot f_2(z)] = f_2(z)\dfrac{df_1(z)}{dz} + f_1(z)\dfrac{df_2(z)}{dz}$.

6. ***Правило дифференцирования сложных функций.*** Пусть функция $w = f(z)$, определенная на множестве D, дифференцируема в точке $z_0 \in D$. G – множество значений функции $w = f(z)$. Рассмотрим теперь функцию $\psi = \varphi(w)$, определенную на множестве G и дифференцируемую в точке $w_0 = f(z_0)$. Тогда сложная функция $\psi = \varphi[f(z)]$ будет дифференцируема в точке $z_0 \in D$ и

$$\frac{d\psi}{dz} = \frac{d\{\varphi[f(z)]\}}{dz} = \frac{d\varphi(w)}{dw} \cdot \frac{df(z)}{dz}.$$

7. $\dfrac{d}{dz}[f(z)]^n = n[f(z)]^{n-1} \cdot f'(z)$.

8. $\dfrac{d}{dz}(z^n) = nz^{n-1}$ при n целых.

9. $\dfrac{d}{dz}(z^\alpha) = \alpha z^{\alpha-1}$ при любом комплексном α.

10. $\dfrac{d}{dz}(a_0 + a_1 z + ... + a_n z^n) = a_1 + 2a_2 z + ... + na_n z^{n-1}$.

11. $\dfrac{d}{dz}\left[\dfrac{f_1(z)}{f_2(z)}\right] = \dfrac{f_2(z)\dfrac{df_1(z)}{dz} - f_1(z)\dfrac{df_2(z)}{dz}}{[f_2(z)]^2}$ при $f_2(z) \neq 0$.

12. $\dfrac{d}{dz}(\ln z) = \dfrac{1}{z}$ при $z \neq 0$ и $z \neq \infty$.

Здесь все функции предполагаются дифференцируемыми в соответствующих точках.

13. ***Правило дифференцирования обратных функций.*** Пусть функция $w = f(z)$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между точками множеств D и G, причем обратная функция $z = \varphi(w)$ непрерывна на G. Тогда, если $f(z)$ дифференцируема в точке $z_0 \in D$ и $f'(z_0) \neq 0$, то обратная функция $z = \varphi(w)$ будет дифференцируемой в точке $w_0 = f(z_0) \in G$ и

$$\varphi'(w_0) = \frac{1}{f'(z_0)}.$$

1.4. Аналитические функции

Если однозначная функция $w = f(z)$ дифференцируема в области D, то она называется *аналитической (регулярной, голоморфной) в этой области*.

Функция может быть аналитической только в некоторой области, однако и о каждой отдельной точке такой области говорят, что в ней функция аналитическая.

Таким образом, можно сказать, что однозначная функция $f(z)$ будет *аналитической в точке* z, если она дифференцируема как в самой точке z, так и в некоторой ее окрестности.

Следовательно, понятия аналитичности и дифференцируемости в области совпадают, в то время как в точке условие аналитичности является более жестким, чем условия дифференцируемости.

Точки плоскости (Z), в которых однозначная функция является аналитической, называются *правильными точками этой функции*, а точки, в которых $f(z)$ не является аналитической (в частности, точки, в которых $f(z)$ не определена), – ее *особыми точками*.

Пример 1. Показать, что $\dfrac{de^z}{dz}$ существует и равна e^z.

Решение. Если $w = u + iv = e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$, то $u(x, y) = e^x \cos y$, а $v(x, y) = e^x \sin y$.

Очевидно, что функции $u(x, y) = e^x \cos y$ и $v(x, y) = e^x \sin y$ дифференцируемы (имеют непрерывные частные производные) в любой точке плоскости xOy.

Проверим, удовлетворяют ли они условиям Коши – Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y\,,\ \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y\,,\ \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y\,,\ \frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y\,.$$

Значит, $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ и $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ в любой точке плоскости xOy. Следовательно, достаточные условия дифференцируемости функции имеют место во всех точках плоскости (Z), поэтому по одной из формул (2.7) найдем

$\frac{de^z}{dz} = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^x(\cos y + i\sin y) = e^x \cdot e^{iy} = e^{x+iy} = e^z$, т. е. $(e^z)' = e^z$.

Функция $w = e^z$ будет аналитической на всей комплексной плоскости (Z).

Пример 2. Будет ли аналитической функция $w = (\overline{z})^2$ в точке $z = 0$?

Решение. Для заданной функции

$w = (\overline{z})^2 = (x - iy)^2 = (x^2 - y^2) - i2xy$, $u = x^2 - y^2$ и $v = -2xy$.

Проверим, удовлетворяют ли функции u и v достаточным условиям дифференцируемости, и если удовлетворяют, то где. Для этого найдем частные производные:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x,\ \frac{\partial u}{\partial y} = -2y,\ \frac{\partial v}{\partial x} = -2y,\ \frac{\partial v}{\partial y} = -2x\,.$$

Отсюда видим: 1) все частные производные непрерывны на всей плоскости xOy; 2) условия Коши – Римана $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ и $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ выполняются лишь в точке $z = 0$, т. к. равенства $2x = -2x$ и $-2y = 2y$ имеют место лишь при $x = y = 0$.

Следовательно, функция $w = (\overline{z})^2$ дифференцируема лишь в точке $z = 0$ и $w'(0) = 0$.

Так как в окрестности точки $z = 0$ заданная функция не дифференцируема, то она не будет аналитической в точке $z = 0$.

Заметим еще раз, что понятие предела и производной применимо только к однозначным функциям. Поэтому если понадобиться дифференцировать многозначную функцию, нужно предварительно выделить ту или иную однозначную ее ветвь и для нее искать производную.

Пример 3. Показать, что $\dfrac{d(\operatorname{ch} z)}{dz} = \operatorname{sh} z$.

Решение. Согласно формуле (1.50), $\operatorname{ch} z = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}$.

Функции e^z и e^{-z} (см. пример 1) являются аналитическими на всей комплексной плоскости (Z), поэтому их линейная комбинация будет также аналитической на плоскости (Z).

Следовательно,

$$(\operatorname{ch} z)' = \left(\frac{e^z + e^{-z}}{2}\right)' = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \operatorname{sh} z .$$

Аналогично показывается, что функции $\sin z, \cos z, \operatorname{sh} z$ являются аналитическими на всей комплексной плоскости (Z) и

$$(\sin z)' = \cos z, \quad (\cos z)' = -\sin z, \quad (\operatorname{sh} z)' = \operatorname{ch} z .$$

Функции $\operatorname{ctg} z$, $\operatorname{tg} z$ аналитичны во всех тех точках, в которых соответственно $\sin z$ и $\cos z$ не обращаются в нуль.

1.5. Геометрический смысл производной функции комплексной переменной

Пусть функция $w = f(z)$, аналитическая в области D плоскости (Z), отображает эту область в область G плоскости (W). Пусть, далее, точка $z_0 \in D$ (рис. 2.2), а соответствующая ей при отображении точка $w_0 \in G$ и $f'(z_0) \neq 0$.

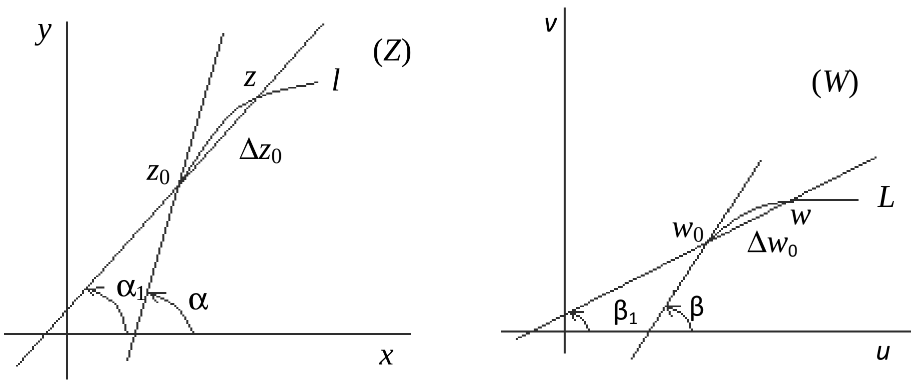


Рис. 2.2

Проведем через точку z_0 какую-нибудь кривую l, имеющую в этой точке определенную касательную.

Функция $w = f(z)$ отобразит кривую $l \in D$ в кривую $L \in G$, т. е. когда переменная точка $z \in l$, то соответствующая ей в области G точка $w \in L$. Тогда $z - z_0 = \Delta z_0$, а $w - w_0 = \Delta w_0$.

Рассмотрим соотношение, определяющее производную

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z_0 \to 0} \frac{\Delta w_0}{\Delta z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{w - w_0}{z - z_0}.$$

Из него следует, что

$$\arg f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} [\arg(w - w_0) - \arg(z - z_0)] \tag{2.8}$$

и

$$|f'(z_0)| = \lim_{z \to z_0} \left| \frac{w - w_0}{z - z_0} \right| = \lim_{z \to z_0} \frac{|w - w_0|}{|z - z_0|}. \tag{2.9}$$

Последние два равенства истолкуем геометрически: $\arg(z - z_0) = \alpha_1$ и $\arg(w - w_0) = \beta_1$ – это углы, которые векторы $\Delta \vec{z}_0$ и $\Delta \vec{w}_0$ составляют с положительными направлениями действительных осей. Пусть α и β будут углы, составляемые касательными к кривым l и L соответственно в точках z_0 и w_0 с действительными осями. Зная, что $\alpha_1 \to \alpha$, $\beta_1 \to \beta$ при $z \to z_0$, из равенства (2.8) следует $\arg f'(z_0) = \beta - \alpha$ или $\beta = \arg f'(z_0) + \alpha$.

Следовательно, $\arg f'(z_0)$ – это угол, на который нужно повернуть касательную к кривой l в точке z_0, для того чтобы получить направление касательной к кривой L в точке w_0.

Так как $\lim\limits_{\Delta z_0 \to 0} \dfrac{\Delta w_0}{\Delta z_0} = f'(z_0)$ не зависит от способа стремления Δz к нулю, то $\arg f'(z_0)$ один и тот же для всех кривых, проходящих через точку z_0, поэтому $\arg f'(z_0)$ называют *углом поворота касательной в точке* z_0 *при отображении* $w = f(z)$.

Отсюда очевидно, что если через точку z_0 проходят какие-либо две кривые l и l^*, касательные к которым в точке z_0 образуют угол φ (рис. 2.3), то касательные к их образам L и L^*, проходящим через точку $w_0 = f(z_0)$, будут составлять тот же угол φ. Причем углы между кривыми сохраняются не только по величине, но и по направлению отсчета.

Итак, *отображение с помощью аналитической функции обладает свойством сохранения (консерватизма) углов во всех точках, где* $f'(z) \neq 0$.

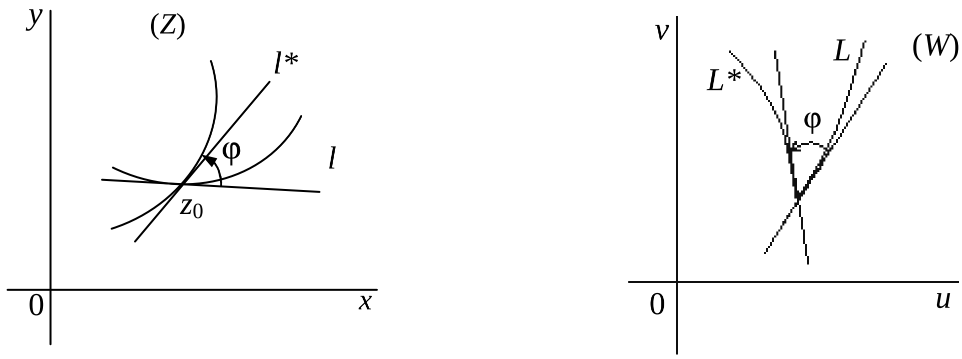


Рис. 2.3

Выясним теперь геометрический смысл равенства (2.9)

$$\left|f'(z_0)\right| = \lim_{z\to z_0}\frac{|w-w_0|}{|z-z_0|} = k\,.$$

Числа $|z-z_0|$ и $|w-w_0|$ представляют расстояния между точками z и z_0 на плоскости (Z) и их образами w и w_0 на плоскости (W). Тогда отношение $\dfrac{|w-w_0|}{|z-z_0|}$ можно рассматривать как растяжение или сжатие вектора $z-z_0$ в результате отображения $w=f(z)$.

В силу аналитичности $f(z)$ в точке z_0 предел (2.9) не зависит от того, по какому пути точка z стремиться к точке z_0, т. е. по какой кривой, проходящей через точку z_0, точка $z\to z_0$. Поэтому *величину* $\left|f'(z_0)\right|$ *можно рассматривать как коэффициент искажения или масштаб в точке* z_0 *при отображении* $w=f(z)$.

Если $k>1$, то дуги при отображении растягиваются; если $k<1$, то дуги сжимаются; если $k=1$, то масштаб при отображении не меняется.

Так как производная в точке z_0 не зависит от того, по какой кривой $z\to z_0$, то все бесконечно малые дуги, проходящие через точку z_0, при отображении будут подвергаться одинаковому искажению.

Определение. Всякое отображение, обладающее в некоторой точке свойством постоянства углов и свойством постоянства растяжений, называется *конформным* в этой точке.

Если при этом углы сохраняются не только по величине, но и по направлению отсчета, то говорят о *конформном отображении I рода*.

Если направление отсчета углов меняется на противоположное, то говорят о *конформном отображении II рода.*

Из рассмотренного выше очевидно, что отображение посредством аналитической функции $w = f(z)$ в точке z_0, для которой $f'(z_0) \neq 0$, является конформным отображением I рода.

Пример 1. Отображение $w = 3z$ есть конформное отображение I рода на всей расширенной комплексной плоскости (Z), т. к. $w' = 3 \neq 0$, $|w'| = 3$, $\arg w' = 0$. Следовательно, бесконечно малые дуги при отображении не поворачиваются, а по длине увеличиваются в 3 раза.

Пример 2. Отображение $w = \overline{z}$ будет конформным отображением II рода. При этом отображении всякая точка переходит в точку, ей симметричную относительно действительной оси, а всякие два луча, выходящие из точки z_0 и образующие угол φ, перейдут в два луча, симметричных с первыми относительно действительной оси, только угол между ними будет $-\varphi$.

Таким образом, при отображении $w = \overline{z}$ изменения масштаба не происходит, все углы сохраняются по величине, но направление их отсчета меняется на противоположное.

Пример 3. Найти угол поворота лучей и коэффициент искажения длин k в точке $z_0 = 1 - i$ при отображении $w = z^2$.

Решение. Функция $w = z^2$ аналитическая на всей комплексной плоскости (Z), $w' = 2z$. В точке $z_0 = 1 - i$ $w'(z_0) = 2(1 - i) \neq 0$. Следовательно, отображение будет конформным I рода. Заданная функция отобразит точку $z_0 = 1 - i$ в точку $w_0 = (1 - i)^2 = -2i$,

$$\arg w'(z_0) = \arg[2(1 - i)] = \arg(2 - 2i) = -\frac{\pi}{4}.$$

Это значит, что лучи, проходящие через точку z_0, при отображении будут поворачиваться в плоскости (W) относительно действительной оси на угол $\left(-\frac{\pi}{4}\right)$.

Коэффициент искажения длин при переходе от z_0 к w_0 равен

$$k = |w'(z_0)| = |2 - 2i| = 2\sqrt{2} > 1.$$

Следовательно, при отображении $w = z^2$ происходит растяжение длин кривых или лучей, проходящих через точку z_0.

Вопросы для самопроверки

1. Что называется производной от функции $f(z)$ в точке $z = z_0$?

2. Сформулируйте необходимые условия дифференцируемости функции $f(z)$.

3. Сформулируйте достаточные условия дифференцируемости функции $f(z)$.

4. Какая функция называется аналитической в области? в точке? Приведите примеры аналитических функций.

5. Какие Вы знаете правила дифференцирования функций комплексной переменной?

6. Каков геометрический смысл аргумента и модуля производной?

7. Какое отображение называется конформным I рода? конформным II рода?

Упражнения к §1

1. Установить, дифференцируемы ли функции, заданные ниже, и найти для них производные, если они существуют

1) $f(z) = \dfrac{1}{z}$; 4) $f(z) = e^{iz}$; 7) $f(z) = e^{\bar{z}}$.

2) $f(z) = z^2 - 2iz$; 5) $f(z) = |z|$;

3) $f(z) = ie^z$; 6) $f(z) = \bar{z}$;

2. Показать, что: 1) $\dfrac{d(\cos z)}{dz} = -\sin z$;

2) $\dfrac{d(\sin z)}{dz} = \cos z$; 4) $\dfrac{d(\operatorname{arctg} z)}{dz} = \dfrac{1}{1+z^2}$;

3) $\dfrac{d(\operatorname{tg} z)}{dz} = \sec^2 z$; 5) $\dfrac{d(a^z)}{dz} = a^z \ln a$.

3. Найти угол поворота и коэффициент искажения при отображении $w = 2z^2 + z$ в точках:

1) $z = 1$; 2) $z = -\dfrac{1}{4} + i$.

4. Какая часть плоскости (Z) сжимается и какая растягивается при отображении $w = z^2$?

§ 2. Интегрирование функций комплексной переменной

2.1. Интеграл от функции комплексной переменной

Формально интеграл от функции комплексной переменной определяется так же, как криволинейный интеграл от функции действительного аргумента.

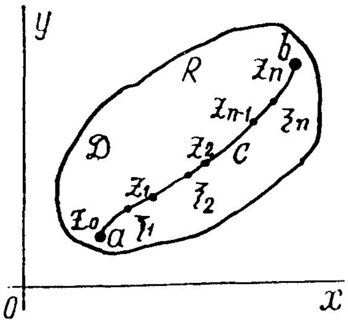


Рис. 2.4

Пусть в некоторой области D плоскости комплексной переменной (Z) задана однозначная и непрерывная функция $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ и пусть C – произвольная гладкая или кусочно-гладкая кривая, целиком лежащая в области D (рис. 2.4).

Выберем на дуге C направление обхода, например от точки a к точке b. Разобьем дугу C на n частичных дуг точками $z_0 = a,\ z_1, z_2, ..., z_{n-1}, z_n = b$, обозначим $z_k - z_{k-1} = \Delta z_k = \Delta x_k + i\Delta y_k$, выберем на каждом участке (z_{k-1}, z_k) дуги C по точке $\zeta_k = \xi_k + i\eta_k$ и образуем сумму

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k = \sum_{k=1}^{n} [u(\xi_k, \eta_k) + iv(\xi_k, \eta_k)](\Delta x_k + i\Delta y_k) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} [u(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k - v(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k] + i\sum_{k=1}^{n} [u(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k + v(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k], \tag{2.10}$$

которую назовем *интегральной суммой функции* $w = f(z)$.

Предел интегральной суммы (2.10), вычисленный при стремлении к нулю длины наибольшей из элементарных дуг (при $n \to \infty$), не зависящий ни от способа разбиения дуги C на элементарные части (z_{k-1}, z_k), ни от выбора точки ζ_k в (z_{k-1}, z_k), называется *интегралом от функции* $f(z)$ *по дуге* C и обозначается символом

$$\int_C f(x)dz = \lim_{\substack{\max|\Delta z_k| \to 0 \\ (n \to \infty)}} \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k. \tag{2.11}$$

При оговоренных выше требованиях к функции $f(z)$ и контуру C предел (2.11) всегда существует.

Действительно, в силу равенства (2.10)

$$\int_C f(x)dz = \lim_{\substack{\max|\Delta x_k|\to 0 \\ \max|\Delta y_k|\to 0}} \sum_{k=1}^{n} [u(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k - v(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k] +$$

$$+i \lim_{\substack{\max|\Delta x_k|\to 0 \\ \max|\Delta y_k|\to 0}} \sum_{k=1}^{n} [u(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k + v(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k].$$

По условию функция $f(z)$ предполагалась непрерывной в области D, значит, в этой области непрерывными являются и функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$.

Из теории криволинейных интегралов от функций действительных переменных известно, что суммы, стоящие в правой части последнего равенства, для любых непрерывных функций $u(x,y)$ и $v(x,y)$ и гладких или кусочно-гладких кривых C при $\max|\Delta x_k| \to 0$ и $\max|\Delta y_k| \to 0$ (когда $n \to \infty$) стремятся к определенным пределам, не зависящим ни от способа разбиения кривой C на частичные дуги, ни от выбора точек $\zeta_k(\xi_k,\eta_k)$.

Эти пределы являются криволинейными интегралами по координатам от функций действительных переменных.

Таким образом,

$$\int_C f(z)dz = \int_C u(x,y)dx - v(x,y)dy + i\int_C v(x,y)dx + u(x,y)dy. \quad (2.12)$$

Формула (2.12) дает *выражение интеграла по комплексной переменной через два криволинейных интеграла от действительных функций.*

Отсюда же следует, что основные свойства криволинейных интегралов распространяются и на интегралы от функций комплексной переменной.

Здесь мы отметим лишь некоторые свойства:

1. $\int_{\overset{\frown}{AB}} f(z)dz = -\int_{\overset{\frown}{BA}} f(z)dz.$

2. $\int_C af(z)dz = a\int_C f(z)dz.$

3. $\int_{C_1+C_2} f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz.$

4. $\int_C [f_1(z) \pm f_2(z)]dz = \int_C f_1(z)dz \pm \int_C f_2(z)dz.$

5. Оценка модуля интеграла:

$\left|\int_C f(z)dz\right| \le \int_C |f(z)|dl,$ где dl – элемент длины дуги.

Для доказательства этого утверждения оценим модуль интегральной суммы $S_n=\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k$ (см. формулу (2.10). Получим

$$\left|S_n\right|=\left|\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k\right|\le\sum_{k=1}^{n}\left|f(\zeta_k)\right|\left|\Delta z_k\right|\le\sum_{k=1}^{n}\left|f(\zeta_k)\right|\Delta l_k,$$

где $\left|\Delta z_k\right|$ – длина k-того звена ломаной, вписанной в дугу C; Δl_k – длина соответствующей частичной дуги.

Переходя в последнем неравенстве к пределу, при условии, что число разбиений дуги C неограниченно растет, получаем требуемое:

$$\left|\int_C f(z)dz\right|\le\int_C\left|f(z)\right|dl.$$

6. Если на дуге C имеет место неравенство $\left|f(z)\right|\le M$, а длина дуги C равна l, то из свойства 5 очевидно неравенство

$$\left|\int_C f(z)dz\right|\le Ml.$$

2.2. Вычисление интеграла от функции комплексной переменной

Рассмотрим 2 случая задания дуги.

1. Пусть дуга C задана параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x=x(t); \\ y=y(t), \end{cases}\quad \alpha\le t\le\beta.$$

Тогда, согласно формуле (2.12), получим

$$\int_C f(z)dz=\int_\alpha^\beta\left\{u\left[x(t),y(t)\right]x'(t)dt-v\left[x(t),y(t)\right]y'(t)\,dt\right\}+$$

$$+i\int_\alpha^\beta\left\{v\left[x(t),y(t)\right]x'(t)dt+u\left[x(t),y(t)\right]y'(t)\,dt\right\}=$$

$$=\int_\alpha^\beta\left\{u\left[x(t),y(t)\right]+iv\left[x(t),y(t)\right]\right\}x'(t)dt+$$

$$+\int_{\alpha}^{\beta}\{u[x(t),y(t)]+iv[x(t),y(t)]\}iy'(t)dt=$$

$$=\int_{\alpha}^{\beta}\{u[x(t),y(t)]+iv[x(t),y(t)]\}[x'(t)+iy'(t)]dt=$$

$$=\int_{\alpha}^{\beta} f[z(t)]z'(t)dt=\int_{\alpha}^{\beta} f[z(t)]dz(t),$$

т. е. $f(z)dz=\int_{\alpha}^{\beta} f[z(t)]dz(t),$ где $z(t)=x(t)+iy(t)$.

2. Если дуга C задана уравнением $y=\varphi(x)$, где $a\le x\le b$, то, принимая x за параметр и записывая $z=x+i\varphi(x)$, задачу сводим к случаю 1.

Пример. Вычислить интеграл

$$\int_C (\overline{z})^2 dz \qquad (2.13)$$

1) по отрезку, соединяющему точки $z=0$ и $z=1+i$;

2) по ломаной, соединяющей точки $z=0$, $z=1$ и $z=1+i$ (рис. 2.5).

Решение: 1) на прямой, соединяющей точки $z=0$ и $z=1+i$, контур C задается уравнением $z=x+ix=x(1+i)$, где $0\le x\le 1$. Тогда $\overline{z}=x(1-i)$, $\quad dz=(1+i)dx$ и

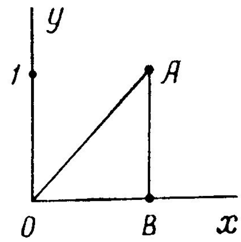


Рис. 2.5

$$\int_C (\overline{z})^2 dz=\int_0^1 x^2(1-i)^2(1+i)dx=2(1-i)\frac{x^3}{3}\bigg|_0^1=\frac{2}{3}(1-i); \qquad (2.14)$$

2) по ломаной OBA: $\int\limits_{OBA}(\overline{z})^2 dz=\int\limits_{OB}(\overline{z})^2 dz+\int\limits_{BA}(\overline{z})^2 dz$.

Прямая OB запишется уравнением $z=x$, где $0\le x\le 1$, тогда $\overline{z}=x$ и $dz=dx$; прямая BA запишется уравнением $z=1+iy$, где $0\le y\le 1$, тогда $\overline{z}=1-iy$ и $dz=idy$. Поэтому

$$\int_C(\overline{z})^2 dz=\int\limits_{OB}(\overline{z})^2 dz+\int\limits_{BA}(\overline{z})^2 dz=\int_0^1 x^2dx+\int_0^1(1-iy)^2 idy=\frac{x^3}{3}\bigg|_0^1+$$
$$+\int_0^1\left[2y+(1-y^2)i)\right]dy=\frac{1}{3}+\left[y^2+i\left(y-\frac{y^3}{3}\right)\right]\bigg|_0^1=\frac{4}{3}+\frac{2}{3}i. \qquad (2.15)$$

Из сравнения правых частей (2.14) и (2.15) видим, что интеграл (2.13) зависит от пути C, соединяющего точки $z=0$ и $z=1+i$.

2.3. Основная теорема Коши

Докажем теорему, играющую фундаментальную роль во всей теории функций комплексной переменной.

Теорема Коши. *Если* $f(z)$ *есть функция, аналитическая в некоторой односвязной области* R, *то* $\int f(z)dz$, *взятый по любому замкнутому контуру* C, *целиком лежащему в области* R, *равен нулю, т. е.*

$$\oint_C f(z)dz = 0.$$

Доказательство. Докажем эту теорему при дополнительном предположении о непрерывности производной $f'(z)$ в области R (позже будет отмечено, что аналитическая в области R функция имеет производные любого порядка, также аналитические, а значит, и непрерывные).

Для доказательства воспользуемся формулой Грина:

$$\oint_C M(x,y)dx + N(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dxdy,$$

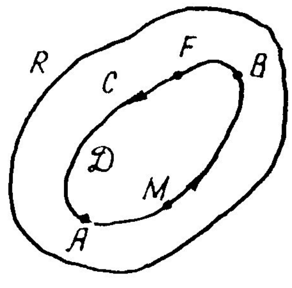


Рис. 2.6

где D – область, ограниченная замкнутым контуром C (рис. 2.6).

Формула Грина справедлива при условии, что функции $M(x,y)$ и $N(x,y)$ и их первые частные производные непрерывны в области, содержащей внутри себя замкнутый контур C.

Рассмотрим равенство

$$\oint_C f(z)dz = \oint_C u(x,y)dx - v(x,y)dy + i\oint_C v(x,y)dx + u(x,y)dy. \qquad (2.16)$$

Из аналитичности функции $f(z)$ в области R следует, что частные производные функций $u(x,y)$ и $v(x,y)$ существуют и удовлетворяют условиям Коши – Римана (2.2)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{dy} \ и \ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{dx},$$

а из предположения о непрерывности $f'(z)$ в области R следует непрерывность этих частных производных.

Следовательно, к обоим интегралам правой части равенства (2.16) формула Грина применима. Поэтому запишем

$$\oint_C f(z)dz = \iint_D \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dxdy + i \iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dxdy . \qquad (2.17)$$

В силу условий (2.2) подынтегральные выражения в двойных интегралах равенства (2.17) равны нулю, а поэтому $\oint_C f(z)dz = 0$.

Таким образом, теорема Коши доказана.

Из теоремы Коши очевидно следующее очень важное утверждение: *если функция $f(z)$ аналитична в односвязной области R, то $\int_{\overset{\frown}{AB}} f(z)dz$ не зависит от пути, соединяющего точки A и B, если дуга AB целиком лежит внутри области R.*

Действительно, пусть замкнутый контур C (рис. 2.6) проходит через точки A и B, содержащиеся в области R, и $f(z)$ – функция, аналитическая в этой области. Тогда $\oint_C f(z)dz = 0$, но

$$\int_C f(z)dz = \int_{\overset{\frown}{AMB}} f(z)dz + \int_{\overset{\frown}{BFA}} f(z)dz = \int_{\overset{\frown}{AMB}} f(z)dz - \int_{\overset{\frown}{AFB}} f(z)dz = 0,$$

отсюда и получаем требуемое:

$$\int_{\overset{\frown}{AMB}} f(z)dz = \int_{\overset{\frown}{AFB}} f(z)dz.$$

Пример. Вычислить интеграл $\int_C z^2 dz$ по контурам:

1) по отрезку, соединяющему точку $z = 0$ с точкой $z = 1 + i$;

2) вдоль ломаной, соединяющей точки $z = 0$, $z = 1$ и $z = 1 + i$ (рис. 2.5).

Решение: 1) контуром интегрирования C является отрезок прямой, соединяющей точки $z = 0$ и $z = 1 + i$. Его уравнение $z = x + ix = x(1+i)$, где $0 \le x \le 1$. Тогда $dz = (1+i)dx,\ z^2 = x^2(1+i)^2$ и

$$\int_C z^2 dz = \int_0^1 (1+i)^3 x^2 dx = (-2+2i)\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^1 = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}i . \qquad (2.18)$$

2) если контуром интегрирования будет ломаная OBA, отрезок OB запишется уравнением $z = x$, где $0 \le x \le 1$, а $dz = dx$; на BA $z = 1 + iy$, $0 \le y \le 1$, $dz = idy$.

Поэтому

$$\int\limits_C z^2dz = \int\limits_{OB} z^2dz + \int\limits_{BA} z^2dz = \int\limits_0^1 x^2dx + \int\limits_0^1 (1+iy)^2 idy = \frac{1}{3} +$$
$$+\int\limits_0^1 \left[(1-y^2)i - 2y\right]dy = \frac{1}{3} + i(y - \frac{y^3}{3})\Big|_0^1 - y^2\Big|_0^1 = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}i. \tag{2.19}$$

Из сравнения правых частей равенств (2.18) и (2.19) видим, что $\int\limits_C z^2dz$ не зависит от пути, соединяющего точки $z=0$ и $z=1+i$. Но этого и следовало ожидать, т. к. мы знаем, что $f(z)=z^2$ – аналитическая функция на всей комплексной плоскости (Z). Функция же $f(z)=(\overline{z})^2$ не является аналитической, поэтому интеграл $\int\limits_C (\overline{z})^2 dz$ зависит от пути, соединяющего точки $z=0$ и $z=1+i$.

2.4. Теорема Коши для многосвязной области

Теорему Коши, рассмотренную в предыдущем параграфе, можно сформулировать для многосвязной области.

Сначала рассмотрим двусвязную область (рис. 2.7), ограниченную замкнутыми простыми (несамопересекающимися) кривыми C_1 и C_2, причем C_2 лежит целиком внутри C_1.

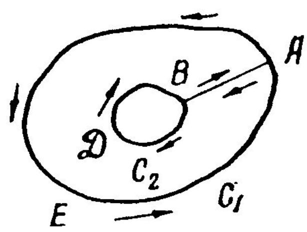


Рис. 2.7

Допустим, что $f(z)$ является аналитической в области, внешней относительно C_2 и внутренней относительно C_1, а также на контурах C_1 и C_2. Проведем в заданной области разрез по линии AB. Предполагая, что разрез имеет как бы два «берега», мы превращаем эту область в односвязную. Положительное направление обхода по контуру указано на рис. 2.7.

Применим теорему Коши к полученной односвязной области, ограниченной контуром $\Gamma\{AEA + AB + BDB + BA\}$. $\oint\limits_\Gamma f(z)dz = 0$ или

$$\oint\limits_{AEA} f(z)dz + \int\limits_{AB} f(z)dz + \oint\limits_{BDB} f(z)dz + \int\limits_{BA} f(z)dz = 0, \tag{2.20}$$

где контур C_1 (AEA) обходится в положительном направлении, а контур C_2 (BDB) – в отрицательном.

Поскольку второй и четвертый интегралы в выражении (2.20) взяты по одному и тому же контуру, но в противоположных направлениях, то их сумма равна пулю. Поэтому из (2.20) окончательно получаем

$$\oint\limits_{C_1} f(z)dz + \oint\limits_{C_2} f(z)dz = 0.$$

Здесь направления обхода по контурам C_1 и C_2 противоположны. Изменение направления обхода по контуру C_2 на противоположное даст

$$\oint\limits_{C_1} f(z)dz = \oint\limits_{C_2} f(z)dz. \qquad (2.21)$$

Из формулы (2.21) видим, что интегралы от функции $f(z)$ по внешнему контуру C_1 и по внутреннему контуру C_2, обходимым в одном и том же направлении, равны по величине, но, вообще говоря, не равны нулю, т. к. $f(z)$ может быть неаналитической внутри области, ограниченной контуром C_2.

Предположим, что функция $f(z)$ является аналитической во всех точках области R, кроме точки $z = a$ (рис. 2.8).

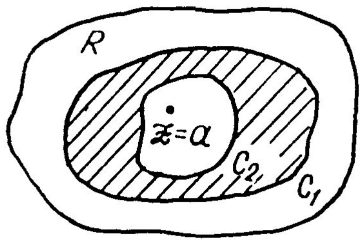


Рис. 2.8

Возьмем два совершенно произвольных замкнутых контура C_1 и C_2, целиком лежащих в R и содержащих внутри себя точку $z = a$. В заштрихованной области и на контурах C_1 и C_2 функция $f(z)$ аналитическая. Значит, для рассматриваемого случая справедливо равенство (2.21). Проведенные рассуждения позволяют сформулировать теорему, являющуюся следствием теоремы Коши и облегчающую вычисление интегралов от аналитических функций.

Теорема 1. *Если функция $f(z)$ является аналитической во всех точках некоторой области, кроме точки $z = a$, содержащейся в этой области, то интегралы от этой функции по любым замкнутым контурам, лежащим в области аналитичности $f(z)$ и окружающим точку $z = a$, взятые в одном и том же направлении, равны по величине.*

Для иллюстрации практической ценности этой теоремы рассмотрим пример.

Пример 1. Пусть требуется найти величину интеграла $\oint\limits_{C} \dfrac{dz}{z-a}$, где контуром является сложная кривая, указанная на рис. 2.9, обходимая в положительном направлении, содержащая внутри себя особую точку $z = a$ подынтегральной функции $\dfrac{1}{z-a}$.

На основании теоремы 1 вместо предложенного контура интегрирования C можно взять любой более простой контур C_1, также содержащий внутри себя точку $z = a$. Вычисляя $\oint\limits_{C_1} \frac{dz}{z-a}$, найдем величину искомого интеграла $\oint\limits_{C} \frac{dz}{z-a}$. Выберем в качестве контура C_1 окружность радиусом R с центром в точке $z = a$. Уравнение её в комплексной форме имеет вид

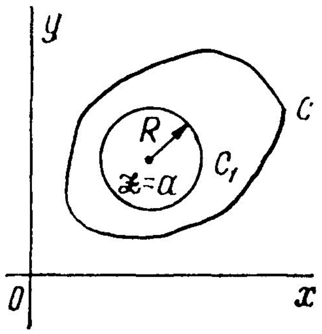


Рис. 2.9

$$z - a = R\,e^{i\varphi}, \tag{2.22}$$

где $0 \le \varphi \le 2\pi$.

Отсюда

$$dz = iR\,e^{i\varphi} d\varphi \tag{2.23}$$

и

$$\oint\limits_{C} \frac{dz}{z-a} = \oint\limits_{C_1} \frac{dz}{z-a} = \int\limits_0^{2\pi} \frac{iR\,e^{i\varphi} d\varphi}{R\,e^{i\varphi}} = i\varphi \Big|_0^{2\pi} = 2\pi i.$$

Итак,

$$\oint\limits_{C} \frac{dz}{z-a} = 2\pi i. \tag{2.24}$$

Из выражения (2.24) видим, что этот интеграл не зависит от радиуса выбранной окружности, чего, собственно, и следовало ожидать, согласно теореме 1.

Пример 2. Для дальнейшего важно знать, чему равен интеграл $\oint\limits_{C} \frac{dz}{(z-a)^n}$, если n – целое, $n \neq 1$, а C – любой замкнутый контур, содержащий внутри себя точку $z = a$.

Рассуждая, как и прежде, за контур C_1 возьмем ту же окружность радиусом R с центром в точке $z = a$. Тогда, согласно формулам (2.22) и (2.23),

$$\oint\limits_{C} \frac{dz}{(z-a)^n} = \oint\limits_{C_1} \frac{dz}{(z-a)^n} = \int\limits_0^{2\pi} \frac{iR\,e^{i\varphi} d\varphi}{R^n e^{in\varphi}} = \frac{i}{R^{n-1}} \int\limits_0^{2\pi} e^{i(1-n)\varphi} d\varphi =$$

$$=\frac{i}{R^{n-1}(1-n)i}e^{i(1-n)\varphi}\Big|_0^{2\pi}=\frac{1}{R^{n-1}(1-n)}\left[e^{i(1-n)2\pi}-1\right]=0,$$

так как

$$e^{i(1-n)2\pi}=\cos\left[(1-n)2\pi\right]+i\sin\left[(1-n)2\pi\right]=1.$$

Таким образом,

$$\oint\limits_C\frac{dz}{(z-a)^n}=\begin{cases}2\pi i;\ n=1\\ 0;\ n=0,-1,\pm2,...\end{cases}$$

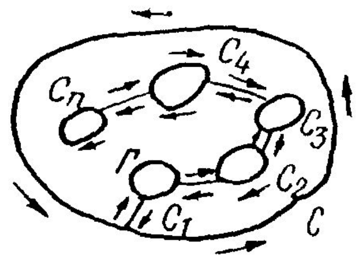


Рис. 2.10

Распространяя теорему Коши на $(n+1)$-связную область (рис. 2.10), которая с помощью системы n разрезов может быть сделана односвязной, приходим ко второму следствию из основной теоремы Коши. Сформулируем его в виде теоремы.

Теорема 2. (**Теорема Коши для многосвязной области**). *Если $f(z)$ есть аналитическая функция в замкнутой многосвязной области, ограниченной внешним простым замкнутым контуром C и простыми замкнутыми контурами $C_1, C_2, ..., C_n$, лежащими внутри C, то интеграл от этой функции по внешнему контуру C равен сумме интегралов по внутренним контурам, причем предполагается, что интегрирование по всем контурам выполняется в одном и том же направлении, т. е.*

$$\oint\limits_C f(z)dz=\oint\limits_{C_1} f(z)dz+\oint\limits_{C_2} f(z)dz+...+\oint\limits_{C_n} f(z)dz.$$

2.5. Вычисление интеграла от аналитической функции

Если функция $f(z)$ аналитична в односвязной области R, содержащей внутри себя точки z_0 и z, то величина интеграла

$$\int\limits_{z_0}^{z} f(z)dz, \tag{2.25}$$

как уже было установлено в п. 2.3, §2, гл. 2, не зависит от пути интегрирования, а зависит лишь от вида подынтегральной функции, а также от начальной и конечной точек, т. е. от точек z_0 и z.

Если точка z_0 зафиксирована, то интеграл (2.25) определяет функцию

$$F(z)=\int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta \tag{2.26}$$

для каждой выбранной точки z из R (переменная интегрирования в интеграле (2.26) заменена для того, чтобы не путать ее с переменным верхним пределом). В курсах теории функций комплексной переменной доказывается, что если $f(z)$ – аналитическая функция в области R, а точки z_0 и z принадлежат R, то $F(z)=\int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$ – функция переменного верхнего предела есть аналитическая функция в R и $F'(z)=f(z)$.

Назовем функцию $\Phi(z)$ *первообразной* от функции $f(z)$ в области R, если $\Phi(z)$ – аналитическая в области R и $\Phi'(z)=f(z)$. *Совокупность всех первообразных функции* $f(z)$ называется *неопределенным интегралом* и обозначается символом $\int f(z)dz$.

Любая первообразная от $f(z)$ может быть представлена в виде

$$\Phi(z)=\int_{z_0}^{z} f(z)dz+C, \tag{2.27}$$

где C – некоторое комплексное число (произвольное постоянное).

Полагая в интеграле (2.27) $z=z_0$, получим $\Phi(z_0)=C$.

Следовательно,

$$\int_{z_0}^{z} f(z)dz=\Phi(z)-\Phi(z_0). \tag{2.28}$$

Формула (2.28) показывает, что *значение интеграла от аналитической функции равно приращению какой-либо первообразной для подынтегральной функции на пути интегрирования.*

Это утверждение, совпадающее с известной формулой Ньютона – Лейбница, считается фундаментальным в теории интегрального исчисления.

Таким образом, определение первообразной и формула Ньютона – Лейбница для функций действительного переменного и аналитических функций комплексной переменной полностью совпадают. Поэтому интегралы от элементарных функций комплексной переменной вычисляются с помощью тех же формул и правил, что и в обычном анализе.

Пример 1. Вычислить интеграл $\int\limits_C z^2 dz$ вдоль контура C, соединяющего точки $z = 0$ и $z = 1 + i$.

Решение. Так как $f(z) = z^2$ – функция, аналитическая на всей комплексной плоскости (Z), а первообразной для неё является функция $F(z) = \frac{z^3}{3}$, то, согласно формуле (2.28),

$$\int\limits_0^{1+i} z^2 dz = \frac{z^3}{3}\Bigg|_0^{1+i} = \frac{(1+i)^3}{3} = -\frac{2}{3} + i\frac{2}{3}.$$

Получили тот же результат, что и в интегралах (2.18) и (2.19), только значительно проще и быстрее.

Пример 2. Вычислить $\int\limits_C e^z dz$ по контуру C, соединяющему точки $z = 0$ и $z = 2\pi i$.

Решение. Так как e^z – функция, аналитическая на всей комплексной плоскости (Z), то, согласно формуле (2.28),

$$\int\limits_0^{2\pi i} e^z dz = e^z\Bigg|_0^{2\pi i} = e^{2\pi i} - 1 = 0, \text{ т. к. } e^{2\pi i} = \cos 2\pi + i\sin 2\pi = 1.$$

2.6. Интегральная формула Коши

Пусть $f(z)$ – аналитическая функция в замкнутой односвязной области $\bar{R}$, ограниченной контуром C $(\bar{R} = R + C)$.

Если a есть некоторая внутренняя точка области R, то функция

$$\frac{f(z)}{z-a} \tag{2.29}$$

будет аналитической всюду в области R, кроме точки $z = a$. Если эту точку исключить из области R, окружив ее окружностью γ радиусом ρ с центром в точке $z = a$, то функция (2.29) будет аналитической в замкнутой двусвязной области (заштрихованной на рис. 2.11).

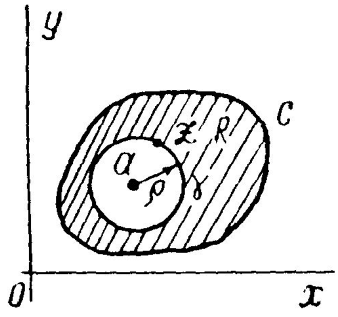


Рис. 2.11

Согласно первому следствию из теоремы Коши (теорема 1 п. 2.4, §2, гл. 2),

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-a}dz = \oint_\gamma \frac{f(z)}{z-a}dz \qquad (2.30)$$

(интегрирование по контурам C и γ ведется в одном направлении).

Представим интеграл правой части равенства (2.30) в виде

$$\oint_\gamma \frac{f(z)}{z-a}dz = \oint_\gamma \frac{f(z)-f(a)}{z-a}dz + f(a)\oint_\gamma \frac{dz}{z-a} \qquad (2.31)$$

Тогда $\oint_\gamma \frac{dz}{z-a} = 2\pi i$ (см. интеграл (2.24).

Покажем, что первый интеграл правой части равенства (2.31) равен нулю, в самом деле, т. к. z берется на контуре γ, запишем уравнение этого контура в виде $z-a=\rho e^{i\varphi}$, где $0\le\varphi<2\pi$, откуда $dz=i\rho e^{i\varphi}d\varphi$ и

$$\oint_\gamma \frac{f(z)-f(a)}{z-a}dz = \oint_\gamma \frac{f(z)-f(a)}{\rho e^{i\varphi}} i\rho e^{i\varphi}d\varphi = i\oint_\gamma [f(z)-f(a)]d\varphi .$$

Допустим, что $\max\limits_{z\in\gamma}\left|f(z)-f(a)\right| = M$. Тогда, согласно свойству об оценке модуля интеграла,

$$\left|\oint_\gamma \frac{f(z)-f(a)}{z-a}dz\right| = \left|i\oint_\gamma [f(z)-f(a)]d\varphi\right| \le M\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi M . \qquad (2.32)$$

Так как радиус ρ окружности γ произвольный, выберем его настолько малым, чтобы $\max\left|f(z)-f(a)\right| = M$ стал меньше любого сколь угодно малого числа. Возможность такого выбора обеспечивается непрерывностью $f(z)$, которая следует из аналитичности $f(z)$ в области R. Таким образом, при $\rho\to 0$ $M\to 0$, а значит, согласно неравенству (2.32), стремится к нулю и величина

$$\left|\int_\gamma \frac{f(z)-f(a)}{z-a}dz\right|.$$

В результате проведённых рассуждений можно записать, что

$$\oint_\gamma \frac{f(z)}{z-a}dz = 2\pi i\cdot f(a) ,$$

а из равенства (2.30) следует, что и

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-a}dz = 2\pi i \cdot f(a). \tag{2.33}$$

Напомним, что здесь точка a – некоторая внутренняя точка области R, а z – переменная точка контура C. Обозначая в равенстве (2.33) переменную интегрирования (переменную точку контура C) через σ, а внутреннюю точку области R – через z, получим так называемую *интегральную формулу Коши:*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\sigma)}{\sigma - z}d\sigma. \tag{2.34}$$

Интеграл правой части равенства (2.34) называется *интегралом Коши;* в подынтегральном выражении множитель $\dfrac{1}{\sigma - z}$ называется *ядром Коши;* функция $f(\sigma)$ – *плотностью интеграла Коши.*

Формула (2.34) позволяет вычислять значение аналитической функции в любой внутренней точке области R при помощи известных значений этой функции на границе области.

Если точка z находится вне контура C, то подынтегральное выражение $\dfrac{f(\sigma)}{\sigma - z}$ будет аналитической функцией в замкнутой области $\overline{R}$, поэтому

$$\oint_C \frac{f(\sigma)}{\sigma - z}d\sigma = 0.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\sigma)}{\sigma - z}d\sigma = \begin{cases} f(z), z \in R; \\ 0, z \notin \overline{R}. \end{cases} \tag{2.35}$$

Интегральную формулу Коши легко записать и для многосвязной области R. Если $(n+1)$-связная область R (см. рис. 2.10) ограничена внешним контуром C и внутренними контурами $C_1, C_2, \ldots, C_n$, то интегральная формула Коши представится в виде

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\left[\oint_C \frac{f(\sigma)}{\sigma - z}d\sigma - \sum_{i=1}^{n}\oint_{C_i} \frac{f(\sigma)}{\sigma - z}d\sigma\right],$$

где все граничные кривые обходятся в положительном направлении.

Интегральная формула Коши, записанная в виде (2.33), может быть использована при вычислении интегралов по замкнутым контурам.

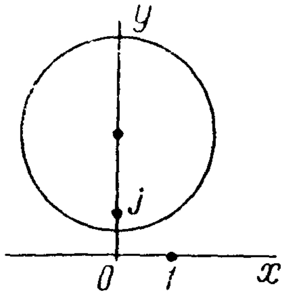


Рис. 2.12

Пример 1. Вычислить интеграл $\oint\limits_C \frac{e^z}{z(z-i)}dz$, если C – окружность радиусом 2 с центром в точке $z = 2{,}5i$ (рис. 2.12).

Решение. Поскольку плотность интеграла Коши $f(z) = \frac{e^z}{z}$ аналитична внутри круга и на окружности C, а точка $z = i$ находится внутри этой области, то формула (2.33) применима.

Поэтому

$$\oint\limits_C \frac{\frac{e^z}{z}}{z-i}dz = 2\pi i\left(\frac{e^z}{z}\right)\Bigg|_{z=i} = 2\pi e^i .$$

В более полных курсах функций комплексной переменной с использованием интегральной формулы Коши доказывается следующая важная теорема.

Теорема. *Всякая аналитическая в замкнутой области* $\overline{R}$ *функция* $f(z)$ *обладает в этой области производными всех порядков, причем эти производные вычисляются по формуле*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\oint\limits_C \frac{f(\sigma)d\sigma}{(\sigma - z)^{n+1}},\ n = 1, 2, \ldots, \tag{2.36}$$

где контур C *обходится в положительном направлении* (в дальнейшем будем считать, что обход по замкнутому контуру совершается всегда в положительном направлении, если противное не оговорено особо).

Из этой теоремы следует, что все производные аналитической функции также аналитические (т. к. они в свою очередь дифференцируемы).

Следовательно, *из существования в некоторой области производной первого порядка от функции комплексной переменной вытекает без дополнительных предположений существование и аналитичность всех ее производных.*

Последний факт свидетельствует о существенном различии между дифференцируемыми функциями комплексного и действительного аргументов. Формула (2.36) позволяет вычислять производные любого порядка от аналитической функции $f(z)$ в любой внутренней точке z области, ограниченной контуром C, через значения этой функции на контуре C. Формула (2.36) так же, как и формула (2.35), используется для вычисления интегралов по замкнутым контурам.

Пример 2. Вычислить интеграл $\oint\limits_C \frac{\sin z}{(z-i)^4}dz$ по замкнутому контуру, содержащему внутри себя точку $z = i$ (рис. 2.13).

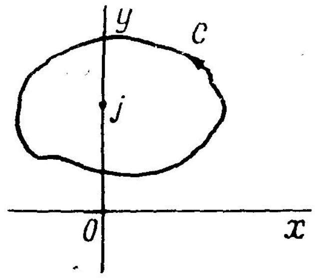


Рис. 2.13

Решение. Функция $\sin z$ аналитична на всей комплексной плоскости (Z), точка $z = i$ находится внутри области, ограниченной замкнутым контуром C, поэтому применима формула (2.36), согласно которой

$$\oint\limits_C \frac{\sin z}{(z-i)^4}dz = \frac{2\pi i}{3!}\frac{d^3 \sin z}{dz^3}\Bigg|_{z=i} = -\frac{\pi i}{3}\cos z\Bigg|_{z=i} = -\frac{\pi i}{3}\cos i = -\frac{\pi i}{3}\mathrm{ch}1.$$

2.7. Интеграл типа Коши

Как было отмечено выше, интеграл вида

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C \frac{f(\sigma)d\sigma}{\sigma - z}$$

называется интегралом Коши при условии, что C – замкнутый кусочно-гладкий контур, а $f(z)$ – функция, аналитическая в замкнутой односвязной области $\overline{R}$, ограниченной этим контуром. Этот интеграл определяет функцию, совпадающую с $f(z)$ внутри области, ограниченной контуром C, и равную нулю вне контура C.

Пусть теперь C – гладкий или кусочно-гладкий контур (замкнутый или разомкнутый) на плоскости (Z); $\varphi(\sigma)$ – непрерывная функция, заданная только на контуре C, и z – точка, не лежащая на C $(z \neq \sigma)$, тогда интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{\varphi(\sigma)}{\sigma - z}d\sigma$$

называется *интегралом типа Коши.* Очевидно, что интеграл Коши является частным случаем интеграла типа Коши.

Интеграл типа Коши определяет однозначную функцию

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\varphi(\sigma)}{\sigma-z}d\sigma$$

во всякой области D, не содержащей ни одной точки кривой C, т. к. для любой точки z, не принадлежащей контуру C, функция $\dfrac{\varphi(\sigma)}{\sigma-z}$ остается непрерывной на контуре C по переменной σ, а поэтому интеграл типа Коши существует.

Известно, что производная интеграла типа Коши для любой точки $z\neq\sigma$ определяется по формуле

$$F'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\varphi(\sigma)}{(\sigma-z)^2}d\sigma .$$

Это означает, что интеграл типа Коши является функцией, аналитической в любой точке, не принадлежащей контуру C.

Для производной любого порядка n от интеграла типа Коши справедлива формула, аналогичная формуле (2.36):

$$F^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{\varphi(\sigma)}{(\sigma-z)^{n+1}}d\sigma .$$

2.8. Гармонические функции

Функция двух действительных переменных $u(x,y)$, определенная в области R, имеющая в этой области непрерывные частные производные до второго порядка включительно и удовлетворяющая *уравнению Лапласа*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$$

называется *гармонической* в области R.

Уравнение Лапласа часто записывают в виде $\Delta u=0$, где $\Delta=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ – символический *оператор Лапласа.*

Между аналитическими и гармоническими функциями существует тесная связь, а именно: *действительная и мнимая части аналитической в области R функции являются функциями, гармоническими в R.*

Действительно, пусть $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ – аналитическая функция в области R. Это значит, что для функций $u(x,y)$ и $v(x,y)$ в этой области существуют частные производные, удовлетворяющие условиям Коши – Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \text{ и } \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

В предыдущем параграфе мы видели, что аналитическую в области функцию $f(z)$ можно дифференцировать в этой области любое число раз. Из этого следует, что функции действительных аргументов $u(x,y)$ и $v(x,y)$ в указанной области будут иметь непрерывные частные производные любого порядка.

Продифференцировав, например, первое равенство из условий Коши – Римана по x, а второе – по y и сложив соответственные части полученных равенств, найдем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}-\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}=0,$$

так как в силу непрерывности частных производных $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}=\dfrac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$.

Следовательно, функция $u(x,y)$, имеющая в области R непрерывные частные производные любого порядка, удовлетворяет в этой области и уравнению Лапласа, а это значит, что $u(x,y)$ является гармонической функцией в области R.

Аналогично доказывается гармоничность функции $v(x,y)$ (доказать самим).

Две гармонические функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$, связанные условиями Коши – Римана, называются *сопряженными гармоническими.*

Пример. Найти аналитическую функцию $\omega = f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, если задана ее действительная часть $u(x,y)=x^2-y^2$ и $f(0)=0$.

Решение. Сначала проверим, будет ли заданная функция $u(x,y)$ гармонической, т. е. будет ли для нее $\Delta u=0$:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x,\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2,\ \frac{\partial u}{\partial y}=-2y,\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-2,$$

откуда

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=2-2=0.$$

Следовательно, функция $u(x, y)$ – гармоническая на всей комплексной плоскости (Z).

Теперь из условий Коши – Римана найдем гармонически сопряженную ей функцию $v(x, y)$. Для нее

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{dv}{dx} = -\frac{du}{dy} = 2y .$$

Как в теории дифференциальных уравнений, когда рассматривались уравнения в полных дифференциалах, функцию $v(x, y)$ по ее частным производным найдем следующим образом.

Интегрируя $\frac{\partial v}{\partial x} = 2y$ по x, считая y постоянным, получим

$$v(x, y) = \int 2y dx + \varphi(y) = 2xy + \varphi(y),$$

где $\varphi(y)$ – пока неизвестная функция, которую нужно определить так, чтобы

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 2x.$$

Продифференцировав $v(x, y) = 2xy + \varphi(y)$ по y и приравняв производную к $2x$, получим $2x + \varphi'(y) = 2x.$ Отсюда $\varphi'(y) = 0$, а $\varphi(y) = C$. Следовательно, $v(x, y) = 2xy + C;$ $\omega = f(z) = (x^2 - y^2) + i(2xy + C).$

Таким образом, по заданной действительной части аналитической функции ее мнимая часть находится с точностью до произвольного постоянного слагаемого.

По второму условию задачи $f(0) = 0$, поэтому из выражения $f(z) = (x^2 - y^2) + i(2xy + C)$ при $x = 0$ и $y = 0$ получаем $0 = Ci$, т. е. $C = 0$. Следовательно, искомая аналитическая функция запишется в виде

$$\omega = f(z) = (x^2 - y^2) + i2xy = (x + iy)^2 = z^2.$$

Вопросы для самопроверки

1. Запишите интеграл от функции комплексной переменной, взятый по дуге C. Когда этот интеграл будет существовать?

2. Сформулируйте основную теорему Коши для односвязной области.

3. Когда интеграл $\int\limits_C f(z)dz$ в односвязной области не зависит от пути интегрирования?

4. Сформулируйте теорему Коши для многосвязной области.

5. Чему равны $\oint\limits_C \frac{dz}{z-a}$ и $\oint\limits_C \frac{dz}{(z-a)^n}$ при $n=0,-1,\pm 2,\ldots,$ если C – любой замкнутый контур, содержащий внутри себя точку $z=a$?

6. Чему равен $\int\limits_{z_1}^{z_2} f(z)dz$, если $f(z)$ – аналитическая функция в области, содержащей точки z_1 и z_2?

7. Запишите интегральную формулу Коши для односвязной области. Когда она имеет место?

8. Где используется интегральная формула Коши?

9. Запишите интегральную формулу Коши для трехсвязной области.

10. Запишите формулу, по которой вычисляются производные любого порядка от аналитической функции в любой внутренней точке области через значения этой функции на контуре, ограничивающем эту область. Где справедлива эта формула?

11. Когда интеграл $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{\varphi(\sigma)d\sigma}{\sigma - z}$ называют интегралом типа Коши?

12. Какая функция называется гармонической в области?

13. Какие функции называются сопряженными гармоническими?

14. Какая связь существует между аналитическими и гармоническими функциями?

Упражнения к § 2

1. Найти значение $\int\limits_C \bar{z}dz$:

1) вдоль отрезка, соединяющего точки $(0,0)$ и $(1,1)$;

2) вдоль параболы $y=x^2$, соединяющей те же точки.

2. Объяснить, почему можно утверждать, что интеграл $\int\limits_C \frac{dz}{z^2+3}$ равен нулю, когда C – окружность $|z|=1$, но это неверно, когда C – окружность $|z|=3$.

3. Объяснить, почему можно утверждать, что $\int\limits_0^z \frac{dz}{z^2-9}$ не зависит от пути интегрирования в верхней полуплоскости $(\operatorname{Im} z > 0)$, но этого нельзя утверждать для левой полуплоскости $(\operatorname{Re} z < 0)$.

4. Вычислить интеграл $\oint\limits_c \frac{dz}{z-1+3i}$, где контур C:

1) окружность $|z|=2$; 2) окружность $|z-1|=6$.

5. Вычислить интеграл $\oint\limits_c \frac{dz}{z^2-1}$, где C – окружность $x^2+y^2=4$.

6. Вычислить интеграл $\oint\limits_c \frac{dz}{1-z^2}$ вдоль следующих контуров:

1) $|z-1|=1$; 2) $|z+1|=1$.

7. Вычислить интегралы, если C – окружность $|z|=1$:

1) $\oint\limits_c \frac{dz}{z}$; 2) $\oint\limits_c \frac{dz}{z^3}$.

8. Вычислить $\int\limits_c \left(z^2+2z+1\right)dz$, где C:

1) окружность $|z|=3$; 2) контур, соединяющий точки $z=0$ и $z=1+2i$.

9. Вычислить: 1) $\int\limits_0^{\pi i} \sin z dz$; 2) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos z dz$; 3) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}i} z e^z dz$.

10. Устно вычислить интегралы:

1) $\int\limits_{|z|=2} \frac{dz}{z-3}$; 2) $\int\limits_{|z-1|=2} \cos z dz$; 3) $\int\limits_{|z-3|=1} z e^z dz$.

11. Вычислить $\oint\limits_c \frac{e^{-z}}{z+1} dz$, если C – окружность $|z|=2$.

12. Вычислить интегралы по замкнутому контуру, образованному прямыми $x=\pm 1$ и $y=\pm 1$:

1) $\oint\limits_c \frac{\sin z}{z} dz$; 3) $\oint\limits_c \frac{e^z}{z-\frac{1}{2}i} dz$;

2) $\oint\limits_c \frac{\cos z}{z} dz$; 4) $\oint\limits_c (\sin z + e^z) dz$.

13. Вычислить $\oint\limits_c \frac{3z^2+2z-1}{z} dz$, где C – окружность $|z|=1$.

§3. Ряды Тейлора и Лорана. Особые точки

3.1. Аналитичность суммы степенного ряда

Понятие равномерной сходимости рядов функций комплексной переменной рассмотрено в гл. 1 §4.

Для равномерно сходящихся рядов функций комплексного аргумента имеют место следующие теоремы.

Теорема 1. *Если члены ряда*

$$u_1(z)+u_2(z)+\ldots+u_n(z)+\ldots \tag{2.37}$$

являются непрерывными функциями в некоторой области G и ряд в этой области сходится равномерно, то сумма ряда $f(z)$ будет непрерывной функцией в области G.

Теорема 2. *Равномерно сходящийся в области G ряд непрерывных функций можно интегрировать почленно вдоль всякой дуги C, лежащей внутри области G, т. е.*

$$\int_C f(z)dz = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)dz.$$

Теорема 3. *Если члены ряда (2.37) являются аналитическими функциями в односвязной области G и ряд в этой области сходится равномерно, то сумма ряда будет аналитической функцией внутри области G.*

Теорема 4. *Равномерно сходящийся в области G ряд аналитических функций можно почленно дифференцировать любое число раз, причем все получающиеся при дифференцировании ряды равномерно сходятся внутри области G.*

Так как степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-a)^n \tag{2.38}$$

равномерно сходится внутри круга, т. е. для $|z-a|\le r<R$ (см. п. 4.2, §4, гл. 1), а члены его $C_n(z-a)^n$ при $n\ge 0$ являются аналитическими функциями на всей комплексной плоскости (Z), то, согласно теореме 3, сумма $f(z)$ этого ряда будет аналитической функцией внутри круга сходимости.

Согласно теореме 2, ряд (2.38) можно почленно интегрировать вдоль любой дуги C, лежащей внутри круга сходимости. Согласно теореме 4, степенной ряд (2.38) можно почленно дифференцировать любое число раз, причем ряды, получающиеся при дифференцировании, будут иметь тот же радиус сходимости, что и исходный ряд.

3.2. Ряд Тейлора

Выше было отмечено, что сумма $f(z)$ степенного ряда (2.38), т. е. $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-a)^n$, является аналитической функцией в области $|z-a|<R$.

Поставим теперь обратную задачу. Пусть дана функция $f(z)$, аналитическая в круге с центром в точке $z=a$. Нельзя ли разложить ее в степенной ряд в окрестности точки $z=a$? Если можно, то всегда ли такой ряд сходится именно к заданной функции $f(z)$.

В теории степенных рядов функций действительного аргумента мы видели, что для каждой функции $f(x)$, имеющей производные любого порядка в заданной точка $x=a$, можно записать степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ с коэффициентами $a_n=\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$, сходящийся к заданной функции $f(x)$ лишь тогда, когда остаточный член формулы Тейлора для этой функции стремиться к нулю при $n\to\infty$.

Так как каждая функция $f(z)$, аналитическая в точке $z=a$, имеет в этой точке производные любого порядка, то очевидно и для такой функции можно записать ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n,$$

который сходиться в некотором круге $|z-a|\le r$. Но сходится ли такой ряд к функции $f(z)$?

Докажем, что аналитическая в области G функция может представляться своим степенным рядом в окрестности любой точки из области G.

Пусть $f(z)$ – функция, аналитическая в некоторой области G, а C – окружность, целиком лежащая в G и имеющая центр в точке $z=a$. Если z – некоторая точка, содержащаяся внутри C, σ – точка на контуре C, то функция $f(z)$ может быть представлена интегралом Коши

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\sigma)}{\sigma-z}d\sigma .$$

Для того чтобы разложить в ряд интеграл Коши, достаточно разложить в ряд ядро Коши $\frac{1}{\sigma - z}$. Преобразуем выражение ядра:

$$\frac{1}{\sigma - z} = \frac{1}{(\sigma - a) - (z - a)} = \frac{1}{\sigma - a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - a}{\sigma - a}}.$$

Модуль разности $|\sigma - a| = r$ равен радиусу окружности C, а модуль разности $|z - a| = \rho$ равен расстоянию от внутренней точки z до центра окружности C. Поэтому, как бы ни перемещалась точка σ по окружности C, величина

$$\left| \frac{z - a}{\sigma - a} \right| < 1. \tag{2.39}$$

Учитывая, что $\frac{1}{1 - t} = 1 + t + t^2 + \ldots + t^n + \ldots$ при $|t| < 1$, функцию $\frac{1}{1 - \frac{z - a}{\sigma - a}}$ в силу справедливости оценки (2.39) можно представить суммой бесконечной убывающей геометрической прогрессии:

$$\frac{1}{1 - \frac{z - a}{\sigma - a}} = 1 + \frac{z - a}{\sigma - a} + \frac{(z - a)^2}{(\sigma - a)^2} + \ldots + \frac{(z - a)^n}{(\sigma - a)^n} + \ldots. \tag{2.40}$$

Ряд

$$1 + \frac{z - a}{\sigma - a} + \frac{(z - a)^2}{(\sigma - a)^2} + \ldots + \frac{(z - a)^n}{(\sigma - a)^n} + \ldots \tag{2.41}$$

равномерно сходится на окружности C по σ, т. к. при фиксированном z и переменной σ величина $\left| \frac{z - a}{\sigma - a} \right| = q$ $(q < 1)$ постоянна. Следовательно, модули членов ряда (2.41) совпадают с соответственными членами сходящегося ряда

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^n + \ldots, \tag{2.42}$$

то есть ряд (2.42) является мажорирующим для ряда (2.41).

Умножив равенство (2.40) на $\frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{f(\sigma)}{\sigma - a}$, получим представление функции $\frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{f(\sigma)}{\sigma - z}$ в виде ряда, равномерно сходящегося по σ на окружности C (т. к. $|\sigma - a| = r \neq 0$ и $|f(\sigma)|$ в силу аналитичности $f(z)$ в области G есть величина, ограниченная на C, а в п. 4.1, §4, гл. 1 отмечалось, что умножение равномерно сходящегося ряда на ограниченную по модулю функцию дает ряд, равномерно сходящийся).

Таким образом,

$$\frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{f(\sigma)}{\sigma-z}=\frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{f(\sigma)}{(\sigma-a)\left(1-\dfrac{z-a}{\sigma-a}\right)}=$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{f(\sigma)}{\sigma-a}+\frac{z-a}{2\pi i}\cdot\frac{f(\sigma)}{(\sigma-a)^2}+\ldots+\frac{(z-a)^n}{2\pi i}\cdot\frac{f(\sigma)}{(\sigma-a)^{n+1}}+\ldots \quad (2.43)$$

Так как равномерно сходящиеся ряды в области равномерной сходимости можно интегрировать почленно (см. теорему 2 п. 3.1, § 3, гл. 2), то, проинтегрировав (2.43) по переменной σ вдоль окружности C, получим разложение функции $f(z)$ в степенной ряд по степеням $(z-a)$ (в окрестности точки $z=a$):

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\sigma)}{\sigma-z}d\sigma=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\sigma)}{\sigma-a}d\sigma+\frac{z-a}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\sigma)}{(\sigma-a)^2}d\sigma+\ldots+$$
$$+\frac{(z-a)^n}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\sigma)}{(\sigma-a)^{n+1}}d\sigma+\ldots \quad . \quad (2.44)$$

Если положить

$$C_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\sigma)}{(\sigma-a)^{n+1}}d\sigma \quad (n=0,1,2,\ldots),$$

где C – любая окружность (теорема 1 п. 2.4, § 2, гл. 2) с центром в точке $z=a$, лежащая в области G, то из разложения (2.44) получим

$$f(z)=C_0+C_1(z-a)+C_2(z-a)^2+\ldots+C_n(z-a)^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-a)^n. \quad (2.45)$$

Если учесть формулу (2.36), в силу которой

$$\begin{cases} C_0=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_C\dfrac{f(\sigma)}{\sigma-a}d\sigma=f(a); \\ C_n=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_C\dfrac{f(\sigma)}{(\sigma-a)^{n+1}}d\sigma=\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}, \quad n=1,2,\ldots, \end{cases} \quad (2.46)$$

то равенство (2.45) перепишется в виде

$$f(z)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(z-a)+\frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n+\ldots. \quad (2.47)$$

Равенства (2.45) и (2.47) представляют аналитическую функцию $f(z)$ рядом, называемым ее рядом Тейлора для любой точки z, лежащей в окрестности точки $z=a$.

Представление функции $f(z)$ рядом Тейлора по степеням $z-a$ (в окрестности точки $z=a$) *единственно.*

Таким образом, если функция $f(z)$ аналитична в окрестности точки $z=a$, то она представима рядом Тейлора, сходящимся к ней внутри некоторого круга $|z-a|\le r$ с центром в точке $z=a$. Этот круг можно расширять до тех пор, пока не нарушится аналитичность функции $f(z)$, т. е. пока ограничивающая круг $|z-a|\le r$ окружность не пройдет через особую точку функции $f(z)$. Отсюда следует, что *радиус сходимости ряда Тейлора* (2.45) или (2.47) R *равен расстоянию точки* a *до ближайшей особой точки функции* $f(z)$.

Если функция $f(z)$ аналитична и в точках z, лежащих вне круга сходимости для ряда (2.45) или (2.47), то, чтобы представить ее рядом Тейлора и в этих точках $(|z-a|>R)$, нужно вместо a выбрать какую-то другую точку b так, чтобы новый круг $|z-b|<R_1$ сходимости ряда Тейлора

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(z-b)^n, \tag{2.48}$$

где

$$P_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\sigma)}{(\sigma-b)^{n+1}}d\sigma \quad (n=0,1,2,...),$$

содержал внутри себя требуемое значение z.

Пример. Функция $f(z)=\dfrac{1}{1-z}$ имеет одну особую точку $z=1$. Разложение ее в ряд Тейлора в окрестности точки $z=a=0$ дает $\dfrac{1}{1-z}=1+z+z^2+...$ для $|z|<1$.

Радиус сходимости этого ряда $R=1$. Но функция $f(z)=\dfrac{1}{1-z}$ аналитична, например, в точке $z=\dfrac{3}{2}i$, лежащей вне круга $|z|\le 1$. Если возьмем $b=i$, то формула (2.48) даст ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} P_n(z-i)^n$, радиус сходимости которого будет равен расстоянию точки $z = i$ до точки $z = 1$, т.е. $R = \sqrt{2}$, а круг сходимости этого ряда $|z - i| < \sqrt{2}$ уже содержит внутри себя точку $z = \frac{3}{2}i$.

Следовательно, действительно справедливо утверждение, что аналитическая функция представляется своим рядом Тейлора в окрестности любой точки из области ее аналитичности.

Так как сумма всякого степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - a)^n$ есть функция, аналитическая в круге $|z - a| < R$, а всякая функция, аналитическая в круге, представима степенным рядом (рядом Тейлора), то отсюда принятому ранее определению аналитической функции эквивалентно следующее: *функция $f(z)$ называется аналитической в точке $z = a$, если в окрестности этой точки она может быть представлена рядом Тейлора.*

3.3. Ряд Лорана

Предположим, что $f(z)$ – аналитическая функция в кольце $r_2 < |z - a| < r_1$, заключенном между двумя концентрическими окружностями K_1 и K_2, и пусть z – произвольная внутренняя точка этого кольца. Проведем дополнительные окружности $|z - a| = R_1 < r_1(\gamma_1)$ и $|z - a| = R_2 > r_2(\gamma_2)$, где $R_2 < R_1$, так, что бы $f(z)$ была аналитической в замкнутой области $R_2 \le |z - a| \le R_1$ и точка z оказалась между γ_1 и γ_2.

Если σ – переменная точка на γ_1 и γ_2, то, согласно интегральной формуле Коши для двусвязной области (п. 2.6, § 2, гл. 2),

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_1} \frac{f(\sigma)}{\sigma - z} d\sigma - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_2} \frac{f(\sigma)}{\sigma - z} d\sigma = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_1} \frac{f(\sigma)}{\sigma - z} d\sigma + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_2} \frac{f(\sigma)}{z - \sigma} d\sigma. \quad (2.49)$$

Когда σ – переменная точка на окружности γ_1, то $|z - a| < |\sigma - a|$, а поэтому

$$\frac{1}{\sigma - z} = \frac{1}{(\sigma - a)\left(1 - \dfrac{z - a}{\sigma - a}\right)} = \frac{1}{\sigma - a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - a)^n}{(\sigma - a)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - a)^n}{(\sigma - a)^{n+1}}.$$

Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - a)^n}{(\sigma - a)^{n+1}}$ равномерно сходится по σ на γ_1 (см. п. 3.2, § 3, гл. 2).

Умножив равенство $\dfrac{1}{\sigma - z} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(z-a)^n}{(\sigma - a)^{n+1}}$ на $\dfrac{f(\sigma)}{2\pi i}$ и проинтегрировав его затем вдоль контура γ_1, для первого из интегралов правой части (2.49) получим

$$\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma_1} \frac{f(\sigma)}{\sigma - z} d\sigma = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} (z-a)^n \oint\limits_{\gamma_1} \frac{f(\sigma)}{(\sigma - a)^{n+1}} d\sigma = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-a)^n, \qquad (2.50)$$

где

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma_1} \frac{f(\sigma)}{(\sigma - a)^{n+1}} d\sigma \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \qquad (2.51)$$

Заметим, что выражения (2.51) нельзя, как выражения (2.46), представить в виде $\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$, ибо функция $f(z)$ не является аналитической во всем круге $|z-a| < R_1$.

Так как σ – переменная точка на окружности γ_2, то $|z-a| > |\sigma - a|$. Для того чтобы получить ряд, равномерно сходящийся на γ_2, ядро Коши $\dfrac{1}{z-\sigma}$ преобразуем так

$$\frac{1}{z-\sigma} = \frac{1}{(z-a)-(\sigma-a)} = \frac{1}{(z-a)\left(1 - \dfrac{\sigma - a}{z-a}\right)} =$$

$$= \frac{1}{z-a} + \frac{\sigma - a}{(z-a)^2} + \ldots + \frac{(\sigma-a)^n}{(z-a)^{n+1}} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sigma-a)^{n-1}}{(z-a)^n},$$

поскольку $\left|\dfrac{\sigma - a}{z-a}\right| < 1$. Умножая равенство $\dfrac{1}{z-\sigma} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(\sigma-a)^{n-1}}{(z-a)^n}$ на $\dfrac{f(\sigma)}{2\pi i}$ и интегрируя по σ вдоль γ_2, получим

$$\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma_2} \frac{f(\sigma)}{z-\sigma} d\sigma = \frac{1}{z-a} \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma_2} f(\sigma) d\sigma +$$

$$+ \frac{1}{(z-a)^2} \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma_2} (\sigma - a) f(\sigma) d\sigma + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{(z-a)^n} \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma_2} (\sigma - a)^{n-1} f(\sigma) d\sigma + \ldots =$$

$$= \frac{C_{-1}}{z-a} + \frac{C_{-2}}{(z-a)^2} + \ldots + \frac{C_{-n}}{(z-a)^n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{-n}}{(z-a)^n}, \quad (2.52)$$

где $C_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_2} (\sigma - a)^{n-1} f(\sigma) d\sigma \qquad (n = 1, 2, \ldots)$.

Согласно следствию из теоремы Коши для многосвязной области (см. п. 2.4, § 2, гл. 2), контуры γ_1 и γ_2 можно заменить некоторой произвольной окружностью Γ с центром в точке $z = a$, целиком лежащей в данном кольце $r_2 < |z - a| < r_1$. Тогда

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(\sigma)}{(\sigma - a)^{n+1}} d\sigma \quad \text{при } n = 0, 1, 2, \ldots$$

и

$$C_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(\sigma)}{(\sigma - a)^{1-n}} d\sigma \quad \text{при } n = 1, 2, \ldots \quad (2.53)$$

или

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(\sigma)}{(\sigma - a)^{n+1}} d\sigma \quad \text{при } n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots. \quad (2.54)$$

Согласно формулам (2.49), (2.50) и (2.52), функция $f(z)$ внутри заданного кольца может быть представлена рядом

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{-n}}{(z-a)^n} = \ldots +$$

$$+ \frac{C_{-n}}{(z-a)^n} + \frac{C_{-n+1}}{(z-a)^{n-1}} + \ldots + \frac{C_{-1}}{z-a} +$$

$$+ C_0 + C_1(z-a) + C_2(z-a)^2 + \ldots = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z-a)^n, \quad (2.55)$$

называемым *рядом Лорана.*

Разложив функцию $f(z)$ в ряд Лорана, мы тем самым представляем ее в виде суммы двух функций:

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z),$$

где

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-a)^n \quad (2.56)$$

есть функция, аналитическая в круге $|z - a| < r_1$, а

$$f_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{-n}}{(z-a)^n} \quad (2.57)$$

есть функция, аналитическая для $|z - a| > r_2$.

Первая часть ряда $\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-a)^n$, называемая *правильной частью ряда Лорана*, есть обычный степенной ряд, разложенный по положительным степеням $(z-a)$. Сходится этот ряд к аналитической функции $f_1(z)$ внутри большего круга, т. е. для $|z-a| < r_1$.

Вторая часть этого ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{-n}}{(z-a)^n}$, называемая *главной частью ряда Лорана*, есть ряд по отрицательным степеням $(z-a)$. Сходится он к функции $f_2(z)$ вне меньшего круга, т. е. для $|z-a| > r_2$ (см. п. 4.2, §4, гл. 1).

Функция $f(z)$, равная сумме функций $f_1(z)$ и $f_2(z)$, представляется рядом Лорана там, где имеют место представления (2.56) и (2.57) одновременно, т. е. в кольце $r_2 < |z-a| < r_1$.

При этом кольцо может вырождаться в круг с выколотым центром: $0 < |z-a| < R$ или во внешность круга с выколотой точкой $z = \infty$: $r < |z-a| < \infty$.

Таким образом, *всякую функцию* $f(z)$, *аналитическую в круговом кольце, можно разложить в ряд Лорана (2.55), причем это разложение по степеням* $(z-a)$ *единственно.*

Использование формул (2.54) для вычисления коэффициентов ряда Лорана неудобно. Практические приемы разложения функций в ряд Лорана рассмотрим на примерах.

Пример 1. Рассмотрим функцию $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-3)}$, имеющую две особые точки $z = 1$ и $z = 3$.

1. Посмотрим, каким будет разложение этой функции в ряд Лорана в кольце $1 < |z| < 3$. Для этого представим заданную функцию в виде суммы двух функций, одна из которых аналитична в области $|z| < 3$, а другая – в области $|z| > 1$. Разложим $f(z)$ на простейшие дроби. В общем случае эта задача решается методом неопределенных коэффициентов. В нашем примере удобно поступить так

$$\frac{1}{(z-1)(z-3)} = \frac{(z-1)-(z-3)}{2(z-1)(z-3)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z-3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z-1}.$$

В круге $|z|<3$ функция $\dfrac{1}{z-3}$ аналитична, поэтому ее будем раскладывать в ряд по положительным степеням z:

$$\frac{1}{z-3}=-\frac{1}{3-z}=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{3}}=-\frac{1}{3}\left(1+\frac{z}{3}+\frac{z^2}{3^2}+\ldots\right)=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}}$$

для $\left|\dfrac{z}{3}\right|<1$ или для $|z|<3$.

Во внешности круга $|z|<1$ функция $\dfrac{1}{z-1}$ аналитична, поэтому ее будем раскладывать в ряд по отрицательным степеням z:

$$\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z\left(1-\frac{1}{z}\right)}=\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\ldots\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}.$$

Итак,

$$\frac{1}{(z-1)(z-3)}=\frac{1}{2(z-3)}-\frac{1}{2(z-1)}=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}}-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}$$

при $1<|z|<3$.

2. Разложим заданную функцию в ряд в области $|z|>3$. Для этого функцию $\dfrac{1}{z-3}$ разложим по отрицательным степеням z, а $\dfrac{1}{z-1}$ уже разложена в области $|z|>1$.

$$\frac{1}{z-3}=\frac{1}{z\left(1-\frac{3}{z}\right)}=\frac{1}{z}\left(1+\frac{3}{z}+\frac{3^2}{z^2}+\ldots\right)=\frac{1}{z}+\frac{3}{z^2}+\frac{3^2}{z^3}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{z^{n+1}}.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{(z-1)(z-3)}=\frac{1}{2(z-3)}-\frac{1}{2(z-1)}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{z^{n+1}}-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(3^n-1)\frac{1}{z^{n+1}}.$$

3. В области $|z|<1$ заданная функция аналитична, поэтому она может быть представлена положительными степенями z:

$$\frac{1}{z-3}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}}\quad\text{(получено выше),}$$

$$\frac{1}{z-1}=-\frac{1}{1-z}=-(1+z+z^2+\ldots)=-\sum_{n=0}^{\infty}z^n.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{(z-1)(z-3)}=\frac{1}{2(z-3)}-\frac{1}{2(z-1)}=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}z^n=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{3^{n+1}}\right)z^n.$$

4. Теперь заданную функцию представим рядом Лорана по степеням $(z-1)$ (в окрестности точки $z=1$). Для этого $\frac{1}{(z-1)(z-3)}$ запишем в виде произведения двух функций

$$\frac{1}{z-1}\cdot\frac{1}{z-3}=\psi(z)\cdot\varphi(z).$$

Первый множитель уже разложен по степеням $(z-1)$. Функция $\varphi(z)=\frac{1}{z-3}$ аналитична в окрестности точки $z=1$, поэтому ее будем раскладывать в ряд по положительным степеням $(z-1)$:

$$\frac{1}{z-3}=\frac{1}{(z-1)-2}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-1}{2}}=$$
$$=-\frac{1}{2}\left[1+\frac{z-1}{2}+\frac{(z-1)^2}{2^2}+\ldots\right]=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{2^n}. \tag{2.58}$$

Поскольку $z = 3$ есть особая точка для $\varphi(z)$, то ряд (2.58) сходится лишь тогда, когда $|z-1|<2$. Умножая выражение (2.58) на $\frac{1}{z-1}$, получим ряд

$$\frac{1}{(z-1)(z-3)}=-\frac{1}{2(z-1)}-\frac{1}{2^2}-\frac{z-1}{2^3}-\frac{(z-1)^2}{2^4}-\ldots=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^{n-1}}{2^{n+1}},$$

который сходится при $0<|z-1|<2$.

5. Для того чтобы получить разложение $f(z)$ в ряд $\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n(z-3)^n$ в окрестности точки $z=3$, нужно $\psi(z)=\frac{1}{z-1}$ разложить в ряд Тейлора в окрестности точки $z=3$ и результат затем умножить на $\frac{1}{z-3}$.

$$\frac{1}{z-1}=\frac{1}{(z-3)+2}=\frac{1}{2\left(1+\frac{z-3}{2}\right)}=\frac{1}{2}\left[1-\frac{z-3}{2}+\frac{(z-3)^2}{2^2}-\ldots\right] \tag{2.59}$$

при $\left|\frac{z-3}{2}\right|<1$, т. е. для $|z-3|<2$.

Умножая выражение (2.59) на $\dfrac{1}{z-3}$, получим

$$\frac{1}{(z-1)(z-3)} = \frac{1}{2(z-3)} - \frac{1}{2^2} + \frac{z-3}{2^3} - \frac{(z-3)^2}{2^4} + \ldots .$$

Этот ряд сходится при $0 < |z-3| < 2$.

Пример 2. Требуется разложить в ряд Лорана функцию $f(z) = \dfrac{e^z}{z^2}$ в окрестности точки $z = 0$.

И здесь, как в случаях 4 и 5 примера 1, заданную функцию представим в виде произведения двух функций:

$$f(z) = \frac{e^z}{z^2} = \frac{1}{z^2} e^z = \varphi(z) \cdot \psi(z).$$

Функция $\varphi(z) = \dfrac{1}{z^2}$ уже разложена по степеням z, для нее точка $z = 0$ является особой точкой.

Функция $\psi(z) = e^z = 1 + z + \dfrac{z^2}{2!} + \dfrac{z^3}{3!} + \ldots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{n!}$ (см. формулу (1.44) для любого z плоскости (Z). Поэтому

$$\frac{e^z}{z^2} = \frac{1}{z^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} + \frac{z}{3!} + \ldots = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^{n-2}}{n!}$$

для $0 < |z| < \infty$.

Пример 3. Для функции $e^{1/z}$ разложение в ряд Лорана получается из ряда для e^u, где $u = \dfrac{1}{z}$,

$$e^{1/z} = e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \ldots + \frac{u^n}{n!} + \ldots = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2! z^2} + \ldots + \frac{1}{n! z^n} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! z^n}$$

для $|z| > 0$.

3.4. Нули и изолированные особые точки

Нулем аналитической в области G функции $f(z)$ $(f(z) \not\equiv 0)$ будем называть точку a этой области, для которой $f(a) = 0$. Если

$$f(a) = f'(a) = \ldots = f^{(k-1)}(a) = 0, \text{ а } f^{(k)}(a) \neq 0,$$

то точка a называется *нулем порядка* k для функции $f(z)$. Если $k = 1$, то нуль называется *простым*, при $k > 1$ – k-*кратным*.

Если точка $z=a$ является нулем порядка k для аналитической функции $f(z)$, то

$$C_0 = f(a)=0, C_1 = f'(a)=0,\ldots,\quad C_{k-1}=\frac{f^{(k-1)}(a)}{(k-1)!}=0,\quad C_k=\frac{f^{(k)}(a)}{k!}\neq 0,$$

поэтому разложение ее в ряд Тейлора в окрестности точки $z=a$ имеет вид

$$\begin{gathered} f(z)=C_k(z-a)^k+C_{k+1}(z-a)^{k+1}+\ldots= \\ =(z-a)^k\left[C_k+C_{k+1}(z-a)+\ldots\right]=(z-a)^k\varphi(z) \end{gathered}, \tag{2.60}$$

где $\varphi(a)\neq 0$.

Пример 1. Найти нули функции $\cos z$ и определить их порядок.

Решение. Для определения нулей функцию $\cos z$, представленную в виде $\cos z=\cos(x+iy)=\cos x\cdot\cos iy-\sin x\sin iy=\cos x\cdot\operatorname{ch} y-i\sin x\cdot\operatorname{sh} y$, приравняем к нулю: $\cos x\cdot\operatorname{ch} y-i\sin x\cdot\operatorname{sh} y=0$.

Отсюда получаем систему уравнений $\begin{cases}\cos x\cdot\operatorname{ch} y=0;\\ \sin x\cdot\operatorname{sh} y=0.\end{cases}$

Так как $\operatorname{ch} y\neq 0$ ни при одном значении y, то из первого уравнения системы следует, что $\cos x=0$.

Тогда указанная выше система распадается на две:

$$\begin{cases}\cos x=0;\\ \sin x=0;\end{cases}\qquad \begin{cases}\cos x=0;\\ \operatorname{sh} y=0.\end{cases}$$

Первая из этих двух систем несовместна, решением же последней будет

$$\begin{cases}x_n=\dfrac{\pi}{2}+n\pi;\\ y=0,\end{cases}$$

то есть $z_n=\dfrac{\pi}{2}+n\pi$ – нули функции $\cos z$.

Так как в этих точках производная $(\cos z)'=-\sin z$ не равна нулю, то указанные нули будут простыми (т. е. нулями первого порядка).

Как было определено в п. 1.4, §1, гл. 2, точки, в которых функция $f(z)$ аналитична, называются правильными или регулярными. Точки, в которых аналитичность функции нарушается, называются *особыми точками* или *особенностями* $f(z)$.

Точка $z = a$ называется *изолированной особой точкой* $f(z)$, если можно указать такую окрестность точки a $|z-a| < r$, в которой, кроме a, других особых точек функции $f(z)$ нет. В этом случае $f(z)$ аналитична в вырожденном кольце $0 < |z-a| < r$.

Согласно п. 3.3, §3, гл. 2, функцию $f(z)$ в окрестности изолированной особой точки $z = a$ можно разложить в ряд Лорана

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z-a)^n .$$

Большинство функций комплексной переменной имеет изолированные особые точки, поэтому подробнее остановимся на их изучении и проведем их классификацию.

В ее основу положим разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана.

1. Если функция $f(z)$ в окрестности изолированной особой точки $z = a$ ($0 < |z-a| < r$) представляется рядом Лорана, в котором главная часть отсутствует, т. е.

$$f(z) = C_0 + C_1(z-a) + \ldots + C_n(z-a)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-a)^n , \qquad (2.61)$$

то особая точка $z = a$ называется *устранимой особой точкой*. Из выражения (2.61) следует, что $\lim\limits_{z \to a} f(z) = C_0$, т. е. функция $f(z)$ будет ограниченной в окрестности точки $z = a$. Ее можно доопределить, положив $f(a) = C_0$, устранив таким образом особенность при $z = a$.

Пример 2. Функция $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$ имеет устранимую особую точку при $z = 0$, т. к. для всех $z \neq 0$ справедливо равенство

$$\frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z}\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots \right) = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \ldots .$$

Но ряд $1 - \dfrac{z^2}{3!} + \dfrac{z^4}{5!} - \ldots$ сходится и при $z = 0$, причем в этом случае его сумма равна 1. Полагая поэтому $\left.\dfrac{\sin z}{z}\right|_{z=0} = C_0 = 1$, мы устраняем особенность в точке $z = 0$.

2. Если в разложении функции $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки $z=a$ имеется конечное число отрицательных степеней $(z-a)$ и высшая из них равна m, то особая точка $z=a$ называется *полюсом функции* $f(z)$ *порядка* m. При $m=1$ точка $z=a$ называется *простым полюсом*.

Если точка $z=a$ – конечная, то для полюса порядка m в этой точке функция

$$f(z)=\frac{C_{-m}}{(z-a)^m}+\frac{C_{-m+1}}{(z-a)^{m-1}}+\ldots+\frac{C_{-1}}{z-a}+\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-a)^n=$$

$$=\frac{C_{-m}+C_{-m+1}(z-a)+\ldots+C_{-1}(z-a)^{m-1}+C_0(z-a)^m+\ldots}{(z-a)^m}=\frac{\varphi(z)}{(z-a)^m}. \qquad (2.62)$$

В числителе последней дроби записан степенной ряд. Функция $\varphi(z)$ как сумма этого степенного ряда будет аналитической в окрестности точки $z=a$, и $\varphi(a)=C_{-m}\neq 0$.

Из разложения (2.62) видно, что если точка $z=a$ – полюс функции $f(z)$, то

$$\lim_{z\to a}f(z)=\infty,$$

то есть в окрестности полюса функции $f(z)$ не ограничена по модулю.

Пример 3. Функция $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)^3}$ в точке $z=1$ имеет полюс третьего порядка, т. к. в разложении ее в ряд Лорана в окрестности точки $z=1$ наивысшая отрицательная степень $(z-1)$ – 3 и

$$\lim_{z\to 1}\frac{1}{(z-1)^3}=\infty.$$

3. Если в разложении функции $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки $z=a$ имеется бесконечное число отрицательных степеней $(z-a)$, то точка $z=a$ называется *существенно особой точкой функции* $f(z)$.

Можно показать, что в сколь угодно малой окрестности существенно особой точкой функция $f(z)$ становится неопределенной, т. е. $\lim\limits_{z\to a}f(z)$ не существует.

Пример 4. Для функции $f(z) = e^{1/z}$ точка $z = 0$ является существенно особой точкой, т. к. разложение в ряд Лорана этой функции в окрестности нуля

$$e^{1/z} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!z^n}$$

имеется бесконечное число отрицательных степеней z.

Рассмотрим поведение этой функции в окрестности точки $z = 0$ хотя бы для действительных z:

$$\lim_{z=x\to 0+0} e^{1/z} = \infty, \quad \lim_{z=x\to 0-0} e^{1/z} = \lim_{z=x\to 0+0} \frac{1}{e^{1/z}} = 0.$$

Следовательно, здесь $\lim\limits_{z\to 0} e^{1/z}$ зависит от пути стремления $z \to 0$, а поэтому он не существует.

Между нулями и полюсами аналитических функций существует теснейшая связь. Если точка $z = a$ *является нулем функции* $f(z)$ *порядка* m, *то та же точка для функции* $g(z) = \dfrac{1}{f(z)}$ *будет полюсом порядка* m.

Пример 5. Найти полюса функции $f(z) = \dfrac{z}{(z^2+9)^4}$ и определить их порядок.

Решение. Для нахождения полюсов функции $f(z)$ найдем нули знаменателя заданной несократимой дроби, для чего знаменатель разложим на простейшие множители и приравняем нулю:

$$(z^2+9)^4 = (z+3i)^4(z-3i)^4 = 0.$$

Так как точки $z = 3i$ и $z = -3i$ являются четырехкратными нулями для знаменателя (см. разложение (2.60), то для заданной функции они будут полюсами четвертого порядка.

Пример 6. Найти полюса функции $f(z) = \dfrac{z^2-1}{z(z-3)(z+1)^4}$ и определить их порядок.

Решение. Для решения поставленной задачи сначала сократим дробь на общий множитель $(z+1)$:

$$f(z) = \frac{z^2-1}{z(z-3)(z+1)^4} = \frac{(z-1)(z+1)}{z(z-3)(z+1)^4} = \frac{(z-1)}{z(z-3)(z+1)^3}$$

и только после этого найдем нули знаменателя. Полагая $z(z-3)(z+1)^3=0$, находим, что $z=0$ и $z=3$ – простые нули, $z=-1$ – трехкратный нуль знаменателя, а поэтому для функции $f(z)$ точки $z=0$ и $z=3$ – простые полюса, а точка $z=-1$ – полюс третьего порядка.

Замечание. Из примеров 5 и 6 видно, что если $z=a$ есть полюс для функции $f(z)$, то для определения его порядка совсем не обязательно разлагать функцию в ряд Лорана в окрестности точки $z=a$.

Для определения порядка полюса часто пользуются теоремой, справедливость которой следует из выражения (2.62).

Теорема. *Если*

$$\varphi(z)=(z-a)^m f(z)$$

есть аналитическая функция в точке $z=a$ *и* $\varphi(a)\neq 0$, *то функция* $f(z)$ *в точке* $z=a$ *имеет полюс порядка* m.

Пример 7. Найти полюса функции $f(z)=\dfrac{z+1}{(z-2)(z+3)^2}$ и определить их порядок.

Решение. Функция $f(z)$ имеет простой полюс в точке $z=2$, т. к.

$$\varphi(z)=(z-2)\frac{z+1}{(z-2)(z+3)^2}=\frac{z+1}{(z+3)^2}$$

в этой точке аналитична и $\varphi(2)=\dfrac{3}{25}\neq 0$. Аналогично

$$\varphi(z)=(z+3)^2\frac{z+1}{(z-2)(z+3)^2}=\frac{z+1}{z-2}$$

является аналитической в точке $z=-3$, и $\varphi(-3)=\dfrac{2}{5}\neq 0$.

Поэтому $f(z)$ в точке $z=-3$ имеет полюс второго порядка.

3.5. Поведение функции на бесконечности

Пусть функция $f(z)$ аналитична в некоторой окрестности бесконечно удаленной точки, за исключением, может быть, самой точки $z=\infty$, т. е. при $|z|>R$ или $R<|z|<\infty$. Положим $z=\dfrac{1}{\xi}$, тогда

$$f(z)=f\left(\frac{1}{\xi}\right)=F(\xi).$$

Функция $F(\xi)$ будет аналитической в окрестности точки $\xi = 0$, либо при $|\xi| < \frac{1}{R}$, либо при $0 < |\xi| < \frac{1}{R}$ соответственно. Ее можно разложить в ряд в окрестности точки $\xi = 0$. Если в точке $\xi = 0$ $F(\xi)$ аналитична, то при разложении получится ряд Тейлора

$$F(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \xi^n . \tag{2.63}$$

Если же в точке $\xi = 0$ аналитичность $F(\xi)$ нарушена, получится ряд Лорана

$$F(\xi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \xi^n = \sum_{n=-\infty}^{-1} C_n \xi^n + \sum_{n=0}^{\infty} C_n \xi^n . \tag{2.64}$$

В равенстве (2.64) $\sum\limits_{n=-\infty}^{-1} C_n \xi^n$ – это главная часть разложения $F(\xi)$ в окрестности точки $\xi = 0$, а $\sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n \xi^n$ – правильная.

Перейдя в равенстве (2.64) к переменной z, получим разложение функции $f(z)$ в окрестности точки $z = \infty$:

$$f(z) = \ldots C_{-n} z^n + \ldots + C_{-1} z + C_0 + \frac{C_1}{z} + \ldots + \frac{C_n}{z^n} + \ldots . \tag{2.65}$$

В разложении (2.65) роль *главной части играет совокупность положительных степеней* z, *а члены с отрицательными степенями* z *образуют правильную часть.*

Очевидно, характеры особенностей $f(z)$ при $z \to \infty$ и $F(\xi)$ при $\xi \to 0$ совпадают, т. к. $\lim\limits_{z \to \infty} f(z) = \lim\limits_{\xi \to 0} F(\xi)$.

Классификация особых точек, установленная в п. 3.4, §3, гл. 2, будет иметь место и для представлений (2.63) и (2.64).

1. В *случае устранимой особенности* в точке $\xi = 0$, а следовательно, и в $z = \infty$, согласно (2.61), будем иметь

$$f(z) = F(\xi) = C_0 + C_1 \xi + \ldots + C_n \xi^n + \ldots = C_0 + \frac{C_1}{z} + \ldots + \frac{C_n}{z^n} + \ldots ,$$

то есть *ряд* в этом случае *не содержит положительных степеней* z.

Например, функция $e^{1/z}$ аналитична в бесконечности, т. к. ее разложение

$$e^{1/z} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2! z^2} + \ldots + \frac{1}{n! z^n} + \ldots$$

не содержит положительных степеней z. Поэтому можно положить $e^{1/z}\Big|_{z=\infty}=1$.

2. В *случае полюса порядка* m, согласно формуле (2.62), будем иметь

$$f(z)=F(\xi)=\frac{C_{-m}}{\xi^m}+\frac{C_{-m+1}}{\xi^{m-1}}+\ldots+\frac{C_{-1}}{\xi}+\sum_{n=0}^{\infty}C_n\xi^n=$$

$$=C_{-m}z^m+C_{-m+1}z^{m-1}+\ldots+C_{-1}z+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{C_n}{z^n},$$

то есть *в разложении содержится конечное число положительных степеней* z (наибольшая из них m).

3. В *случае существенной особенности*

$$f(z)=F(\xi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_{-n}}{\xi^n}+\sum_{n=0}^{\infty}C_n\xi^n=\sum_{n=1}^{\infty}C_{-n}z^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{C_n}{z^n},$$

то есть *в разложении* функции $f(z)$ в окрестности бесконечно удаленной точки *содержится бесконечное число положительных степеней* z.

Разложения функций e^z, $\cos z$, $\sin z$, $\operatorname{ch} z$, $\operatorname{sh} z$ (см. п. 5.1, §5, гл. 1) можно рассматривать как лорановские разложения в окрестности $z=\infty$. Так как во всех этих разложениях содержится бесконечное число положительных степеней z, то точка $z=\infty$ для них будет существенно особой точкой.

Вопросы для самопроверки

1. Какой должна быть функция действительного переменного $f(x)$, чтобы ее можно было представить рядом Тейлора?

2. Какой должна быть функция комплексной переменной $f(z)$, чтобы ее можно было представить рядом Тейлора?

3. Как определяется радиус сходимости ряда Тейлора $\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-a)^n$, если известны особые точки функции $f(z)$?

4. Какая функция представима рядом Лорана?

5. Из каких двух частей состоит ряд Лорана? В каких областях эти части ряда Лорана сходятся?

6. Что называется нулем аналитической функции?

7. Какая точка называется особой для данной функции $f(z)$?

8. Какая точка называется изолированной особой точкой?

9. Какая точка называется устранимой особой точкой?

10. Какая особая точка называется полюсом? Как ведет себя функция в окрестности полюса?

11. Какая особая точка называется существенно особой? Как ведет себя функция $f(z)$ в окрестности этой точки?

12. Какая связь существует между нулями и полюсами аналитических функций?

13. Как разложить в ряд в окрестности бесконечно удаленной точки функцию $f(z)$?

Упражнения к § 3

1. Разложить $f(z)=\dfrac{1}{2-z}$ в ряд Тейлора в окрестности указанных точек и записать области сходимости для каждого из рядов:

1) $z=0$; 2) $z=-1$; 3) $z=i$.

2. Записать ряд Лорана для функции $f(z)=e^{-1/z^2}$ в окрестности точки $z=0$.

3. Записать ряд Лорана для функции $f(z)=\dfrac{1}{z(1-z)^2}$ в окрестности точки $z=1$.

4. Получить разложения Лорана для функции $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$, справедливые для следующих областей:

1) $0<|z-1|<1$; 2) $|z|>2$; 3) $1<|z|<2$.

5. Найти нули и определить их порядок для следующий функций:

1) $f(z)=(z^2-1)^3$; 2) $f(z)=\sin z$.

6. Найти особые точки следующих функций и определить их тип (для полюсов указать порядок):

1) $f(z)=\dfrac{z+3}{(z+1)^2(z-1)z}$; 4) $f(z)=\cos\left(\dfrac{1}{z-1}\right)$; 7) $f(z)=\dfrac{e^{-z}}{z^2}$;

2) $f(z)=\dfrac{1}{\sin z}$; 5) $f(z)=\dfrac{\cos z}{z^3}$; 8) $f(z)=\dfrac{1-e^{2z}}{z^4}$.

3) $f(z)=\dfrac{\sin z}{z^4}$; 6) $f(z)=e^{-1/z^2}$;

Глава 3. ВЫЧЕТЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ

§1. Вычеты

1.1. Определение вычета

Понятие вычета является одним из важнейших понятий теории функций комплексной переменной в силу большой практической ценности основной теоремы о вычетах, которую мы рассмотрим ниже.

Если функция $f(z)$ аналитична в односвязной области G, то $\oint\limits_C f(z)dz = 0$, где C – любой замкнутый контур, лежащий целиком в области G. Если же внутри контура C есть единственная изолированная особая точка $z = a$ функции $f(z)$, то $\oint\limits_C f(z)dz$, вообще говоря, не равен нулю. Согласно теореме 1, п. 2.4, §2, гл. 2, значение такого интеграла не зависит от формы контура.

Величину этого интеграла, деленную на $2\pi i$, условились называть *вычетом* функции $f(z)$ относительно изолированной особой точки $z = a$ и обозначать символом

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C f(z)dz. \tag{3.1}$$

Из формулы (2.53) следует, что

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C f(z)dz = C_{-1},$$

где C_{-1} – коэффициент при первой отрицательной степени $(z-a)$ разложения функции $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки $z = a$.

1.2. Техника вычисления вычетов

Если точка $z = a$ является существенно особой точкой функции $f(z)$, то вычет относительно нее может быть определен лишь с помощью разложения $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности этой точки.

Пример 1. Вычислить вычет функции $f(z) = e^{-1/z}$ относительно точки $z = 0$.

Решение. Представим заданную функцию рядом Лорана в окрестности точки $z = 0$:

$$e^{-1/z} = 1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{4!z^4} - \ldots.$$

Так как в полученном разложении содержится бесчисленное множество отрицательных степеней z, то точка $z=0$ является существенно особой для $f(z)=e^{-1/z}$. Вычет функции относительно точки $z=0$ равен коэффициенту при первой отрицательной степени z, т. е.

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = \operatorname*{Res}_{z=0} e^{-1/z} = -1.$$

Пример 2. Вычислить вычет функции $\dfrac{e^{-z}}{z^3}$ относительно точки $z=0$.

Решение. Запишем для заданной функции ряд Лорана в окрестности точки $z=0$:

$$\frac{e^{-z}}{z^3} = \frac{1}{z^3}\left(1 - z + \frac{z^2}{2!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots\right) = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2!z} - \frac{1}{3!} + \frac{z}{4!} - \ldots .$$

Из полученного ряда видно, что точка $z=0$ является полюсом третьего порядка, следовательно, $\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = C_{-1} = \dfrac{1}{2}$.

Когда точка $z=0$ является полюсом порядка m для функции $f(z)$, то вычет относительно нее может быть определен и без разложения функции в ряд Лорана.

Пусть точка $z=a$ есть полюс порядка m для функции $f(z)$. Тогда разложение $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности этой точки имеет вид

$$f(z) = \frac{C_{-m}}{(z-a)^m} + \frac{C_{-m+1}}{(z-a)^{m-1}} + \ldots + \frac{C_{-1}}{z-a} + C_0 + C_1(z-a) + \ldots . \quad (3.2)$$

Умножая обе части равенства (3.2) на $(z-a)^m$, получим

$$\begin{gathered}\varphi(z) = (z-a)^m f(z) = C_{-m} + C_{-m+1}(z-a) + \ldots + \\ + C_{-1}(z-a)^{m-1} + C_0(z-a)^m + \ldots\end{gathered} \quad (3.3)$$

Справа в разложении (3.3) стоит обычный степенной ряд, который внутри круга сходимости можно дифференцировать любое число раз. Дифференцируя равенство (3.3) $m-1$ раз, получим

$$\frac{d^{m-1}\left[(z-a)^m f(z)\right]}{dz^{m-1}} = (m-1)!C_{-1} + m(m-1)\ldots 2C_0(z-a) + \ldots . \quad (3.4)$$

Переходя к пределу при $z \to a$, из выражения (3.4) находим

$$C_{-1} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to a} \frac{d^{m-1}\left[(z-a)^m f(z)\right]}{dz^{m-1}} = \\ = \frac{1}{(m-1)!} \cdot \left.\frac{d^{m-1}\left[(z-a)^m f(z)\right]}{dz^{m-1}}\right|_{z=a} \qquad (3.5)$$

Таким образом, *если точка $z = a$ есть полюс функции $f(z)$ порядка m, то вычет $f(z)$ относительно точки $z = a$ определяется по формуле (3.5).* В частности, вычет функции $f(z)$ относительно простого полюса $(m = 1)$ будет определятся по формуле

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z) = \lim_{z \to a} f(z)(z-a). \qquad (3.6)$$

Пример 3. Вычислить вычеты функции $f(z) = \dfrac{z+3}{(z-1)(z+1)^2}$ относительно всех ее особых точек.

Решение. Для заданной функции точка $z = 1$ является простым полюсом, а точка $z = -1$ – двукратным, поэтому, согласно формуле (3.6),

$$\operatorname*{Res}_{z=1} f(z) = \lim_{z \to 1}(z-1)\frac{z+3}{(z-1)(z+1)^2} = 1$$

и, согласно формуле (5.5),

$$\operatorname*{Res}_{z=-1} f(z) = \frac{1}{1!} \cdot \frac{d}{dz}\left.\left[(z+1)^2 \frac{z+3}{(z-1)(z+1)^2}\right]\right|_{z=-1} = -\left.\frac{4}{(z-1)^2}\right|_{z=-1} = -1.$$

Пример 4. Задана функция $f(z) = \dfrac{e^z}{z^2+1}$. Вычислить вычеты $f(z)$ относительно всех особых точек.

Решение. Так как $z = i$ и $z = -i$ – простые полюсы, то

$$\operatorname*{Res}_{z=i} f(z) = \left.\left[(z-i)\frac{e^z}{(z-i)(z+i)}\right]\right|_{z=i} = \left.\frac{e^z}{z+i}\right|_{z=i} = \frac{e^i}{2i},$$

$$\operatorname*{Res}_{z=-i} f(z) = \left.\left[(z+i)\frac{e^z}{(z-i)(z+i)}\right]\right|_{z=-i} = \left.\frac{e^z}{z-i}\right|_{z=-i} = -\frac{e^{-i}}{2i}.$$

Пример 5. Задана функция $f(z)=\dfrac{\sin z}{z^3}$. Вычислить $\operatorname*{Res}\limits_{z=0} f(z)$.

Решение. Для того чтобы определить характер особой точки, разложим заданную функцию в ряд Лорана в окрестности точки $z=0$:

$$f(z)=\frac{\sin z}{z^3}=\frac{1}{z^2}-\frac{1}{3!}+\frac{z^2}{5!}-\frac{z^4}{7!}+\dots. \tag{3.7}$$

Здесь точка $z=0$ – полюс второго порядка. Так как в разложении (3.7) отсутствует член с $\dfrac{1}{z}$, то $\operatorname*{Res}\limits_{z=0} f(z)=0$.

Если $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ – частное двух функций, аналитических в окрестности простого полюса $z=a$, и $\varphi(a)\neq 0$, $\psi(a)=0$, но $\psi'(a)\neq 0$, то, согласно формуле (3.6),

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z)=\lim_{z\to a}(z-a)\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}=\lim_{z\to a}\frac{\varphi(z)}{\dfrac{\psi(z)-\psi(a)}{z-a}}=\frac{\varphi(a)}{\psi'(a)},$$

то есть

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z)=\frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}. \tag{3.8}$$

Формула (3.8) более проста по сравнению с формулой (3.6).

Пример 6. Вычислить $\operatorname*{Res}\limits_{z=0} \operatorname{ctg} z$.

Решение. Точка $z=0$ является простым нулем функции $\sin z$, а следовательно, и простым полюсом для $\operatorname{ctg} z$, поэтому, согласно формуле (3.8), $\operatorname*{Res}\limits_{z=0} \operatorname{ctg} z=\operatorname*{Res}\limits_{z=0}\dfrac{\cos z}{\sin z}=\dfrac{\cos 0}{\cos 0}=1.$

1.3. Основная теорема Коши о вычетах

Пусть $f(z)$ – функция, аналитическая в замкнутой области $\overline{G}$, ограниченной контуром C, за исключением конечного числа изолированных особых точек $a_1, a_2, \dots, a_n \in G$. Окружим точки $a_1, a_2, \dots, a_n$ для простоты окружностями $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ с центрами в этих точках и радиусами настолько малыми, чтобы окружности не пересекались и не выходили из области, ограниченной контуром C. Тогда функция $f(z)$ будет аналитической в многосвязной области, ограниченной контурами C и γ_k $(k=1,2,...,n)$ (рис. 3.1).

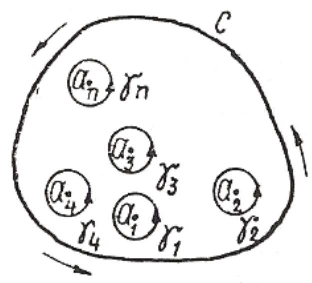


Рис. 3.1

Согласно теореме Коши для многосвязной области (теорема 2, п. 2.4, §2, гл. 2),

$$\oint_C f(z)dz = \oint_{\gamma_1} f(z)dz + \oint_{\gamma_2} f(z)dz + ... + \oint_{\gamma_n} f(z)dz. \quad (3.9)$$

Учитывая равенство (3.1), можем записать, что

$\oint_{\gamma_k} f(z)dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=a_k} f(z)$, где $k = 1,2,\ldots,n$.

Тогда из выражения (3.9)

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=a_k} f(z). \quad (3.10)$$

Полученный результат известен как ***теорема Коши о вычетах***, которую можно сформулировать так: *если функция $f(z)$ аналитична в области $\overline{G}$, ограниченной контуром C, всюду, кроме конечного числа особых точек a_1, a_2, …, a_n, то интеграл от функции $f(z)$ вдоль контура C равен произведению $2\pi i$ на сумму вычетов $f(z)$ относительно всех особых точек, лежащих внутри C.*

Так как вычеты функции $f(z)$ часто подсчитываются легко, то формула (3.10) позволяет вычислять интегралы от функций комплексной переменной через вычеты подынтегральной функции. Теорема Коши о вычетах широко применяется также в операционном исчислении и других разделах математики.

Пример 1. Вычислить $\int_C \frac{z+3}{(z-1)(z+1)^2}dz$, где C – окружность $|z-0,5|=1$.

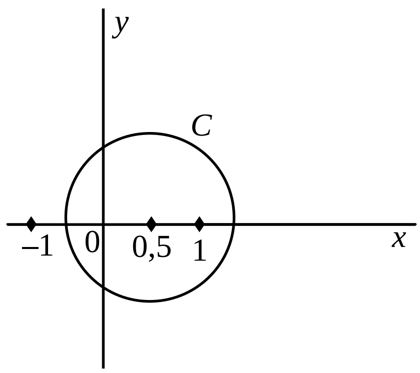


Рис. 3.2

Решение. В области, ограниченной контуром C, находится лишь одна особая точка $z=1$ подынтегральной функции $f(z)$ (рис. 3.2).

В примере 3 п. 1.2, §1, гл. 3 мы видели, что $\operatorname*{Res}_{z=1} \frac{z+3}{(z-1)(z+1)^2} = 1$.

Отсюда

$$\int\limits_C \frac{z+3}{(z-1)(z+1)^2}dz = 2\pi i\,.$$

Пример 2. Вычислить $\int\limits_{|z|=3} \frac{e^z}{z^2+1}dz$.

Решение. Вычеты подынтегральной функции в точках $z=i$ и $z=-i$ получены в примере 4 п. 1.2, §1, гл. 3, а именно:

$$\operatorname*{Res}_{z=i} f(z) = \frac{e^i}{2i},\ \operatorname*{Res}_{z=-i} f(z) = -\frac{e^{-i}}{2i}.$$

Поэтому

$$\int\limits_{|z|=3} \frac{e^z}{z^2+1}dz = 2\pi i\left(\frac{e^i}{2i} - \frac{e^{-i}}{2i}\right) = 2\pi i \sin 1\,.$$

1.4. Логарифмические вычеты

В пункте 3.4, §3, гл. 2 мы видели, что если точка $z=a$ является полюсом порядка m для функции $f(z)$, то справедливо соотношение

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-a)^m},$$

причем функция $\varphi(z)$ аналитична в точке $z=a$ и $\varphi(a) \neq 0$.

Отсюда логарифмическая производная функции $f(z)$

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \left[\operatorname{Ln} f(z)\right]' = \left[\operatorname{Ln}\varphi(z) - m\operatorname{Ln}(z-a)\right]' = \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} - \frac{m}{z-a}.$$

Функция $\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}$ аналитична в точке $z=a$, следовательно, главная часть разложения функции $\frac{f'(z)}{f(z)}$ в ряд Лорана в окрестности точки $z=a$ состоит из одного члена $-\frac{m}{z-a}$, поэтому

$$\operatorname*{Res}_{z=a}\frac{f'(z)}{f(z)} = -m\,. \tag{3.11}$$

Если точка $z=a$ для функции $f(z)$ является нулем порядка m, то для функции $F(z)=\dfrac{1}{f(z)}$ эта точка является полюсом порядка m (см. п. 3.4, §3, гл. 2).

Так как $\operatorname{Ln} f(z)=-\operatorname{Ln} F(z)$, то

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\left[\operatorname{Ln} f(z)\right]'=-\left[\operatorname{Ln} F(z)\right]'=-\frac{F'(z)}{F(z)}. \tag{3.12}$$

Для функции $F(z)$ точка $z=a$ является полюсом порядка m, поэтому, согласно формуле (3.11),

$$\operatorname*{Res}_{z=a}\frac{F'(z)}{F(z)}=-m.$$

Отсюда на основании равенства (3.12) получим

$$\operatorname*{Res}_{z=a}\frac{f'(z)}{f(z)}=m. \tag{3.13}$$

Таким образом, *вычет логарифмической производной функции* $f(z)$ *относительно точки, являющейся нулем функции* $f(z)$, *равен порядку нуля, а относительно точки, являющейся полюсом функции* $f(z)$, *– порядку этого полюса с обратным знаком.*

Если функция $f(z)\not\equiv 0$ аналитична в замкнутой области, ограниченной контуром C, кроме конечного числа полюсов a_1, a_2, …, a_n, и в точках b_1, b_2, …, b_k обращается в нуль, то для функции $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ точки a_1, a_2, …, a_n, b_1, b_2, …, b_k будут особыми и в соответствии с основной теоремой Коши о вычетах

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f'(z)}{f(z)}dz=\sum_{i=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=a_i}\frac{f'(z)}{f(z)}+\sum_{j=1}^{k}\operatorname*{Res}_{z=b_j}\frac{f'(z)}{f(z)}. \tag{3.14}$$

Величину

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f'(z)}{f(z)}dz$$

называют *логарифмическим вычетом функции* $f(z)$ *относительно контура* C.

Если условиться каждый нуль и каждый полюс функции $f(z)$ считать столько раз, каков его порядок, то, согласно равенству (3.13), сумма

$$\sum_{j=1}^{k} \operatorname*{Res}_{z=b_j} \frac{f'(z)}{f(z)} = N$$

равна числу нулей функции $f(z)$, расположенных внутри контура C, а сумма

$$\sum_{i=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=a_i} \frac{f'(z)}{f(z)} = -P$$

равна числу полюсов функции $f(z)$, расположенных внутри контура C, взятых со знаком минус.

Исходя из этого равенство (3.14) перепишем в виде

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N - P. \qquad (3.15)$$

Отсюда *логарифмический вычет функции относительно замкнутого контура C равен разности между количеством нулей (с учетом их порядка) и количеством полюсов (также с учетом их порядка) этой функции, расположенных внутри данного контура.*

В частности, если внутри контура C функция $f(z)$ особых точек не имеет, то $P = 0$ и логарифмический вычет $\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz$ равен числу нулей функции $f(z)$, расположенных внутри контура C.

Если точка z пробегает дугу C от начальной точки z_0 к конечной точке z_1, то соответствующая ей точка $\omega = f(z)$ пробегает некоторую дугу Γ плоскости (W) с начальной точкой $\omega_0 = f(z_0)$ и конечной точкой $\omega_1 = f(z_1)$.

Если аналитическая функция $f(z)$ вдоль дуги C не обращается в нуль, то по правилу вычисления интеграла от аналитической функции (п. 2.5, §2, гл. 2)

$$\int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \operatorname{Ln} f(z_1) - \operatorname{Ln} f(z_0) = \operatorname{Ln} \omega_1 - \operatorname{Ln} \omega_0,$$

причем берется любая однозначная вдоль Γ ветвь логарифма. Если C – замкнутый контур $(z_0 = z_1)$, то Γ также является замкнутым контуром $\left[\omega_1 = \omega_0 = f(z_0)\right]$, пробегаемым ω один или несколько раз.

В этом случае разность $\operatorname{Ln}\omega_1 - \operatorname{Ln}\omega_0$ даст изменение $\operatorname{Ln} f(z)$ по замкнутому контуру, которое обычно обозначают через $\Delta_C \operatorname{Ln} f(z)$.

При одном и том же $f(z_0)$ значения $\operatorname{Ln} f(z_0)$ могут различаться лишь благодаря разным значениям, приписываемым $\operatorname{Arg} f(z_0)$ до и после обхода контура C.

Если исходное значение $\operatorname{Arg} f(z_0)$ обозначать через Φ_0, значение $\operatorname{Arg} f(z_0)$ после обхода – через Φ_1, а разность $\Phi_1 - \Phi_0$ через $\Delta_C \operatorname{Arg} f(z)$, то

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \frac{1}{2\pi i}\left\{\left[\ln\left|f(z_0)\right| + i\Phi_1\right] - \left[\ln\left|f(z_0)\right| + i\Phi_0\right]\right\} = \\ = \frac{\Phi_1 - \Phi_0}{2\pi} = \frac{\Delta_C \operatorname{Arg} f(z)}{2\pi}. \tag{3.16}$$

Из равенств (3.15) и (3.16) следует соотношение

$$N - P = \frac{1}{2\pi}\Delta_C \operatorname{Arg} f(z), \tag{3.17}$$

которое называют ***принципом аргумента*** и формулируют так: *разность между количеством нулей и полюсов функции* $f(z)$, *заключенных внутри контура* C, *равна деленному на* 2π *изменению* $\operatorname{Arg} f(z)$ *при обходе точкой* z *контура* C *в положительном направлении.*

Можно дать геометрическую интерпретацию этому принципу.

Пусть точка z обходит замкнутый контур C в положительном направлении, тогда, как уже отмечалось выше, конец вектора $\omega = f(z)$ описывает также некоторую замкнутую кривую Γ. Обозначим через m количество полных оборотов вокруг начала координат, которые вектор $\omega = f(z)$ сделает при указанном обходе. При каждом обороте вектора, совершаемом против часовой стрелки, аргумент $f(z)$ изменится на 2π, а при обороте по часовой стрелке – на (-2π). Тогда $\Delta_C \operatorname{Arg} f(z)$ – изменение $\operatorname{Arg} f(z)$ – будет равно $\pm 2\pi m$ и, согласно равенству (3.17), $N - P = \pm m$.

Отсюда следует другая формулировка принципа аргумента.

Разность между количеством нулей и полюсов функции $f(z)$, *заключенных внутри контура* C, *равна числу полных оборотов, которые делает вокруг начала координат вектор, изображающий* $f(z)$, *в то время как точка* z *описывает контур* C *в положительном направлении.*

В частности, когда функция $f(z)$ не имеет полюсов внутри C, то количество нулей функции $f(z)$, заключенных внутри замкнутого контура C, равно числу полных оборотов вектора $\omega = f(z)$ вокруг начала координат при однократном обходе точкой z контура C в положительном направлении.

Из принципа аргумента вытекает следующая теорема, которую мы сформулируем без доказательства.

Теорема Руше. *Если функции $f(z)$ и $\varphi(z)$ аналитичны внутри C, а на C непрерывны и удовлетворяют условию $|f(z)| > |\varphi(z)|$, то функции $f(z)$ и $f(z)+\varphi(z)$ имеют внутри C одинаковое число нулей.*

Пример. Найти число корней уравнения $z^{10} - 5z^5 + z^4 - 1 = 0$, по модулю меньших, чем 1.

Решение. Применим теорему Руше, для чего представим $z^{10} - 5z^5 + z^4 - 1$ в виде $f(z)+\varphi(z)$, где $f(z) = -5z^5$ и $\varphi(z) = z^{10} + z^4 - 1$.

Так как при $|z| = 1$ $|f(z)| = |5z^5| = 5$, а $|\varphi(z)| = |z^{10} + z^4 - 1| \leq \leq |z^{10}| + |z^4| + 1 = 3$, то на единичной окружности $|z| = 1$ $|f(z)| > |\varphi(z)|$ и $f(z) \neq 0$.

Следовательно, по теореме Руше, функция $f(z)+\varphi(z) = = z^{10} - 5z^5 + z^4 - 1$ внутри окружности $|z| = 1$ имеет столько же нулей, сколько их имеет функция $f(z) = -5z^5$. Но последняя имеет пятикратный нуль в точке $z = 0$, и, следовательно, число ее нулей внутри единичного круга равно 5. Поэтому и уравнение $z^{10} - 5z^5 + z^4 - 1 = 0$ имеет внутри единичного круга 5 корней.

Вопросы для самопроверки

1. Что называется вычетом функции $f(z)$ относительно особой точки $z = a$?

2. По каким формулам вычисляются вычеты в случае простого полюса? В случае полюса порядка m?

3. Как определяется вычет в случае существенно особой точки?

4. Как формулируется теорема Коши о вычетах?

5. Чему равен вычет логарифмической производной функции $f(z)$ относительно точки, являющейся нулем $f(z)$? полюсом $f(z)$?

6. Что называют логарифмическим вычетом функции $f(z)$ относительно замкнутого контура C?

7. Чему равен логарифмический вычет функции $f(z)$ относительно замкнутого контура C?

8. Сформулируйте теорему, носящую название принципа аргумента.

Упражнения к §1

1. Найти вычеты в каждой из особых точек функций:

1) $f(z)=\dfrac{\cos z}{z^3}$; 4) $f(z)=\dfrac{e^{-z}}{z^2}$; 7) $f(z)=\dfrac{z}{(z+1)^3}$;

2) $f(z)=e^{-1/z^2}$; 5) $f(z)=z^2e^{1/z}$; 8) $f(z)=\dfrac{1}{z^3(z-i)}$;

3) $f(z)=\dfrac{1}{1-z}$; 6) $f(z)=\dfrac{1}{1-z^2}$; 9) $f(z)=\dfrac{z^4}{(z+i)^2}$.

2. Найти число корней уравнения $z^4-3z^2+8z+3=0$:

1) по модулю меньших чем 1; 2) по модулю меньших чем 3.

§2. Вычисление определенных интегралов с помощью вычетов

2.1. Постановка задачи

Основная теорема Коши о вычетах позволяет свести вычисление интеграла по замкнутому контуру от функции комплексной переменной к вычислению вычетов подынтегральной функции относительно особых точек, расположенных внутри данного контура.

Иногда этим же методом удается вычислять некоторые определенные интегралы от функций действительного переменного, для чего эти интегралы предварительно преобразуют в интегралы по замкнутому контуру.

2.2. Вычисление интегралов типа $\int\limits_0^{2\pi} R(\sin t, \cos t)\,dt$

Интегралы типа

$$\int\limits_0^{2\pi} R(\sin t, \cos t)\,dt, \tag{3.18}$$

где подынтегральная функция является рациональной функцией от $\sin t$ и $\cos t$, можно вычислять, полагая

$$z = e^{it}. \tag{3.19}$$

Тогда $|z| = \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} = 1$, и при изменении t от 0 до 2π точка z опишет окружность C единичного радиуса.

Согласно формулам (1.47) и соотношению (3.19),

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} = \frac{z + \dfrac{1}{z}}{2} = \frac{z^2 + 1}{2z}$$

и

$$\sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} = \frac{z - \dfrac{1}{z}}{2i} = \frac{z^2 - 1}{2iz}$$

являются рациональными функциями от z. Из соотношения (3.19) $\ln z = it$, а $dt = \dfrac{dz}{iz}$. При переходе в интеграле (3.18) к новой переменной z получается интеграл

$$\oint\limits_{|z|=1} f(z)\,dz, \tag{3.20}$$

в котором $f(z)$ будет рациональной функцией от z. К интегралу (3.20) уже применима теорема о вычетах.

Таким образом,

$$\int\limits_0^{2\pi} R(\sin t, \cos t)\,dt = \oint\limits_{|z|=1} f(z)\,dz = 2\pi i \sum \operatorname{Res} f(z), \tag{3.21}$$

где вычеты берутся относительно особых точек $f(z)$, находящихся внутри окружности $|z| = 1$.

Пример. В качестве иллюстрации этого метода вычислим интеграл

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{1+\alpha\sin t},\ 0<\alpha<1. \tag{3.22}$$

Переходя в интеграле (3.22) к новой переменной z, используя подстановку $z = e^{it}$, получим

$$I = \int_{|z|=1} \frac{dz}{iz\left(1+\alpha\dfrac{z^2-1}{2iz}\right)} = \frac{2}{\alpha}\oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^2+\dfrac{2i}{\alpha}z-1}. \tag{3.23}$$

Поскольку корнями знаменателя $z^2+\dfrac{2i}{\alpha}z-1$ являются

$$z_1 = -\frac{i}{\alpha}\left(1-\sqrt{1-\alpha^2}\right) \text{ и } z_2 = -\frac{i}{\alpha}\left(1+\sqrt{1-\alpha^2}\right), \tag{3.24}$$

то интеграл (3.23) перепишется в виде

$$I = \frac{2}{\alpha}\oint_{|z|=1} \frac{dz}{(z-z_1)(z-z_2)}.$$

Так как $|z_1 \cdot z_2| = 1$, то из выражений (3.24) видно, что $|z_2|>1$, тогда $|z_1|<1$. Так что только полюс $z = z_1$ подынтегральной функции $f(z) = \dfrac{1}{(z-z_1)(z-z_2)}$ лежит внутри круга $|z|\le 1$.

$$\operatorname*{Res}_{z=z_1} f(z) = \lim_{z\to z_1}(z-z_1)\frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)} = \lim_{z\to z_1}\frac{1}{z-z_2} = \frac{1}{z_1-z_2} = \frac{\alpha}{2i\sqrt{1-\alpha^2}}.$$

Поэтому, согласно формуле (3.21),

$$I = \frac{2}{\alpha}2\pi i \operatorname*{Res}_{z=z_1} f(z) = \frac{2\pi}{\sqrt{1-\alpha^2}}.$$

2.3. Вычисление несобственных интегралов

С помощью вычетов вычисляются также некоторые несобственные интегралы от функций действительной переменной вида

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx.$$

В этом случае поступают так: берут замкнутую область, ограниченную отрезком действительной оси $[-R, R]$ и полуокружностью C_R с цен-

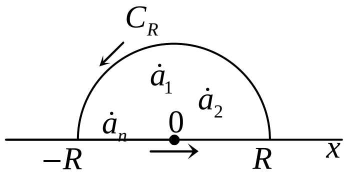


Рис. 3.3

тром в начале координат (рис. 3.3), и в ней вместо функции $f(x)$ рассматривают функцию $f(z)$.

Пусть функция $f(z)$ является аналитической на действительной оси, а выше действительной оси она имеет лишь конечное число особых точек a_1, a_2, …, a_n. Тогда при достаточно большом R все особые точки функции $f(z)$ будут лежать внутри области, ограниченной дугой C_R и отрезком прямой $[-R,R]$.

Согласно основной теореме о вычетах,

$$\oint_C f(z)dz = \int_{-R}^{R} f(x)dx + \int_{C_R} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=a_k} f(z), \tag{3.25}$$

причем *вычеты берутся относительно всех особых точек функции* $f(z)$, *лежащих выше действительной оси.*

Если в некоторых случаях окажется, что при $R \to \infty$ интеграл $\int_{C_R} f(z)dz$ стремится к нулю, то из соотношения (3.25) в пределе получают

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=a_k} f(z). \tag{3.26}$$

Следующие две леммы позволяют отбросить интеграл $\int_{C_R} f(z)dz$ в соотношении (3.25) при переходе к пределу при $R \to \infty$.

Лемма 1. *Интеграл по верхней полуокружности* $\int_{C_R} f(z)dz$ *стремится к нулю при* $R \to \infty$, *если при* $|z| \to \infty$ *к нулю стремится произведение подынтегральной функции на* z, *т. е.*

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)dz = 0,$$

если

$$\lim_{|z|\to\infty} f(z)\cdot z = 0.$$

Доказательство. Действительно, т. к. уравнение полуокружности C_R имеет вид $z = Re^{i\varphi}$, где $0 \le \varphi \le \pi$, то

$$\int_{C_R} f(z)dz = \int_0^{\pi} f\left(Re^{i\varphi}\right) Ri e^{i\varphi} d\varphi.$$

Оценим этот интеграл. Так как $\lim\limits_{|z|\to\infty} z\cdot f(z)=0$, то для всякого сколь угодно малого $\varepsilon>0$ найдется N такое, что для $|z|>N$ будет справедливо неравенство $|z\cdot f(z)|\le\varepsilon$. Значит, если $|z|=R>N$, то

$$|z\cdot f(z)|=\left|f\left(Re^{i\varphi}\right)Re^{i\varphi}\right|\le\varepsilon,$$

и поэтому

$$\left|\int\limits_{C_R} f(z)dz\right|\le\varepsilon\int\limits_0^{\pi}d\varphi=\varepsilon\pi,$$

то есть $\int\limits_{C_R} f(z)dz$ при достаточно большом R может быть сделан сколь угодно малым числом, и

$$\lim_{R\to\infty}\int\limits_{C_R} f(z)dz=0.$$

Если $f(z)$ – рациональная функция, т. е. $f(z)=\dfrac{P_n(z)}{Q_m(z)}$, и разность степеней знаменателя и числителя $m-n>1$, то лемма 1 всегда имеет место.

Лемма 2 (Лемма Жордана). *Интеграл по верхней полуокружности* $\int\limits_{C_R} e^{imz}F(z)dz$, *где* $m>0$, *стремится к нулю при* $R\to\infty$, *если функция* $F(z)$ *стремится к нулю при* $|z|\to\infty$ *равномерно по* φ $(0\le\varphi\le\pi)$.

Доказательство. Уравнение дуги C_R

$$z=Re^{i\varphi}=R(\cos\varphi+i\sin\varphi),\ (0\le\varphi\le\pi).$$

Тогда

$$\int\limits_{C_R} e^{imz}F(z)dz=\int\limits_0^{\pi}F\left(Re^{i\varphi}\right)e^{imR(\cos\varphi+i\sin\varphi)}\cdot Rie^{i\varphi}d\varphi.$$

Так как при α действительном $\left|e^{i\alpha}\right|=1$, то в подынтегральном выражении $\left|e^{imR\cos\varphi}\right|=1$, $\left|e^{i\varphi}\right|=1$. По условию $F(z)\to 0$ равномерно по φ при $|z|\to\infty$, поэтому для всякого $\varepsilon>0$ найдется N такое, что при $|z|=R>N$ будет $|F(z)|=\left|F\left(Re^{i\varphi}\right)\right|<\varepsilon$ для всех φ из $[0,\pi]$. Следовательно, при $R>N$

$$\left|\int\limits_{C_R} F(z)e^{imz}dz\right|\le\varepsilon R\int\limits_0^{\pi}e^{-mR\sin\varphi}d\varphi.$$

Но $\sin\varphi$ при изменении φ от 0 до $\frac{\pi}{2}$ и от $\frac{\pi}{2}$ до π принимает одни и те же значения, поэтому

$$\int_0^{\pi/2} e^{-mR\sin\varphi}d\varphi = \int_{\pi/2}^{\pi} e^{-mR\sin\varphi}d\varphi$$

и

$$\left|\int_{C_R} F(z)e^{imz}dz\right| \le 2\varepsilon R\int_0^{\pi/2} e^{-mR\sin\varphi}d\varphi. \tag{3.27}$$

Интеграл в правой части выражения (3.27) элементарно не берется. Оценим его, упростив подынтегральную функцию. Для этого воспользуемся неравенством

$$\sin\varphi \ge \frac{2}{\pi}\varphi \text{ при } 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}. \tag{3.28}$$

Для доказательства справедливости этого неравенства рассмотрим производную

$$\left(\frac{\sin\varphi}{\varphi}\right)' = \frac{\varphi\cos\varphi - \sin\varphi}{\varphi^2} = \frac{\cos\varphi(\varphi - \operatorname{tg}\varphi)}{\varphi^2}.$$

Из того, что при $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$ $\cos\varphi > 0$, $\varphi \le \operatorname{tg}\varphi$, следует, что в первой четверти эта производная отрицательна. Значит, $\frac{\sin\varphi}{\varphi}$ убывает при $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$, принимая наименьшее значение при угле $\frac{\pi}{2}$, т. е. $\frac{\sin\varphi}{\varphi} \ge \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}}$, а отсюда $\sin\varphi \ge \frac{2}{\pi}\varphi$. Воспользовавшись неравенством (3.28), из выражения (3.27) находим

$$\left|\int_{C_R} F(z)e^{imz}dz\right| \le 2\varepsilon R\int_0^{\pi/2} e^{-mR2\varphi/\pi}d\varphi = 2\varepsilon R\left.\frac{e^{-mR2\varphi/\pi}}{-mR2/\pi}\right|_0^{\pi/2} = \frac{\pi\varepsilon}{m}\left(1 - e^{-mR}\right) < \frac{\pi\varepsilon}{m},$$

ибо при $m > 0$ $e^{-mR} \to 0$ при $R \to \infty$.

Так как произведение ограниченной величины $\frac{\pi}{m}$ на бесконечно малую есть бесконечно малая величина, то, очевидно, и

$$\int_{C_R} F(z)e^{imz}dz \to 0 \text{ при } R \to \infty.$$

Таким образом, *если:*

1) функция $f(z)$ *на действительной оси особых точек не имеет;*

2) в верхней полуплоскости имеется конечное число изолированных особых точек $f(z)$*;*

3) $\lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_{C_R} f(z)dz = 0$,

то справедлива формула (3.26)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=a_k} f(z),$$

где вычеты берутся относительно всех особых точек функции $f(z)$*, расположенных в верхней полуплоскости.*

Лемма Жордана используется при вычислении несобственных интегралов от произведения рациональной дроби на синус или косинус кратного аргумента, т. е. интегралов вида

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} F(x)\cos mx dx$$

или

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} F(x)\sin mx dx.$$

Пример 1. Вычислить интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos x}{x^2 - 2x + 10}dx$.

Решение. При вычислении интегралов такого типа поступают следующим образом. Вводят функцию комплексного переменного так, чтобы, с одной стороны, можно было воспользоваться леммой Жордана, а с другой – чтобы данный интеграл был действительной или мнимой частью вновь полученного интеграла от функции комплексной переменной. После этого на основании условия равенства двух комплексных чисел находят величину требуемого интеграла, содержащего синус или косинус.

В нашем примере введем функцию $f(z)=\dfrac{ze^{iz}}{z^2-2z+10}$. Здесь $m=1$ и $F(z)=\dfrac{z}{z^2-2z+10}$.

Функция $f(z)$, что нетрудно проверить, удовлетворяет условиям леммы Жордана. Особыми точками для нее являются полюса первого порядка $z=1+3i$ и $z=1-3i$. В верхней полуплоскости находится лишь одна из этих точек: $z=1+3i$.

Согласно формуле (3.8),

$$\operatorname*{Res}_{z=1+3i} f(z)=\left.\frac{ze^{iz}}{\left(z^2-2z+10\right)'}\right|_{z=1+3i}=\frac{(1+3i)e^{-3+i}}{6i}.$$

Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xe^{ix}}{x^2-2x+10}dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\cos x}{x^2-2x+10}dx+i\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin x}{x^2-2x+10}dx=$$

$$=2\pi i\operatorname*{Res}_{z=1+3i} f(z)=2\pi i\frac{(1+3i)e^{-3+j}}{6i}=\frac{\pi}{3}(1+3i)e^{-3}(\cos 1+i\sin 1)=$$

$$=\frac{\pi}{3}e^{-3}(\cos 1-3\sin 1)+i\frac{\pi}{3}e^{-3}(3\cos 1+\sin 1).$$

Приравнивая теперь действительную часть левой части последнего равенства к действительной части правой, получим требуемое:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\cos x}{x^2-2x+10}dx=\frac{\pi}{3}e^{-3}(\cos 1-3\sin 1).$$

Попутно нами вычислен и интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin x}{x^2-2x+10}dx=\frac{\pi}{3}e^{-3}(3\cos 1+\sin 1).$$

При вычислении интеграла $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ с помощью лемм 1 и 2 предполагалось, что на действительной оси особых точек функции $f(z)$ нет. Если бы это было не так, то указанный интеграл мог бы не существовать.

Однако если $f(z)$ имеет на действительной оси конечное число *простых полюсов, то* $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ в смысле главного значения существует и может быть вычислен с помощью теории вычетов. Имеет место следующая теорема.

Теорема. *Если функция* $f(z)$ *удовлетворяет трем условиям:*

1) $f(z)=e^{imz}F(z)$, *где* $m>0$ *и* $F(z)\to 0$ *при* $|z|\to\infty$ *равномерно по* φ *для* $\operatorname{Im} z \geq 0$*;*

2) $f(z)$ *на действительной оси имеет конечное число простых полюсов* $x_1,\ x_2, \ldots,\ x_m$*;*

3) $f(z)$ *аналитична в верхней полуплоскости всюду, за исключением конечного числа особых точек* $a_1,\ a_2, \ldots, a_n$, *то*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i\left[\sum_{i=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=a_i} f(z) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} \operatorname*{Res}_{z=x_k} f(z)\right]. \qquad (3.29)$$

Пример 2. Вычислить интеграл Дирихле $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$.

Решение. Рассмотрим $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx$.

Введем функцию $f(z)=\frac{e^{iz}}{z}$. Здесь $m=1$, $F(z)=\frac{1}{z}\to 0$ при $|z|\to\infty$. Для $f(z)$ точка $z=0$ – простой полюс, расположенный на действительной оси. Других особых точек нет.

Поэтому на основании формулы (3.29) получим

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx = \pi i \operatorname*{Res}_{z=0}\left(\frac{e^{iz}}{z}\right) = \pi i \lim_{z\to 0}\left(z\frac{e^{iz}}{z}\right) = \pi i .$$

Но $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, поэтому

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\cos x}{x} + i\frac{\sin x}{x}\right)dx = \pi i .$$

В силу определения равенства двух комплексных чисел имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x} dx = 0, \text{ а } \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi .$$

Так как $\dfrac{\sin x}{x}$ – четная функция, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = 2\int_{0}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi,$$

откуда

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Так как $\dfrac{\cos x}{x}$ – нечетная функция, то об интеграле $\int_{0}^{\infty} \dfrac{\cos x}{x} dx$ по $\int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{\cos x}{x} dx = 0$ ничего определенного нельзя сказать.

Пример 3. Вычислить интегралы Френеля

$$\int_{0}^{\infty} \cos\left(x^2\right) dx \text{ и } \int_{0}^{\infty} \sin\left(x^2\right) dx.$$

Решение. Рассмотрим вспомогательную функцию $f(z) = e^{iz^2}$. При $z = x$ $\quad e^{iz^2} = e^{ix^2} = \cos\left(x^2\right) + i\sin\left(x^2\right)$, т. е. подынтегральные функции $\cos\left(x^2\right)$ и $\sin\left(x^2\right)$ являются соответственно действительной и мнимой частями вспомогательной функции.

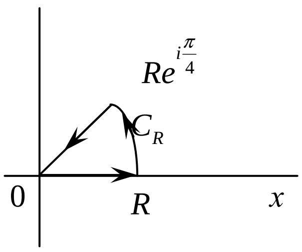


Рис. 3.4

Интегрирование проведем по замкнутому контуру C (рис. 3.4), состоящему из отрезка действительной оси от 0 до R, дуги C_R окружности $|z| = R$, взятой от точки $z = R$ до точки $z = Re^{i\frac{\pi}{4}} = R\sqrt{i}$, и отрезка прямой от $z = R\sqrt{i}$ до точки $z = 0$.

Так как функция $f(z) = e^{iz^2}$ аналитична в замкнутой области, ограниченной указанным контуром C, то по теореме Коши

$$\oint_{C} e^{iz^2} dz = \int_{0}^{R} e^{ix^2} dz + \int_{C_R} e^{iz^2} dz + \int_{R\sqrt{i}}^{0} e^{iz^2} dz = 0. \tag{3.30}$$

Исследуем соотношение (3.30) при $R \to \infty$. Для оценки интеграла $\int\limits_{C_R} e^{iz^2} dz$ положим $z = \sqrt{\omega}$, $dz = \dfrac{d\omega}{2\sqrt{\omega}}$. Тогда

$$\int\limits_{C_R} e^{iz^2} dz = \frac{1}{2} \int\limits_{C_R} e^{i\omega} \frac{d\omega}{\sqrt{\omega}}.$$

По лемме Жордана

$$\lim_{R\to\infty} = \frac{1}{2} \int\limits_{C_R} e^{i\omega} \frac{d\omega}{\sqrt{\omega}} = 0,$$

следовательно, и

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{C_R} e^{iz^2} dz = 0. \tag{3.31}$$

Для вычисления $\int\limits_{R\sqrt{i}}^{0} e^{iz^2} dz$ положим $z = \sqrt{i}r$, $dz = \sqrt{i}dr$. Тогда

$$\int\limits_{R\sqrt{i}}^{0} e^{iz^2} dz = \int\limits_{R}^{0} e^{-r^2} \sqrt{i} dz = -\sqrt{i} \int\limits_{0}^{R} e^{-r^2} dr.$$

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{R\sqrt{i}}^{0} e^{iz^2} dz = \lim_{R\to\infty} \left[-\sqrt{i} \int\limits_{0}^{R} e^{-r^2} dr \right] = -\sqrt{i} \int\limits_{0}^{\infty} e^{-r^2} dr = -\frac{\sqrt{i}}{2}\sqrt{\pi}, \tag{3.32}$$

где $\int\limits_{0}^{\infty} e^{-r^2} dr = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ – известный интеграл Пуассона.

Таким образом, из соотношения (3.30), согласно равенствам (3.31) и (3.32), при $R \to \infty$ получим

$$\int\limits_{0}^{\infty} e^{ix^2} dx - \frac{\sqrt{i}}{2}\sqrt{\pi} = 0,$$

откуда

$$\int\limits_{0}^{\infty} e^{ix^2} dx = \int\limits_{0}^{\infty} \cos\left(x^2\right) dx + i \int\limits_{0}^{\infty} \sin\left(x^2\right) dx = \frac{\sqrt{i}}{2}\sqrt{\pi} =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} + i\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}.$$

Сравнивая действительные и мнимые части, получим оба искомых интеграла

$$\int\limits_{0}^{\infty} \cos\left(x^2\right) dx = \int\limits_{0}^{\infty} \sin\left(x^2\right) dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Упражнения к § 2

1. Используя результаты упражнения 1 к §1, гл. 3, получить значения следующих интегралов:

1) $\int\limits_{|z-1|=2} \frac{\cos z}{z^3}dz$; 2) $\int\limits_{|z|=3} \frac{e^{-z}}{z^2}dz$; 3) $\int\limits_{|z|=1,5} \frac{1}{1-z^2}dz$.

2. Вычислить $\int\limits_{|z+0,5|=3} \frac{z-2}{z(z-1)}dz$.

3. Найти значение $\int\limits_C \frac{z+1}{(z-2)^2}dz$, где:

1) C – окружность $|z|=1$; 2) C – окружность $|z|=3$.

4. Вычислить $\int\limits_C \frac{dz}{(z+2)(z-1)}$, если C – окружность $x^2+y^2=2x+2y$.

5. Вычислить $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{\alpha+\cos t}$ при $\alpha>1$.

6. Показать, что $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{(1+\alpha\cos t)^2} = \frac{2\pi}{\left(1-\alpha^2\right)^{3/2}}$ при $0<\alpha<1$.

7. Показать, что:

1) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{\pi}{2}$; 2) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^3}dx = \frac{\pi}{4}$.

8. Вычислить:

1) $\int\limits_0^{\infty} \frac{\cos\alpha x}{1+x^2}dx$ при $\alpha\ge 0$; 2) $\int\limits_0^{\infty} \frac{\cos x}{\left(1+x^2\right)^2}dx$.

ЧАСТЬ 2. ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Глава 4. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА И ЕГО СВОЙСТВА

§1. Преобразование Лапласа

1.1. Вводные замечания

Операционное исчисление – раздел математического анализа, метод которого позволяет в ряде случаев посредством простых правил решать сложные задачи. В основе метода лежит идея замены изучаемых функций (оригиналов) некоторыми другими функциями (изображениями), получаемыми из первых по определенным правилам. Операционное исчисление очень удобно для расчетов в механике, автоматике, электротехнике и других областях.

Для развития операционного исчисления большое значение имели труды английского инженера, физика и математика О. Хевисайда (1850 – 1925).

В рассматриваемой задаче требуется определить функцию $f(t)$ действительной переменной из некоторого уравнения, содержащего эту функцию под знаком производных и интегралов. Суть операционного метода для решения данного класса задач состоит в следующем:

1) от искомой функции $f(t)$ переходят к функции $F(p)$ – так называемому изображению $f(t)$;

2) над функцией $F(p)$ производят операции, соответствующие заданным операциям над $f(t)$, т. е. получают вместо исходного уравнения так называемое операционное уравнение (алгебраическое) уже относительно $F(p)$. При этом операции над $F(p)$ оказываются более простыми: дифференцированию соответствует умножение на переменную p, интегрированию – деление на p и т.д.;

3) полученное уравнение решают относительно $F(p)$ как алгебраическое уравнение;

4) от найденного изображения $F(p)$ переходят к функции $f(t)$, которая является искомой функцией.

Применение операционного метода можно сравнить в определенной мере с логарифмированием, где сначала от чисел переходят к логарифмам (логарифмирование), над логарифмами производят действия, соответствующие действиям над числами (умножению чисел соответствует более простая операция сложения логарифмов, делению – вычитание логарифмов и т.д.), а затем от найденного логарифма снова переходят к числу (потенцирование).

Так же как и при логарифмировании при использовании операционного метода нужны: а) таблица оригиналов и соответствующих им изображений; б) знание правил выполнения операций над изображением, соответствующих действиям, производимым над оригиналом.

1.2. Оригинал и изображение

Основными базисными понятиями операционного исчисления являются понятия функции-оригинала, функции-изображения и преобразования Лапласа.

Пусть $f(t)$ – действительная функция действительной переменной t. Функция $f(t)$ называется *оригиналом,* если она удовлетворяет следующим условиям:

1) $f(t) \equiv 0$ при $t < 0$;

2) функция $f(t)$ непрерывна вместе со своими производными достаточно высокого порядка на всей оси Ot, за исключением, быть может, конечного числа точек разрыва первого рода на каждом интервале конечной длины;

3) $f(t)$ возрастает не быстрее некоторой показательной функции, т.е. существуют постоянные $M > 0$ и $S_0 \geq 0$ такие, что для всех $t > 0$

$$\left| f(t) \right| \leq Me^{S_0 t}. \qquad (4.1)$$

Число S_0 называется *показателем роста* функции $f(t)$. Совокупность всех оригиналов $f(t)$ называется пространством оригиналов. Отметим, что для большинства функций, описывающих различные процессы, условия 1) – 3) выполняются, т. к. каждое из условий 1) – 3) имеет под собой конкретное физическое содержание, согласованное с математическими понятиями: начало некоторого процесса $t = 0$ (условие 1), существование интегралов (условие 2), ограниченность функции (некоторого процесса) (условие 3).

Функция $f(t)$ может иметь вид $f(t) = f_1(t) + if_2(t)$ – комплексная функция действительного переменного; в этом случае функция $f(t)$ – оригинал, если $f_1(t)$ и $f_2(t)$ – оригиналы.

Пример 1. Установить, являются ли оригиналами следующие функции:

1) $f(t)=1(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ 1, & t>0;\end{cases}$ 4) $f(t)=\dfrac{1}{t}$; 7) $f(t)=2e^{t^2}$.

2) $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ 4, & t>0;\end{cases}$ 5) $f(t)=\operatorname{tg}t$;

3) $f(t)=t^2$; 6) $f(t)=e^{2t}$;

Решение: 1) Отметим, что данная функция называется функцией Хевисайда. Она является оригиналом, т. к. она удовлетворяет всем условиям 1) – 3) определения. В качестве S_0 выбираем $S_0=0$, а $M\geq 1$.

Отметим, что если $\varphi(t)$ некоторая функция, удовлетворяющая условиям 2) и 3), то функция

$$f(t)=\varphi(t)\cdot 1(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ \varphi(t), & t>0,\end{cases}$$

будет оригиналом.

Замечание 1. Для простоты записи, как правило, множитель $1(t)$ опускают, условившись, что все рассматриваемые функции равны нулю для отрицательных t, так вместо $e^{2t}\cdot 1(t)$ будем писать просто e^{2t}.

2) $f(t)$ является оригиналом, т. к. $f(t)=4\cdot 1(t)$ и функция $\varphi(t)=4$ удовлетворяет условиям 2) и 3) (см. пример 1).

3) $f(t)=t^2$ удовлетворяет условиям 1) и 2). Для условия 3) имеем

$$t^2\leq 2(1+t+\frac{t^2}{2})\leq 2e^t.$$

Таким образом, данная функция является оригиналом.

4) Функция $f(t)=\dfrac{1}{t}$ не является оригиналом, т. к. она имеет разрыв второго рода в точке $t=0$.

5) Функция $f(t)=\operatorname{tg}t$ не является оригиналом, т. к. в точках $t=\dfrac{\pi}{2}+\pi n$ $(n=0,1,2...)$ она имеет разрывы второго рода.

6) Функция $f(t)=e^{2t}$ удовлетворяет условиям 1), 2) и, т. к. справедливо неравенство $e^{2t}\le 2e^{2t}$ $\left(M=2;\ S_0=2\right)$, то выполняется и условие 3), а это означает, что данная функция – оригинал.

7) Функция $f(t)=e^{t^2}$ удовлетворяет условиям 1) и 2). Поскольку неравенство $e^{t^2}\le Me^{S_0t}$ ни при каких значениях $M>0$ и $S_0\ge 0$ не выполняется, то условие 3) не имеет места, а следовательно, данная функция не является оригиналом.

Используют и другое определение оригинала: *оригиналом* называется комплекснозначная функция $f(t)$, непрерывная на интервале $0\le t<+\infty$, если существует действительное число S_0 (показатель роста функции $f(t)$) такое, что интеграл

$$I=\int_0^{+\infty}e^{-st}\left|f(t)\right|dt$$

сходится при $S>S_0$ и расходится при $S<S_0$.

Если рассматриваемый интеграл сходится при всех действительных S, то показатель роста функции $f(t)$ считают равным $S_0=-\infty$; если же он расходится при всех действительных S, то полагают $S_0=+\infty$.

Определение оригинала $f(t)$ на интервале $0\le t<+\infty$ продолжают и для $-\infty<t<0$, полагая $f(t)=0$ при $t<0$.

Пример 2. Установить, являются ли оригиналами функции

1) $f(t)=\begin{cases}1, & t>0,\\ 0, & t<0;\end{cases}$ 3) $f(t)=e^{(3+4i)t}$;

2) $f(t)=\dfrac{1}{t}$; 4) $f(t)=e^{t^2}$.

Решение: 1) Применим второе определение оригинала, имеем

$$I=\int_0^{+\infty}e^{-st}\left|f(t)\right|dt=\int_0^{+\infty}e^{-st}dt=-\frac{1}{s}e^{-st}\Bigg|_0^{+\infty}=\frac{1}{s},$$

при $s>0$, т. к. $e^{-st}\to 0$ при $t\to+\infty$; при $s\le 0$ интеграл расходится. Значит, данная функция является оригиналом с показателем роста $S_0=0$.

2) В данном случае интеграл I имеет вид

$$I=\int_0^{+\infty}e^{-st}\frac{dt}{t}.$$

При $s \geq 0$ $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{e^{-st} \cdot \frac{1}{t}}{\frac{1}{t}} = 1$, тогда в силу признака сравнения для несобственных интегралов, данный интеграл расходится, как и интеграл $\int\limits_{0}^{+\infty} \dfrac{dt}{t}$. Будет расходиться интеграл I и при $s < 0$. Значит функция $f(t) = \dfrac{1}{t}$ не является оригиналом.

3) В данном случае интеграл I примет вид

$$I = \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-st} \left| f(t) \right| dt = \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-st} \left| e^{(3+4i)t} \right| dt = \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-st} e^{3t} \left| e^{4it} \right| dt =$$

$$\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-st} e^{3t} \left| \cos 4t + i \sin 4t \right| dt = \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-st} e^{3t} \sqrt{\cos^2 4t + \sin^2 4t}\, dt = \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-(s-3)t} dt.$$

Последний интеграл сходится при $S - 3 > 0$, т. е при $S > 3$, и расходится при $S \leq 3$; данная функция – оригинал с показателем роста $S_0 = 3$.

4) В данном случае интеграл I примет вид

$$I = \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-st} \left| f(t) \right| dt = \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-st} \cdot e^{t^2} dt.$$

При достаточно большом t и при любом фиксированном s

$$\frac{e^{t^2}}{e^{st}} > 1,$$

поэтому интеграл I расходится при любом s. Следовательно, функция $f(t) = e^{t^2}$ не является оригиналом $(S_0 = +\infty)$.

Пусть функция $f(t)$ является оригиналом. Функция $F(p)$ комплексной переменной $p = s + i\tau$, определяемая интегралом

$$F(p) = \int\limits_{0}^{\infty} f(t) e^{-pt} dt, \tag{4.2}$$

называется *изображением оригинала* $f(t)$.

Для обозначения того, что $F(p)$ является изображением $f(t)$, мы будем использовать символ $\div$, т. е. будем записывать

$$f(t) \div F(p).$$

Операцию перехода от оригинала $f(t)$ к изображению $F(p)$, определяемую равенством (4.2), называют *интегральным преобразованием Лапласа.*

Если $f(t)$ – оригинал, то требуется выяснить, в какой области комплексной плоскости функция $F(p)$ является определенной, т.е. в какой области интеграл Лапласа (4.2) сходится. На этот вопрос дает ответ следующая теорема.

Теорема (существование изображения). *Для всякого оригинала* $f(t)$ *изображение* $F(p)$ *существует (определено) в полуплоскости* $\operatorname{Re} p = s > S_0$*, где* S_0 *– показатель роста функции* $f(t)$*, и является в этой полуплоскости аналитической функцией.*

Доказательство. Пусть $p = s + i\tau$ – произвольная точка полуплоскости $\operatorname{Re} p = s > S_0$. Используя свойство, что абсолютная величина интеграла не больше интеграла абсолютной величины, и

$$\left|e^{-pt}\right| = \left|e^{-st} \cdot e^{-i\tau t}\right| = e^{-st} \cdot \left|\cos(-\tau t) + i\sin(-\tau t)\right| = e^{-st},$$

покажем, что интеграл (4.2) абсолютно сходится, т.к. его можно оценить сверху сходящимся интегралом при выполнении условия $\operatorname{Re} p = s > S_0$.

Действительно, имеем

$$\left|F(p)\right| = \left|\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt\right| \le \int_0^{+\infty} \left|e^{-pt} f(t)\right|dt \le M\int_0^{+\infty} e^{-st} \cdot e^{S_0 t}dt =$$

$$= M \lim_{b\to+\infty} \int_0^b e^{-(s-S_0)t}dt = M \cdot \lim_{b\to+\infty} \left.\frac{e^{-(s-S_0)t}}{-(s-S_0)}\right|_0^b =$$

$$= \frac{M}{-(s-S_0)} \lim_{b\to+\infty} (e^{-(s-S_0)b} - 1) = \frac{M}{s-S_0},$$

а это значит, что интеграл Лапласа (4.2) абсолютно сходится при $\operatorname{Re} p = s > S_0$. Таким образом, изображение $F(p)$ существует и однозначно в полуплоскости $\operatorname{Re} p = s > S_0$, что и требовалось доказать.

Доказательство того, что $F(p)$ будет аналитической функцией в полуплоскости $\operatorname{Re} p = s > S_0$, т. е. дифференцируемой в каждой точке соответствующей полуплоскости, из-за его сложности приводить здесь не будем. Этот факт можно устанавливать всякий раз по конкретному выражению $F(p)$.

Замечание 2. С геометрической точки зрения теорему 1 можно истолковать следующим образом: если в плоскости комплексной переменной $p = s + i\tau$ через точку $s = S_0$ действительной оси провести прямую, параллельную мнимой оси, то интеграл Лапласа (4.2) будет абсолютно сходиться в полуплоскости, расположенной справа от построенной прямой (рис. 4.1). Функция $F(p)$ в этой правой полуплоскости будет аналитической (все особые точки функции $F(p)$ лежат левее прямой $s = S_0$ или на этой прямой). Таким образом, только действительная часть p решает сходимость интеграла Лапласа; мнимая часть совсем не имеет значения (см. доказательство теоремы 1).

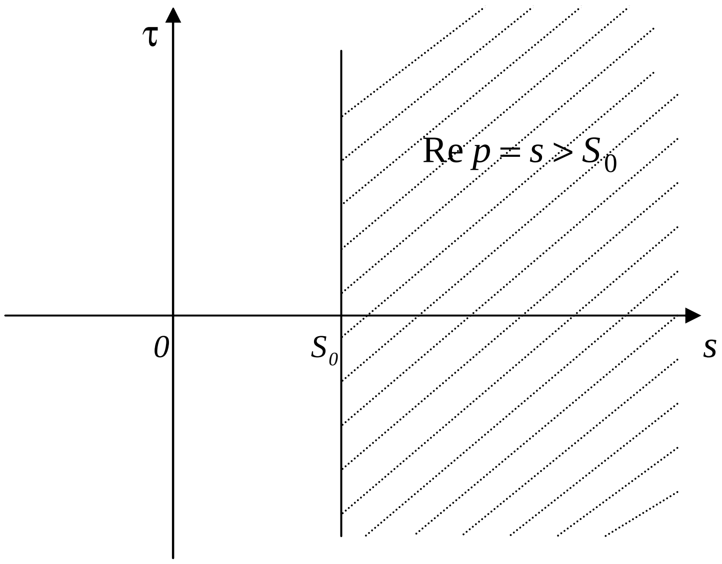


Рис. 4.1

Следствие (поведение изображения $F(p)$ на бесконечности). *Если функция $F(p)$ является изображением оригинала $f(t)$, то $F(p) \to 0$ при* $\operatorname{Re} p = s \to +\infty$ *или* $\lim\limits_{\operatorname{Re} p = s \to +\infty} F(p) = 0$.

Доказательство. При доказательстве теоремы 1 было установлено, что

$$|F(p)| \le \frac{M}{s - S_0},$$

но так как

$$\lim_{s \to +\infty} \frac{M}{s - S_0} = 0,$$

то $\lim\limits_{\operatorname{Re} p = s \to +\infty} F(p) = 0$, что и требовалось доказать.

Таким образом, стремление к нулю $F(p)$ при $\operatorname{Re} p = s \to +\infty$ есть необходимое условие изображения. Однако из стремления $F(p)$ к нулю при $\operatorname{Re} p = s \to +\infty$ не следует, что $F(p)$ является изображением.

Например, функция $e^{-p} \to 0$ при $\operatorname{Re} p = s \to +\infty$, но не существует функции $f(t)$, для которой e^{-p} было бы изображением.

Пример 3. Найти изображения следующих функций:

1) $1(t) = \begin{cases} 1, \ t \ge 0, \\ 0, \ t < 0; \end{cases}$ 2) $f(t) = e^{3t}$; 3) $f(t) = t$; 4) $f(t) = \sin t$.

Решение: 1) Данная функция является оригиналом, т. к. все требования для этого выполнены; показатель роста $S_0 = 0$ и интеграл (4.2) сходится для всех p, у которых $\operatorname{Re} p = s > 0$, т. е.

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} \cdot 1dt = \lim_{b \to +\infty} \int_0^b e^{-pt} dt = -\lim_{b \to +\infty} \frac{e^{-pt}}{p} \Bigg|_{t=0}^{t=b} = -\lim_{b \to +\infty} \frac{1}{p}\left(e^{-pb} - 1\right) = \frac{1}{p}.$$

Таким образом, $1(t) \div \frac{1}{p}$ при $\operatorname{Re} p = s > 0$.

2) Данная функция является оригиналом с показателем роста $S_0 = 3$. Тогда

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} e^{3t} at = \lim_{b \to +\infty} \int_0^b e^{-(p-3)t} dt = -\lim_{b \to +\infty} \frac{e^{-(p-3)t}}{p-3} \Bigg|_{t=0}^{t=b} =$$

$$= \frac{-1}{p-3} \cdot \lim_{b \to +\infty} \left(e^{-(p-3)b} - 1\right) = \frac{1}{p-3},$$

таким образом,

$$e^{3t} \div \frac{1}{p-3} \text{ при } \operatorname{Re} p = s > 3.$$

3) Данная функция является оригиналом с показателем роста $S_0 = 0$. Интегрируя по частям один раз при $\operatorname{Re} p = s > 0$, получим

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} \cdot tdt = \lim_{b \to +\infty} \int_0^b te^{-pt} dt =$$

$$= \left| \begin{matrix} u = t; \ du = dt \\ dv = e^{-pt}dt; \ v = \dfrac{e^{-pt}}{-p} \end{matrix} \right| = \lim_{b \to +\infty} \left(-\frac{t}{p} e^{-pt} \Bigg|_{t=0}^{t=b} - \frac{1}{p^2} e^{-pt} \Bigg|_{t=0}^{t=b} \right) = \frac{1}{p^2}.$$

Таким образом,

$$t \div \frac{1}{p^2} \text{ при } \operatorname{Re} p = s > 0.$$

4) Данная функция является оригиналом с показателем роста $S_0 = 0$. Интегрируя по частям дважды (циклическое интегрирование), получим

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} \sin t dt = \frac{1}{p^2+1}.$$

Таким образом,

$$\sin t \div \frac{1}{p^2+1} \text{ при } \operatorname{Re} p = s > 0.$$

Упражнения к §1

1. Проверить, какие из функций являются оригиналами:

1) $f(t) = a^t, a > 0, a \neq 1$;

2) $f(t) = \dfrac{1}{t-4}$;

3) $f(t) = e^{(3+4i)t}$;

4) $f(t) = \operatorname{tg} t$;

5) $f(t) = t^t$;

6) $f(t) = e^{-t^2}$;

7) $f(t) = \dfrac{1}{t^2+4}$;

8) $f(t) = t \sin \dfrac{1}{t}$;

9) $f(t) = \sin(2-i)t$;

10) $f(t) = e^{\frac{1}{(i-1)^2}}$.

2. Может ли функция $F(p)$ служить изображением некоторого оригинала:

1) $F(p) = \dfrac{1}{\cos p}$;

2) $F(p) = \dfrac{1}{\sin p}$.

§2. Свойства преобразования Лапласа

Процесс практического применения преобразования Лапласа сродни в определенной мере процессу перевода с одного языка на другой. Так, процесс перевода с одного языка на другой начнется с составления словаря наиболее употребляемых (или незнакомых) слов, в котором каждому слову одного языка соответствует определенное слово другого языка. Но для успешного перевода этого недостаточно, необходимо обладать не только определенным словарным запасом, но и знанием грамматических правил.

В операционном исчислении сначала переводим поставленную задачу для переменной t, в новую задачу, изложенную уже на «языке» переменной p. Роль словаря, необходимого для перевода с одного языка (t – переменная) на другой (p – переменная), при преобразовании Лапласа выполняет либо таблица приложений, в которой установлены соотношения между оригиналами и их изображениями, либо непосредственное нахождение изображений по оригиналу (в процессе перевода с одного языка на другой такое практически невозможно). «Грамматика» здесь также необходима, ибо мы обязательно должны знать, какую операцию нужно произвести над изображением, если оригинал дифференцируют или интегрируют. Таким же образом, если в пространстве оригиналов несколько функций перемножаются, то в пространстве изображений такой комбинации должна отвечать вполне определенная другая комбинация. Это означает, что необходимо знать не только таблицы оригиналов и их изображений, необходимо знать еще правила отображения тех или иных операций. Для этого рассмотрим свойства преобразования Лапласа.

2.1. Линейность и однородность преобразования Лапласа

Теорема. *Если* $f(t) \div F(p)$ *и* $\varphi(t) \div \Phi(p)$, *тогда*

$$C_1 \cdot f(t) + C_2\varphi(t) \div C_1F(p) + C_2\Phi(p),$$

где C_1 *и* C_2 *– постоянные числа.*

Доказательство.

$$C_1 f(t) + C_2\varphi(t) \div \int_0^{+\infty} (C_1 f(t)e^{-pt} + C_2\varphi(t)e^{-pt})dt =$$

$$= C_1 \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt + C_2 \int_0^{+\infty} \varphi(t)e^{-pt}dt = C_1F(p) + C_2\Phi(p).$$

В качестве примера применения этой теоремы найдем изображение тригонометрических и гиперболических функций.

По формулам Эйлера

$$\sin at = \frac{e^{iat} - e^{-iat}}{2i}, \quad \cos at = \frac{e^{iat} + e^{-iat}}{2}.$$

Зная, что $e^{\alpha t} \div \frac{1}{p-\alpha}$ (см. прил. 4), применяя теорему о линейности и однородности изображения, получим

$$\sin at \div \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p-ia} - \frac{1}{p+ia}\right) = \frac{a}{p^2+a^2},$$

$$\cos at \div \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-ia} + \frac{1}{p+ia}\right) = \frac{p}{p^2+a^2},$$

$$\sin(at+\varphi) = \sin at \cdot \cos\varphi + \cos at \cdot \sin\varphi \div \frac{a\cos\varphi + p\sin\varphi}{p^2+a^2},$$

$$\cos(at+\varphi) \div \frac{p\cos\varphi - a\sin\varphi}{p^2+a^2}.$$

Аналогичным образом, исходя из определения гиперболических функций, и в силу теоремы, имеем

$$\operatorname{sh} at = \frac{e^{at} - e^{-at}}{2}, \quad \operatorname{ch} at = \frac{e^{at} + e^{-at}}{2},$$

следовательно, $\operatorname{sh} at \div \frac{a}{p^2-a^2}$; $\operatorname{ch} at \div \frac{p}{p^2-a^2}$.

Следствие. Изображение суммы конечного числа оригиналов равно сумме их изображений.

2.2. Подобие

Теорема. *Если* $f(t) \div F(p)$, *тогда* $f(at) \div \frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right)$, $a > 0$.

(Почему a должно быть положительным числом?)

Доказательство. Найдем изображение функции $f(at)$.

$$f(at) \div \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(at)dt = \begin{bmatrix} u = at \\ \frac{du}{a} = dt \end{bmatrix} = \frac{1}{a}\int_0^{+\infty} f(u)e^{-\frac{pu}{a}}du = \frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right),$$

т.е. $f(at) \div \frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right)$.

Пример 1. Используя свойства линейности, однородности и подобия, найти изображения оригиналов:

1) $f(t)=\cos t$; 2) $f(t)=\sin t$; 3) $f(t)=e^{at}-1$; 4) $f(t)=\sin 4t\cos 6t$.

Решение: 1) Выразим косинус через показательные функции $\cos t=\dfrac{e^{it}+e^{-it}}{2}$ и, учитывая, что $e^{at}\div\dfrac{1}{p-a}$ $(\operatorname{Re}p>\operatorname{Re}a)$, а также свойство линейности преобразования Лапласа, получим

$$\cos\ t\div\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-i}+\frac{1}{p+i}\right)=\frac{p}{p^2+1},\ \ \operatorname{Re}p>0.$$

2) Аналогичным образом для $\sin t$ имеем

$$\sin t=\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i},\ \sin t\div\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p-i}-\frac{1}{p+i}\right)=\frac{1}{p^2+1},\ \ \operatorname{Re}p>0.$$

3) Для данной функции имеем

$$e^{at}-1\div\frac{1}{p-a}-\frac{1}{p}=\frac{-p+a}{p(p-a)}=\frac{a}{p(p-a)},\ \ \operatorname{Re}p>\operatorname{Re}a.$$

4) Для решения данной задачи представим произведение $\sin 4t\cdot\cos 6t$ в виде разности синусов:

$$\sin 4t\cdot\cos 6t=\frac{1}{2}\left[\sin 10t-\sin 2t\right]$$

и, используя свойства линейности и подобия, получим

$$\sin t\div\frac{1}{p^2+1},\ \text{тогда}\ \ \sin 10t\div\frac{1}{10}\frac{1}{\left(\dfrac{p}{10}\right)^2+1}=\frac{10}{p^2+10^2};$$

$$\sin 2t=\frac{1}{2}\frac{1}{\left(\dfrac{p}{2}\right)^2+1}=\frac{2}{p^2+2^2}.$$

Таким образом,

$$\sin 4t\cdot\cos 6t\div\frac{1}{2}\left[\frac{10}{p^2+10^2}-\frac{2}{p^2+2^2}\right]=\frac{5}{p^2+100}-\frac{1}{p^2+4}.$$

Следствие. Если $f(t)\div F(p)$ и b – положительное число, тогда

$$\frac{1}{b}f\left(\frac{t}{b}\right)\div F(bp).$$

Пример 2. Найти оригинал, изображение которого имеет вид

$$1)\quad F(p)=\frac{7}{p^2+9}+\frac{18p}{p^2+25},\qquad 2)\quad F(p)=\frac{2}{p-2}+\frac{3p}{p^2+4}.$$

Решение: 1) Изображение $F(p)$ представим в виде

$$F(p)=\frac{7}{3}\cdot\frac{3}{p^2+3^2}+18\frac{p}{p^2+5^2},$$

тогда $f(t)=\dfrac{7}{3}\sin 3t+18\cos 5t$.

2) Если $F(p)=2\dfrac{1}{p-2}+3\dfrac{p}{p^2+2^2}$, тогда $f(t)=2e^{2t}+3\cos 2t$.

Упражнения

Используя свойства линейности и подобия найти изображения следующих функций;

1. $f(t)=\sin^2 t$;
2. $f(t)=\sin mt\cos nt$;
3. $f(t)=\cos^3 t$;
4. $f(t)=\sin^4 t$.

2.3. Сдвиг в оригинале

Теорема запаздывания. *Если* $f(t)\div F(p)$ *и* a *– любое положительное число, то* $f(t-a)\div e^{-pa}F(p)$, *т.е. запаздывание оригинала на положительную величину* a *приводит к умножению изображения оригинала без запаздывания на* e^{-pa}.

Доказательство. Найдем изображение функции

$$f(t-a)\div\int_0^{+\infty}e^{-pt}f(t-a)dt=\big[t-a=z,\,dt=dz,\,z\in[-a;+\infty]\big]=$$

$$=\int_{-a}^{+\infty}f(z)e^{-p(z+a)}dz=\int_{-a}^{+\infty}f(z)e^{-pz}\cdot e^{-pa}dz=e^{-pa}\int_{-a}^{+\infty}f(z)e^{-pz}dz=$$

$$=e^{-pa}\int_{-a}^{0}f(z)e^{-pz}dz+e^{-pa}\int_{0}^{+\infty}f(z)e^{-pz}dz=e^{-pa}\int_{0}^{+\infty}f(z)e^{-pz}dz=e^{-pa}F(p).$$

Интеграл $\int\limits_{-a}^{0} f(z)e^{-pz}dz = 0$, т.к. по определению оригинала $f(z) = 0$ для $z < 0, a > 0$.

Таким образом, включение оригинала с запаздыванием на a равносильно умножению изображения на e^{-pa}. Что и требовалось доказать.

Термин «запаздывание» понимаем таким образом: графики функций $f(t-a)$ и $f(t)$ имеют одинаковый вид, но график функции $f(t-a)$ сдвинут вдоль оси Ot вправо на a единиц (см. рис. 4.2), т.е функции $f(t)$ и $f(t-a)$ описывают один и тот же процесс, только процесс, описываемый функцией $f(t-a)$, начинается с опозданием на время $t = a$.

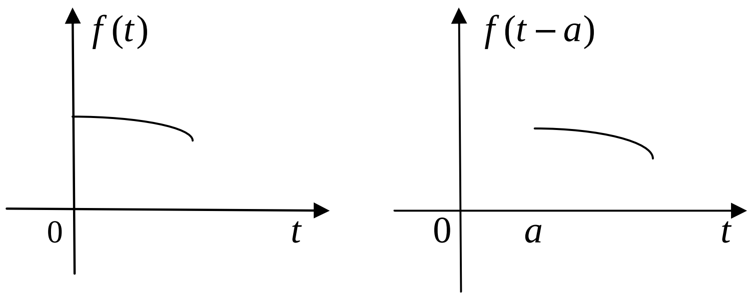


Рис. 4.2

Функция $1(t-a) = \begin{cases} 1, \text{при } t \ge a \\ 0, \text{при } t < a \end{cases}$ называется обобщенной функцией единичной функции или обобщенной функцией Хевисайда.

Так как $1(t) \div \dfrac{1}{p}$, то $1(t-a) \div \dfrac{1}{p}e^{-pa}$. Запаздывающую функцию

$$\varphi(t) = \begin{cases} f(t-a), \text{при } t \ge a, \\ 0, \text{при } t < a, \end{cases}$$

можно записать так: $\varphi(t) = f(t-a) \cdot 1(t-a)$.

Правило сдвига играет особую роль в процессах, происходящих с отставанием (регулирование с запаздыванием). Теорему эту удобно применять при нахождении изображений функций, которые на различных участках задаются различными аналитическими выражениями.

Особенно эффективно и содержательно правило сдвига при решении уравнений в конечных разностях.

Пример 1. Найти изображение функции $f(t)$ график, которой изображен на рис. 4.3.

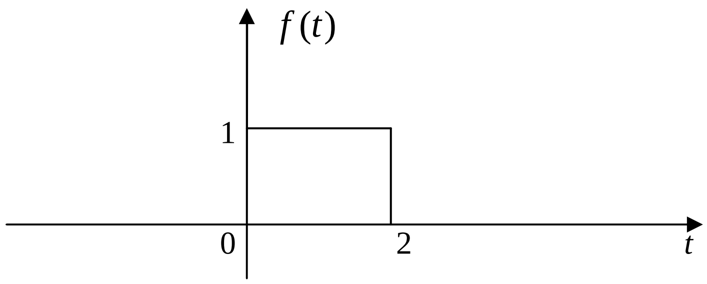


Рис. 4.3

Решение. Функция $f(t)=\begin{cases} 0, & t<0, \\ 1, & 0\le t<2, \\ 0, & t\ge 2, \end{cases}$ может быть представлена как разность двух единичных функций Хевисайда

$$f(t)=1(t)-1(t-2)=\tau(t)-\tau(t-2),$$

так как

$$1(t)=\begin{cases} 1, & t\ge 0 \\ 0, & t<0 \end{cases}, \quad 1(t-2)=\begin{cases} 1, & t\ge 2 \\ 0, & t<2 \end{cases}.$$

Следовательно, зная, что $\tau(t)\div\dfrac{1}{p}$, и используя теорему запаздывания, имеем $\tau(t-2)\div e^{-2p}\cdot\dfrac{1}{p}$.

Окончательно получим, что изображение функции

$$f(t)\div\frac{1}{p}-\frac{e^{-2p}}{p}=\frac{1-e^{-2p}}{p}.$$

Пример 2. Найти изображение функции $f(t)$, график которой изображен на рис. 4.4.

Решение. Запишем $f(t)$, используя функции Хевисайда $1(t)$ и $1(t-a)$. Имеем

$$f(t)=t1(t)-t1(t-2)+(4-t)1(t-2)-(4-t)1(t-4)=$$

$$=t1(t)-2(t-2)1(t-2)+(t-4)1(t-4).$$

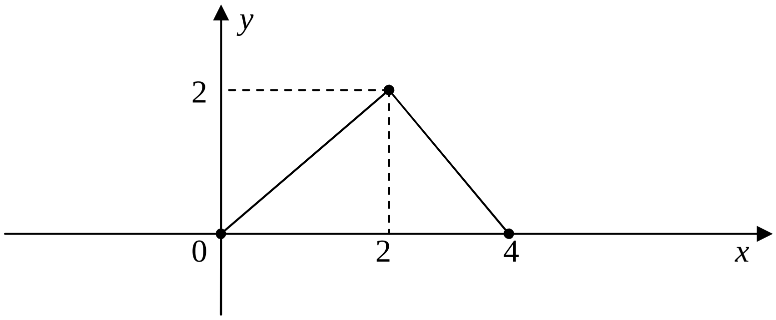


Рис. 4.4

Тогда изображение имеет вид

$$f(t) \div \frac{1}{p^2} - \frac{2}{p^2} e^{-2p} + \frac{1}{p^2} e^{-4p} = F(p).$$

Пример 3. Найти изображение функций: 1) $f(t) = (t-1)^2 1(t-1)$,

2) $\varphi(t) = (t-1)^2 1(t)$.

Решение: 1) Для функции $f(t) = t^2 1(t)$ имеем $f(t) \div \frac{2}{p^3}$. По теореме запаздывания для $(t-1)^2 1(t-1)$ имеем $(t-1)^2 1(t-1) \div e^{-p} \cdot \frac{2}{p^3}$. Здесь существенно, что необходимо найти изображение функции $(t-1)^2 1(t-1)$, т. е. функции, равной нулю при $t<1$.

2) Имеем $\varphi(t) = (t-1)^2 1(t) = \left(t^2 - 2t + 1\right) 1(t)$, откуда по свойству линейности получим

$$(t-1)^2 1(t) \div \frac{2}{p^3} - \frac{2}{p^2} + \frac{1}{p}.$$

Пример 4. Найти изображение функции

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t<1, \\ t^2, & 1<t<2,. \\ 0, & t>2. \end{cases}$$

Решение. Выразим $f(t)$ через степени разностей $(t-1)$ и $(t-2)$.

Имеем

$$t^2 = \left(\left(t-1\right)+1\right)^2 = \left(t-1\right)^2 + 2\left(t-1\right)+1,$$

$$t^2 = \left(\left(t-2\right)+2\right)^2 = \left(t-2\right)^2 + 4\left(t-2\right)+4.$$

Следовательно, данная функция $f\left(t\right)$ запишется в виде

$$f\left(t\right) = \left(\left(t-1\right)^2 + 2\left(t-1\right)+1\right)1\left(t-1\right) - \left(\left(t-2\right)^2 + 4\left(t-2\right)+4\right)1\left(t-2\right).$$

Тогда изображение имеет вид

$$F\left(p\right) = \left(\frac{2}{p^3}+\frac{2}{p^2}+\frac{1}{p}\right)e^{-p} - \left(\frac{2}{p^3}+\frac{4}{p^2}+\frac{4}{p}\right)e^{-2p}.$$

Пример 5. Найти изображение функции

$$f\left(t\right) = \begin{cases} 0, & t<1, \\ t+1, & 0<t<1, \\ 3t, & 1<t<4, \\ 0, & t>4. \end{cases}.$$

Решение. Функция $f\left(t\right)=0$ при $t<0$; в момент $t=0$ «включается» функция $t+1$; в момент $t=1$ она «снимается» и «включается» функция $3t$; в момент $t=4$ она «снимается», поэтому

$$f\left(t\right) = (t+1)\cdot 1\left(t\right) - (t+1)\cdot 1\left(t-1\right) + 3t\cdot 1\left(t-1\right) - 3t\cdot 1\left(t-4\right) =$$

$$= (t+1)\cdot 1\left(t\right) + (2t-1)\cdot 1\left(t-1\right) - 3t\cdot 1\left(t-4\right) =$$

$$= (t+1)\cdot 1\left(t\right) + (2(t-1)+1)\cdot 1\left(t-1\right) - (3(t-4)+12)\cdot 1\left(t-4\right).$$

Тогда изображение имеет вид

$$f(t) \div F\left(p\right) = \frac{1}{p^2}+\frac{1}{p}+\left(\frac{2}{p^2}+\frac{1}{p}\right)e^{-p} - \left(\frac{3}{p^2}+\frac{12}{p}\right)e^{-4p}.$$

Значительно реже, чем теорема запаздывания, применяется следующая теорема.

Теорема упреждения. *Если* $f(t) \div F(p)$ *и* a *– любое положительное число, то* $f(t+a) \div e^{pa}\left[F(p) - \int\limits_0^a e^{-pa} f(t)dt\right]$.

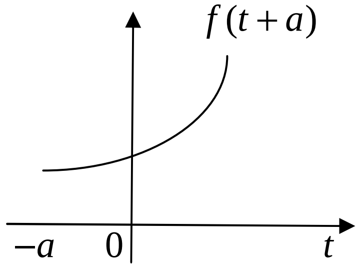


Рис. 4.5

График функции $f(t+a)$ получается из графика $f(t)$ смещением последнего влево на a (рис. 4.5). Такое смещение приводит к тому, что начальный кусок графика, соответствующий участку от 0 до a, пропадает, т. к. при $t<0$ новая функция по-прежнему равна нулю. Именно поэтому в правой части соответствия появляется вычитаемое $\left(-\int\limits_0^a e^{-pa} f(t)dt\right)$.

Доказательство. Найдем изображение функции

$$f(t+a) \div \int\limits_0^{+\infty} e^{-pt} f(t+a)dt = \left[t+a=z,\, dt=dz,\, z\in[a;+\infty]\right] =$$

$$= \int\limits_a^{+\infty} f(z)e^{-p(z-a)}dz = \int\limits_{-a}^{+\infty} f(z)e^{-pz}\cdot e^{pa}dz = e^{pa}\int\limits_a^{+\infty} f(z)e^{-pz}dz =$$

$$= e^{pa}\int\limits_0^{\infty} f(z)e^{-pz}dz - e^{pa}\int\limits_0^{a} f(z)e^{-pz}dz = e^{pa}\left[F(p) - \int\limits_0^a e^{-pa} f(t)dt\right].$$

Примечание – в последнем определенном интеграле переменную интегрирования обозначили через t.

Упражнения

1. Найти изображение функции $f(t)=(t-2)^3\cdot 1(t-2)$.

2. Построить график функции $f(t)=(t^2-6t+9)\cdot 1(t-3)$ и найти ее изображение.

3. С помощью единичной функции записать $f(t)$ одним аналитическим выражением и найти изображение этой функции, если

$$f(t)=\begin{cases} 0, & t<0; \\ t+1, & 0<t<1; \\ 3t, & 1<t<4; \\ 0, & t>4. \end{cases}$$

2.4. Теорема смещения в изображении (правило затухания)

Теорема смещения в изображении. *Если* $f(t) \div F(p)$ *и* a *– любое комплексное число, то* $e^{at} \cdot f(t) \div F(p-a)$ *при* $\operatorname{Re}(p-a) > S_0$.

Доказательство. Находим изображение функции

$$e^{at} f(t) \div \int_0^{+\infty} e^{at} f(t) \cdot e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} f(t) \cdot e^{-(p-a)t} dt = F(p-a),$$

т.е. $e^{at} f(t) \div F(p-a);\ \operatorname{Re}(p-a) > S_0$.

Эта теорема дает возможность находить изображение произведения показательной функции на оригинал, изображение которого известно.

Сформулированное свойство называют правилом затухания, потому что оно часто используется в физических процессах при описании затухающих колебаний, где t – время, a – отрицательное действительное число. Если a – положительное число, то множитель e^{at} характеризует колебание с непрерывно возрастающей амплитудой.

Теорема затухания помогает расширить таблицу соответствия между оригиналами и изображениями, позволяя по известному соотношению $f(t) \div F(p)$ находить изображение функции $e^{at} f(t)$, заменяя в выражении для изображения p на $p-a$. Применяя теоремы затухания и линейности, получаем следующие формулы:

$$f(t)\cos\omega t \div \frac{1}{2}\left[F(p-i\omega) + F(p+i\omega)\right],$$

$$f(t)\sin\omega t \div \frac{1}{2i}\left[F(p-i\omega) - F(p+i\omega)\right],$$

где $f(t) \div F(p)$.

Пример 1. Найти изображение оригиналов: 1) $f(t) = e^{-5t}\sin\pi t$, 2) $f(t) = \operatorname{ch} t \cdot \cos t$, 3) $f(t) = \operatorname{ch} t \cdot \sin t$, 4) $f(t) = \operatorname{sh} t \cdot \cos t$.

Решение: 1) Так как $\sin t \div \dfrac{1}{p^2+1}$, тогда $\sin\pi t \div \dfrac{\pi}{p^2+\pi^2}$ и по свойству смещения $e^{-5t}\sin\pi t \div \dfrac{\pi}{(p+5)^2+\pi^2}$.

2) Учитывая, что $\cos t \div \dfrac{p}{p^2+1}$ при $\operatorname{Re} p > 0$ и $\operatorname{ch} t = \dfrac{1}{2}\left(e^t + e^{-t}\right)$, получим

$$\operatorname{ch} t \cdot \cos t = \frac{1}{2}\left[e^t \cos t + e^{-t} \cos t\right] \div \frac{1}{2}\left[\frac{p-1}{(p-1)^2+1} + \frac{p+1}{(p+1)^2+1}\right] = \frac{p^3}{p^4+4}.$$

3) Аналогично предыдущему примеру получим

$$\operatorname{ch} t \cdot \sin t \div \frac{p^2+2}{p^4+4}.$$

4) Аналогично примеру 2) получим

$$\operatorname{sh} t \cdot \cos t \div \frac{p^2-2}{p^4+4} \text{ и } \operatorname{sh} t \cdot \sin t \div \frac{2p}{p^4+4}.$$

Пример 2. Найти оригинал по его изображению:

1) $F(p) = \dfrac{5}{p^2+8p+25}$, 2) $F(p) = \dfrac{p+8}{p^2+2p+5}$.

Решение: 1) Представим $F(p)$ в следующем виде

$$F(p) = \frac{5}{(p+4)^2+3^2} = \frac{5}{3} \cdot \frac{3}{(p+4)^2+3^2},$$

тогда

$$\frac{5}{3}\frac{3}{(p+4)^2+3^2} \div \frac{5}{3}e^{-4t} \cdot \sin 3t.$$

2) Представим $F(p)$ в следующем виде

$$F(p) = \frac{p+8}{(p+1)^2+2^2} = \frac{(p+1)+7}{(p+1)^2+2^2} = \frac{p+1}{(p+1)^2+2^2} + \frac{7}{(p+1)^2+2^2} =$$

$$= \frac{p+1}{(p+1)^2+2^2} + \frac{7}{2} \cdot \frac{2}{(p+1)^2+2^2} \div e^{-t} \cdot \cos 2t + \frac{7}{2}e^{-t} \sin 2t.$$

Упражнения

Найти изображения следующих функций:

1. $f(t) = e^t \cos nt$;
2. $f(t) = e^{-t} t^3$;
3. $f(t) = e^t \operatorname{sh} t$;
4. $f(t) = te^t \cos t$;
5. $f(t) = e^{3t} \sin^2 t$.

2.5. Дифференцирование оригинала

Теорема 1. *Если функция* $f(t)$ *непрерывно дифференцируема на интервале* $(0,+\infty)$, $f'(t)$ *– оригинал, то из соотношения* $f(t)\div F(p)$ *следует, что* $f'(t)\div pF(p)-f(+0)$, *где* $f(+0)=\lim\limits_{t\to 0+0} f(t)$.

Доказательство. По определению изображения имеем

$$f'(t)\div\int\limits_0^{+\infty} f'(t)e^{-pt}dt=\begin{bmatrix} u=e^{-pt}, & du=-pe^{-pt}dt \\ dv=f'(t)dt, & v=f(t)\end{bmatrix}=$$

$$=\lim_{\substack{\varepsilon\to 0+0\\ \delta\to+\infty}} e^{-pt}f(t)\Big|_{\varepsilon}^{\delta}+p\int\limits_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt=$$

$$=\lim_{\delta\to+\infty} e^{-p\delta}f(\delta)-\lim_{\varepsilon\to 0+0} e^{-p\varepsilon}f(\varepsilon)+pF(p)=0-f(+0)+pF(p).$$

Таким образом, $f'(t)\div pF(p)-f(+0)$. Что и требовалось показать.

Отметим, что

$$f''(t)\div p^2F(p)-\big(pf(+0)+f'(+0)\big).$$

Методом математической индукции устанавливают справедливость следующей теоремы.

Теорема 2. *Если* $f(t)$ n *раз непрерывно дифференцируема на интервале* $(0,+\infty)$, $f^{(n)}(t)$ *– оригинал, то из соотношения* $f(t)\div F(p)$ *следует, что*

$$f^{(n)}(t)\div p^nF(p)-p^{n-1}f(+0)-p^{n-2}f'(+0)-\ldots-pf^{(n-2)}(+0)-f^{(n-1)}(+0),$$

где $f^{(k)}(+0)=\lim\limits_{t\to 0+0} f^{(k)}(t)$.

Отметим, что правило дифференцирования оригинала в практических приложениях важнейшее, т. к. оно показывает, что сложная операция дифференцирования в пространстве оригиналов заменяется в пространстве изображений обычной операцией умножения на степень переменной p с одновременным добавлением многочлена, коэффициенты которого – значения оригинала и его производных. Это очень удобно при решении дифференциальных уравнений, т. к. сразу учитываются начальные условия.

Замечание. При нулевых начальных условиях имеем

$$f'(t) \div pF(p), \quad f''(t) \div p^2F(p), \ldots, f^{(n)}(t) \div p^nF(p),$$

то есть дифференцированию оригинала соответствует умножение его изображения на p.

Из теоремы дифференцирования вытекают два важных следствия.

Следствие 1. Если $f(t) \div F(p)$ и $f'(t)$ – оригинал, а также известно, что $\lim\limits_{t\to 0+0} f(t)$ существует, то

$$\lim_{\mathrm{Re}\, p\to\infty} pF(p) = \lim_{t\to 0+0} f(t) = f(+0).$$

В п. 1.2, §1, гл. 4 было показано, что если $F(p)$ – изображение, то $F(p) \to 0$ при $\mathrm{Re}\, p \to \infty$, поэтому изображение производной $f'(t)$ функция $pF(p) - f(+0) \to 0$ при $\mathrm{Re}\, p \to \infty$.

Таким же образом, если $f''(t)$ оригинал, то

$$\lim_{\mathrm{Re}\, p\to\infty} \left(p^2F(p) - pf(+0)\right) = f'(+0).$$

Так, для функций $f(t) = \sin at$ и $f(t) = \cos at$ имеем

$$\sin at \div \frac{a}{p^2+a^2} \text{ и } \lim_{p\to\infty} p\frac{a}{p^2+a^2} = 0 = \sin 0,$$

$$\cos at \div \frac{p}{p^2+a^2} \text{ и } \lim_{p\to\infty} p\frac{p}{p^2+a^2} = 1 = \cos 0.$$

Следствие 2. Если $f(t) \div F(p)$ и $f'(t)$ – оригинал, а также известно, что $\lim\limits_{t\to\infty} f(t)$ существует, то

$$\lim_{p\to 0} pF(p) = \lim_{t\to\infty} f(t).$$

Действительно, т. к.

$$f'(t) \div \int_0^\infty f'(t)e^{-pt}dt = pF(p) - f(+0).$$

Переходя к пределу при $p \to 0$, учитывая, что $f(t)$ в точке $t = 0$ может иметь разрыв первого рода:

$$\lim_{p\to 0}\left(pF(p) - f(+0)\right) = \lim_{p\to 0}\int_0^{\infty} e^{-pt} f'(t)dt = \lim_{\substack{\delta\to\infty \\ \varepsilon\to 0+0}}\int_{\varepsilon}^{\delta} f'(t)dt =$$

$$= \lim_{\substack{\delta\to\infty \\ \varepsilon\to 0+0}} f(t)\Big|_{\varepsilon}^{\delta} = \lim_{t\to\infty} f(t) - f(+0).$$

Отсюда и получаем требуемое: $\lim\limits_{p\to 0} pF(p) = \lim\limits_{t\to\infty} f(t)$.

Обратите внимание на то, что рассмотренным следствием нужно пользоваться с большой осторожностью. Нужно на первом шаге проверить существование $\lim\limits_{t\to\infty} f(t)$, т. к. в противном случае придем к неверному результату. Так, $\sin at \div \dfrac{a}{p^2 + a^2}$ и $\lim\limits_{p\to 0} \dfrac{pa}{p^2 + a^2} = 0$, но $\lim\limits_{t\to\infty} \sin at$ не существует. А это значит, полученная формула неприменима. А для единичной функции $1(t)$ предел при $t \to \infty$ равен 1, полученная формула имеет место, действительно,

$$\lim_{p\to 0} p \cdot \frac{1}{p} = 1.$$

Пример 1. Найти изображение функций: 1) $f(t) = \cos 3t$,
2) $f(t) = \sin(\omega t + \psi)$.

Решение: 1) Так как $\sin 3t = \dfrac{3}{p^2 + 3^2}$ и $\sin 0 = 0$, то

$$\cos 3t = \frac{1}{3}(\sin 3t)' \div \frac{1}{3} \cdot p \cdot \frac{3}{p^2 + 3^2} = \frac{p}{p^2 + 3^2}.$$

Таким образом, $\cos 3t \div \dfrac{p}{p^2 + 3^2}$.

2) Так как $\sin \omega t \div \dfrac{\omega}{p^2 + \omega^2}$, $\cos\omega t \div \dfrac{p}{p^2 + \omega^2}$, то

$$\sin(\omega t + \psi) = \sin \omega t \cdot \cos\psi + \cos\omega t \sin\psi \div$$

$$\div \frac{\omega\cos\psi}{p^2 + \omega^2} + \frac{p\sin\psi}{p^2 + \omega^2} = \frac{\omega\cos\psi + p\sin\psi}{p^2 + \omega^2}.$$

Пример 2. Пользуясь теоремой о дифференцировании оригинала, найти изображение функции $f(t)=\sin^2 t$;

Решение. Если $f(t)\div F(p)$, то $f'(t)\div pF(p)-f(+0)$. Так как

$$f(0)=\sin^2 0=0,\ f'(t)=2\sin t\cos t=\sin 2t\div\frac{2}{p^2+4},$$

то имеем $\dfrac{2}{p^2+4}=pF(p)$, откуда $F(p)=\dfrac{1}{p}\dfrac{2}{p^2+4}\div\sin^2 t$.

Упражнения

Пользуясь теоремой о дифференцировании оригинала, найти изображения функций:

1. $f(t)=\cos^2 t$;
2. $f(t)=\sin^3 t$;
3. $f(t)=\cos^4 t$;
4. $f(t)=t\sin at$;
5. $f(t)=te^t$.

2.6. Интегрирование оригинала

Теорема. *Если* $f(t)\div F(p)$, *то*

$$\int_0^t f(u)du\div\frac{F(p)}{p}, \tag{4.3}$$

то есть интегрированию оригинала в пределах от 0 до t *соответствует деление изображения на* p.

Доказательство: 1) Пусть

$$\varphi(t)=\int_0^t f(u)du. \tag{4.4}$$

Покажем, что функция (4.4) является оригиналом.

1.1. $\varphi(t)=0$ для $t<0$, т.к. $f(t)=0$ при $t<0$.

1.2. $\varphi(t)$ – непрерывна вместе со своими производными на всей оси t, за исключением конечного числа точек разрыва первого рода на каждом интервале конечной длины.

1.3. $\int_0^t f(u)du\le M\int_0^t e^{S_0u}du=\dfrac{M}{S_0}\left(e^{S_0u}\right)\Big|_{u=0}^{u=t}=\dfrac{M}{S_0}\left(e^{S_0t}-1\right)\le\dfrac{M}{S_0}e^{S_0t}\le N\cdot e^{S_0t}$.

Значит, функция $\varphi(t)$, определяемая равенством (4.4), является оригиналом.

2) Пусть

$$\varphi(t)=\int_0^t f(u)du \div \Phi(p), \text{ т.е. } \varphi(t)\div\Phi(p).$$

Найдем преобразование Лапласа для функции $\varphi(t)$. Заметим, что из формулы (4.4) следует, что $\varphi(0)=\int_0^0 f(u)du=0$. Тогда по правилу дифференцирования оригинала имеем

$$\varphi'(t)\div p\Phi(p)-\varphi(+0)=p\cdot\Phi(p)=F(p),$$

$$\varphi'(t)=\left(\int_0^t f(u)du\right)'_t=f(t)\div F(p),$$

$$\Phi(p)=\frac{F(p)}{p}\div\int_0^t f(u)du,$$

то есть

$$\int_0^t f(u)du\div\frac{F(p)}{p}.$$

Таким образом, интегрирование оригинала $f(t)$ соответствует делению его изображения $F(p)$ на p.

Пример 1. Используя свойство интегрирования оригинала, найти изображения для оригиналов:

1) $f(t)=\int_0^t e^{4t}\sin 2t dt$, 2) $f(t)=\int_0^t (t^7-5t^4-2t^2-3)e^{10t}dt$.

Решение: 1) Найдем изображение для подынтегральной функции. Так как $\sin 2t=\dfrac{2}{p^2+2^2}$ и по свойству смещения имеем $e^{4t}\sin 2t\div\dfrac{2}{(p-4)^2+2^2}$, то по свойству интегрирования оригинала получим

$$\int_0^t e^{4t}\sin 2t dt\div\frac{1}{p}\cdot\frac{2}{(p-4)^2+2^2}.$$

2) Найдем изображение для подынтегральной функции (оригинала)

$$t^7-5t^4-2t^2+3\div\frac{7!}{p^8}-5\frac{4!}{p^5}-2\frac{2!}{p^3}+\frac{3}{p},$$

в силу свойства смещения

$$(t^7-5t^4-2t^2+3)e^{10t} \div \frac{7!}{(p-10)^8}-\frac{5\cdot 4!}{(p-10)^5}-\frac{2\cdot 2!}{(p-10)^3}+\frac{3}{p-10}.$$

Тогда

$$\int_0^t (t^7-5t^4-2t^2+3)e^{2t}dt \div \frac{1}{p}\left[\frac{7!}{(p-10)^8}-\frac{5\cdot 4!}{(p-10)^5}-\frac{2\cdot 2!}{(p-10)^3}+\frac{3}{p-10}\right].$$

Пример 2. Найти оригиналы следующих изображений:

1) $F(p)=\dfrac{1}{p(p^2+9)}$, 2) $F(p)=\dfrac{1}{p^2}\cdot\dfrac{1}{p^2+9}$.

Решение: 1) Так как $\dfrac{1}{p^2+9}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{3}{p^2+3^2}\div\dfrac{1}{3}\sin 3t$, то согласно свойству интегрирования оригинала

$$\frac{1}{p}\cdot\frac{1}{p^2+3^2}\div\int_0^t\frac{1}{3}\sin 3t dt=-\frac{1}{9}\cos 3t\Big|_0^t=\frac{1}{9}[1-\cos 3t].$$

2) Так как $\dfrac{1}{p^2+3^3}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{3}{p^2+3^2}\div\dfrac{1}{3}\sin 3t$, то согласно свойству интегрирования оригинала

$$\frac{1}{p}\cdot\frac{1}{p^2+3^2}\div\int_0^t\frac{1}{3}\sin 3t dt=\frac{1}{9}[1-\cos 3t],$$

$$\frac{1}{p}\cdot\frac{1}{p}\cdot\frac{1}{p^2+3^2}\div\int_0^t\frac{1}{9}(1-\cos 3t)dt=\frac{1}{9}\left[t-\frac{1}{3}\sin 3t\right].$$

Упражнения

С помощью правила интегрирования оригинала найти изображения функций:

1. $f(t)=\int_0^t(u-\cos u)du$.
2. $f(t)=\int_0^t\left(\sin u+u^2\right)du$.
3. $f(t)=\int_0^t\frac{\sin u}{u}du$.
4. $f(t)=\int_0^t e^{-u}u^3du$.
5. $f(t)=\int_0^t\cos^2 at dt$.

2.7. Дифференцирование изображения (умножение оригинала на минус аргумент)

Теорема. *Если* $f(t) \div F(p)$, *то* $F'(p) = \dfrac{dF(p)}{dp} \div -t \cdot f(t)$, *т. е. умножению оригинала на* $(-t)$ *соответствует производная от изображения* $F(p)$.

Доказательство: 1) Устанавливаем, что $(-t) \cdot f(t)$ оригинал (за показатель роста данной функции можно взять число $S_1 > S_0$).

2) Из условия существования изображения $F(p)$ является аналитической функцией в полуплоскости $\operatorname{Re} p = s > S_0$, а, следовательно, она имеет производную любого порядка в указанной области. Дифференцируя по параметру p, получим

$$F'(p) = \left(\int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt \right)'_p = \int_0^{+\infty} f(t) \left(e^{-pt} \right)'_p dt = \int_0^{+\infty} f(t)(-t) e^{-pt} dt \div (-t) \cdot f(t).$$

Дифференцирование по параметру здесь возможно, потому что несобственный интеграл абсолютно и равномерно сходится при $\operatorname{Re} p = s > S_0$.

Следствие. Последовательное применение доказанной теоремы приводит к соотношениям:

$$F'(p) \div -t \cdot f(t),$$

$$F''(p) \div t^2 \cdot f(t),$$

$$F'''(p) \div -t^3 \cdot f(t),$$

……………………..

$$F^{(n)}(p) \div (-1)^n t^n f(t).$$

Пример. Найти изображения функций:

1) $f(t) = t^3$; 2) $f(t) = e^{4t} \cdot t^3$; 3) $f(t) = t \sin 5t$; 4) $f(t) = e^{7t} \cdot t \sin 5t$.

Решение: 1) Так как $1 \div \dfrac{1}{p}$ то, по правилу дифференцирования изображения, имеем $(-t) \cdot 1 \div \left(\dfrac{1}{p} \right)'_p = -\dfrac{1}{p^2}$, т.е. $t \div \dfrac{1}{p^2}$.

Далее имеем $-t\cdot t \div \left(\dfrac{1}{p^2}\right)'_p = -\dfrac{2}{p^3}$, т.е. $t^2 \div \dfrac{2!}{p^3}$.

Продолжая дифференцирование, получим $(-t)\cdot t^2 \div \left(\dfrac{2}{p^3}\right)'_p = -\dfrac{6}{p^4}$, т. е. $t^3 \div \dfrac{3!}{p^4}$. Рассуждая аналогично, можно получить, что $t^n \div \dfrac{n!}{p^{n+1}}$.

2) Так как $t^3 \div \dfrac{3!}{p^4}$, то применяя свойство смешения в изображении (см. п. 2.4, §2, гл. 4), получим $e^{5t}\cdot t^3 \div \dfrac{3!}{(p-5)^4}$.

3) Так как $\sin 5t \div \dfrac{5}{p^2+5^2}$, то $-t\cdot\sin 5t \div \left(\dfrac{5}{p^2+5^2}\right)'_p = -\dfrac{10p}{(p^2+5^2)^2}$, т. е. $t\sin 5t \div \dfrac{10p}{(p^2+5^2)^2}$.

4) В предыдущем примере установили, что $t\sin 5t \div \dfrac{10p}{(p^2+5^2)^2}$. Тогда с учетом свойства смещения (см. п. 2.4, §2, гл. 4) получим

$$e^{7t}\cdot t\cdot\sin 5t \div \frac{10(p-7)}{((p-7)^2+5^2)^2}.$$

2.8. Интегрирование изображения

Теорема. *Если* $f(t)\div F(p)$ *и* $\dfrac{f(t)}{t}$ *– оригинал, то*

$$\frac{f(t)}{t} \div \int_p^{\infty} F(z)dz.$$

Доказательство. По определению преобразования Лапласа имеем

$$\int_p^{+\infty} F(p)dp = \int_p^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt\right)dp = \int_0^{+\infty} f(t)\left(\int_p^{+\infty} e^{-pt}dp\right)dt =$$

$$= \int_0^{+\infty} f(t)\left(\frac{1}{-t}\right)\left(e^{-pt}\Big|_{p=p}^{p=+\infty}\right)dt = \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\cdot(-1)\left[0-e^{-pt}\right]dt =$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t}e^{-pt}dt \div \frac{f(t)}{t}.$$

Таким образом, интегрирование изображения соответствует делению оригинала на t.

Замечание 1. Требование в условии теоремы, что $\frac{f(t)}{t}$ – оригинал, существенно, т. к. если $f(t)$ – оригинал, то из этого не следует, что $\frac{f(t)}{t}$ – также оригинал, ибо предел $\lim\limits_{t\to\pm 0}\frac{f(t)}{t}$ может быть равным бесконечности, что противоречит определению оригинала. Этот предел должен быть конечный.

Пример 1. Найти изображения функций:

1) $f(t)=\frac{\sin t}{t}$; 2) $\int_0^t \frac{\sin z}{z}dz$; 3) $f(t)=\frac{1-\cos 4t}{t}e^{-5t}$.

Решение:

1) Функция $\frac{\sin t}{t}$ – оригинал $\left(\lim\limits_{t\to+0}\frac{\sin t}{t}=1\right)$, а $\sin t \div \frac{1}{p^2+1}$, тогда

$$\frac{\sin t}{t} \div \int_p^{+\infty}\frac{dz}{z^2+1} = \operatorname{arc\,tg} z\Big|_p^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg} p = \operatorname{arc\,ctg} p, \text{ т.е. } \frac{\sin t}{t} \div \operatorname{arc\,ctg} p.$$

2) Так как $\frac{\sin t}{t} \div \operatorname{arc\,ctg} p$, то, используя свойство интегрирования оригинала (см. п. 2.6, §2, гл. 4), получим $\int_0^t \frac{\sin z}{z}dz \div \frac{1}{p}\operatorname{arc\,ctg} p$.

3) Функция $f(t)=\frac{1-\cos 4t}{t}e^{-5t}$ – оригинал, т. к. она непрерывна при $t>0$, а $\lim\limits_{t\to+0}\frac{1-\cos 4t}{te^{5t}} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim\limits_{t\to+0}\frac{4\sin 4t}{e^{5t}+5te^{5t}} = 0$ – конечное число. Тогда, последовательно, имеем

$$1-\cos 4t \div \frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+4^2},$$

$$\frac{1-\cos 4t}{t} \div \int\limits_{p}^{+\infty}\left(\frac{1}{p}-\frac{p}{p^2+4^2}\right)dp = \lim_{\operatorname{Re} a\to+\infty}\int\limits_{p}^{a}\left(\frac{1}{p}-\frac{p}{p^2+4^2}\right)dp =$$

$$= \lim_{\operatorname{Re} a\to+\infty}\left[\ln p-\frac{1}{2}\ln(p^2+4^2)\right]\Bigg|_{p}^{a} = \lim_{\operatorname{Re} a\to+\infty}\left[\ln\frac{a}{\sqrt{a^2+4^2}}-\ln\frac{p}{\sqrt{p^2+4^2}}\right] =$$

$$= \ln 1-\ln\frac{p}{\sqrt{p^2+4^2}} = \ln\frac{\sqrt{p^2+4^2}}{p}.$$

В силу свойства смещения (см. п. 2.4, §2, гл. 4) получим искомое изображение

$$\frac{1-\cos 4t}{t}e^{-5t} \div \ln\frac{\sqrt{(p+5)^2+4^2}}{p+5}.$$

Замечание 2. С помощью теоремы об интегрировании изображения удается относительно легко вычислить ряд несобственных интегралов. Пусть

$$\varphi(t) \div \Phi(p) = \int\limits_{0}^{\infty}\varphi(t)e^{-pt}dt.$$

Если предположить, что $\int\limits_{0}^{\infty}\varphi(t)dt$ сходится, тогда

$$\Phi(0) = \int\limits_{0}^{\infty}\varphi(t)dt. \tag{4.5}$$

Отметим, что $\Phi(0)$ может существовать и тогда, когда интеграл $\int\limits_{0}^{\infty}\varphi(t)dt$ расходится. Так, если $\varphi(t)=e^t$, то $\Phi(p)=\dfrac{1}{p-1}$ и $\Phi(0)=-1$, но в тоже время $\int\limits_{0}^{\infty}e^t dt$ расходится.

Полагая в (4.5) $\varphi(t)=\dfrac{f(t)}{t}$ и считая, что интеграл $\int\limits_{0}^{\infty}\dfrac{f(t)}{t}dt$ сходится, получим

$$\int\limits_{0}^{\infty}\frac{f(t)}{t}dt = \Phi(0), \tag{4.6}$$

где $\Phi(p)$ – изображение для оригинала $\dfrac{f(t)}{t}$.

В силу теоремы об интегрировании изображения

$$\frac{f(t)}{t} \div \Phi(p) = \int_p^{\infty} F(z)dz,$$

где $F(p)$ – изображение $f(t)$. Полагая $p = 0$, находим

$$\Phi(0) = \int_p^{\infty} F(z)dz\Big|_{p=0} = \int_0^{\infty} F(z)dz.$$

Подставляя $\Phi(0)$ в (4.6), получим

$$\int_0^{\infty} \frac{f(t)}{t} = \int_0^{\infty} F(z)dz, \tag{4.7}$$

где $f(t) \div F(p)$.

Интеграл справа в равенстве (4.7) можно вычислить по положительной полуоси.

Пример 2. Вычислить интеграл $I = \int_0^{\infty} \frac{e^{-at} - e^{bt}}{t} dt$ $(a > 0, \quad b > 0)$.

Решение. Установив сходимость интеграла $I = \int_0^{\infty} \frac{e^{-at} - e^{bt}}{t} dt$ $(a > 0, \quad b > 0)$, по формуле (4.7) имеем

$$I = \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{z+a} - \frac{1}{z+b} \right) dz = \ln \left| \frac{z+a}{z+b} \right| \Big|_0^{\infty} = \ln \frac{b}{a}.$$

Пример 3. Вычислить интеграл $I = \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt$.

Решение. Устанавливаем сходимость данного несобственного интеграла и, принимая во внимание соотношение $\sin t \div \frac{1}{p^2+1} = F(p)$, получим

$$\int_0^{t} \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^{\infty} \frac{dp}{p^2+1} = \operatorname{arctg} p \Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{2}.$$

Упражнения

1. Найти изображение функций:

1) $f(t) = \frac{\sin^2 t}{t}$; 2) $f(t) = \frac{\cos t - \cos 2t}{t}$.

2. Вычислить интегралы:

1) $\int\limits_0^\infty \frac{e^{-bt}\sin at}{t}dt,\ \left(b>0, a>0\right);$

2) $\int\limits_0^\infty \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\sin mtdt,\ \left(a>0, b>0, m>0\right);$

3) $\int\limits_0^\infty \frac{\cos at-\cos bt}{t}dt,\quad \left(a>0, b>0\right);$

4) $\int\limits_0^\infty \frac{\sin at\cdot\sin bt}{t}dt,\quad \left(a>0, b>0\right).$

2.9. Свертка функций. Теорема свертывания (умножение изображений)

Рассмотрим следующую задачу.

Пусть в пространстве изображений задано произведение двух функций, каждая из которых имеет оригинал. Какая комбинация в пространстве оригиналов будет соответствовать этому произведению двух изображений?

Для решения этой задачи рассмотрим важное понятие – свертка функций.

Сверткой двух функций $f\left(t\right)$ и $\varphi(t)$ называется функция от переменной t, определяемая равенством

$$f(t)*\varphi(t)=\int\limits_0^t f(u)\varphi(t-u)du\,.$$

Отметим, что символ свертки * в определенном смысле очень напоминает символ умножения. И это совпадение не случайно. Свертка обладает теми же свойствами, что и произведение:

1) коммутативность свертки $f*\varphi=\varphi*f$;

2) ассоциативность свертки $(f*\varphi)*\psi=f*(\varphi*\psi)$;

3) рефлексивность свертки $(f+\varphi)*\psi=f*\psi+\varphi*\psi$.

Докажем, например, свойство 1 для свертки:

$$f(t)*\varphi(t)=\int\limits_0^t f(u)\varphi(t-u)du=\begin{vmatrix} t-u=z \\ du=-dz \end{vmatrix}=\int\limits_0^t f(t-z)\varphi(z)dz=\varphi(t)*f(t),$$

т. е. $(f*\varphi)=(\varphi*f)$.

Пример 1. Найти свертку функций: 1) $f(t)=e^{-3t}$ и $\varphi(t)=e^{-4t}$, 2) $f(t)=\sin t$ и $\varphi(t)=e^{t}$, 3) $f(t)=\cos 2t$ и $\varphi(t)=\sin t$.

Решение: 1) По определению свертки имеем

$$f(t)*\varphi(t)=e^{-3t}*e^{-4t}=\int_0^t e^{-3u}\cdot e^{-4(t-u)}du=$$

$$=e^{-4t}\int_0^t e^{u}du=e^{-4t}\cdot e^{u}\Big|_{u=0}^{u=t}=e^{-4t}\cdot(e^{t}-1)=e^{-3t}-e^{-4t}.$$

Итак, $e^{-3t}*e^{-4t}=e^{-3t}-e^{-4t}$.

2) По определению свертки имеем $f(t)*\varphi(t)=\int_0^t \sin u\cdot e^{t-u}du$, применяя формулу интегрирования по частям, получим

$$\int_0^t \sin u e^{t-u}du=-\sin u\cdot e^{t-u}\Big|_0^t+\int_0^t \cos u\cdot e^{t-u}du=$$

$$=-\sin u\cdot e^{t-u}\Big|_0^t-\cos u\cdot e^{t-u}\Big|_0^t-\int_0^t \sin u\cdot e^{t-u}du.$$

Откуда имеем

$$2\int_0^t \sin u\cdot e^{t-u}du=-\sin u\cdot e^{t-u}\Big|_0^t-\cos u\cdot e^{t-u}\Big|_0^t=-\sin t-\cos t+e^{t}.$$

Следовательно, $\sin t*e^{t}=\frac{1}{2}(e^{t}-\sin t-\cos t)$.

3) По определению свертки имеем

$$\cos 2t*\sin t=\int_0^t \cos 2u\cdot\sin(t-u)du=\frac{1}{2}\int_0^t\left[\sin(t+u)+\sin(t-3u)\right]du=$$

$$=\frac{1}{2}(-\cos(t+u)+\frac{1}{3}\cos(t-3u)\Big|_0^t=\frac{1}{3}(\cos t-\cos 2t).$$

Таким образом, имеем $\cos 2t*\sin t=\frac{1}{3}(\cos t-\cos 2t)$.

Теорема свертывания (умножение изображений). *Если* $f(t)\div F(p)$ *и* $\varphi(t)\div\Phi(p)$, *то*

$$f(t)*\varphi(t)\div F(p)\cdot\Phi(p), \tag{4.8}$$

т. е. при свертывании оригиналов изображения их умножаются.

Доказательство: 1) Устанавливаем, что свертка удовлетворяет условиям оригинала:

1.1) Первое условие справедливо, т. к. $f(u)=0$ для $u\in(-\infty,0)$ и $\varphi(t-u)=0$ для $u\in(t,\infty)$.

1.2) Интеграл от произведения двух кусочно-монотонных функций, имеющих конечное число точек разрыва на интервале интегрирования, будет непрерывной и кусочно-монотонной функцией.

1.3) Пусть оригиналы $f(t)$ и $\varphi(t)$ имеют при $t>0$ оценки

$$|f(t)|\le M_1e^{S_1t},\quad |\varphi(\mathrm{t})|\le M_2e^{S_2t},$$

и пусть $S_0=\max(S_1,S_2)$, т.е.

$$|f(t)|\le M_1e^{S_0t};\quad |\varphi(\mathrm{t})|\le M_2e^{S_0t}.$$

Тогда имеем

$$|f(t)*\varphi(t)|=\left|\int_0^t f(u)\cdot\varphi(t-u)du\right|\le\int_0^t|f(u)|\cdot|\varphi(t-u)|du\le M_1\cdot M_2\int_0^t e^{S_0u}\cdot e^{S_0(t-u)}du=$$

$$=M_1M_2e^{S_0t}\int_0^t dt=M_1M_2te^{S_0t}\le\begin{vmatrix}при\quad t>0\\ t<e^t\end{vmatrix}\le M_1M_2e^{(S_0+1)t}.$$

Итак, имеем, что свертка двух оригиналов – оригинал.

2) Определим изображение свертки функций $f(t)$ и $\varphi(t)$, т.е. для функции $\int_0^t f(u)\varphi(t-u)du$ имеем

$$\int_0^t f(u)\varphi(t-u)du\div\int_0^{+\infty}e^{-pt}\left(\int_0^t f(u)\varphi(t-u)du\right)dt.$$

Преобразование Лапласа в данном случае – двойной интеграл, распространенный на сектор плоскости (t,u), причем $t\in[0;+\infty]$, а $u\in[0;t]$.

Так как данный интеграл сходится абсолютно, то в этих интегралах можно поменять порядок интегрирования – осуществляя внешнее интегрирование по t, а внутреннее – по u, при этом $u\in[0;+\infty]$, а $t\in[u;+\infty]$.

Итак,

$$\int_0^{+\infty}e^{-pt}dt\int_0^t f(u)\varphi(t-u)du=\int_0^{+\infty}f(u)du\int_u^{+\infty}e^{-pt}\varphi(t-u)dt=\begin{vmatrix}t-u=\sigma\\ dt=d\sigma\end{vmatrix}=$$

$$= \int_0^{+\infty} f(u)du \int_0^{+\infty} e^{-p(u+\sigma)}\varphi(\sigma)d\sigma = \int_0^{+\infty} e^{-pu} f(u)du \int_0^{+\infty} e^{-p\sigma}\varphi(\sigma)d\sigma = F(p)\cdot\Phi(p),$$

то есть

$$f(t)*\varphi(t) = \int_0^t f(u)\varphi(t-u)du \div F(p)\cdot\Phi(p).$$

Замечание 1. Если изображение есть произведение более двух сомножителей, тогда теорема свертывания применяется последовательно к попарно сгруппированным сомножителям, причем в силу свертки, группировку можно производить в любом порядке.

Замечание 2. Сформулированную теорему называют теоремой о свертке, теоремой умножения изображений, или теоремой Бореля.

Пример 2. Найти оригинал по изображению:

1) $\dfrac{1}{(p+10)}\cdot\dfrac{1}{(p+6)}$; 2) $\dfrac{1}{(p^2+1)(p-10)}$; 3) $\dfrac{p}{p^2+4}\cdot\dfrac{1}{p^2+1}$.

Решение: 1) Так как $e^{-10t} \div \dfrac{1}{p+10}$, $e^{-6t} \div \dfrac{1}{p+6}$, тогда по теореме свертывания имеем

$$e^{-10t} * e^{-6t} \div \frac{1}{p+10}\cdot\frac{1}{p+6},$$

но

$$e^{-10t} * e^{-6t} = \frac{1}{4}(e^{-10t} - e^{-6t}).$$

Таким образом,

$$\frac{1}{4}(e^{-10t} - e^{-6t}) \div \frac{1}{(p+10)(p+6)}.$$

2) Так как $\sin t \div \dfrac{1}{p^2+1}$ и $e^t \div \dfrac{1}{(p-1)}$, то по теореме свертывания имеем $\sin t * e^t \div \dfrac{1}{(p^2+1)(p-1)}$. Но $\sin t * e^t = \dfrac{1}{2}(-\sin t - \cos t + e^t)$ (см. пример 1).

Таким образом,

$$\frac{1}{2}(-\sin t - \cos t + e^t) \div \frac{1}{(p^2+1)(p-1)}.$$

3) Так как $\cos 2t \div \dfrac{p}{p^2+4}$, $\sin t \div \dfrac{1}{p^2+1}$, тогда по теореме свертывания имеем $\cos 2t * \sin t \div \dfrac{p}{(p^2+4)(p^2+1)}$. Но $\cos 2t * \sin t = \dfrac{1}{3}(\cos t - \cos 2t)$.

Таким образом,

$$\frac{1}{3}(\cos t - \cos 2t) \div \frac{p}{(p^2+4)(p^2+1)}.$$

Пример 3. Найти оригинал по изображению:

1) $F(p) = \dfrac{1}{(p^2+1)^2}$; 2) $F(p) = \dfrac{p^3}{(p^2+1)^2}$.

Решение: 1) Так как данную функцию можно представить в виде

$$F(p) = \frac{1}{(p^2+1)^2} = \frac{1}{(p^2+1)} \cdot \frac{1}{(p^2+1)} \text{ и } \frac{1}{p^2+1} \div \sin t, \text{ тогда}$$

$$f(t) = \int_0^t \sin u \sin(t-u)du = \frac{1}{2}\int_0^t [\cos(2u-t) - \cos t]du =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{-\sin(2u-t)}{2} - u\cos t\right]\Bigg|_0^t = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sin t - \frac{1}{2}\sin(-t) - t\cos t\right] = -\frac{t}{2}\cos t + \frac{1}{2}\sin t.$$

2) В данном примере непосредственное применение теоремы свертывания невозможно, т. к.

$$\frac{p^3}{(p^2+1)^2} = \frac{p^2}{p^2+1} \cdot \frac{p}{p^2+1}$$

и оригинала для первого множителя мы не имеем. Но в данном случае можно поступить следующим образом: запишем $F(p)$ в виде

$$\frac{p^3}{(p^2+1)^2} = p \cdot \left[\frac{p}{p^2+1} \cdot \frac{p}{p^2+1}\right].$$

Оригинал для произведения, заключенного в скобках, находим по теореме свертывания оригиналов, а затем применим теорему о дифференцировании оригинала, поскольку перед скобками стоит множитель p.

В данном случае имеем

$$\frac{p}{p^2+1} \cdot \frac{p}{p^2+1} \div \int_0^t \cos u \cos(t-u)du.$$

По теореме дифференцирования оригинала

$$p\cdot\left[\frac{p}{p^2+1}\cdot\frac{p}{p^2+1}\right]\div\frac{d}{dt}\int_0^t\cos u\cos(t-u)du\,.$$

Так как

$$\int_0^t\cos u\cos(t-u)du=\frac{1}{2}\int_0^t\left[\cos t+\cos(2u-t)\right]du=\frac{1}{2}t\cos t+\frac{1}{2}\sin t\,.$$

Поэтому

$$\frac{p^3}{(p^2+1)^2}\div\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}t\cos t+\frac{1}{2}\sin t\right]=\cos t-\frac{t}{2}\sin t\,.$$

Для проверки получаемого результата найдем оригинал для данного изображения другим способом:

$$\frac{p^3}{(p^2+1)^2}=\frac{p^3+p-p}{(p^2+1)^2}=\frac{p}{p^2+1}-\frac{p}{(p^2+1)^2}\,.$$

Но

$$\frac{p}{p^2+1}\div\cos t;\qquad\frac{\mathrm{p}}{(\mathrm{p}^2+1)^2}\div\frac{t}{2}\sin t\,,$$

поэтому

$$\frac{p^3}{(p^2+1)^2}\div\cos t-\frac{t}{2}\sin t\,,$$

то есть приходим к тому же результату.

Пример 4. Найти изображение функции $f(t)=\int_0^t(t-\tau)e^{\tau}dt$.

Решение. Функция $f(t)$ есть свертка функций $\psi(t)=t$ и $\varphi(t)=e^t$. По теореме умножения

$$f(t)\div F(p)\cdot\Phi(p)=\frac{1}{p^2}\cdot\frac{1}{p-1}=\frac{1}{p^2(p-1)}.$$

Упражнения

1. Найти изображения функций:

1) $f(t)=\int_0^t e^{t-\tau}\sin\tau d\tau$; 2) $f(t)=\int_0^t\cos(t-\tau)e^{2\tau}d\tau$;

3) $f(t)=\int_0^t (t-\tau)^n f(\tau)\,d\tau$;

4) $f(t)=\int_0^t (t-\tau)^2 \operatorname{ch}\tau dt$;

5) $f(t)=\int_0^t e^{2(\tau-t)}\tau^2 d\tau$.

2. Используя теорему умножения изображений, найти оригиналы $f(t)$ по их изображениям $F(p)$:

1) $F(p)=\dfrac{1}{p^2-1}$;

2) $F(p)=\dfrac{1}{p\left(p^2+1\right)}$;

3) $F(p)=\dfrac{1}{p^2\left(p^2+1\right)}$;

4) $F(p)=\dfrac{1}{p^3(p-1)}$.

3. Найти свертки функций $f(t), \varphi(t)$ и изображения сверток:

1) $f(t)=1(t); \varphi(t)=\sin t$;

2) $f(t)=t; \varphi(t)=\sin t$;

3) $f(t)=e^t; \varphi(t)=e^{-t}$;

4) $f(t)=\cos t; \varphi(t)=\cos t$;

5) $f(t)=\cos t; \varphi(t)=\sin t$.

2.10. Формула Дюамеля

В этом пункте получим формулу Дюамеля, которая является следствием теоремы свертывания. Эту формулу часто применяют на практике для нахождения оригиналов.

Теорема. *Если* $\lim\limits_{t\to 0+0} f(t)=f(+0)$, $f(t)\div F(p)$, $\varphi(t)\div\Phi(p)$, *функция* $f'(t)$ *– оригинал, то*

$$p\cdot F(p)\cdot\Phi(p)\div f(+0)\cdot\varphi(t)+\int_0^t f'(u)\cdot\varphi(t-u)du. \tag{4.9}$$

Соотношение (4.9) называется *формулой Дюамеля*, а правая часть этого соотношения – *интегралом Дюамеля.*

Доказательство. Произведение $p\cdot F(p)\cdot\Phi(p)$ можно представить в виде

$$p\cdot F(p)\cdot\Phi(p)=f(+0)\cdot\Phi(p)+\left[pF(p)-f(+0)\right]\Phi(p). \tag{4.10}$$

Первое слагаемое правой части равенства (4.10) есть произведение числа $f(+0)$ на изображение функции $\varphi(t)$. В силу однородности преобразования Лапласа получим $f(+0)\cdot\Phi(p)\div f(+0)\cdot\varphi(t)$.

Второе слагаемое $\left[pF(p)-f(+0)\right]\Phi(p)$ является произведением двух изображений, соответствующих $f'(t)$ и $\varphi(t)$: $pF(p)-f(+0)$ и $\Phi(p)$. Поэтому в силу формулы (4.8) ему соответствует свертка функций $f'(t)$ и $\varphi(t)$:

$$\left[pF(p)-f(+0)\right]\Phi(p)\div\int_0^t f'(u)\cdot\varphi(t-u)du.$$

Таким образом, получили

$$p\cdot F(p)\cdot\Phi(p)\div f(+0)\cdot\varphi(t)+\int_0^t f'(u)\varphi(t-u)du.$$

Что и требовалось доказать.

Полученную формулу (4.9) Дюамеля можно записать и в другой форме.

Если учесть свойство коммутативности свертки $f*\varphi=\varphi*f$, то из формулы Дюамеля (4.9) находим

$$p\cdot F(p)\cdot\Phi(p)\div f(+0)\varphi(t)+\int_0^t \varphi(u)\cdot f'(t-u)du. \tag{4.11}$$

Если функция $\varphi(t)$ непрерывна в нуле, т.е. $\lim\limits_{t\to+0}\varphi(t)=\varphi(+0)$, то получим

$$p\cdot F(p)\cdot\Phi(p)\div\varphi(+0)f(t)+\int_0^t \varphi'(u)f(t-u)du \tag{4.12}$$

и

$$p\cdot F(p)\cdot\Phi(p)\div\varphi(+0)f(t)+\int_0^t f(u)\varphi'(t-u)du. \tag{4.13}$$

Таким образом, получена формула Дюамеля в четырех видах: (4.9), (4.11), (4.12) и (4.13).

Пример. Используя формулу Дюамеля, найти оригинал $f(t)$ по его изображению $F(p)=\dfrac{p}{(p-1)(p+1)}$.

Решение. Так как $\dfrac{1}{p-1}\div e^t$, $\dfrac{1}{p+1}\div e^{-t}$, $f(t)=e^t$, $\varphi(t)=e^{-t}$, $f'(t)=e^t$, $f'(0)=1$, то по формуле Дюамеля находим

$$p\cdot\frac{1}{p-1}\cdot\frac{1}{p+1}\div e^{-t}\cdot1+\int_0^\tau e^{-\tau}e^{t-\tau}d\tau=e^{-t}+e^t\int_0^t e^{-2\tau}d\tau=$$

$$=e^{-t}+e^{t}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-2t}\right)=\frac{1}{2}\left(e^{t}+e^{-t}\right)=\operatorname{ch}t.$$

Таким образом, $f(t)=\operatorname{ch}t$.

Упражнения

Используя формулу Дюамеля, найти оригинал $f(t)$ по его изображению:

1. $F(p)=\dfrac{p^2}{\left(p^2+4\right)\left(p^2+9\right)}$.

2. $F(p)=\dfrac{p^3}{\left(p^2-1\right)\left(p^2+1\right)}$.

3. $F(p)=\dfrac{p^2}{(p-1)\left(p^2+1\right)}$.

4. $F(p)=\dfrac{1}{p^3\left(p^2+1\right)}$.

2.11. Свойство свертки изображений (произведение оригиналов)

Без доказательства отметим свойство, нашедшее в последнее время широкое применение в технике регулирования.

Теорема. *Если* $f(t)\div F(p)$ *и* $\varphi(t)\div\Phi(p)$, *то*

$$f(t)\cdot\varphi(t)\div\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{s_1-i\infty}^{s_1+i\infty}F(z)\Phi(p-z)dz;\\[2ex]\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{s_1-i\infty}^{s_1+i\infty}\Phi(z)F(p-z)dz;\end{cases}\tag{4.14}$$

то есть произведению двух оригиналов соответствует свертка их изображений.

Комплексные интегралы правых частей формулы (4.14) берутся вдоль вертикальных прямых в комплексной плоскости $P(p=s+i\omega)$.

Точку $s=s_1$ действительной оси выбирают настолько далеко вправо, чтобы при перемещении z по вертикальной прямой $p=s+i\omega$, где ω изменяется от $-\infty$ до $+\infty$, комплексные переменные z и $p-z$ оставались в полуплоскости абсолютной сходимости интегралов, представляющих $F(p)$ и $\Phi(p)$.

2.12. Дифференцирование операционного соотношения по параметру

Теорема. *Если функции* $f(t,\alpha)$ *и* $f'_\alpha(t,\alpha)$, *рассматриваемые как функции от* t *(*α *– параметр), принадлежат множеству оригиналов и*

$$f(t,\alpha) \div F(p,\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t,\alpha)dt,$$

то

$$f'_\alpha(t,\alpha) \div F'_\alpha(p,\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f'_\alpha(t,\alpha)dt,$$

то есть при дифференцировании оригинала $f(t,\alpha)$ *по параметру* α *изображение* $F(p,\alpha)$ *также дифференцируется по* α.

Пример. Известно, что $\sin\omega t \div \dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$. Продифференцировав это соотношение по параметру ω, в силу теоремы получаем $t\cos\omega t \div \dfrac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$.

2.13. Изображение периодической функции

Пусть на промежутке $(0,1)$ (для определенности) задана некоторая функция $\varphi(t)$, изображение которой известно и равно

$$\Phi(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt}\varphi(t)dt = \int_0^1 e^{-pt}\varphi(t)dt, \qquad (4.15)$$

здесь $\varphi(t)=0$ вне интервала $(0,1)$.

Пусть функцию $\varphi(t)$ (рис. 4.6) можно представить в виде

$$\varphi(t) = \varphi(t)\left[\tau(t) - \tau(t-1)\right].$$

Периодически продолжая заданную функцию $\varphi(t)$ на промежуток $(1,2)$, т. е. заменяя t на $t-1$, получаем функцию, изображенную на рис. 4.7, которую можем записать в виде $\varphi(t-1)\left[\tau(t-1)-\tau(t-2)\right]$.

В силу теоремы запаздывания имеем

$$\varphi(t-1)\left[\tau(t-1)-\tau(t-2)\right] \div e^{-p}\cdot\Phi(p).$$

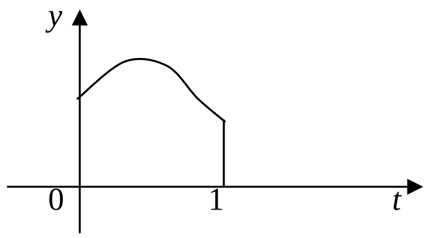


Рис. 4.6

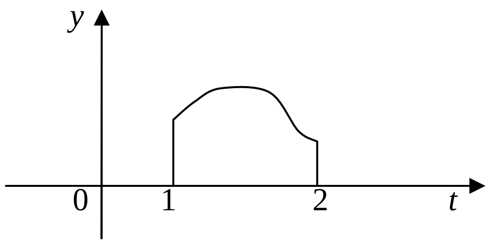


Рис. 4.7

Поступая аналогично, получим периодическую функцию для всех $t > 0$, которую можно представить в виде $\varphi(t-[t])\tau(t)$, где $[t]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее t (рис. 4.8).

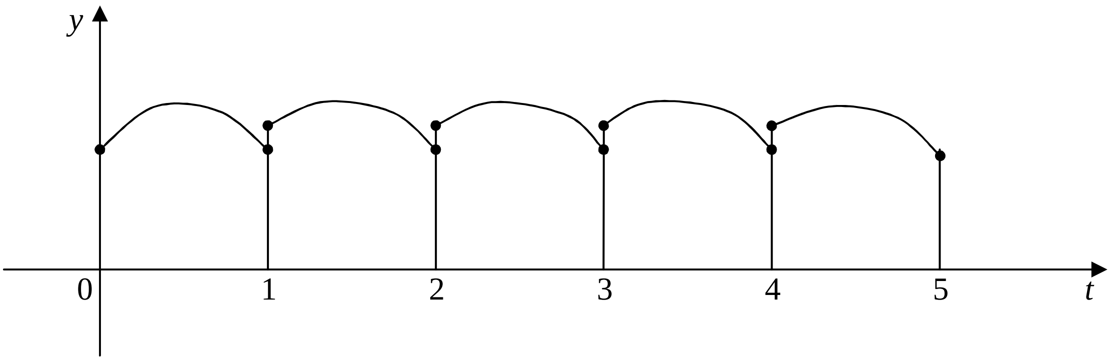


Рис. 4.8

Изображение полученной функции имеет вид

$$\varphi(t-[t])\tau(t) \div \Phi(p) + e^{-p}\Phi(p) + e^{-2p}\Phi(p) + \ldots =$$

$$= \Phi(p)(1 + e^{-p} + e^{-2p} + e^{-3p} + \ldots) = \left[\begin{array}{l} \left|e^{-p}\right| < e^{-s} < 1, \\ \operatorname{Re} p = s > 0 \end{array}\right] = \frac{\Phi(p)}{1-e^{-p}}; \operatorname{Re} p > 0,$$

так как выражение в скобках – сходящаяся геометрическая прогрессия. Таким образом получаем, что

$$\varphi(t-[t])\tau(t) \div \frac{\Phi(p)}{1-e^{-p}}, \quad \operatorname{Re} p > 0.$$

Найдем изображение периодической функции $f(t)$ произвольного периода T (рис. 4.9).

Пусть $f(t) \div F(p)$. Тогда по определению изображения получим

$$F(p) = \int_{0}^{+\infty} e^{-pt} f(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{nT}^{(n+1)T} e^{-pt} \cdot f(t)dt = [u = t - nT] =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^T e^{-p(u+nT)} \cdot f(u+nT)du = [\, f(u+nT) = f(u)] =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^T e^{-p(u+nT)} \cdot f(u)du = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-pnT} \cdot \int_0^T e^{-pu} f(u)du \, .$$

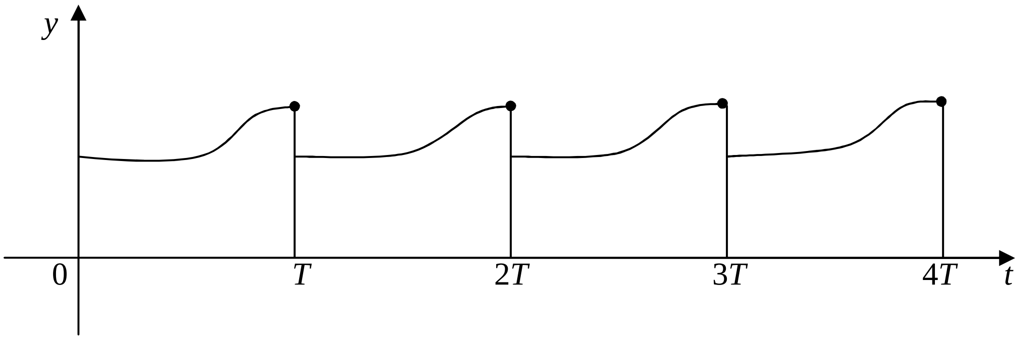


Рис. 4.9

Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} e^{-pnT}$ – сходящаяся геометрическая прогрессия со знаменателем e^{-pT}, при этом $\left| e^{-pT} \right| = e^{-sT} < 1,\ \operatorname{Re} p = s > 0$. Значит

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-pnT} = \frac{1}{1-e^{-pT}} \, .$$

Тогда получаем, что

$$F(p) = \frac{1}{1-e^{-pT}} \int_0^T e^{-pu} f(u)du \, . \tag{4.16}$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема. *Если* $f(t)$ *– оригинал с периодом* $T > 0$*, то его изображение выражается формулой*

$$F(p) = \frac{\Phi(p)}{1-e^{-pT}} \, ,$$

где $\Phi(p) = \int\limits_0^T e^{-pt} f(t)dt$.

Пример 1. Найти изображение оригинала $f(t)$ с периодом $T = 4$ (рис. 4.10).

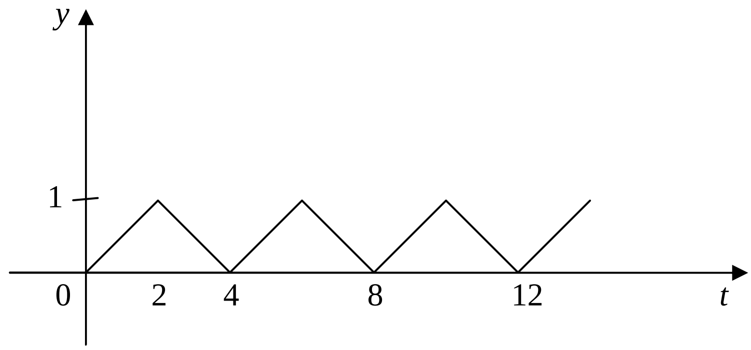


Рис. 4.10

Решение. Функция $f(t)$ – оригинал, аналитически запишем ее следующим образом

$$f(t)=\begin{cases}\dfrac{t}{2},\ 0\le t<2,\\ \dfrac{1}{2}(4-t),\ \ 2\le t<4.\end{cases}$$

В силу того, что оригинал – периодическая функция, имеем

$$F(p)=\frac{1}{1-e^{-4p}}\int_0^4 f(t)e^{-pt}dt=\frac{1}{2(1-e^{-4p})}\left(\int_0^2 te^{-pt}+\int_2^4(4-t)e^{-pt}dt\right)=$$

$$=\frac{1}{2(1-e^{-4p})}\left[\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p^2}e^{-2p}-\frac{2}{p}e^{-2p}+\frac{2}{p}e^{-2p}+\frac{1}{p^2}e^{-4p}-\frac{1}{p^2}e^{-2p}\right]=$$

$$=\frac{1}{2(1-e^{-4p})}\left[\frac{1}{p^2}e^{-4t}-\frac{2}{p^2}e^{-2p}+\frac{1}{p^2}\right].$$

Пример 2. Найти изображение периодического прямоугольного импульса

$$f(t)=\begin{cases}5,\ \ 0<t<3,\\ \text{-}5,\ \ 3<t<6.\end{cases}$$

Решение. Заданную периодическую функцию-оригинал перепишем в виде $f(t)=5\cdot\left[\tau(t)-2\tau(t-3)+2\tau(t-2\cdot 3)-3\tau(t-3\cdot 3)+...\right]$. Тогда

$$F(p)=\frac{1}{1-e^{-6p}}\cdot 5\left[\int_0^6 e^{-pu}du-\int_3^6 e^{-pu}du\right]=\frac{5}{p}\frac{1-e^{-3p}}{1-e^{-6p}}.$$

В различных приложениях, связанных с радиотехникой, приходится встречаться со ступенчатыми функциями – функциями, имеющими различные аналитические выражения для различных значений аргумента. Этот класс функций можно рассматривать как кусочно-постоянные функции, а значит их можно строить, задавать, опираясь на единичную функцию Хевисайда. Изображение ступенчатой функции можно получить, используя теорему запаздывания.

Пример 3. Найти изображение ступенчатой функции $f(t)$, график которой имеет вид (рис. 4.11).

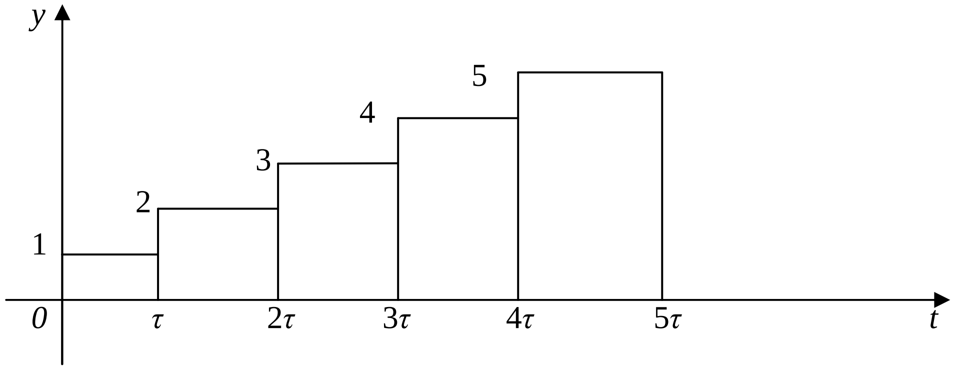


Рис. 4.11

Решение. Заданную ступенчатую функцию $f(t)$ можно представить в виде

$$f(t) = 1 \cdot \left[\tau(t) + \tau(t-\tau) + \tau(t-2\tau) + \tau(t-3\tau) + \ldots \right].$$

По теореме запаздывания получим

$$f(t) \div 1\left[\frac{1}{p} + \frac{1}{p}e^{-p\tau} + \frac{1}{p}e^{-2p\tau} + \frac{1}{p}e^{-3p\tau} \ldots \right] = \frac{1}{p}\left[1 + e^{-p\tau} + e^{-2p\tau} + e^{-3p\tau} + \ldots \right].$$

Выражение в квадратных скобках – геометрическая прогрессия, сходящаяся, т. к. $\left| e^{-p\tau} \right| = e^{-p\tau} < 1$ при $\operatorname{Re} p = s > 0$.

Окончательно имеем $f(t) \div \dfrac{1}{p} \cdot \dfrac{1}{1 - e^{-p\tau}}$.

Упражнения

1. Найти изображение функции $f(t) = |\sin t|$.

2. Найти изображение периодического оригинала с периодом $T = 2\pi$, который равен $\sin t$ при $0 < t < \pi$ и нулю при $\pi < t < 2\pi$.

§3. Преобразование Лапласа и его обращение. Теорема единственности

После построения «словаря», представляющего собой таблицу простейших оригиналов вместе с соответствующими изображениями, установки «грамматических» правил, указывающих функциональные соотношения между соответствующими изображениями, осталось научиться выполнять четвертый этап операционного метода: находить функцию – оригинал по ее изображению.

Теорема обращения. *Если функция* $f(t)$ *– оригинал, а* $F(p)$ *– ее изображение, то в любой точке непрерывности функция*

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{s-i\infty}^{s+i\infty}F(p)e^{pt}dp=\frac{1}{2\pi i}\lim_{\omega\to\infty}\int\limits_{s-i\omega}^{s+i\omega}F(p)e^{pt}dp, \tag{4.17}$$

где s *– постоянная, большая, чем действительные части всех особых точек функции* $F(p)$.

Если точка $t=t_0$ *является точкой разрыва первого рода для* $f(t)$, *то*

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{s-i\infty}^{s+i\infty}F(p)e^{pt}dp=\frac{f(t_0-0)+f(t_0+0)}{2}.$$

Доказательство. Из условия теоремы имеем

$$F(p)=\int\limits_{0}^{+\infty}e^{-pt}f(t)dt, \tag{4.18}$$

тогда

$$F(s+i\omega)=\int\limits_{0}^{+\infty}e^{-(s+i\omega)t}f(t)=\int\limits_{0}^{+\infty}\left(e^{-st}f(t)\right)\cdot e^{-i\omega t}dt.$$

Таким образом,

$$e^{-st}f(t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}F(s+i\omega)\cdot e^{i\omega t}d\omega.$$

Умножая обе части на e^{st}, получим

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}F(s+i\omega)\cdot e^{(s+i\omega)t}d\omega.$$

В последнем равенстве сделаем замену $p = s + i\omega$. Если величина s – фиксирована, то путь интегрирования есть некоторая прямая, параллельная мнимой оси и отстоящая от нее на расстоянии s. Так как $dp = id\omega$, то получим, что

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{s-i\infty}^{s+i\infty}F(p)\cdot e^{pt}dp.$$

Формула (4.17) называется формулой обращения преобразования Лапласа.

Без доказательства отметим условия, достаточные для того, чтобы функция $F(p)$ была изображением какой-то функции $f(t)$:

1. $F(p)$ – аналитическая функция в полуплоскости $\operatorname{Re} p = s > s_0$, где s_0 – действительная часть самой правой особой точки функции $F(p)$.

Это неотрицательное число s_0 будет показателем роста функции $f(t)$, определяемой по формуле (4.17).

2. $F(p) \to 0$ при $p \to +\infty$ в любой полуплоскости $\operatorname{Re} p = s > s_0$ равномерно относительно $\arg p$.

3. Функция $F(p)$ абсолютно интегрируема вдоль всякой прямой, параллельной мнимой оси, лежащей в полуплоскости $\operatorname{Re} p = s > s_0$, т.е. интеграл $\int\limits_{s-i\infty}^{s+i\infty} |F(p)| dp = A < \infty$.

При выполнении этих условий функция $F(p)$ является изображением оригинала, определяемого по $F(p)$ при помощи формулы обращения (4.17).

Формулу (4.18) называют *прямым преобразованием Лапласа*, формулу обращения (4.17) – *обратным преобразованием Лапласа*.

Отметим, что формула обращения (4.17) для непосредственного вычисления $f(t)$ не очень удобна.

Практическая ценность данной формулы в том, что она представляет собой интеграл от аналитической функции $F(p)$ в плоскости комплексной переменной p, а это дает возможность преобразовать этот интеграл, используя методы теории функции комплексной переменной.

Вопрос о единственности восстановления оригинала по известному изображению очень важен с точки зрения практического приложения. Если на этот вопрос можно ответить положительно, то для двух одинаковых изображений будут тождественны и их оригиналы. Из теоремы обращения вытекает следующая теорема.

Теорема единственности оригинала. *Если функция $F(p)$ является изображением для $f(t)$ и $g(t)$, то эти оригиналы равны во всех точках их непрерывности.*

Доказательство. Так как значение оригинала в точках его непрерывности определяется по формуле

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{s-i\infty}^{s+i\infty}F(p)\cdot e^{pt}dp$$

и значения оригинала в точках разрыва не влияют на изображение, то отсюда и следует справедливость сформулированной теоремы.

§4. Определение оригинала по его изображению. Теоремы разложения

В предыдущем параграфе получено соотношение, дающее прямое и обратное преобразование Лапласа, т.е. если $f(t)$ – оригинал, $F(p)$ – изображение, то

$$F(p)=\int\limits_{0}^{\infty}f(t)\cdot e^{-pt}dt,$$

а в точках непрерывности оригинала $f(t)$ имеет место равенство (4.17)

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{s-i\infty}^{s+i\infty}F(p)\cdot e^{pt}dp.$$

Интеграл (4.17) дает возможность решить задачу нахождения оригинала по известному изображению.

Следовательно, четвертый этап операционного метода может быть решен на основании формулы обращения (4.17), которая по известному изображению $F(p)$ позволяет определить $f(t)$. Но так как формула (4.17) имеет сложный вид (не только по форме, но и по содержанию), то при малейшей возможности стараются обратиться к другим методам и обойтись без нее.

Во-первых, сразу обращаемся к таблице оригиналов и их изображений и попытаемся отыскать в ней для найденного изображения соответствующий оригинал. Если это сразу не удается сделать, то строим оригинал из имеющихся в таблице функций, путем использования свойств преобразования Лапласа. То есть в этом случае поступаем так, как при интегрировании: при нахождении интеграла не прибегаем каждый раз к его определению (как предел интегральной суммы), а обращаемся к таблице заранее полученных интегралов или предварительно преобразовываем подынтегральное выражение, чтобы можно было использовать известные уже интегралы.

Во-вторых, можно представить функцию $F(p)$ в виде ряда

$$F(p)=\sum_{n=1}^{\infty}F_n(p),$$

который сходится в некоторой полуплоскости $\operatorname{Re}p>s_0$, причем члены этого ряда $F_n(p)$ будут изображениями уже известных оригиналов $f_n(t)$, т.е.

$$f_n(t)\div F_n(p).$$

Применяя к каждой из функций $F_n(p)$ обратное преобразование Лапласа, получим ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty}f_n(t),$$

сходящийся к некоторой функции $f(t)$, которая является оригиналом для функции $F(p)$.

Предложенный способ получения оригинала по известному изображению может приводить к неправильному результату, т.к. при применении этого способа мы, по существу, почленно интегрируем ряд $F(p)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}F_n(p)$ на бесконечном промежутке, но эта операция не всегда «законна».

Однако имеются некоторые виды рядов, для которых почленный переход из множества изображений во множество оригиналов может выполняться без всяких опасений.

Следующая теорема определяет такой класс функций.

Первая теорема разложения. *Если изображение $F(p)$ можно разложить в ряд Лорана*

$$F(p)=\frac{\alpha_0}{p}+\frac{\alpha_1}{p^2}+\frac{\alpha_2}{p^3}+\ldots+\frac{\alpha_n}{p^{n+1}}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha_n}{p^{n+1}},$$

сходящийся при $|p|>R$, то возможен почленный переход в пространство оригиналов, в результате чего получим ряд

$$\alpha_0+\frac{\alpha_1}{1!}t+\frac{\alpha_2}{2!}t^2+\ldots+\frac{\alpha_n}{n!}t^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha_n}{n!}t^n,$$

сходящийся к функции $f(t)$ при всех t. Найденная функция $f(t)$ будет оригиналом для функции $F(p)$, т. е.

$$F(p)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha_n}{p^{n+1}}\div\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha_n}{n!}t^n=f(t).$$

Пример 1. Найти оригинал $f(t)$, если

1) $F(p)=\dfrac{p^2}{p^3-1}$;   2) $F(p)=\dfrac{1}{p^2}\sin\dfrac{1}{p}$.

Решение: 1) Особыми точками данной функции являются корни уравнения $p^3-1=0$. Это точки, которые лежат на окружности $|p|=1$. Значит, в области $|p|>1$, которая является окрестностью бесконечно удаленной точки, функцию $\dfrac{p^2}{p^3-1}$ можно представить рядом Лорана по степеням p, т.е. в виде

$$\frac{p^2}{p^3-1}=\frac{p^2}{p^3\left(1-\dfrac{1}{p^3}\right)}=\frac{1}{p}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{1}{p^3}}=\frac{1}{p}\left(1+\frac{1}{p^3}+\frac{1}{p^6}+\ldots+\frac{1}{p^{3n-3}}+\ldots\right)=$$

$$=\frac{1}{p}+\frac{1}{p^4}+\frac{1}{p^7}+\ldots+\frac{1}{p^{3n-2}}+\ldots.$$

Переходя в последнем равенстве к оригиналам, получим

$$\frac{p^2}{p^3-1}\div 1+\frac{t^3}{3!}+\frac{t^6}{6!}+\ldots+\frac{t^{3n-3}}{(3n-3)!}+\ldots.$$

2) Точка $p=0$ есть особая точка для данной функции, поэтому окрестностью точки $p=\infty$ является область $|p|>0$. Разложение в данной области в ряд Лорана по степеням p имеет вид

$$\frac{1}{p^2}\sin\frac{1}{p}=\frac{1}{p^2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{3!\,p^3}+\frac{1}{5!\,p^5}-\ldots+\frac{(-1)^n}{(2n+1)!\,p^{2n+1}}\right)=$$

$$\frac{1}{p^3}-\frac{1}{3!\,p^5}+\frac{1}{5!\,p^7}-\ldots+\frac{(-1)^n}{(2n+1)!\,p^{2n+3}}.$$

Переходя к оригиналам $(t>0)$, получим

$$\frac{1}{p^2}\sin\frac{1}{p}\div\frac{t^2}{2!}-\frac{t^4}{3!\cdot 4!}+\frac{t^6}{5!\cdot 6!}-\ldots+\frac{(-1)^n t^{(2n+2)}}{(2n+1)!\cdot(2n+2)!}.$$

Рассмотрим задачу нахождения оригинала по изображению $F(p)$, которое является дробно-рациональной функцией относительно p:

$$F(p)=\frac{\phi(p)}{\varphi(p)}, \tag{4.19}$$

где $\phi(p)$ и $\varphi(p)$ – многочлены:

$$\phi(p)=a_m p^m+a_{m-1}p^{m-1}+a_{m-2}p^{m-2}+\ldots+a_0,$$

$$\varphi(p)=b_n p^n+b_{n-1}p^{n-1}+b_{n-2}p^{n-2}+\ldots+b_0,$$

причем $m<n$ (иначе бы $F(p)$ при $p\to\infty$ не стремилось к нулю, т. е. не выполнялось бы необходимое условие изображения). Считаем, что дробь (4.19) несократима, т.е. уравнения $\phi(p)=0$ и $\varphi(p)=0$ не имеют общих корней.

Тогда имеет место следующая теорема.

Вторая теорема разложения. *Если изображение $F(p)$ является дробно-рациональной функцией вида (4.19)*

$$F(p)=\frac{\phi(p)}{\varphi(p)}=\frac{a_m p^m+a_{m-1}p^{m-1}+a_{m-2}p^{m-2}+\ldots+a_0}{b_n p^n+b_{n-1}p^{n-1}+b_{n-2}p^{n-2}+\ldots+b_0},\ m<n,$$

при этом многочлен $\varphi(p)$ имеет корни $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_l$ соответственно кратностей $r_1,r_2,\ldots,r_l$ ($r_1+r_2+\ldots+r_l=n$), тогда оригинал $f(t)$ определяется по формуле

$$f(t)=\sum_{k=1}^{l}\frac{1}{(r_k-1)!}\cdot\lim_{p\to\alpha_k}\frac{d^{r_k-1}}{dp^{r_k-1}}\left[(p-\alpha_k)^{r_k}\frac{\phi(p)}{\varphi(p)}\cdot e^{pt}\right] \qquad (4.20)$$

или в развернутом виде

$$f(t)=\frac{1}{(r_1-1)!}\cdot\lim_{p\to\alpha_1}\frac{d^{r_1-1}}{dp^{r_1-1}}\left[(p-\alpha_1)^{r_1}\frac{\phi(p)}{\varphi(p)}\cdot e^{pt}\right]+$$

$$+\frac{1}{(r_2-1)!}\cdot\lim_{p\to\alpha_2}\frac{d^{r_2-1}}{dp^{r_2-1}}\left[(p-\alpha_2)^{r_2}\frac{\phi(p)}{\varphi(p)}\cdot e^{pt}\right]+\ldots$$

$$+\ldots+\frac{1}{(r_l-1)!}\cdot\lim_{p\to\alpha_l}\frac{d^{r_l-1}}{dp^{r_l-1}}\left[(p-\alpha_l)^{r_l}\frac{\phi(p)}{\varphi(p)}\cdot e^{pt}\right].$$

Доказательство. Для доказательства данной теоремы рациональную функцию $F(p)=\dfrac{\phi(p)}{\varphi(p)}$ разложим на простейшие дроби аналогично, как и при интегрировании дробно-рациональных функций. Пусть $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_l$ – корни $\varphi(p)$ соответственно кратностей $r_1,r_2,\ldots,r_l$ ($r_1+r_2+\ldots+r_l=n$). Тогда разложение дроби (4.19) на простейшие будет иметь вид

$$\frac{\phi(p)}{\varphi(p)}=\frac{A_{11}}{(p-\alpha_1)}+\frac{A_{21}}{(p-\alpha_1)^2}+\ldots+\frac{A_{r_1 1}}{(p-\alpha_1)^{r_1}}+\frac{A_{12}}{(p-\alpha_2)}+\frac{A_{22}}{(p-\alpha_2)^2}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{A_{r_2 2}}{(p-\alpha_2)^{r_2}}+\ldots+\frac{A_{1l}}{(p-\alpha_l)}+\frac{A_{2l}}{(p-\alpha_l)^2}+\ldots+\frac{A_{r_l l}}{(p-\alpha_l)^{r_l}}. \qquad (4.21)$$

Для нахождения коэффициентов A_{ij} в разложении (4.21) дроби в правой части складываются, затем приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях p в числителях слева и справа равенства (4.21), решаем полученную (совместную) систему уравнений относительно $A_{11}, A_{12}, \ldots, A_{\eta l}$.

При большом числе неизвестных полученная система требует значительной вычислительной работы.

Рассмотрим метод, позволяющий определить неизвестные коэффициенты разложения (4.21) значительно быстрее и проще.

Пусть требуется определить коэффициент A_{k2} в разложении (4.21). Для этого умножим обе части равенства (4.21) на $(p-\alpha_2)^{r_2}$ и продифференцируем полученное выражение $(k-1)$ раз, а затем перейдем к пределу при $p \to \alpha_2$. Тогда получаем

$$\lim_{p\to\alpha_2} \frac{d^{k-1}}{dp^{k-1}}\left[\frac{(p-\alpha_2)^{r_2}\,\phi(p)}{\varphi(p)}\right] = (k-1)!A_{k2},$$

откуда

$$A_{k2} = \frac{1}{(k-1)!}\lim_{p\to\alpha_2} \frac{d^{k-1}}{dp^{k-1}}\left[\frac{(p-\alpha_2)^{r_2}\,\phi(p)}{\varphi(p)}\right].$$

Поступая аналогичным образом, найдем последовательно коэффициенты $A_{k1}\ldots A_{kj}$. Переходя от разложения (4.21), заданного в пространстве изображений, в пространство оригиналов с учетом того, что

$$\frac{B}{(p-\alpha_k)^{r_k}} \div B\frac{t^{r_k-1}}{(r_k-1)!}e^{\alpha_k t},$$

получим требуемое. Теорема доказана.

Замечание 1. Если все корни $\varphi(p)$ в (4.19) простые, то соотношение (4.20) при условии $r_1 = r_2 = \ldots = r_l = 1$ принимает вид

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n}\lim_{p\to\alpha_k}\left[(p-\alpha_k)\frac{\phi(p)}{\varphi(p)}e^{pt}\right] =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\lim_{p\to\alpha_k}\frac{\phi(p)e^{pt}}{\dfrac{\varphi(p)-\varphi(\alpha_k)}{p-\alpha_k}} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\phi(\alpha_k)}{\varphi'(\alpha_k)}e^{\alpha_k t}.$$

Следовательно, если все корни знаменателя выражения $F(p)=\dfrac{\phi(p)}{\varphi(p)}$ простые, то оригинал определяется по формуле

$$f(t)=\frac{\phi(\alpha_1)}{\varphi'(\alpha_1)}e^{\alpha_1 t}+\frac{\phi(\alpha_2)}{\varphi'(\alpha_2)}e^{\alpha_2 t}+\ldots+\frac{\phi(\alpha_n)}{\varphi'(\alpha_n)}e^{\alpha_n t}. \qquad (4.22)$$

При решении задач, связанных с приложениями, часто применяется разновидность формулы (4.22), когда один из простых корней α_k равен нулю, т.е. когда выражение $F(p)$ имеет вид

$$F(p)=\frac{\phi(p)}{p\varphi_1(p)}, \qquad (4.23)$$

где $\varphi_1(p)=(p-\alpha_1)(p-\alpha_2)\cdots(p-\alpha_{k-1})(p-\alpha_{k+1})\cdots(p-\alpha_{n-1})$ имеет $(n-1)$ корней, отличных от нуля.

Учитывая, что $(p\cdot\varphi_1(p))'=\varphi_1(p)+p\cdot\varphi_1{}'(p)$, из формулы (4.22) получим

$$F(p)=\frac{\varphi(p)}{p\cdot\varphi_1(p)}\div\frac{\phi(0)}{\varphi_1(0)}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\phi(\alpha_k)}{\alpha_k\varphi_1{}'(\alpha_k)}e^{\alpha_k t}. \qquad (4.24)$$

Замечание 2. При определении коэффициентов $\dfrac{\phi(\alpha_k)}{\varphi'(\alpha_k)}$ приходится дифференцировать функцию $\varphi(p)=(p-\alpha_1)(p-\alpha_2)\ldots(p-\alpha_n)$. Полезно запомнить следующее: по правилу вычисления производной произведения получим

$$\varphi'(p)=(p-\alpha_2)(p-\alpha_3)\ldots(p-\alpha_n)+(p-\alpha_1)\cdot(p-\alpha_3)\ldots(p-\alpha_n)+$$
$$+(p-\alpha_1)(p-\alpha_2)\cdot(p-\alpha_4)\ldots(p-\alpha_n)+(p-\alpha_1)(p-\alpha_2)\ldots(p-\alpha_{n-1}).$$

Тогда

$$\varphi'(\alpha_1)=(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)\ldots(\alpha_1-\alpha_n),$$
$$\varphi'(\alpha_2)=(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_3)\ldots(\alpha_2-\alpha_n),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\varphi'(\alpha_n)=(\alpha_n-\alpha_1)(\alpha_n-\alpha_2)\ldots(\alpha_n-\alpha_{n-1}).$$

Пример 2. Найти оригинал изображения

1) $F(p)=\dfrac{p^2+p+1}{p(p^4-1)}$, 2) $F(p)=\dfrac{p^2}{(p^2-1)^3}$, 3) $F(p)=\dfrac{1}{p^3(p-1)}$.

Решение: 1) Знаменатель изображения $F(p)$ имеет простые корни $p_1=0$, $p_2=1$, $p_3=-1$, $p_4=i$, $p_5=-i$, $\phi(p)=p^2+p+1$, $\varphi'(p)=5p^4-1$, тогда по формуле (4.22) имеем

$$f(t)=\frac{\phi(0)}{\varphi'(0)}e^{0t}+\frac{\phi(1)}{\varphi'(1)}e^{t}+\frac{\phi(-1)}{\varphi'(-1)}e^{-t}+\frac{\phi(i)}{\varphi'(i)}e^{it}+\frac{\phi(-i)}{\varphi'(-i)}e^{-it}=$$

$$=-1+\frac{3}{4}e^t+\frac{1}{4}e^{-t}+\frac{i}{4}(e^{it}-e^{-it})=-1+\frac{1}{4}(3e^t+e^{-t})-\frac{\sin t}{2},$$

т.е. $f(t)=-1+\frac{1}{4}(3e^t+e^{-t})-\frac{\sin t}{2}$.

2) Так как $(p^2-1)^3=(p-1)^3(p+1)^3$, поэтому разложение $F(p)$ будет иметь следующий вид:

$$\frac{p^2}{(p-1)^3(p+1)^3}=\frac{A_{11}}{(p-1)^3}+\frac{A_{21}}{(p-1)^2}+\frac{A_{31}}{(p-1)}+\frac{A_{12}}{(p+1)^3}+\frac{A_{22}}{(p+1)^2}+\frac{A_{32}}{p+1}.$$

Находим коэффициенты разложения:

$$A_{11}=\frac{1}{0!}\lim_{p\to1}\left[(p-1)^3\frac{p^2}{(p^2-1)^3}\right]=\lim_{p\to1}\left[\frac{p^2}{(p+1)^3}\right]=\frac{1}{8},$$

$$A_{21}=\frac{1}{1!}\lim_{p\to1}\frac{d}{dp}\left[\frac{p^2}{(p+1)^3}\right]=\lim_{p\to1}\left[\frac{2p}{(p+1)^3}-\frac{3p^2}{(p+1)^4}\right]=\frac{1}{16},$$

$$A_{31}=\frac{1}{2!}\lim_{p\to1}\frac{d^2}{dp^2}\left[\frac{p^2}{(p+1)^3}\right]=\frac{1}{2}\lim_{p\to1}\left[\frac{2}{(p+1)^3}-\frac{12p}{(p+1)^4}+\frac{12p^2}{(p+1)^5}\right]=-\frac{1}{16},$$

$$A_{12}=\frac{1}{0!}\lim_{p\to-1}\left[\frac{(p+1)^3p^2}{(p-1)^3}\right]=\lim_{p\to-1}\left[\frac{p^2}{(p-1)^3}\right]=\frac{1}{8},$$

$$A_{22}=\frac{1}{1!}\lim_{p\to-1}\frac{d}{dp}\left[\frac{p^2}{(p-1)^3}\right]=\lim_{p\to-1}\left[\frac{2p}{(p-1)^3}-\frac{3p^2}{(p-1)^4}\right]=\frac{1}{16},$$

$$A_{32}=\frac{1}{2!}\lim_{p\to-1}\frac{d^2}{dp^2}\left[\frac{p^2}{(p-1)^3}\right]=\frac{1}{2}\lim_{p\to-1}\left[\frac{2}{(p-1)^3}-\frac{12p}{(p-1)^4}+\frac{12p^2}{(p-1)^5}\right]=\frac{1}{16}.$$

Тогда разложение имеет следующий вид:

$$\frac{p^2}{(p^2-1)^3}=\frac{1}{8}\frac{1}{(p-1)^3}+\frac{1}{16}\frac{1}{(p-1)^2}-\frac{1}{16}\frac{1}{(p-1)}+$$

$$+\frac{1}{8}\frac{1}{(p+1)^3}+\frac{1}{16}\frac{1}{(p+1)^2}+\frac{1}{16}\frac{1}{p+1}.$$

Отсюда находим оригинал

$$\frac{p^2}{(p^2-1)^3} \div \frac{1}{8}\frac{t^2}{2}e^t + \frac{1}{16}te^t - \frac{1}{16}e^t - \frac{1}{8}\frac{t^2}{2}e^t + \frac{1}{16}te^{-t} + \frac{1}{16}e^{-t}$$

или после преобразования имеем

$$\frac{p^2}{(p^2-1)^3} \div \frac{t^2-1}{8}\operatorname{sh} t + \frac{1}{8}\operatorname{ch} t.$$

3) В данном случае имеем $\phi(p)=1$, $\varphi(p)=p^3(p-1)$, $\varphi'(p)=4p^3-3p^2$ и корни знаменателя: $p_1=1$ – простой корень; $p_2=0$ – корень кратности 3. Тогда

$$f(t)=\frac{1}{4-3}\cdot e^{1t}+\frac{1}{2!}\lim_{p\to 0}\frac{d^2}{dp^2}\left[\frac{1}{p^3(p-1)}e^{pt}\cdot(p-0)^3\right]=$$

$$=e^t+\frac{1}{2}\lim_{p\to 0}\frac{d^2}{dp^2}\left[\frac{e^{pt}}{(p-1)}\right]=e^t-\left(1+t+\frac{t^2}{2}\right).$$

Данный пример можно решить разложением дроби $F(p)$ на сумму простейших дробей

$$F(p)=\frac{1}{p^3(p-1)}=\frac{A}{p}+\frac{B}{p^2}+\frac{C}{p^3}+\frac{D}{p-1}.$$

Приводя к общему знаменателю правую часть последнего равенства, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях числителей левой и правой частей, получим систему (совместную) четырех уравнений относительно A, B, C, D, решая которую, находим $A=-1$, $B=-1$, $C=-1$, $D=1$. Следовательно,

$$\frac{1}{p^3(p-1)} \div -1-t-\frac{t^2}{2}+e^t=e^t-(1+t+\frac{t^2}{2}).$$

Данный пример можно решить, используя свойство умножения изображений. Так как

$$F(p)=\frac{1}{p^3(p-1)}=\frac{1}{p^3}\frac{1}{p-1},\ \text{а}\ \frac{1}{p^3}\div\frac{t^2}{2};\ \ \frac{1}{p-1}\div e^t,$$

то согласно свойству умножения изображений, получим

$$F(p) \doteq \int_0^t \frac{1}{2}z^2 e^{t-z}dz = e^t-(1+t+\frac{t^2}{2}).$$

Здесь применяют дважды формулу интегрирования по частям, выбирая сначала в качестве $u=z^2$, затем $u=z$.

Замечание 3. Из второй теоремы разложения следует, что при определенных условиях, налагаемых на $F(p)$, оригиналом для него служит функция

$$f(t)=\sum_{p_k}\operatorname{Res}\left[F(p)e^{pt}\right],$$

где сумма вычетов берется по всем особым точкам p_k функции $F(p)e^{pt}$.

Если $F(p)=\dfrac{Q(p)}{R(p)}$ – правильная рациональная дробь, то оригиналом служит функция

$$f(t)=\sum_{k=1}^{\ell}\frac{1}{(n_k-1)!}\cdot\lim_{p\to p_k}\frac{d^{n_k-1}}{dp^{n_k-1}}\left[F(p)e^{pt}(p-p_k)^{n_k}\right], \tag{4.25}$$

где p_k – полюсы $F(p)$ кратности n_k. Сумма берется по всем особым точкам p_k функции $F(p)$.

Если все полюсы $F(p)$ простые, то формула (4.25) принимает вид

$$f(t)=\sum_{k=1}^{l}\frac{Q(p_k)}{R'(p_k)}\cdot e^{p_k t}.$$

Пример 3. Найти оригинал $f(t)$, если $F(p)=\dfrac{p}{\left(p^2-1\right)^2}$.

Решение. Функция имеет полюсы $p_1=1$ и $p_2=-1$ второго порядка каждый. Тогда

$$f(t)=\lim_{p\to1}\left[\frac{p}{\left(p^2-1\right)^2}\cdot e^{pt}\cdot(p-1)^2\right]'+\lim_{p\to-1}\left[\frac{p}{\left(p^2-1\right)^2}\cdot e^{pt}(p+1)^2\right]'=$$

$$=\lim_{p\to1}\left[\frac{pe^{pt}}{(p+1)^2}\right]'+\lim_{p\to-1}\left[\frac{pe^{pt}}{(p-1)^2}\right]'=\frac{1}{2}t\operatorname{sh}t.$$

Упражнения

Найти оригинал $f(t)$, если:

1. $F(p)=\dfrac{1}{p^2+4p+5}$.
2. $F(p)=\dfrac{p}{(p+1)^2}$.
3. $F(p)=\dfrac{1}{p^2\left(p^2+1\right)}$.
4. $F(p)=\dfrac{p^2+2p+1}{p^3+3p^2+3p+1}$.

5. $F(p)=\dfrac{1}{p^2+4p+3}$.

6. $F(p)=\dfrac{p^2+1}{p^2(p-1)}$.

7. $F(p)=\dfrac{1}{p^3+2p^2+p}$.

8. $F(p)=\dfrac{p}{\left(p^2+1\right)^2}$.

Вопросы для самопроверки

1. Какое интегральное преобразование называется преобразованием Лапласа?

2. Каким требованиям удовлетворяет оригинал?

3. Где существует изображение? Как ведет себя изображение при $\operatorname{Re} p = s \to \infty$?

4. Сформулируйте свойства однородности, аддитивности и подобия.

5. Сформулируйте теорему о дифференцируемости оригинала для $f'(t)$ и $f^{(n)}(t)$.

6. Какие предельные соотношения следуют из теоремы о дифференцируемости оригинала и каков их практический смысл?

7. Сформулируйте теорему об интегрировании оригинала.

8. Сформулируйте теоремы о дифференцировании и интегрировании изображений.

9. Сформулируйте теорему о запаздывании в оригинале.

10. Сформулируйте теорему о сдвиге в изображении.

11. Что называется сверткой двух функций? Назовите свойства свертки.

12. Сформулируйте свойство свертки оригиналов. Где практически используется это свойство преобразования Лапласа?

13. Запишите формулы Дюамеля.

14. Сформулируйте достаточные условия изображения.

15. Сформулируйте теорему обращения для преобразования Лапласа.

16. Как находится оригинал по его изображению?

17. Каково содержание теоремы об изображении периодического оригинала?

18. Как и когда находится оригинал по известному изображению с использованием теории вычетов?

19. Запишите формулы, определяющие оригинал через вычеты функции $F(p)e^{pt}$ в случае простых и кратных корней знаменателя.

20. В каком случае оригинал по изображению ищется в виде бесконечного ряда?

Глава 5. ПРИМЕНЕНИЕ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ К РЕШЕНИЮ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ И ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ

§1. Интегрирование линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и систем

1.1. Решение задачи Коши

Задача Коши для линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(t),\ a_0 \neq 0 \qquad (5.1)$$

состоит в нахождении решения $y = y(t)$ этого уравнения, удовлетворяющего заданным начальным условиям:

$$y(t_0) = y_0,\ y'(t_0) = y_0',\ \ldots,\ y^{(n-1)}(t_0) = y_0^{(n-1)}.$$

Операционным методом (с помощью преобразования Лапласа) эта задача может быть решена в предположении, что функция $f(t)$ удовлетворяет условиям 1) – 3), определяющим оригинал (см. п. 1.2, §1, гл. 4), а следовательно, тем же условиям удовлетворяет и искомая функция $y(t)$ со своими производными до n-го порядка включительно, и начальные условия заданы при $t_0 = 0$, т. е. в виде

$$y(0) = y_0,\ y'(0) = y_0',\ldots,y^{(n-1)}(0) = y_0^{(n-1)}. \qquad (5.2)$$

Пусть

$$y(t) \div Y(p) \text{ и } f(t) \div F(p). \qquad (5.3)$$

В силу теоремы 2 (о дифференцировании оригинала) из п. 2.5, §2, гл. 4 и начальных условий (5.2) находим

$$\begin{cases} y'(t) \div p \cdot Y(p) - y_0, \\ y''(t) \div p^2 \cdot Y(p) - p \cdot y_0 - y_0', \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y^{(n)}(t) \div p^n \cdot Y(p) - p^{n-1} \cdot y_0 - p^{n-2} \cdot y_0' - \ldots - y_0^{(n-1)}. \end{cases} \qquad (5.4)$$

Пользуясь свойством линейности изображений и соотношениями (5.3), (5.4), от уравнения (5.1) переходим к так называемому *операционному* или *изображающему уравнению*

$$a_0\left[p^n\cdot Y(p)-p^{n-1}\cdot y_0-p^{n-2}\cdot y_0'-\ldots-y_0^{(n-1)}\right]+$$

$$+a_1\left[p^{n-1}\cdot Y(p)-p^{n-2}\cdot y_0-\ldots-y_0^{(n-2)}\right]+\ldots+$$

$$+a_{n-1}\left[p\cdot Y(p)-y_0\right]+a_nY(p)=F(p),$$

которое перепишем в следующем виде

$$\begin{gathered}Y(p)\cdot\left(a_0p^n+a_1p^{n-1}+\ldots+a_n\right)=F(p)+y_0(a_0p^{n-1}+a_1p^{n-2}+\ldots+a_{n-1})+\\+y_0'(a_0p^{n-2}+a_1p^{n-3}+\ldots+a_{n-2})+\ldots+y_0^{(n-2)}(a_0p+a_1)+y_0^{(n-1)}a_0.\end{gathered}\qquad(5.5)$$

Изображающее уравнение (5.5) – это алгебраическое уравнение первой степени относительно $Y(p)$. Решая его, находим

$$Y(p)=\frac{F(p)+\Phi(p)}{\Psi(p)},\qquad(5.6)$$

где

$$\Psi(p)=a_0p^n+a_1p^{n-1}+\ldots+a_n\qquad(5.7)$$

есть *характеристический многочлен* и

$$\Phi(p)=y_0(a_0p^{n-1}+a_1p^{n-2}+\ldots+a_{n-1})+y_0'(a_0p^{n-2}+a_1p^{n-3}+\ldots+a_{n-2})+$$

$$+\ldots+y_0^{(n-2)}(a_0p+a_1)+y_0^{(n-1)}a_0$$

многочлен, не выше $(n-1)$-й степени относительно p, определяемый начальными значениями решения $y(t)$.

Затем по найденному изображению $Y(p)$ методами, указанными в гл. 4, отыскиваем соответствующий оригинал $y(t)$, который и будет искомым частным решением уравнения (5.1), удовлетворяющим начальным условиям (5.2).

Преимущество операционного метода решения задачи Коши перед классическими методами состоит в том, что, во-первых, изображающее уравнение является линейным алгебраическим относительно $Y(p)$ и, следовательно, в математическом отношении более простым, чем исходное дифференциальное уравнение; во-вторых, операционным методом сразу находится частное решение уравнения (5.1), удовлетворяющее заданным начальным условиям (5.2), и не надо искать общее решение этого уравнения.

Операционным методом можно найти и общее решение уравнения (5.1), для чего в начальных условиях (5.2) нужно положить

$$y_0 = C_1,\ y_0{}' = C_2, ..., y_0{}^{(n-1)} = C_n;$$

тогда оригинал, соответствующий изображению (5.6), будет содержать n произвольных постоянных.

Пример 1. Решить задачу Коши

$$y'(t) + 2y(t) = 2,\ y(0) = 0.$$

Решение. Применяя преобразование Лапласа к обеим частям данного уравнения, получим

$$pY(p) - y(0) + 2Y(p) = \frac{2}{p},$$

откуда с учетом, что $y(0) = 0$, получаем

$$Y(p)(p+2) = \frac{2}{p};\ \ Y(p) = \frac{2}{p(p+2)};\ \ Y(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+2}.$$

Тогда $y(t) = 1 - e^{-2t}$ – решение данной задачи Коши.

Пример 2. Найти решение задачи Коши

$$L\frac{di}{dt} + ir = u,\ i(0) = 0,$$

где $i(t)$ – сила тока в цепи, $u > 0$ – напряжение; $r > 0$ – сопротивление; $L > 0$ – индуктивность.

Решение. Пусть $i(t) \div I(p)$, тогда, применяя преобразование Лапласа к данному уравнению, перейдем к изображениям, т.е. так называемому изображающему уравнению (алгебраическому уравнению первой степени относительно $I(p)$)

$$L \cdot pI(p) + rI(p) = u$$

или

$$I(p) = \frac{u}{r + Lp}.$$

Разложим правую часть последнего равенства по степеням $\frac{1}{p}$, получим

$$I(p) = \frac{u}{Lp} \cdot \frac{1}{1 + \frac{r}{Lp}} = \frac{u}{Lp}\left(1 - \frac{r}{Lp} + \frac{r^2}{L^2p^2} - \frac{r^3}{L^3p^3} + \dots\right),$$

здесь дробь $\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{r}{Lp}\right)}$ рассматривается как сумма геометрической прогрессии, первый член которой равен единице, знаменатель $\left(-\dfrac{r}{Lp}\right)$. Отсюда имеем

$$I(p)=u\left[\frac{1}{L}\cdot\frac{1}{p}-\frac{r}{L^2p^2}+\frac{r^2}{L^3p^3}-\frac{r^3}{L^4p^4}+\dots\right].$$

Тогда на основании первой теоремы разложения (см. §4, гл. 4) для оригинала $i(t)$ получим ряд

$$i(t)=u\left[\frac{1}{L}-\frac{r}{L^2}\cdot\frac{t}{1!}+\frac{r^2}{L^3}\cdot\frac{t^2}{2!}-\frac{r^3}{L^4}\cdot\frac{t^3}{3!}+\dots\right]=$$

$$=\frac{u}{L}\left[1-\frac{r}{L}\cdot\frac{t}{1!}+\frac{r^2}{L^2}\cdot\frac{t^2}{2!}-\frac{r^3}{L^3}\cdot\frac{t^3}{3!}+\dots\right]=$$

$$=\left[e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^n}{n!}+\dots\right]=\frac{u}{L}e^{-\frac{r}{L}t}.$$

Таким образом, искомое решение данной задачи Коши имеет вид

$$i(p)=\frac{u}{r}\left[1-e^{-\frac{r}{L}t}\right].$$

Пример 3. Решить задачу Коши

$$y''-3y'+2y=2e^{3t},\quad y(0)=y'(0)=0.$$

Решение. Данное уравнение в изображениях имеет вид (изображающее уравнение)

$$Y(p)\left(p^2-3p+2\right)=\frac{2}{p-3}$$

или

$$Y(p)=\frac{2}{(p-3)\left(p^2-3p+2\right)}=\frac{2}{(p-3)(p-1)(p-2)}=\frac{1}{p-3}+\frac{1}{p-1}-\frac{1}{p-2},$$

откуда $y(t)=e^{3t}+e^{t}-2e^{2t}$.

Пример 4. Решить задачу Коши

$$y''+y=\sin t,\quad y(0)=0;\ y'(0)=-0{,}5.$$

Решение. Так как

$$y''(t) \div p^2Y(p) - p\cdot 0 + 0{,}5,$$

тогда изображающее уравнение имеет вид

$$p^2Y(p) + \frac{1}{2} + Y(p) = \frac{1}{p^2+1} \text{ или } Y(p) = -\frac{1}{2}\frac{p^2-1}{\left(p^2+1\right)^2}.$$

По таблице оригиналов и изображений находим $\dfrac{p^2-1}{\left(p^2+1\right)^2} \div t\cos t$,

поэтому имеем $y(t) = -\dfrac{1}{2}t\cos t$.

Пример 5. Решить задачу Коши

$$y'' - y = 4\sin t + 5\cos 2t, \quad y(0) = -1;\ y'(0) = -2.$$

Решение. По теореме о дифференцировании оригинала имеем (см. п. 2.5, § 2, гл. 4)

$$y''(t) \div p^2Y(p) + p + 2.$$

По таблице оригиналов и изображений (см. приложение 4) имеем

$$\sin t \div \frac{1}{p^2+1},\ \cos 2t \div \frac{p}{p^2+4}.$$

Тогда изображающее уравнение принимает вид

$$p^2Y(p) + p + 2 - Y(p) = \frac{4}{p^2+1} + \frac{5p}{p^2+4}$$

или

$$Y(p)\left(p^2-1\right) = \frac{4}{p^2+1} + \frac{5p}{p^2+4} - 2 - p,$$

$$Y(p) = \frac{4}{\left(p^2+1\right)\left(p^2-1\right)} + \frac{5p}{\left(p^2+4\right)\left(p^2-1\right)} - \frac{2}{\left(p^2-1\right)} - \frac{p}{\left(p^2-1\right)}$$

Раскладывая первое и второе слагаемые в правой части последнего равенства на сумму двух дробей, получаем

$$Y(p) = \frac{2}{p^2-1} - \frac{2}{p^2+1} + \frac{p}{p^2-1} - \frac{p}{p^2+4} - \frac{2}{p^2-1} - \frac{p}{p^2-1} = -\frac{2}{p^2+1} - \frac{p}{p^2+4}.$$

Используя таблицу оригиналов и изображений, находим искомое решение данного уравнения:

$$y(t) = -2\sin t - \cos 2t.$$

Данный пример показывает, что не всегда следует рациональную дробь-изображение сразу раскладывать на простые дроби.

Пример 6. Найти общее решение уравнения

$$y''+2y'+5y=te^t$$

Решение. По таблице изображений имеем

$$te^t \div \frac{1}{(p-1)^2}.$$

Полагая $y(t)\div Y(p)$, находим в силу произвольности начальных условий

$$y'(t)\div pY(p)-y_0,\quad y''(t)\div p^2Y(p)-y_0p-y_0',$$

где y_0 и y_0' – произвольные постоянные.

Тогда уравнение в изображениях имеет вид

$$\left(p^2+2p+5\right)Y(p)-y_0(p+2)-y_0'=\frac{1}{(p-1)^2}.$$

Определяем $Y(p)$, получим

$$Y(p)=y_0\cdot\frac{p+2}{p^2+2p+5}+y_0'\cdot\frac{1}{p^2+2p+5}+\frac{1}{(p-1)^2\left(p^2+2p+5\right)}.$$

Находим оригиналы для каждого слагаемого

$$y_0\cdot\frac{p+2}{p^2+2p+5}=y_0\left[\frac{p+1}{p^2+2p+5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{(p+1)^2+2^2}\right]\div y_0e^{-t}\left[\cos 2t+\frac{1}{2}\sin 2t\right],$$

$$y_0'\cdot\frac{1}{p^2+2p+5}=\frac{y_0'}{2}\cdot\frac{2}{(p+1)^2+2^2}\div\frac{y_0'}{2}e^{-t}\sin 2t.$$

Оригинал для третьего слагаемого находим разложением на простейшие дроби и правилу, применяемому в интегральном исчислении при интегрировании рациональных дробей (в этом случае это проще, чем применять вторую теорему разложения):

$$\frac{1}{(p-1)^2\left(p^2+2p+5\right)}=\frac{A}{(p-1)^2}+\frac{B}{p-1}+\frac{Cp+D}{p^2+2p+5}.$$

Приводя к общему знаменателю правую часть последнего равенства, и приравнивая числители данного разложения, приходим к следующему тождеству для определения коэффициентов A,B,C,D

$$1\equiv A\left(p^2+2p+5\right)+B(p-1)\left(p^2+2p+5\right)+(Cp+D)(p-1)^2.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях p и решая систему четырех уравнений с четырьмя неизвестными или полагая, что p принимает частные значения (корни знаменателя), получим $A=\frac{1}{8}$, $B=-\frac{1}{16}$, $C=-\frac{1}{16}$, $D=\frac{1}{16}$. Тогда

$$\frac{1}{(p-1)^2\left(p^2+2p+5\right)}=\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{(p-1)^2}-\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{p-1}+\frac{1}{16}\cdot\frac{p+1}{(p+1)^2+4}\div$$

$$\div\frac{1}{8}\cdot te^t-\frac{1}{16}\cdot e^t+\frac{1}{16}\cdot e^{-t}\cdot\cos 2t.$$

Собирая оригиналы всех слагаемых, находим решение уравнения

$$y(t)=\frac{2t-1}{16}e^t+e^{-t}\left[\left(y_0+\frac{1}{16}\right)\cos 2t+\frac{y_0+y_0'}{2}\sin 2t\right]$$

или

$$y(t)=\frac{2t-1}{16}e^t+e^{-t}\left(C_1\cos 2t+C_2\sin 2t\right),$$

где $C_1=y_0+\frac{1}{16}$; $C_2=\frac{y_0+y_0'}{2}$.

Рассмотрим пример для случая, когда начальное значение независимой переменной отлично от нулевого.

Требование, что бы начальные условия были в точке $t=0$, несущественно, т.к. линейной заменой независимой переменной t задача Коши при $t=t_0\neq 0$ сводится к задаче с начальными условиями в точке $\tau=0$. Покажем это на примере дифференциального уравнения второго порядка.

Пусть требуется решить задачу Коши

$$a_0y''(t)+a_1y'(t)+a_2y(t)=f(t),\ y(t_0)=y_0,\quad y'(t_0)=y_1,\quad t_0\neq 0.$$

Полагаем $t=\tau+t_0$, тогда $y(t)=y(\tau+t_0)=\overline{y}(\tau)$, $f(t)=f(\tau+t_0)=\overline{f}(\tau)$.

Данное уравнение и начальные условия принимают вид

$$a_0\overline{y}''(\tau)+a_1\overline{y}'(\tau)+a_2\overline{y}(\tau)=\overline{f}(\tau),\ \overline{y}(0)=y_0;\quad \overline{y}'(0)=y_1.$$

Таким образом, получили задачу Коши с начальными условиями, заданными в точке $\tau=0$.

Пример 7. Решить задачу Коши

$$y''+y'=t,\ y(1)=1,\ y'(1)=0.$$

Решение. Положим $t=\tau+1$ и $y(t)=y(t+\tau)=\overline{y}(\tau)$. Тогда данное уравнение и начальные условия примут вид

$$\overline{y}''(\tau)+\overline{y}'(\tau)=\tau+1, \overline{y}(0)=1, \overline{y}'(0)=0,$$

так как значению $t=1$, отвечает значение $\tau=0$.

Пусть $\overline{y}(\tau)\div Y(p)$, тогда $\overline{y}'\div pY(p)-1, \overline{y}''\div p^2Y(p)-p$ и операторное уравнение имеет вид

$$p^2Y(p)+pY(p)=1+p+\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}.$$

Решая его относительно $Y(p)$, находим $Y(p)=\dfrac{1}{p^3}+\dfrac{1}{p}$. Переходя к оригиналам, получим $\overline{y}(\tau)=1+\dfrac{\tau^2}{2}$. Заменив τ на $t-1$, получим искомое решение задачи Коши

$$y(t)=1+\frac{(t-1)^2}{2}.$$

Пример 8. Решить задачу Коши

$$y''+y+\sin 2t=0; \; y(\pi)=1; \quad y'(\pi)=1.$$

Решение. При переходе к изображающему уравнению возникает некоторая трудность, заключающаяся в том, что в изображение y'' будут входить начальные значения искомой функции и её производной не в точке $t=\pi$, а в точке $t=0$. Для того чтобы обойти это затруднение, используем следующий приём.

Считая, что решение данного уравнения есть функция с запаздыванием на π, найдем решение $y(\tau)\,(\tau=t-\pi)$ до включения функции с запаздыванием, а затем полученное решение сдвинем на π вправо. Тогда

$$y(0)=y(\pi)=1, y'(0)=y'(\pi)=1.$$

Изображающее уравнение имеет вид

$$p^2Y(p)-p-1+Y(p)+\frac{2}{p^2+4}=0,$$

откуда

$$Y(p)=\frac{p}{p^2+1}+\frac{1}{p^2+1}-\frac{2}{\left(p^2+4\right)\left(p^2+1\right)}=\frac{p}{p^2+1}+\frac{1}{3\left(p^2+1\right)}+\frac{2}{3\left(p^2+4\right)}.$$

Значит

$$y(\tau)=\cos\tau+\frac{1}{3}\sin\tau+\frac{1}{3}\sin 2\tau \qquad \tau=t-\pi,$$

а

$$y(t)=\cos(t-\pi)+\frac{1}{3}\sin(t-\pi)+\frac{1}{3}\sin 2(t-\pi)=-\cos t-\frac{1}{3}\sin t+\frac{1}{3}\sin 2t.$$

Итак, имеем

$$y(t)=-\cos t-\frac{1}{3}\sin t+\frac{1}{3}\sin 2t.$$

Упражнения

Решить задачу Коши:

1. $y''+y=e^t;\ y(1)=1;\ y'(1)=0.$
2. $y''+y=0;\ y(\pi)=1;\ y'(\pi)=0.$
3. $y''+y'=2t;\ y(1)=1;\ y'(1)=-1.$
4. $y''-y'=-2t;\ y(2)=8;\ y'(2)=6.$
5. $y''+y=-2\sin t;\ y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0;\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=1.$
6. $y''+2y'+y=2\cdot e^{1-t};\ y(1)=1;\ y'(1)=-1.$
7. $y''+3y'+2y=te^{3t};\ y(1)=1;\ y'(1)=1.$

1.2. Интегрирование дифференциальных уравнений, правые части которых заданы кусочно-аналитическими функциями

Рассмотрим примеры решения линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, правые части которых заданы кусочно-аналитическими функциями, методами операционного исчисления.

Пример 1. Решить задачу Коши

$$y'+y=\begin{cases}1, & 0<t<2,\\ 0, & t>2,\end{cases} \qquad y(0)=0.$$

Решение. Функцию в правой части данного уравнения можно рассматривать как сумму двух оригиналов: единичной функции и единичной функции сдвинутой на 2. Составляем операторное уравнение

$$p\cdot Y(p)+Y(p)=\frac{1-e^{-2p}}{p},\ Y(p)=\frac{1-e^{-2p}}{p(p+1)}=\frac{1}{p}-\frac{1}{p+1}-\frac{e^{-2p}}{p(p+1)}.$$

Оригинал для последнего изображения найдем по теореме запаздывания:

$$\frac{e^{-2p}}{p(p+1)} \div \left(1-e^{-(t-2)}\right)1(t-2)=\begin{cases}0,\ 0<t<2,\\ 1-e^{-(t-2)},\ t>2.\end{cases}$$

Тогда $$y(t)=1-e^{t}-\left(1-e^{-(t-2)}\right)\cdot 1(t-2).$$

Отметим, что $y(t)$ – непрерывная функция, но ее производная в точке $t=2$ имеет разрыв первого рода: $\lim\limits_{t\to 2-0} y'(t)=\dfrac{1}{e^2}$; $\lim\limits_{t\to 2+0} y'(t)=-\dfrac{e^2-1}{e^2}$.

График функции $y(t)$ при $t=2$ имеет «угловую точку», т.е. $y'(2)$ не существует.

Пример 2. Решить задачу Коши

$$y''+y=f(t),\ y(0)=y'(0)=0,\ \text{если}\ f(t)=\begin{cases}1,\ t\in(0;1),\\ -1,\ t\in(1;2).\end{cases}$$

Решение. Так как $f(t)=1(t)-2\,1(t-1)+1(t-2)$, то применяя формулу $f(t-\tau)\div e^{-p\tau}F(p)$, получим

$$f(t)\div\frac{1}{p}-2\frac{e^{-p}}{p}+1\cdot\frac{e^{-2p}}{p}=\frac{1-2e^{-p}+e^{-2p}}{p}.$$

Если $y(t)\div Y(p)$, то $y''(t)\div p^2Y(p)-pY(0)-y'(0)=p^2Y(p)$.

Операторное уравнение имеет вид

$$\left(p^2+1\right)Y(p)=\frac{1-2e^{-p}+e^{2p}}{p},$$

откуда $$Y(p)=\frac{1}{p\left(p^2+1\right)}-\frac{2e^{-p}}{p\left(p^2+1\right)}+\frac{e^{-2p}}{p\left(p^2+1\right)}.$$

Так как $\dfrac{1}{p\left(p^2+1\right)}\div(1-\cos t)1(t)$, ибо $\dfrac{1}{p\left(p^2+1\right)}=\dfrac{1}{p}-\dfrac{p}{p^2+1}$,

тогда $$\frac{1}{p\left(p^2+1\right)}\cdot e^{-p}\div\left(1-\cos(t-1)\right)1(t-1),$$

$$\frac{1}{p\left(p^2+1\right)}e^{-2p}\div\left(1-\cos(t-2)\right)1(t-2).$$

Окончательно получаем

$$y(t)=(1-\cos t)1(t)-2\left(1-\cos(t-1)\right)1(t-1)+\left(1-\cos(t-2)\right)1(t-2).$$

Упражнения

Решить задачу Коши:

1. $y'' + 4y = f(t)$, $y(0) = y'(0) = 0$.
2. $y'' + y = f(t)$, $y(0) = 1$; $y'(0) = 0$.

1.3. Решение дифференциальных уравнений с помощью формулы Дюамеля

Пусть требуется решить линейное неоднородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами n-го порядка

$$L(x) = x^{(n)} + a_1 \cdot x^{(n-1)} + \ldots + a_n x = f(t). \tag{5.8}$$

при нулевых начальных условиях

$$x(0) = x'(0) = \ldots = x^{(n-1)}(0) = 0. \tag{5.9}$$

Суть метода решения задачи (5.8) – (5.9), основанного на применении теоремы умножения изображений (формулы Дюамеля), состоит в следующем: если известно решение уравнения (5.8) при какой-то одной правой части, то с помощью свертки находится решение при любой другой правой части.

Рассмотрим вспомогательную задачу (случай), когда в (5.8) $f(t) = 1$. Имеем

$$L(x) = 1 \tag{5.10}$$

с нулевыми условиями (5.9).

Решение задачи (5.10) – (5.9) обозначим через $x_1(t)$, а его изображение через $X_1(p)$, т.е. $x_1(t) \div X_1(p)$. Тогда операторное уравнение для (5.10) имеет вид (см. п. 2.5, § 2, ч. 4)

$$X_1(p)\,p^n + a_1 X_1(p)\,p^{n-1} + \ldots + a_n X_1(p) = \frac{1}{p}$$

или

$$X_1(p) \cdot L(p) = \frac{1}{p}, \tag{5.11}$$

где $L(p) = p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n$ – характеристический многочлен.

Так как решение $x_1(t)$, а следовательно и его изображение $X_1(p)$ известно, то из формулы (5.11) находим

$$L(p)=\frac{1}{p\cdot X_1(p)}. \qquad (5.12)$$

Рассмотрим задачу Коши (5.8) – (5.9). Его операторное уравнение

$$X(p)\cdot L(p)=F(p); \quad F(p)\div f(t),$$

или с учетом (5.12)

$$X(p)\cdot\frac{1}{p\cdot X_1(p)}=F(p).$$

Откуда

$$X(p)=p\cdot X_1(p)\cdot F(p).$$

Применяя теорему умножения изображений (см. п. 2.9, §2, гл. 4), получим искомое решение $x(t)$ задачи (5.8) – (5.9), которое будет иметь вид

$$x(t)=\int_0^t x_1'(\tau)\, f(t-\tau)\,d\tau. \qquad (5.13)$$

Выполняя в равенстве (5.13) интегрирование по частям и учитывая, что $x_1(0)=0$ в силу начальных условий (5.9), получим формулу (интеграл) Дюамеля

$$x(t)=x_1(t)\, f(0)+\int_0^t x_1(\tau)f'(t-\tau)\,d\tau=x_1(t)\, f(0)+\int_0^t f'(\tau)x_1(t-\tau)\,d\tau \qquad (5.14)$$

(так как свертка обладает свойством коммутативности).

Решение дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами с помощью формулы Дюамеля целесообразно, когда проводится исследование какой-либо определенной динамической системы, работа которой описывается левой частью уравнения (5.8). Для нее один раз находится решение уравнения (5.8) с правой частью $f(t)=1$, удовлетворяющее нулевым начальным условиям. Затем по формуле (5.13) или (5.14) ищут решения уравнения (5.8) (при нулевых начальных условиях) для любых правых частей $f(t)$.

Пример 1. Используя формулу Дюамеля решить задачу Коши

$$x''(t)-x(t)=\frac{1}{1+e^t}; \quad x(0)=x'(0)=0.$$

Решение. Рассмотрим вспомогательную задачу

$$x_1''(t)-x_1(t)=1; \quad x_1(t)=x_1'(0)=0.$$

Применяя операторный метод, находим

$$X_1(p) = \frac{1}{p\left(p^2-1\right)} = \frac{1}{p(p-1)(p+1)},$$

откуда

$$x_1(t) = \int_0^t \operatorname{sh}\tau d\tau = \operatorname{ch} t - 1.$$

Тогда искомое решение данной задачи имеет вид

$$x(t) = \int_0^t \frac{1}{1+e^\tau} \operatorname{sh}(t-\tau)\, d\tau = \frac{1}{2}\left(e^t - te^t - 1\right) + \operatorname{sh} t \cdot \ln\frac{1+e^t}{2}.$$

Замечание. Требование, чтобы начальные условия были нулевыми, являются несущественными, т. к. простой заменой искомой функции задачу с ненулевыми начальными условиями можно привести к задаче с нулевыми условиями.

Рассмотрим это на примере дифференциального уравнения второго порядка.

Пусть требуется решить следующую задачу Коши

$$a_0 x''(t) + a_1 x'(t) + a_2 x(t) = f(t), \tag{5.15}$$

$$x(0) = x_0; \quad x'(0) = x_1. \tag{5.16}$$

Полагаем

$$y(t) = x(t) - x_0 - x_1 t, \tag{5.17}$$

тогда $y'(t) = x'(t) - x_1, \quad y''(t) = x''(t)$, а значит уравнение (5.15) примет вид

$$a_0 y''(t) + a_1 y'(t) + a_2 y(t) = f_1(t),$$

где $f_1(t) = f(t) - a_1 x_1 - a_2 x_0 - a_2 x_1 t$. Тогда в силу (5.17)

$$y(0) = x(0) - x_0 = 0; \quad y'(0) = x'(0) - x_1 = 0.$$

Таким образом, приходим к следующей задаче Коши

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = f_1(t), \; y(0) = 0; \quad y'(0) = 0.$$

Пример 2. С помощью формулы Дюамеля решить задачу Коши

$$x'' + 2x' + x = \frac{e^{-t}}{(1+t)^2} + t; \quad x(0) = -2; \quad x'(0) = 1.$$

Решение. Сведем данную задачу к задаче с нулевыми начальными условиями. Для этого полагаем $y(t) = x(t) + 2 - t$.

Тогда $y'(t) = x'(t) - 1, \; y''(t) = x''(t)$.

Приходим к задаче

$$y'' + 2y' + y = \frac{e^{-t}}{(1+t)^2},\ y(0) = y'(0) = 0.$$

Решая эту задачу с помощью интеграла Дюамеля, найдем

$$y = e^{-t}\left(t - \ln(1+t)\right).$$

Таким образом, решение исходной задачи Коши (с ненулевыми начальными условиями) имеет вид

$$x(t) = e^{-t}\left(t - \ln(1+t)\right) - 2 + t.$$

Упражнения

С помощью формулы Дюамеля найти решение задачи Коши:

1. $x'' - x' = \dfrac{e^{2t}}{\left(1+e^t\right)^2};\quad x(0) = x'(0) = 0.$
2. $x'' + 2x' + x = \dfrac{e^{-t}}{1+t};\quad x(0) = x'(0) = 0.$
3. $x'' - 2x' - 3x = 2t;\quad x(0) = 1;\quad x'(0) = 1.$
4. $x'' + 4x' = \sin 2t;\quad x(0) = 0;\quad x'(0) = 1.$

1.4. Интегрирование систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами операционным методом решаются так же, как и одно уравнение. Отличие будет лишь в том, что вместо одного изображающего уравнения будем иметь систему таких уравнений, причем эта система в отношении изображений искомых функций будет линейной алгебраической. Всякую систему можно интегрировать в ее первоначальном виде (без каких бы то ни было предварительных преобразований).

Пример 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x' + 3x - 4y = 9e^{2t}, \\ 2x + y' - 3y = 3e^{2t}, \end{cases}$$

при начальных условиях $x(0) = 2,\ y(0) = 0$.

Решение. Пусть $x(t) \div X(p)$; $y(t) \div Y(p)$, тогда с учетом начальных условий имеем $x'(t) = pX(p) - 2$; $y'(t) \div pY(p)$. Система операторных уравнений примет вид

$$\begin{cases} (p+3)X(p) - 4Y(p) = \dfrac{2p+3}{p-2}, \\ 2X(p) + (p-3)Y(p) = \dfrac{3}{p-2}. \end{cases}.$$

Решая полученную систему относительно $X(p), Y(p)$, например методом Крамера, получим

$$\Delta = \begin{vmatrix} p+3 & -4 \\ 2 & p-3 \end{vmatrix} = \left(p^2 - 9\right) + 8 = p^2 - 1,$$

$$\Delta_{x(p)} = \begin{vmatrix} \dfrac{2p+5}{p-2} & -4 \\ \dfrac{3}{p-2} & p-3 \end{vmatrix} = \frac{(2p+5)(p-3)}{p-2} + \frac{12}{p-2} = \frac{2p^2 - p - 3}{p-2},$$

$$\Delta_{y(p)} = \begin{vmatrix} p+3 & \dfrac{2p+5}{p-2} \\ 2 & \dfrac{3}{p-2} \end{vmatrix} = \frac{3(p+3)}{p-2} - \frac{2(2p+5)}{p-2} = \frac{-p-1}{p-2}.$$

Откуда

$$X(p) = \frac{2p-3}{(p-1)(p-2)}; \quad Y(p) = -\frac{1}{(p-1)(p-2)},$$

а значит, решение исходной системы имеет вид

$$x(t) = e^t + e^{2t}; \quad y(t) = e^t - e^{2t}.$$

Пример 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x' + y = \begin{cases} 1, & 0 < t < 1, \\ 0, & t > 1, \end{cases} \\ y' + x = \begin{cases} 1, & 0 < t < 2, \\ 0, & t > 2, \end{cases} \end{cases}$$

при начальных условиях $x(0) = y(0) = 0$.

Решение. Система операторных уравнений в этом случае имеет вид

$$\begin{cases} pX(p)+Y(p)=\dfrac{1-e^{-p}}{p}, \\ X(p)+pY(p)=\dfrac{1-e^{-2p}}{p}. \end{cases}$$

Ее решение

$$X(p)=\frac{1}{p(p+1)}-\frac{e^{-p}}{p^2-1}+\frac{e^{-2p}}{p\left(p^2-1\right)},$$

$$Y(p)=\frac{1}{p(p+1)}+\frac{e^{-p}}{p\left(p^2-1\right)}-\frac{e^{-2p}}{p^2-1}.$$

Тогда решение исходной системы имеют вид

$$x(t)=\begin{cases} 1-e^{-t},\, 0<t<1, \\ 1-e^{-t}-\operatorname{sh}(t-1), 1<t<2, \\ -e^{-t}+\operatorname{sh}(t-1)-\operatorname{sh}(t-2),\, t>2, \end{cases}$$

$$y(t)=\begin{cases} 1-e^{-t},\, 0<t<1, \\ -e^{-t}+\operatorname{sh}(t-1), 1<t<2, \\ -e^{-t}+\operatorname{sh}(t-1)-\operatorname{sh}(t-2),\, t>2. \end{cases}$$

Отметим, что полученные решения непрерывны в точках $t=1$ и $t=2$, но их производные в этих точках имеют разрывы.

Упражнения

Решить систему уравнений:

1. $\begin{cases} x'-y'-2x+2y=1-2t, \\ x''+2y'+x=0, \end{cases}$ $\quad x(0)=y(0)=x'(0)=0.$

2. $\begin{cases} 2x''-x'+9x-y''-y'-3y=0, \\ 2x''+x'+7x-y''+y'-5y=0, \end{cases}$ $\quad x(0)=x'(0)=1,\, y(0)=y'(0)=0.$

3. $\begin{cases} x'=2x-y+z, \\ y'=x+z, \\ z'=-3x+y-2z, \end{cases}$ $\quad x(0)=1,\, y(0)=1,\, z(0)=0.$

§2. Решение некоторых интегральных уравнений и систем операторным методом

Рассмотрим интегральное уравнение типа свертки

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x k(x-t)\varphi(t)\,dt,$$

где φ – неизвестная функция; f и k – заданные функции.

Пусть $\Phi(p) \div \varphi(x)$, $\quad F(p) \div f(x)$, $\quad L(p) \div k(x)$.

Применяя преобразование Лапласа к обеим частям данного уравнения и формулу свертки, получим

$$\Phi(p) = F(p) + L(p)\cdot\Phi(p).$$

Откуда имеем $\Phi(p) = \dfrac{F(p)}{1-L(p)}$. Для $\Phi(p)$ находим оригинал $\varphi(x)$ – решение исходного интегрального уравнения.

Пример 1. Решить уравнение $\varphi(x) = \cos x + \int_0^x (x-t)\varphi(t)\,dt$.

Решение. Переходя к изображениям и рассматривая интеграл как свертку функций, получим $\Phi(p) = \dfrac{p}{p^2+1} + \dfrac{1}{p^2}\Phi(p)$, откуда

$$\Phi(p) = \frac{p^2}{\left(p^2+1\right)\left(p^2-1\right)}.$$

Тогда искомое решение данного уравнения $\varphi(x) = \dfrac{1}{2}(\cos x + \operatorname{sh} x)$.

Аналогичным образом решается уравнение

$$\int_0^x k(x-t)\varphi(t)\,dt = f(x),$$

где k – ядро, зависящее только от разности $(x-t)$; f – известная функция, φ – искомая функция.

Пример 2. Найти решение интегро-дифференциального уравнения

$$y''(t) - 4\int_0^t \left(y'(\tau) + y(\tau)\right) e^{-(t-\tau)} d\tau = 0, \quad y(0) = 0; \quad y'(0) = 6.$$

Решение. Пусть $y(t) \div Y(p)$, тогда

$$y'(t) \div pY(p) - y(0) = pY(p);\ y''(t) \div p^2 Y(p) - 6,$$

$$\int_0^t \left(y'(\tau) + y(\tau)\right) e^{-(t-\tau)} d\tau = \left(y'(t) + y(t)\right) * e^{-t} \div \left(pY(p) + Y(p)\right)\frac{1}{p+1} = Y(p).$$

Операторное уравнение имеет вид

$$p^2 Y(p) - 6 - 4Y(p) = 0,$$

$$Y(p) = \frac{6}{p^2-4} = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{p-2} - \frac{1}{p+2}\right).$$

Получим искомое решение:

$$y(t) = \frac{3}{2}\left(e^{2t} - e^{-2t}\right).$$

Операторный метод применим к системам интегральных уравнений вида

$$\varphi_i(x) = f_i(x) + \sum_{k=1}^{S}\int_0^x K_{ik}(x-t)\varphi_k(t)\,dt = 0,\ k = \overline{1,S}.$$

Применяя к обеим частям данной системы преобразование Лапласа, получим

$$\Phi_i(p) = F_i(p) + \sum_{k=1}^{S} L_{ik}(p)\Phi_k(p) = 0;\ i = \overline{1,S}.$$

Решаем полученную систему линейных уравнений относительно $\Phi_i(p),\ i = \overline{1,S}$, затем находим оригиналы для полученных $\Phi_i(p),\ i = \overline{1,S}$, которые и будут решением исходной системы уравнений.

Пример 3. Решить систему интегральных уравнений

$$\begin{cases} \varphi_1(x) = x + \int\limits_0^x e^{-(x-t)}\varphi_1(t)\,dt + \int\limits_0^x (x-t)\varphi_2(t)\,dt \\ \varphi_2(x) = 1 + \int\limits_0^x \operatorname{sh}(x-t)\varphi_1(t) - \int\limits_0^x e^{(x-t)}\varphi_2(t)\,dt \end{cases}$$

Решение. Применяя преобразование Лапласа к каждому уравнению системы и используя теорему о свертке, получим

$$\begin{cases} \Phi_1(p) = \dfrac{1}{p^2} + \dfrac{1}{p+1}\Phi_1(p) + \dfrac{1}{p^2}\Phi_2(p), \\ \Phi_2(p) = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p^2-1}\Phi_1(p) - \dfrac{1}{p-1}\Phi_2(p). \end{cases}$$

Решая полученную систему относительно $\Phi_1(p)$ и $\Phi_2(p)$, получим

$$\Phi_1(p) = \frac{p^2+p-1}{p(p-1)\left(p^2+1\right)};\ \Phi_2(p) = \frac{p^3-p+1}{(p-1)(p+1)\left(p^2+1\right)}.$$

Находим оригиналы для $\Phi_1(p)$ и $\Phi_2(p)$,

$$\varphi_1(x) = 1 + \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}\sin x - \frac{3}{2}\cos x,\ \varphi_2(x) = \frac{1}{2}(\cos x + \operatorname{ch} x) - \sin x.$$

Полученная система функций $(\varphi_1(x), \varphi_2(x))$ – решение исходной системы интегральных уравнений.

Упражнения к § 2

Решить интегральные уравнения (системы):

1) $\varphi(x) = x + \int\limits_0^x \sin(x-t)\varphi(t)\,dt$.

2) $\varphi(x) = \cos x + \int\limits_0^x e^{x-t}\varphi(t)\,dt$.

3) $\varphi(x) = 1 + \dfrac{1}{2}\int\limits_0^x \sin 2(x-t)\varphi(t)\,dt$.

4) $\varphi(x) = \sin x + 2\int\limits_0^x \cos(x-t)\varphi(t)\,dt$.

5) $\varphi(x) = e^x - 2\int\limits_0^x \cos(x-t)\varphi(t)\,dt$.

6) $\varphi(x) = 1 + \dfrac{1}{6}\int\limits_0^x (x-t)^3\varphi(t)\,dt$.

7) $\int\limits_0^x e^{x-t}\varphi(t)\,dt = x$.

8) $\int\limits_0^x \cos(x-t)\varphi(t)\,dt = \sin x$.

9) $\int\limits_0^x e^{x-t}\varphi(t)\,dt = \sin x$.

10) $\int\limits_0^x \cos(x-t)\varphi(t)\,dt = x + x^2$.

11) $\begin{cases} \varphi_1(x) = e^x + \int\limits_0^x \varphi_1(x)dx - \int\limits_0^x e^{(x-t)}\varphi_2(t)\,dt, \\ \varphi_2(x) = -x - \int\limits_0^x (x-t)\varphi_1(x)\,dt + \int\limits_0^x \varphi_2(t)\,dt. \end{cases}$

12) $$\begin{cases} \varphi_1(x) = 1 - 2\int\limits_0^x e^{2(x-t)}\varphi_1(t)\,dt + \int\limits_0^x \varphi_2(t)\,dt, \\ \varphi_2(x) = 4x - \int\limits_0^x \varphi_1(t)\,dt + 4\int\limits_0^x (x-t)\varphi_2(t)\,dt. \end{cases}$$

§3. Решение некоторых линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами

Пример. Найти общее решение уравнения $t \cdot x'' - 2x' = 0$.

Решение. Пусть $x(t) \div X(p)$, тогда

$$x'(t) \div pX(p) - x(0);\ x''(t) \div p^2 X(p) - px(0) - x'(0),$$

$$t \cdot x''(t) \div -\frac{d}{dp}\left(p^2 X(p) - px(0) - x'(0)\right) = -\frac{p^2 dX(p)}{dp} - 2pX(p) + x(0).$$

Исходное уравнение принимает вид

$$-p^2 \frac{dX(p)}{dp} - 2pX(p) + x(0) - 2pX(p) + 2x(0) = 0$$

или

$$\frac{dX(p)}{dp} + \frac{4}{p}X(p) = \frac{3x(0)}{p^2}.$$

Получили линейное дифференциальное уравнение первого порядка, интегрируя его, получим

$$X(p) = C\frac{1}{p^4} + \frac{x(0)}{p},$$

откуда решение исходного уравнения имеет вид

$$x(t) = x(0) + C\frac{t^3}{3!}.$$

Упражнения к § 3

Найти решение уравнения:

1) $tx'' + 2x' = 0$.

2) $tx'' + (2t-1)x' + (t-1)x = 0$.

3) $x'' + (t+1)x' + tx = 0;\ x(0) = 1,\ x'(0) = -1$.

4) $x'' + tx - (t+1)x = 0;\ x(0) = x'(0) = 1$.

ОТВЕТЫ

Глава 1

§1

2. а) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$; б) $2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$; г) $2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$; д) $3(\cos\pi+i\sin\pi)$; е) $\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$; ж) $\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$; и) $2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$; л) $\sqrt{29}\left(\cos\left(\operatorname{arctg}\left(-\frac{5}{2}\right)\right)+i\sin\left(\operatorname{arctg}\left(-\frac{5}{2}\right)\right)\right)$.

4. 2^{30}; 2^{6}; -2^{20}. **5.** а) $35+15i$. **6.** 1, $\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$, i, $-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$, -1, $-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$, $-i$, $\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$.

§2

1. а) да; б) нет; в) нет; г) да; д) да.

2. а) замкнутая круговая область с центром в точке (1,0) и радиусом 4; б) внешность круга с центром в точке (0, i) и радиусом 3; в) вертикальная полоса, для которой $-1\le x<2$; г) верхняя полуплоскость $y\ge 5$; д) угол, для которого $-\frac{\pi}{6}<\varphi\le\frac{\pi}{2}$; е) вертикальная полоса $-2\le x\le 2$; ж) угол, для которого $-\frac{\pi}{4}\le\varphi\le\frac{\pi}{4}$.

3. а) $0<\arg z<\frac{\pi}{2}$; б) $-\pi\le\arg z\le-\frac{\pi}{2}$; в) $|z-2-3i|\le 1$; г) $|z+1-2i|<3$; д) $\operatorname{Im} z>1$; е) $-1\le\operatorname{Re} z\le 4$.

4. а) $\sqrt[3]{e}+\frac{1}{3}i$; б) $2+\frac{5}{6}i$; в) $\frac{1}{3}+e^{3}i$; г) $\frac{1}{6}i$.

5. а) сходится абсолютно; б) сходится абсолютно; в) расходится; г) сходится абсолютно.

§3

1. 1) $w=(x^2-y^2-x+1)+i(2xy-y)$; 2) $w=\frac{x}{x^2+y^2}-i\frac{y}{x^2+y^2}$;

3) $w=\sqrt{x^2+y^2}+x$.

2. 1) $w_1 = -8+3i$, $w_2 = -8-3i$, $w_3 = 2-3i$; 2) $w_1 = \frac{1}{10} - \frac{3}{10}i$, $w_2 = -\frac{1}{3}i$, $w_3 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$; 3) $w_1 = 1+\sqrt{10}$, $w_2 = 3$, $w_3 = \sqrt{2} - 1$.

3. 1) $w = 2+i$; 2) $w = \frac{1}{2}(1+i)$.

4. $w = 2(1+i)t^3, \quad 0 \le t < \infty$. Это биссектриса первого координатного угла.

5. На всей комплексной плоскости (Z), кроме: 1) точки $z = i$; 2) окружности $|z| = 2$; 3) окружности $|z-2| = 3$.

6. 1) В точке $z = i$; 2) на окружности $|z| = 2$; 3) на окружности $|z-2| = 3$; 4) в точках $z = -3$ и $z = \infty$.

§4

1) $|z+3i| < \frac{1}{\sqrt{5}}$; 2) $|z-1+i| < \sqrt{10}$; 3) $|z-1+2i| > \sqrt{2}$; 4) $|z+5i| > 5$; 5) $2 < |z-1| < 5$; 6) $1 < |z-2i| < 4$.

§5

1. 1) $1 + \frac{z}{3} + \frac{z^2}{3^2 \cdot 2!} + \frac{z^3}{3^3 \cdot 3!} + \cdots + \frac{z^n}{3^n \cdot n!} + \cdots$;

2) $3z - \frac{(3z)^3}{3!} + \frac{(3z)^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n+1} \frac{(3z)^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots$;

3) $1 - \frac{z^2}{2^2 \cdot 2!} + \frac{z^4}{2^4 \cdot 4!} - \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{2^{2n}(2n)!} + \cdots$;

4) $(z-2) + \frac{(z-2)^3}{3!} + \frac{(z-2)^5}{5!} + \cdots + \frac{(z-2)^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots$;

5) $1 + \frac{(z+1)^2}{2!} + \frac{(z+1)^4}{4!} + \cdots + \frac{(z+1)^{2n}}{(2n)!} + \cdots$.

2. 1) $i(\pi + 2k\pi), \quad k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$; 2) $i\pi$; 3) $i\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), \quad k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$; 4) $-\frac{\pi}{2}i$; 5) $\ln 2 + i\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right), \quad k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$.

3. 1) ie^2; 2) $e^{2\ln 3-2k\pi}(\cos\ln 3+i\sin\ln 3)$; 3) $e^{-\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)}$, $k=0,\pm1,\pm2,\ldots$.

4. 1) $\dfrac{i}{2}\left(e-\dfrac{1}{e}\right)$; 2) $\dfrac{1}{2}\left[\left(e+\dfrac{1}{e}\right)\cos 1+i\left(\dfrac{1}{e}-e\right)\sin 1\right]$.

5. 1) $\dfrac{\pi}{2}+2k\pi-i\ln(2\pm\sqrt{3})$, $k=0,\pm1,\pm2,\ldots$; 2) $\dfrac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}(-2)+k\pi+\dfrac{i}{4}\ln 5$, $k=0,\pm1,\pm2,\ldots$ (угол во второй четверти); 3) $\dfrac{\pi}{4}+k\pi$, $k=0,\pm1,\pm2,\ldots$.

6. 1) $\operatorname{Re} e^{z^2}=e^{x^2-y^2}\cos(2xy)$, $\operatorname{Im} e^{z^2}=e^{x^2-y^2}\sin(2xy)$;

2) $\operatorname{Re}(z^2\sin z)=(x^2-y^2)\sin x\operatorname{ch}y-2xy\cos x\operatorname{sh}y$,

$\operatorname{Im}(z^2\sin z)=(x^2-y^2)\cos x\operatorname{sh}y+2xy\sin x\operatorname{ch}y$; 3) $\operatorname{Re}(\operatorname{tg}z)=\dfrac{\operatorname{tg}x(1-\operatorname{th}^2 y)}{1+\operatorname{tg}^2 x\operatorname{th}^2 y}$,

$\operatorname{Im}(\operatorname{tg}z)=\dfrac{\operatorname{th}y(1-\operatorname{tg}^2 x)}{1+\operatorname{tg}^2 x\operatorname{th}^2 y}$; 4) $\operatorname{Re}(\operatorname{Ln}z)=\dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$, $\operatorname{Im}(\operatorname{Ln}z)=\arg z+2k\pi$, $k=0,\pm1,\pm2,\ldots$;

5) $\operatorname{Re}z^{3+i}=\sqrt{(x^2+y^2)^3}e^{-\arg z+2k\pi}\cos\left(\dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+3\arg z\right)$,

$\operatorname{Im}z^{3+i}=\sqrt{(x^2+y^2)^3}e^{-\arg z+2k\pi}\sin\left(\dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+3\arg z\right)$.

Глава 2

§1

1. 1) $-\dfrac{1}{z^2}\,(z\neq 0)$; 2) $2z-2i$; 3) ie^z; 4) ie^{iz}; 5) $f'(z)$ не существует; 6) $f'(z)$ не существует; 7) $f'(z)$ не существует.

3. 1) 0 и 5; 2) $\dfrac{\pi}{4}$ и 4.

4. При отображении внутренности круга $|z|<\dfrac{1}{2}$ происходит сжатие, а его внешности – растяжение.

§2

1. 1) 1; 2) $1+\dfrac{1}{3}i$. **4.** 1) 0; 2) $2\pi i$. **5.** 0. **6.** 1) $-\pi i$; 2) πi. **7.** 1) 2π; 2) 0.

8. 1) 0; 2) $-\frac{17}{3}+\frac{16}{3}i$. **9.** 1) $1-\frac{e^{\pi}+e^{-\pi}}{2}=1-\operatorname{ch}\pi$; 2) 1; 3) $1-\frac{\pi}{2}-i$.

10. 1) 0; 2) 0; 3) 0. **11.** $2\pi ei$. **12.** 1) 0; 2) $2\pi i$; 3) $2\pi ie^{\frac{1}{2}i}$; 4) 0. **13.** $-2\pi i$.

§3

1. 1) $\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n}$, $|z|<2$; 2) $\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{3^n}$, $|z+1|<3$;

3) $\frac{1}{2-i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-i)^n}{(2-i)^n}$, $|z-i|<\sqrt{5}$. **2.** 1) $1-\frac{1}{z^2}+\frac{1}{2!z^4}-\frac{1}{3!z^6}+\cdots$.

3. $\frac{1}{(z-1)^2}-\frac{1}{z-1}+1-(z-1)+(z-1)^2-(z-1)^3+\cdots$ для $|z-1|<1$.

4. 1) $-\frac{1}{z-1}-1-(z-1)-(z-1)^2-...-(z-1)^n-\cdots$;

2) $\frac{1}{z^2}+\frac{2^2-1}{z^3}+...+\frac{2^{n-1}-1}{z^n}+\cdots$; 3) $...-\frac{1}{z^n}-...-\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z}-\frac{1}{2}-\frac{z}{2^2}-\frac{z^2}{2^3}-....$

5. 1) $z=1$ и $z=-1$ – нули третьего порядка; 2) $0,\pi,2\pi,...$ – простые нули.

6. 1) $z=0$ и $z=1$ – простые полюса, $z=-1$ – полюс второго порядка; 2) $z=k\pi$, $k=0,\pm1,\pm2,...$ – простые полюса; 3) $z=0$ – полюс третьего порядка; 4) $z=1$ – существенно особая точка; 5) $z=0$ – полюс третьего порядка; 6) $z=0$ – существенно особая точка; 7) $z=0$ – полюс второго порядка; 8) $z=0$ – полюс третьего порядка.

Глава 3

§1

1. 1) $-\frac{1}{2}$; 2) 0; 3) – 1; 4) – 1; 5) $\frac{1}{6}$; 6) $\begin{cases}\operatorname*{Res}_{z=1} f(z)=-\frac{1}{2},\\ \operatorname*{Res}_{z=-1} f(z)=\frac{1}{2};\end{cases}$; 7) 0;

8) $\begin{cases}\operatorname*{Res}_{z=0} f(z)=-i,\\ \operatorname*{Res}_{z=i} f(z)=i;\end{cases}$ 9) $4i$. **2.** 1) один; 2) четыре.

§2

1. 1) $-\pi i$; 2) $-2\pi i$; 3) 0. **2.** $2\pi i$. **3.** 1) 0; 2) $2\pi i$. **4.** $\frac{2}{3}\pi i$. **5.** $\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$.

8. 1) $\frac{\pi}{2}e^{-a}$; 2) $\frac{\pi}{2e}$.

Глава 4

§1

1. 1) да; 2) нет; 3) да; 4) нет; 5) нет; 6) да; 7) да; 8) да, $S_0=0$; 9) да, $S_0=1$; 10) нет, $S_0=+\infty$.
2. 1) нет; 2) нет.

§2, п. 2.2

1. $F(p)=\dfrac{2}{p\left(p^2+4\right)}$. **2.** $F(p)=\dfrac{m\left(p^2+m^2-n^2\right)}{\left(p^2+m^2+n^2\right)^2-4m^2n^2}$.

3. $F(p)=\dfrac{p^3+7p}{\left(p^2+9\right)\left(p^2+1\right)}$. **4.** $F(p)=\dfrac{1}{8}\left(\dfrac{3}{p}+\dfrac{p}{p^2+16}-\dfrac{4p}{p^2+1}\right)$.

§2, п. 2.3

1. $\dfrac{3!}{p^4}e^{-2p}$. **2.** $\dfrac{2}{p^3}e^{-3p}$. **3.** $\dfrac{1}{p^2}+\dfrac{1}{p}+\left(\dfrac{2}{p^2}+\dfrac{1}{p}\right)e^{-p}-\left(\dfrac{3}{p^2}+\dfrac{12}{p}\right)e^{-4p}$.

§2, п. 2.4

1. $F(p)=\dfrac{p-n}{(p-n)^2+n^2}$. **2.** $F(p)=\dfrac{3!}{(p+1)^4}$. **3.** $F(p)=\dfrac{1}{(p-1)^2-1}$.

4. $F(p)=\dfrac{p^2-2p}{\left(p^2-2p+2\right)^2}$. **5.** $F(p)=\dfrac{1}{2(p-3)}-\dfrac{1}{2}\dfrac{p-3}{(p-3)^2+4}$.

§2, п. 2.5

1. $F(p)=\dfrac{p^2+2}{p\left(p^2+4\right)}$. **2.** $F(p)=\dfrac{6}{\left(p^2+1\right)\left(p^2+9\right)}$.

3. $F(p)=\dfrac{p^4+16p^2+24}{p\left(p^2+4\right)\left(p^2+16\right)}$. **4.** $F(p)=\dfrac{2ap}{\left(p^2+a^2\right)^2}$. **5.** $F(p)=\dfrac{1}{(p-1)^2}$.

§2, п. 2.6

1. $F(p)=\dfrac{1}{p^3}-\dfrac{1}{p^3+1}$. **2.** $F(p)=\dfrac{2}{p^4}-\dfrac{p}{p^2+1}+\dfrac{1}{p}$. **3.** $F(p)=\dfrac{1}{p}\left(\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} p\right)$.

4. $F(p)=\dfrac{6}{p(p+1)^4}$. **5.** $F(p)=\dfrac{p^2+2a}{p^2\left(p^2+4a^2\right)}$.

§2, п. 2.8

1. 1) $F(p)=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{\sqrt{p^2+4}}{p}$; 2) $F(p)=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{p^2+4}{p^2+1}$.

2. 1) $\operatorname{arctg}\dfrac{a}{b}$; 2) $\operatorname{arctg}\dfrac{b}{m}-\operatorname{arctg}\dfrac{a}{m}$; 3) $\ln\dfrac{b}{a}$; 4) $\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{a+b}{a-b}\right|$.

§2, п. 2.9

1. 1) $\dfrac{1}{(p-1)\left(p^2+1\right)}$; 2) $\dfrac{p}{(p-2)\left(p^2+1\right)}$; 3) $\dfrac{n!F(p)}{p^{n-1}}$; 4) $\dfrac{1}{p^2\left(p^2-1\right)}$;

5) $\dfrac{2}{p^3(p+2)}$.

2. 1) $f(t)=\operatorname{sh}t$; 2) $f(t)=1-\cos t$; 3) $f(t)=t-\sin t$; 4) $f(t)=1-t-\dfrac{t^2}{2}-e^{-t}$.

3. 1) $1-\cos t \div \dfrac{1}{p\left(p^2+1\right)}$; 2) $t-\sin t \div \dfrac{1}{p^2\left(p^2+1\right)}$; 3) $\operatorname{sh}t \div \dfrac{1}{p^2-1}$;

4) $\dfrac{1}{2}(\sin t+t\cos t)\div\dfrac{p^2}{\left(p^2+1\right)^2}$; 5) $t\cos t \div \dfrac{p^2-1}{\left(p^2+1\right)^2}$.

§2, п. 2.10

1. $f(t)=\frac{1}{2}(\operatorname{ch}t+\cos t)$. **2.** $f(t)=\frac{1}{5}(3\sin 3t-2\sin 2t)$.

3. $f(t)=\frac{1}{2}\left(e^t+\cos t+\sin t\right)$. **4.** $f(t)=\frac{t^2}{2}+\cos t-1$.

§2, п. 2.13

1. $F(p)=\frac{1}{p^2+1}\cdot\frac{1+e^{-\pi p}}{1-e^{-\pi p}}$. **2.** $F(p)=\frac{1}{(p^2+1)(1-e^{-\pi p})}$.

§3

1. $f(t)=e^{-2t}\sin t$. **2.** $f(t)=(1-t)e^{-t}$. **3.** $f(t)=t-\sin t$. **4.** $f(t)=e^{-t}\left(1-t^2\right)$.

5. $f(t)=\frac{1}{2}\left(e^{-t}-e^{-3t}\right)$. **6.** $f(t)=2+t+2te^t-2e^t$. **7.** $f(t)=1-e^{-t}-te^{-t}$.

8. $f(t)=\frac{t}{2}\sin t$.

Глава 5

§1, п. 1.1

1. $y(t)=\left(1-\frac{e}{2}\right)\cos(t-1)-\frac{e}{2}\sin(t-1)+\frac{e^t}{2}$. **2.** $y(t)\cos t$.

3. $y(t)=(t-1)^2+e^{1-t}$. **4.** $y(t)=t^2+2t$. **5.** $y(t)=\left(t-1-\frac{\pi}{2}\right)\cos t$.

6. $y(t)=\left(t^2-2t+2\right)e^{1-t}$. **7.** $y(t)=\frac{e^3+4}{4e}e^t+\frac{2t-3}{4}e^{3t}$.

§1, п. 1.2

1. $y=\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)1(t)-\left((t-1)-\frac{1}{2}\sin 2(t-1)\right)\cdot 1(t-1)+$

$+\frac{1}{2}\left((t-2)-\frac{1}{2}\sin 2(t-2)\right)\cdot 1(t-2)$.

2. $y=\left(b+(1-a)\cos t\right)1(t)+\left(b-b\cos(t-a)\right)1(t-a)$.

§1, п. 1.3

1. $x(t)=\frac{1}{2}\left(e^t-1\right)-\ln\frac{1+e^t}{2}$. **2.** $x(t)=e^{-t}\left((t+1)\ln(1+t)-t\right)$.

3. $x(t)=\frac{1}{9}e^{3t}+\frac{4}{9}e^{-t}-\frac{2}{3}t-\frac{4}{9}$. **4.** $x(t)=\frac{5}{8}\sin 2t-\frac{1}{2}\cos 2t$.

§1, п. 1.4

1. $x(t)=2\left(1-e^{-t}-te^{-t}\right)$; $y(t)=2-t-2e^{-t}-2te^{-t}$.

2. $x(t)=\frac{1}{3}\left(e^t+2\cos 2t+\sin 2t\right)$; $y(t)=\frac{2}{3}\left(e^t-\cos 2t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)$.

3. $x(t)=2-e^{-t}$; $y(t)=2-e^{-t}$; $z(t)=2e^{-t}-2$.

§2

1. $\varphi(x)=x+\frac{1}{6}x^3$. **2.** $\varphi(x)=\frac{2}{5}e^{2x}+\frac{3}{5}\cos x+\frac{1}{5}\sin x$.

3. $\varphi(x)=\frac{4}{3}-\frac{1}{3}\cos\sqrt{3}x$. **4.** $\varphi(x)=xe^x$. **5.** $\varphi(x)=chx-xe^{-x}$.

6. $\varphi(x)=\frac{1}{2}(\mathrm{ch}x+\cos x)$. **7.** $\varphi(x)=1-x$. **8.** $\varphi(x)=1$. **9.** $\varphi(x)=e^{-x}$.

10. $\varphi(x)=1+2x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$. **11.** $\varphi_1(x)=e^{2x}$; $\varphi_2(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{2x}$.

12. $\varphi_1(x)=e^{-x}(1-x)$, $\varphi_2(x)=\frac{8}{9}e^{2x}+\frac{x}{3}e^{-x}-\frac{8}{9}e^{-x}$.

§3

1. $x(t)=C$. **2.** $x(t)=\left(c_1+c_2t^2\right)e^{-t}$. **3.** $x(t)=e^{-t}$. **4.** $x(t)=e^t$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ангейко, И.М. Задачи по теории функций комплексной переменной / И.М. Ангейко, Р.В. Козлова. – Минск: Высш. шк., 1976.
2. Андронов, И.К. Математика действительных и комплексных чисел / И.К. Андронов. – М.: Просвещение, 1975.
3. Араманович, И.Г. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости / И.Г. Араманович, Г.Л. Лунц, Л.Э. Эльсгольц. – М.: Наука, 1965.
4. Волковыский, Л.И. Сборник задач по теории функций комплексного переменного / Л.И. Волковыский, Г.Л. Лунц, И.Г. Араманович. – М.: Наука, 1970.
5. Воднев, В.Т. Основные математические формулы / В.Т. Воднев, А.Ф. Наумович, Н.Ф. Наумович; под ред. Ю.С. Богданова. – Минск: Высш. шк., 1980.
6. Дадаян, А.А. Алгебра и геометрия / А.А. Дадаян, В.А. Дударенко. – Минск: Высш. шк., 1989.
7. Евграфов, М.А. Аналитические функции / М.А. Евграфов. – М.: Наука, 1991.
8. Ершова, В.В. Импульсные функции. Функции комплексной переменной. Операционное исчисление / В.В. Ершова. – Минск: Высш. шк., 1976.
9. Конторович, М.И. Операционное исчисление и нестационарные явления в электрических цепях / М.И. Конторович. – М.: Гостехиздат, 1955.
10. Маркушевич, А.И. Комплексные числа и конформные отображения / А.И. Маркушевич. – М.: Наука, 1960.
11. Маркушевич, А. И. Теория аналитических функций / А.И. Маркушевич. – М.: Физматгиз, 1967.
12. Матвеев, Н. М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений / Н. М. Матвеев. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1955.
13. Привалов, И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного / И.И. Привалов. – М.: Наука, 1984.
14. Рыбников, К.А. История математики / К.А. Рыбников. – 2-е изд. – М.: МГУ, 1974.
15. Свешников, А.Г. Теория функций комплексной переменной / А.Г. Свешников, А.Н. Тихонов. – М.: Наука, 1970.
16. Сигорский В.П. Математический аппарат инженера / В.П. Сигорский. – М.: Техника, 1977.
17. Соломенцев, Е.Д. Функции комплексного переменного и их применения / Е.Д. Соломенцев. – М.: Высш. шк., 1988.
18. Старков, С.Н. Справочник по математическим формулам и графикам функций для студентов / С.Н. Старков. – СПб.: Питер, 2010.
19. Фукс, Б.А. Функции комплексного переменного / Б.А. Фукс, Б.В. Шабат. – М.-Л.: Изд-во техн.-теорет. лит-ры, 1949.
20. Шостак, Р.Я. Операционное исчисление / Р.Я. Шостак. – М.: Высш. шк., 1968.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Степени числа i $(n, m \in \mathrm{Z})$

$i^2 = -1$ – основное свойство числа i

$i^0 = i^4 = i^8 = \ldots = i^{4n} = 1$

$i^1 = i^5 = i^9 = \ldots = i^{4n+1} = i$

$i^2 = i^6 = i^{10} = \ldots = i^{4n+2} = -1$

$i^3 = i^7 = i^{11} = \ldots = i^{4n+3} = -i$

$i^0 = i^{-4} = i^{-8} = \ldots = i^{-4n} = i^{4m} = 1$

$i^{-1} = i^{-5} = i^{-9} = \ldots = i^{-(4n+1)} = i^{4m-1} = -i$

$i^{-2} = i^{-6} = i^{-10} = \ldots = i^{-(4n+2)} = i^{4m-2} = -1$

$i^{-3} = i^{-7} = i^{-11} = \ldots = i^{-(4n+3)} = i^{4m-3} = i$

$i^{2n} = (-1)^n$

$i^{2n+1} = (-1)^n i$

$i^{4n+m} = i^m$

Алгебраическая форма комплексного числа $(x, y \in R)$

$z = x + iy$, $x = \mathrm{Re}\, z$ – действительная часть числа, $y = \mathrm{Im}\, z$ – мнимая часть числа

Равенство комплексных чисел

$z_1 = z_2 \Leftrightarrow x_1 + iy_1 = x_2 + iy_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2,\, y_1 = y_2$

$z = 0 \Leftrightarrow x + iy = 0 \Leftrightarrow x = 0, y = 0$

Комплексно-сопряженное число

$\overline{z} = x - iy$

$\overline{z} = z \Leftrightarrow z \in R$

Модуль комплексного числа

$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}, |z| \geq 0$

$|\overline{z}| = |z|$

Аргумент комплексного числа $\varphi = \arg z$ ***(главное значение аргумента)***

$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{x}{|z|} \\ \sin\varphi = \dfrac{y}{|z|} \end{cases} \Rightarrow \varphi,\ 0 \le \varphi < 2\pi \quad (\text{или} \quad -\pi < \varphi \le \pi)$$

$\arg \overline{z} = 2\pi - \arg z$ (или $\arg \overline{z} = -\arg z$)

Множество значений аргумента

$A\text{rg}\, z = \varphi + 2\pi k,\ k \in \mathrm{Z}$

Действия над комплексными числами в алгебраической форме

Сложение: $z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$

$z + \overline{z} = 2x, \quad x = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$

Вычитание: $z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$

$z - \overline{z} = 2yi, \quad y = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$

Умножение: $z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1)$

$z \cdot \overline{z} = r^2$

$z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$

$z^3 = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$

Деление: $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \dfrac{z_1 \cdot \overline{z}_2}{|z_2|^2} = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\dfrac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$

$\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{r^2} = \dfrac{x}{x^2 + y^2} - i\dfrac{y}{x^2 + y^2}$

$\dfrac{1}{\overline{z}} = \dfrac{z}{r^2} = \dfrac{x}{x^2 + y^2} + i\dfrac{y}{x^2 + y^2}$

Свойства действий над комплексными числами

1. $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ (коммутативность сложения)
2. $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ (ассоциативность сложения)
3. $z_1z_2 = z_2z_1$ (коммутативность умножения)
4. $(z_1z_2)z_3 = z_1(z_2z_3)$ (ассоциативность умножения)
5. $z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$ (дистрибутивность умножения относительно сложения)

Тригонометрическая форма комплексного числа

$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

Действия над комплексными числами в тригонометрической форме

$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$

Возведение в степень: $z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi), n \in \mathrm{N}$ – формула Муавра

Извлечение корня:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) = w_k, \quad n \in \mathrm{N}, \; k = 0,1,2,...,n-1$$

$\sqrt[n]{1} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}\right) = w_k, \; k = 0,1,2,...,n-1$

$\sqrt{1} = \pm 1$

$\sqrt[3]{1} = w_k, \;\; w_1 = 1, \; w_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \;\; w_3 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sqrt[n]{-1} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\pi(2k+1)}{n} + i\sin\frac{\pi(2k+1)}{n}\right) = w_k, \; k = 0,1,2,...,n-1$

$\sqrt{-1} = \pm i$

$\sqrt[3]{-1} = w_k, \; w_1 = -1, \; w_2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \; w_3 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

Показательная форма комплексного числа

$z = re^{i\varphi}$

Формулы Эйлера:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi, \; \cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \; \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$$

$e^{\frac{\pi}{2}i} = i; \quad e^{\pi i} = -1; \quad e^{\frac{3\pi}{2}i} = -i; \quad e^{2\pi i} = 1$

Действия над комплексными числами в показательной форме

$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$

$z^n = r^n e^{in\varphi}$

$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i \cdot \frac{\varphi + 2\pi k}{n}}, k = 0, 1, 2, ..., n-1$

Расстояние между точками $\boldsymbol{z_1 = x_1 + iy_1}$ ***и*** $\boldsymbol{z_2 = x_2 + iy_2}$

$d = |z_2 - z_1|$

Уравнение прямой, проходящей через точку $\boldsymbol{z_0 = x_0 + iy_0}$ ***и образующей угол*** α ***с осью OX***

$z = z_0 + t e^{i\alpha}; t \in R$

Уравнение окружности с центром в точке $\boldsymbol{z_0 = x_0 + iy_0}$

$z = z_0 + R \cdot e^{it};\ 0 \le t < 2\pi$

Разложение многочлена на линейные множители

$P_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + ... + a_{n-1} z + a_n = a_0 (z - z_1)(z - z_2)...(z - z_n)$;
$a_i,\ z_j \in C \quad \forall i,\ j; \quad n \ge 1$

Основная теорема алгебры

Любое уравнение *n*-й степени с комплексными коэффициентами

$$P_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + ... + a_{n-1} z + a_n = 0,\ n \ge 1$$

имеет *n* комплексных корней, если каждый корень считать столько раз, какова его кратность.

Приложение 2

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

$z = x + iy$; $\quad w = f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$; $\quad x, y \in R$; $\quad z, w \in C$;

$u(x,y) = \operatorname{Re} f(z)$ – действительная часть функции;

$v(x,y) = \operatorname{Im} f(z)$ – мнимая часть функции

Основные функции комплексной переменной

1. $w = az + b$

2. $w = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$ – функция Жуковского

3. $w = z^n$; $\quad n \in N$

4. $w = z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \cdot \left(\cos\dfrac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\dfrac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) = w_k$;

   $n \in \mathrm{N}$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$

5. $w = e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$

6. $w = \operatorname{Ln} z = \ln z + 2\pi k i$; $k \in Z$ – многозначная функция;

   $\ln z = \ln|z| + i\arg z$ – главное значение логарифма

7. $w = z^B = e^{B \operatorname{Ln} z}$; $B \in C$

8. $w = a^z = e^{z \operatorname{Ln} a}$; $a \in C$

9. $w = \sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$

10. $w = \cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$

11. $w = \operatorname{tg} z = \dfrac{\sin z}{\cos z}$

12. $w = \operatorname{ctg} z = \dfrac{\cos z}{\sin z}$

Гиперболические функции

1. $w = \operatorname{sh} z = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2}$

2. $w = \operatorname{ch} z = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}$

3. $w = \operatorname{th} z = \dfrac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}$

4. $w = \operatorname{cth} z = \dfrac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}$

Производная функции комплексной переменной

Производной однозначной функции $f(z)$ в точке z называется предел $w' = f'(z) = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{\Delta w}{\Delta z} = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$. Функция, имеющая в каждой точке области непрерывную производную, называется аналитической в этой области.

Условия Коши – Римана: для того чтобы функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ была аналитической в области, необходимо и достаточно, чтобы в этой области существовали непрерывные частные производные функций $u(x, y), v(x, y)$ и выполнялись условия: $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}, \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$.

Вычисление производной аналитической функции

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Вычисление интегралов

Если $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, то

$$\int\limits_C f(z)dz = \int\limits_C u(x, y)dx - v(x, y)dy + i\int\limits_C v(x, y)dx + u(x, y)dy.$$

Если C: $z(t) = x(t) + i\,y(t);\ t_1 < t < t_2$, то $\int\limits_C f(z)dz = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(z(t))\,z'(t)dt$.

Формула Ньютона – Лейбница

Если функция $f(z)$ аналитическая в односвязной области, z_1, z_2 – точки внутри области, $F'(z) = f(z)$, то $\int\limits_{z_1}^{z_2} f(z)dz = F(z_2) - F(z_1)$.

Теорема Коши

Если функция $f(z)$ аналитическая в односвязной области, C – замкнутый контур в этой области, то $\oint\limits_C f(z)dz = 0$.

Интегральная формула Коши

Если функция $f(z)$ аналитическая в односвязной области, a – точка внутри области, C – замкнутый контур в этой области, охватывающий точку a, то

$$f(a)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-a}dz$$

$$f^{(n)}(a)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)dz}{(z-a)^{n+1}}, \quad n=1,2,\ldots$$

Ряды Тейлора

Если функция $f(z)$ – аналитическая в круге $|z-a|<R$, то ее можно однозначно разложить в этом круге в ряд Тейлора $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n(z-a)^n$;

$$C_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-a|=\rho}\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz; \ \rho<R$$

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty} z^n; |z|<1$$

$$e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}; \ z\in C$$

$$\ln(1+z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}z^n}{n}; \quad |z|<1$$

$$\sin z=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}; \quad z\in C$$

$$\cos z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{z^{2n}}{(2n)!}; \quad z\in C$$

$$\operatorname{tg} z=z+\frac{2}{3!}z^3+\frac{16}{5!}z^5+...; \quad |z|<\frac{\pi}{2}$$

Ряды Лорана

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n(z-a)^n=\sum_{n=-\infty}^{-1} C_n(z-a)^n+\sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-a)^n$$

$\sum\limits_{n=-\infty}^{-1} C_n(z-a)^n$ – главная часть ряда; $\sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n(z-a)^n$ – правильная часть ряда.

Если функция $f(z)$ – аналитическая в кольце $r<\left|z-a\right|<R; 0\le r<R\le\infty$, то ее можно однозначно разложить в этом кольце в ряд Лорана

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n(z-a)^n;\ C_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-a|=\rho}\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz;\ r<\rho<R.$$

Особые точки

Если $f(z)$ – аналитическая в круге $0<\left|z-a\right|<R$, а в точке a не является аналитической, то точка a называется изолированной особой точкой.

Классификация изолированных особых точек

Если a – особая точка и $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}C_n(z-a)^n$; $0<\left|z-a\right|<R$, то a называется устранимой особой точкой.

Если a – особая точка и

$f(z)=\sum\limits_{n=-m}^{-1}C_n(z-a)^n+\sum\limits_{n=0}^{\infty}C_n(z-a)^n;\quad C_{-m}\ne 0;\ 0<\left|z-a\right|<R$, то a называется полюсом порядка m.

Если a – особая точка и $f(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}C_n(z-a)^n$; $0<\left|z-a\right|<R$, то a – называется существенной особой точкой.

Вычеты, основные теоремы о вычетах

Вычетом аналитической функции $f(z)$ в точке a называется коэффициент C_{-1} в разложении $f(z)$ в ряд Лорана

$$\operatorname*{Res}_{z=a}f(z)=C_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-a|=\rho}\frac{f(z)}{(z-a)}dz;\quad 0<\rho<R.$$

Если $f\left(z\right)$ аналитическая в ограниченной односвязной области D за исключением конечного числа изолированных особых точек $z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_n$, C – замкнутый контур, лежащий в D и охватывающий все точки $z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_n$, то $\int\limits_C f(z)dz=2\pi i\sum\limits_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}\limits_{z=z_k}f(z)$.

Приложение 3

СВОЙСТВА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА И НЕКОТОРЫЕ ПРЕДЕЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Преобразования Лапласа

Прямое преобразование Лапласа (изображение) $F(p)=\int\limits_0^{\infty} f(t)e^{-pt}dt$

Обратное преобразование Лапласа (оригинал)

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{s-i\infty}^{s+i\infty}F(p)e^{pt}dp=\frac{1}{2\pi i}\lim_{\omega\to\infty}\int\limits_{s-i\omega}^{s+i\omega}F(p)e^{pt}dp$$

Свойства преобразования Лапласа

1. Однородность $\lambda f(t)\div\lambda F(p)$
2. Аддитивность $f(t)+\varphi(t)\div F(p)+\Phi(p)$
3. Подобие $f(at)\div\frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right), a>0$
4. Сдвиг в оригинале (теорема запаздывания) $f(t-a)\div e^{-pa}F(p); a>0$
5. Теорема упреждения $f(t+a)\div e^{pa}\left[F(p)-\int\limits_0^a e^{-pa}f(t)dt\right]; a>0$
6. Правило затухания (смещение в изображении) $e^{at}\cdot f(t)\div F(p-a)$
7. Дифференцирование оригинала: а) $f'(t)\div pF(p)-f(+0)$;

б) $f^{(n)}(t)\div p^nF(p)-p^{n-1}f(+0)+p^{n-2}f'(+0)-...-p\,f^{(n-2)}(+0)-f^{(n-1)}(+0)$

8. Дифференцирование изображения: а) $F'(p)=\frac{dF(p)}{dp}\div -t\cdot f(t)$;

б) $F^{(n)}(p)\div(-1)^n t^n f(t)$

9. Интегрирование оригинала $\int\limits_0^t f(u)du\div\frac{F(p)}{p}$
10. Интегрирование изображения $\frac{f(t)}{t}\div\int\limits_p^{\infty}F(z)dz$
11. Умножение изображений $f(t)*\varphi(t)=\int\limits_0^t f(u)\varphi(t-u)du\div F(p)\cdot\Phi(p)$

12. Свертка изображений (умножение оригиналов)

$$f(t)\cdot\varphi(t) \div \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{s-i\infty}^{s+i\infty} F(z)\Phi(p-z)dz; \\ \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{s-i\infty}^{s+i\infty} \Phi(z)F(p-z)dz; \end{cases}$$

13. Формула Дюамеля

$$pF(p)\cdot\Phi(p) \div f(+0)\cdot\varphi(t) + \int_0^t f'(u)\cdot\varphi(t-u)du$$

$$p\cdot F(p)\cdot\Phi(p) \div f(+0)\varphi(t) + \int_0^t \varphi(u)\cdot f'(t-u)du$$

$$p\cdot F(p)\cdot\Phi(p) \div \varphi(+0)f(t) + \int_0^t \varphi'(u)f(t-u)du$$

$$p\cdot F(p)\cdot\Phi(p) \div \varphi(+0)f(t) + \int_0^t f(u)\varphi'(t-u)du$$

14. Дифференцирование по параметру $f'_\alpha(t,\alpha) \div F'_\alpha(p,\alpha)$

Предельные соотношения

$\lim\limits_{p\to\infty} pF(p) = f(+0)$; $\lim\limits_{p\to 0} pF(p) = f(\infty)$

Приложение 4

ОРИГИНАЛЫ И ИХ ИЗОБРАЖЕНИЯ

№	Оригинал	Изображение
1.	$1(t)$	$\frac{1}{p}$
2.	t	$\frac{1}{p^2}$
3.	$t^n, n \in N$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
4.	$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{p-\alpha}$
5.	$1-e^{\alpha t}$	$\frac{\alpha}{p(p+\alpha)}$
6.	$te^{\alpha t}$	$\frac{1}{(p-\alpha)^2}$
7.	$t^n e^{\alpha t}$	$\frac{n!}{(p-\alpha)^{n+1}}$
8.	$\sin wt$	$\frac{w}{p^2+w^2}$
9.	$\cos wt$	$\frac{p}{p^2+w^2}$
10.	$\operatorname{sh} wt$	$\frac{w}{p^2-w^2}$
11.	$\operatorname{ch} wt$	$\frac{p}{p^2-w^2}$
12.	$e^{\alpha t}\sin wt$	$\frac{w}{(p-\alpha)^2+w^2}$
13.	$e^{\alpha t}\cos wt$	$\frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+w^2}$
14.	$e^{\alpha t}\operatorname{sh} wt$	$\frac{w}{(p-\alpha)^2-w^2}$
15.	$e^{\alpha t}\operatorname{ch} wt$	$\frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2-w^2}$

№	Оригинал	Изображение
16.	$t\sin wt$	$\dfrac{2pw}{(p^2+w^2)^2}$
17.	$t\cos wt$	$\dfrac{p^2-w^2}{(p^2+w^2)^2}$
18.	$t\,\mathrm{sh}\,wt$	$\dfrac{2pw}{(p^2-w^2)^2}$
19.	$t\,\mathrm{ch}\,wt$	$\dfrac{p^2+w^2}{(p^2-w^2)^2}$
20.	$te^{\alpha t}\sin wt$	$\dfrac{2w(p-\alpha)}{((p-\alpha)^2+w^2)^2}$
21.	$te^{\alpha t}\cos wt$	$\dfrac{(p-\alpha)^2-w^2}{((p-\alpha)^2+w^2)^2}$
22.	$te^{\alpha t}\,\mathrm{sh}\,wt$	$\dfrac{2w(p-\alpha)}{((p-\alpha)^2-w^2)^2}$
23.	$te^{\alpha t}\,\mathrm{ch}\,wt$	$\dfrac{(p-\alpha)^2+w^2}{((p-\alpha)^2-w^2)^2}$
24.	$1-\cos wt$	$\dfrac{w^2}{p(p^2+w^2)}$
25.	$f(t)\sin wt$	$\dfrac{1}{2i}(F(p-iw)-F(p+iw))$
26.	$f(t)\cos wt$	$\dfrac{1}{2}(F(p-iw)+F(p+iw))$
27.	$f(t)\,\mathrm{sh}\,wt$	$\dfrac{1}{2}(F(p-w)-F(p+w))$
28.	$f(t)\,\mathrm{ch}\,wt$	$\dfrac{1}{2}(F(p-w)+F(p+w))$
29.	$\dfrac{e^{\alpha t}-e^{\beta t}}{\alpha-\beta}$	$\dfrac{1}{(p-\alpha)(p-\beta)}$
30.	$\dfrac{e^{-\frac{t}{\alpha}}-e^{-\frac{t}{\beta}}}{\alpha-\beta}$	$\dfrac{1}{(1+\alpha p)(1+\beta p)}$

№	Оригинал	Изображение
31.	$\alpha t+\beta$	$\dfrac{\alpha+\beta p}{p^2}$
32.	$(1+\alpha t)e^{\alpha t}$	$\dfrac{p}{(p-\alpha)^2}$
33.	$\dfrac{1}{\alpha^2}(e^{\alpha t}-1-\alpha t)$	$\dfrac{1}{p^2(p-\alpha)}$
34.	$\cos^2 wt$	$\dfrac{p^2+2w^2}{p(p^2+4w^2)}$
35.	$\sin^2 wt$	$\dfrac{2w^2}{p(p^2+4w^2)}$
36.	$\mathrm{sh}^2\, wt$	$\dfrac{2w^2}{p(p^2-4w^2)}$
37.	$\mathrm{ch}^2\, wt$	$\dfrac{p^2-2w^2}{p(p^2-4w^2)}$

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

ЦЫВИС Николай Васильевич
СКОРОМНИК Оксана Валерьевна

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ
ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Учебно-методический комплекс
для студентов технических специальностей

Редактор *О. П. Михайлова*
Дизайн обложки *В. А. Виноградовой*

Подписано в печать 11.09.2012. Формат 60 × 84 1/16. Бумага офсетная. Ризография.
Усл. печ. л. 13,92. Уч.-изд. л. 12,75. Тираж 50 экз. Заказ № 1298.

Издатель и полиграфическое исполнение:
учреждение образования «Полоцкий государственный университет».

ЛИ № 02330/0548568 от 26.06.2009 ЛП № 02330/0494256 от 27.05.2009

Ул. Блохина, 29, 211440, г. Новополоцк.