Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Полоцкий государственный университет»

# ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА: МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Учебно-методический комплекс
для студентов экономических специальностей

Составление и общая редакция
Э. М. Пальчика, С. Ю. Башун

2-е издание, исправленное

Новополоцк
ПГУ
2010

УДК 519.1(075.8)
ББК 22.18я73
В93

Рекомендовано к изданию методической комиссией финансово-экономического факультета в качестве учебно-методического комплекса (протокол № 6 от 01.07.2010)

РЕЦЕНЗЕНТЫ:

доктор физико-математических наук, профессор
УО «ВГУ им. П. М. Машерова» Н. Т. ВОРОБЬЕВ;
кандидат физико-математических наук, доцент УО «ПГУ» Ф. Ф. ЯСКО

В93 **Высшая математика : математическое программирование :** учеб.-метод. комплекс для студентов экономических специальностей / сост. и общ. ред. Э. М. Пальчика, С. Ю. Башун. – 2-е изд., испр. – Новополоцк : ПГУ, 2010. – 236 с.
ISBN 978-985-531-111-0.

Изложены основы математического программирования с упором на линейное программирование, рассмотрены приемы нахождения начального опорного плана в различных вариантах задач линейного программирования, приведены примеры анализа решения задач линейного программирования.

Предназначен для преподавателей вузов, студентов экономических специальностей, самостоятельно изучающих предмет и владеющих общим курсом высшей математики в объеме технического вуза.

Впервые издано в 2005 году.

**УДК 519.1(075.8)**
**ББК 22.18я73**

**ISBN 978-985-531-111-0**

# ВВЕДЕНИЕ

Учебно-методический комплекс «Высшая математика: математическое программирование» представляет собой сборник материалов, которые могут быть использованы для подготовки по разделу «Математическое программирование» курса высшей математики и предназначен для студентов экономических специальностей всех форм обучения. Данный комплекс может быть использован и студентами других специальностей, но содержит в основном задачи экономического профиля.

Содержит как теоретические, так и практические задания. Теоретический материал сопровождается в простейших случаях доказательствами. К каждой теме приведены типичные задачи с подробными решениями, что особенно полезно для заочной формы изучения данного раздела. Для большинства задач проводится экономический анализ полученных результатов. В УМК приведены методы составления линейных моделей экономических задач и различные способы их решения.

Так же изложены основы математического программирования с упором на линейное программирование, рассмотрены приемы нахождения начального опорного плана в различных вариантах задач линейного программирования, содержатся примеры анализа решения задач линейного программирования.

Для уменьшения объема употребляются некоторые обозначения и сокращения, которые обычно поясняются в тексте. Но ради удобства мы приводим их список отдельно.

УМК можно использовать для самостоятельного изучения.

# РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

Рабочая программа составлена на основе стандартов программ РДРБ 02100.5.124-98 (для специальности «Бухгалтерский учет, анализ и аудит»), РДРБ 02100.5.119-98 (для специальности «Финансы и кредит»), РДРБ 02100.5.118-98 (для специальности «Экономика и управление на предприятии»).

## 1. Цели и задачи дисциплины

Целью преподавания раздела высшей математики является обучение моделированию экономических ситуаций и математическим методам поиска оптимального решения полученной модели, анализу полученного решения.

Задачей изучения раздела высшей математики «Математическое программирование» является овладение студентами основными приемами решения задач на нахождение экстремумов функций нескольких переменных при специальных ограничениях. Студенты должны также приобрести навыки самостоятельного изучения математической литературы.

## 2. Виды занятий и формы контроля знаний

| Виды занятий, формы контроля | Д | З | |
|---|---|---|---|
| | | П | С |
| курс | 2 | 2 | 3 |
| семестр | 4 | 4 | 6 |
| лекции (в часах) | 36 | 8 | 8 |
| практические занятия (в часах) | 36 | 8 | 8 |
| экзамен (семестр) | 4 | 4 | 6 |
| контрольная работа (кол-во) | 2 | 1 | 1 |
| управляемая самостоятельная работа (в часах) | 8 | 10 | 10 |

## 3. Лекционный курс

| № п\п | Наименование тем лекций и их содержание | Объем в часах | | |
|---|---|---|---|---|
| | | Д | З | |
| | | IV семестр | П | С |
| | | | IV семестр | VI семестр |
| 1. | Предмет математического программирования. Линейная форма, ее градиент и гиперплоскость, ортогональная градиенту. Системы линейных равенств и их жордановы таблицы. Преобразование однократного замещения (ПОЗ) в линейных системах | 2 | 2 | 2 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2. | Задачи линейного программирования (ЗЛП) и формы записи ЗЛП | 2 | 2 | 2 |
| 3. | Нахождение опорных базисных решений системы ограничений-равенств КФЗЛП | 2 | | |
| 4. | Графический метод решения ЗЛП. Понятие о симплекс-методе решения ЗЛП | 2 | | |
| 5. | Способы нахождения начального опорного плана КФЗЛП в симплекс-методе | 2 | | |
| 6. | Критерий оптимальности опорного плана КФЗЛП на максимум. Переход к не худшему опорному плану | 2 | 2 | 2 |
| 7. | Экономические задачи, приводящие к понятию двойственной пары ЗЛП. Принцип двойственности | 2 | 2 | 2 |
| 8. | Взаимно-однозначное соответствие между неизвестными в паре взаимно-двойственных задач | 2 | | |
| 9. | Первая и вторая теоремы двойственности и их экономическое содержание. Приложения к решению задач | 2 | | |
| 10. | Третья теорема двойственности. Анализ решения ЗЛП | 2 | | |
| 11. | Транспортная задача (ТЗ) по критерию стоимости. Нахождение исходного опорного плана ТЗ | 2 | | |
| 12. | Распределительный метод | 2 | | |
| 13. | Метод потенциалов решения ТЗ | 2 | | |
| 14. | Открытая модель ТЗ | 2 | | |
| 15. | Модификация ТЗ. Задачи транспортного типа (ЗТТ) | 2 | | |
| 16. | Простейший вариант задачи о назначениях | 2 | | |
| 17. | ТЗ в сетевой форме и методы ее решения | 2 | | |
| 18. | ТЗ по критерию времени | 2 | | |
| ИТОГО: | | 36 ч | 8 ч | 8 ч |

## 4. Практические занятия

| № п/п | Темы практических занятий | Объем в часах | | |
|---|---|---|---|---|
| | | Д | З | |
| | | IV семестр | П | С |
| | | | IV семестр | VI семестр |
| 1. | Преобразование однократного замещения (ПОЗ) в линейных системах | 2 | | |
| 2. | Симплексные преобразование линейных систем | 2 | | |
| 3. | Решение задач линейного программирования. Линейные неравенства. (Составление моделей) | 2 | | |
| 4. | Эквивалентные формы ЗЛП. Переход от одной формы ЗЛП к другой | | 2 | 2 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 5. | Графическое решение ЗЛП | 2 | | |
| 6. | Симплекс-метод решения ЗЛП. Метод искусственного базиса для нахождения начального опорного плана ЗЛП | 2 | 2 | 2 |
| 7. | Контрольная работа по симплекс-методу | 2 | | |
| 8. | Построение двойственных задач ЛП | 2 | | |
| 9. | Решение пары взаимно-двойственных задач | 2 | | |
| 10. | Приложение теорем двойственности к решению практических ЗЛП | 2 | | |
| 11 | Транспортная задача (ТЗ) | 2 | | |
| 12. | Различные методы нахождения начального опорного плана ТЗ | 2 | 2 | 2 |
| 13. | Распределительный метод решения ТЗ | 2 | | |
| 14. | Метод потенциалов решения ТЗ | 2 | | |
| 15. | Задачи транспортного типа. Решение задач о закреплении механизмов за работами, о развозе продукции и др. | 2 | 2 | 2 |
| 16. | Решение ТЗ в сетевой постановке | 2 | | |
| 17. | ТЗ по критерию времени | 2 | | |
| 18. | Контрольная работа по ЗТТ | 2 | | |
| ИТОГО: | | 36 ч | 8 ч | 8 ч |

## 5. Самостоятельная работа студента

| № п/п | Темы для самостоятельной работы и вид их выполнения | Часы для самостоятельного изучения | На какой неделе выдается и принимается |
|---|---|---|---|
| 1. | Использование преобразования однократного замещения для решения линейных систем | 4 | Индивидуальное домашнее задание (ИДЗ) выдается на 4-й неделе, принимается на 5-й неделе |
| 2. | Графический метод решения ЗЛП | 4 | ИДЗ выдается на 5-й неделе, принимается на 6-й неделе |
| 3. | Промежуточный зачет по теме «Симплекс-метод» | 4 | проводится на 8-й неделе |
| 4. | Промежуточный зачет по теме «Методы решения взаимно двойственных задач и выяснение их экономического смысла» | 4 | проводится на 11-й неделе |
| 5. | Промежуточный зачет по теме «Задачи транспортного типа» | 6 | проводится на 13-й неделе |

# 6. Учебно-методическая карта дисциплины

| № недели | № темы | Название вопросов, выносимых на лекцию | № прак. занят. | № метод. пособ. | Самостоятельная работа студентов | | Формы контроля знаний |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | Содержание | объем в часах | |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 1 | 1 | Системы линейных равенств и их жордановы таблицы. Преобразования однократного замещения (ПОЗ) | 1 | 1; 4 | Основные понятия и терминология предмета «Математическое программирование». Выпуклые множества | 1 | Коллоквиум на 5-й неделе |
| 2 | 2 | Задачи линейного программирования. Три эквивалентные записи ЗЛП | 2 | 1; 4 | Свойства градиента. Каноническая, общая и симметрическая форма записи ЗЛП и переход от одной формы к другой | 1 | –//– |
| 3 | 3 | Отыскание опорных базисных решений ограничений с помощью ПОЗ | 3 | 1; 4 | Система линейных равенств и задача о замене переменных в них | 1 | –//– |
| 4 | 4 | Графический метод решения ЗЛП. Симплекс-метод | 4 | 1; 4; 5 | Использование ПОЗ для нахождения базисных решений системы ограничений-равенств канонической формы ЗЛП | 1 | ИДЗ, коллоквиум на 5-й неделе |
| 5 | 5 | Способы нахождения начального опорного плана КФЗЛП в симплекс-методе | 5 | 1; 4; 5 | Идеология решения ЗЛП. Графический метод решения ЗЛП. Табличная форма записи КФЗЛП | 4 | ИДЗ на 5-й неделе, отчет на 6-й неделе |
| 6 | 6 | Критерий оптимальности опорного плана КФЗЛП | 6 | 1; 4; 5 | М-задача. Искусственный базис. Критерий оптимальности плана | 2 | ИДЗ на 6-й неделе |
| 7 | 7 | Экономические задачи, приводящие к понятию пары взаимно-двойственных задач | 7 | 1; 4; 6 | Алгоритм симплекс-метода | 2 | Промеж. зачет на 8-й неделе |
| 8 | 8 | Принцип двойственности в ЗЛП. 1-1 соответствие между неизвестными в паре взаимно-двойственных задач | 8 | 1; 4; 6 | ЗЛП, приводящие к понятию двойственной ЗЛП | 1 | Опрос на промеж. зачете на 11-й неделе |

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 9 | 9 | Первая и вторая теорема двойственности и приложения к решению задач | 9 | 1; 4; 6 | Соответствие между переменными в паре взаимно-двойственных задач. Совместная таблица обеих задач | 2 | ИДЗ на 11-й неделе |
| 10 | 10 | Третья теорема двойственности. Анализ решения ЗЛП | 10 | 1; 4; 6 | Три теоремы двойственности, их экономический смысл. Анализ модели на чувствительность | 1 | Промеж. зачет на 11-й неделе |
| 11 | 11 | Транспортная задача (ТЗ) по критерию стоимости перевозок | 11 | 1; 4; 7 | Основная терминология в приемах решения ТЗ. Методы нахождения начального опорного плана | 2 | ИДЗ на 13-й неделе |
| 12 | 12 | Распределительный метод ТЗ | 12 | 1; 4; 7 | Распределительный метод | 4 | ИДЗ на 13-й неделе |
| 13 | 13 | Метод потенциалов решения ТЗ | 13 | 1; 4 | Метод потенциалов решения ТЗ | $2^*$ | |
| 14 | 14 | Открытая модель ТЗ | 14 | 1; 4 | Задачи типа ТЗ с максимизацией целевой функции. Ограничения на поставки, на спрос. Задача о назначениях | $1^*$ | |
| 15 | 15 | Модификация ТЗ. Задачи транспортного типа | 15 | 1; 4 | Задачи транспортного типа | $2^*$ | |
| 16 | 16 | Простейший вариант задачи о назначениях | 16 | 1 | Различные вариации ТЗ | $2^*$ | |
| 17 | 17 | ТЗ в сетевой форме | 17 | 1 | ТЗ в сетевой постановке | $2^*$ | |
| 18 | 18 | ТЗ по критерии времени | 18 | 1 | ТЗ по критерии времени | $2^*$ | |

*Примечание*: Часы, отмеченные звездочкой (*), не входят в число часов управляемой самостоятельной работы, но рекомендуются для самостоятельного изучения.

# КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

# 1. ЛИНЕЙНАЯ ФОРМА, ЕЁ ГРАДИЕНТ И ГИПЕРПЛОСКОСТЬ, ОРТОГОНАЛЬНАЯ ГРАДИЕНТУ. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ РАВЕНСТВ И ИХ ЖОРДАНОВЫ ТАБЛИЦЫ. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ОДНОКРАТНОГО ЗАМЕЩЕНИЯ (ПОЗ) В ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ

**1.1. Определение. Линейной формой** от $n$ переменных

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \tag{1.1}$$

называется функция от этих переменных вида

$$f = f(X) = c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \,, \tag{1.2}$$

где $c_i \in R$, $i = \overline{1,n}$, $\qquad X = (x_1, \ldots, x_n)$ (1.3)

– матрица-строка переменных (1.1).

Запись (1.2) означает, что линейную форму (1.2) можно рассматривать как функцию от $n$ переменных, определённую на некотором подмножестве $M$ точек $n$-мерного линейного пространства $R^n$.

**1.2. Замечание.** Всюду ниже предполагается, что и коэффициенты, и переменные являются действительными числами.

**1.3. Определение.** Множество точек $X$ в $R^n$, координаты которых (1.3),

$$c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n = a = const \tag{1.4}$$

называется **гиперплоскостью** в $R^n$, а уравнение (1.4) называется линейным уравнением от $n$ неизвестных.

Вектор $\overline{C} = (c_1, \ldots, c_n)$ называется нормальным вектором к гиперплоскости (1.4), или **градиентом линейной формы** $f(X)$.

Под системой $m$ линейных равенств от $n$ неизвестных в дальнейшем мы понимаем систему

$$\begin{aligned}
y_1 &= a_{11}x_1 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1s}x_s + \ldots + a_{1n}x_n \\
y_i &= a_{i1}x_1 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{is}x_s + \ldots + a_{in}x_n \\
y_k &= a_{k1}x_1 + \ldots + a_{kj}x_j + \ldots + a_{ks}x_s + \ldots + a_{kn}x_n \\
y_m &= a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mj}x_j + \ldots + a_{ms}x_s + \ldots + a_{mn}x_n
\end{aligned} \quad , \tag{1.5}$$

в которой имеются как линейные уравнения (например, когда $y_i = const$), так и линейные формы.

Если в (1.5) нет линейных форм, то (1.5) называется системой линейных уравнений. Кратко (1.5) записывается так:

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = \sum_{j=1}^{n} \left(-a_{ij}\right)\left(-x_j\right), \; i = \overline{1,m}. \tag{1.5}$$

Для работы с системой (1.5) её удобно записывать в виде **таблицы**, предложенной французским математиком **К. Жорданом**:

$$\begin{array}{c|ccccccc}
 & -x_1 & \dots & -x_j & \dots & -x_s & \dots & -x_n \\
\hline
y_1 & -a_{11} & \dots & -a_{1j} & \dots & -a_{1s} & \dots & -a_{1n} \\
 & & & & & & & \\
y_i & -a_{i1} & \dots & -a_{ij} & \dots & -a_{is} & \dots & -a_{in} \\
 & & & & & & & \\
y_k & -a_{k1} & \dots & -a_{kj} & \dots & -a_{ks} & \dots & -a_{kn} \\
 & & & & & & & \\
y_m & -a_{m1} & \dots & -a_{mj} & \dots & -a_{ms} & \dots & -a_{mn}
\end{array} \tag{1.6}$$

В (1.6) вертикальная черта заменяет знак «=», а правая часть $i$-того равенства в (1.5) понимается как «скалярное произведение» $i$-той строки в (1.6) и самой первой строки в (1.6), если эти строки рассматривать как $n$-мерные векторы в $R^n$.

Предположим, что в системе (1.5) требуется поменять ролями $x_s$ и $y_k$, т. е. величины $y_1, \dots, y_{k-1}, x_s, y_{k+1}, \dots, y_m$ выразить в виде линейных комбинаций величин $-x_1, \dots, -x_{s-1}, -y_k, -x_{s+1}, \dots, -x_n$.

Решение поставленной задачи возможно, если $a_{ks} \neq 0$ в (1.5) и (1.6).

Тогда:

1. Обе части $k$-того равенства в (1.5) делим на $a_{ks}$;

2. Переносим $x_s$ в левую часть $k$-того равенства, а $\dfrac{y_k}{a_{ks}}$ переносим на место $x_s$ в правую часть $k$-того равенства;

3. Подставляем $x_s$ из $k$-того равенства в остальные равенства системы (1.5).

После элементарных упрощений, например, $y_i$ будет линейной комбинацией величин $x_1,\ldots,x_{s-1},y_k,x_{s+1},\ldots,x_n$ с некоторыми «хорошо вычисляемыми» коэффициентами:

$$y_i = b_{i1}\left(-x_1\right)+\ldots+b_{i,s-1}\left(-x_{s-1}\right)+b_{is}\left(-y_k\right)+b_{i,s+1}\left(-x_{s+1}\right)+\ldots+b_{in}\left(-x_n\right), \quad (1.7)$$

где (утверждение проверить самостоятельно)

$$b_{ij\,(i\neq k,\,\mathrm{j}\neq \mathrm{s})} = \frac{a_{ij}a_{ks}-a_{is}a_{kj}}{-a_{ks}}, \quad (1.8)$$

$$b_{kj} = \frac{a_{kj}}{-a_{ks}},\ j\neq s\left(b_{ks} = -\frac{1}{a_{ks}}\right). \quad (1.9)$$

Если в (1.8) $i$ пробегает значения от 1 до $m$, $i\neq k$, то задача решена. Этому решению соответствует новая жорданова таблица

$$\begin{array}{c|ccccccc}
 & -x_1 & \cdots & -x_{s-1} & -y_k & -x_{s+1} & \cdots & -x_n \\
\hline
y_1 & b_{11} & \cdots & b_{1,s-1} & -\dfrac{a_{1s}}{a_{ks}} & b_{1,s+1} & \cdots & b_{1n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
x_s & \dfrac{a_{k1}}{a_{ks}} & \cdots & \dfrac{a_{k,s-1}}{a_{ks}} & -\dfrac{1}{a_{ks}} & \dfrac{a_{k,s+1}}{a_{ks}} & \cdots & \dfrac{a_{kn}}{a_{ks}} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
y_m & b_{m1} & \cdots & b_{m,s-1} & -\dfrac{a_{ms}}{a_{ks}} & b_{m,s+1} & \cdots & b_{mn}
\end{array} \quad (1.10)$$

Формулу (1.8) для $i\neq k$ и $j\neq s$ легко запомнить, если в таблице (1.6) мысленно выделить «прямоугольник»

$$\begin{array}{ccccc}
\ldots & -a_{ij} & \ldots & -a_{is} & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\ldots & -a_{kj} & \ldots & -a_{ks} & \ldots
\end{array} \quad (1.11)$$

В этом прямоугольнике диагональ $\left\{-a_{ij},-a_{ks}\right\}$, содержащая элемент $-a_{ks}\neq 0$, называемый в дальнейшем разрешающим, называется главной, а другая диагональ $\left\{-a_{is},-a_{kj}\right\}$ – побочной. Формула (1.8) показывает, что коэффициент $b_{ij}$ в новой таблице (1.10) при $\left(-x_j\right)$, $i\neq k, j\neq s$, где $a_{ks}\neq 0$, равен разности произведений элементов на главной и побочной диагоналях в (1.11), деленной на разрешающий элемент $a_{ks}$.

Теперь можно сформулировать правила для перехода от таблицы (1.6) к таблице (1.10). Эти правила называют одним шагом ПОЗ.

**1.4. Правила ПОЗ**

1. Разрешающий элемент заменяется обратной величиной $\left(-a_{ks} \to \dfrac{1}{-a_{ks}}\right)$;

2. Остальные элементы разрешающей строки (т. е. содержащей $a_{ks}$) делятся на разрешающий элемент;

3. Остальные элементы разрешающего столбца (т. е. содержащего $a_{ks}$) делятся на разрешающий элемент и меняют знаки;

4. Оставшиеся элементы новой таблицы вычисляются по правилу (1.8).

**1.5. Пример.** Осуществить замену $x_3$ и $y_2$ в системе

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \\ y_2 &= 2x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 \\ y_3 &= 3x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \end{aligned} \tag{1.12}$$

с помощью жордановой таблицы.

**О.** Жорданова таблица для системы (1.12) имеет вид

$$\begin{array}{c|cccc} & -x_1 & -x_2 & -x_3 & -x_4 \\ \hline y_1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ y_2 & -2 & 1 & \boxed{-2} & 3 \\ y_3 & -3 & -1 & 1 & 1 \end{array}. \tag{1.13}$$

Разрешающий элемент таблицы (1.13) $a_{23} = -2$. Следуя правилам 1.4, получаем новую таблицу

$$\begin{array}{c|cccc} & -x_1 & -x_2 & -y_2 & -x_4 \\ \hline y_1 & 0 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ x_3 & 1 & -1/2 & -1/2 & -3/2 \\ y_3 & -4 & -1/2 & 1/2 & 5/2 \end{array}. \tag{1.14}$$

Из таблицы (1.14) следует, что

$$\begin{aligned} y_1 &= -1/2\, x_2 + 1/2\, y_2 + 1/2\, x_4 \\ x_3 &= -x_1 + 1/2\, x_2 + 1/2\, y_2 + 3/2\, x_4 \\ y_3 &= 4x_1 + 1/2\, x_2 - 1/2\, y_2 - 5/2\, x_4. \quad \otimes \end{aligned}$$

## 2. ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ (ЗЛП) И ФОРМЫ ЗАПИСИ ЗЛП. ПЕРЕХОД ОТ ОДНОЙ ФОРМЫ ЗАПИСИ К ДРУГОЙ ЭКВИВАЛЕНТНОЙ ФОРМЕ ЗЛП

**2.1. Определение. Общей задачей ЛП (ОЗЛП)** называют задачу: найти экстремум линейной формы (1.2) при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i, i=\overline{1,m_1}, \tag{2.1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, i=\overline{m_1+1,m_2} \tag{2.2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ge b_i, i=\overline{m_2+1,m} \tag{2.3}$$

$$x_j \ge 0, j=\overline{1,n_1}, n_1 \le n, \tag{2.4}$$

где (1.2) называется целевой функцией, (1.1) – планом ЗЛП, и при $n_1 < n$ $x_{n_1+1},\ldots,x_n$ считаются переменными произвольного знака.

**2.2. Определение. Канонической формой ЗЛП (КФЗЛП)** называют задачу: найти максимум линейной формы (1.2) при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, i=\overline{1,m}, \tag{2.5}$$

$$x_j \ge 0, j=\overline{1,n}. \tag{2.6}$$

**2.3. Определение. Симметрической формой ЗЛП (СФЗЛП)** называют задачу: найти $\max f \in (1.2)$ при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i, i=\overline{1,m} \tag{2.7}$$

$$x_j \ge 0, j=\overline{1,n} \tag{2.8}$$

или задачу: найти $\min f \in (1.2)$ при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ge b_i, i=\overline{1,m}, \tag{2.9}$$

$$x_j \ge 0, j=\overline{1,n}. \tag{2.10}$$

В дальнейшем нам потребуется переходить от одной формы ЗЛП к другой, сохраняя при этом эквивалентность ЗЛП, т. е. не расширяя и не сужая область её допустимых решений (планов).

**2.4. Определение.** Множество значений неизвестных (1.1), удовлетворяющих системе ограничений ЗЛП (2.1) – (2.4), называется областью допустимых решений (планов) $M$ ЗЛП $\left(M \subseteq R^n\right)$. Допустимый план, дающий целевой функции $f$ из (1.2) экстремальное значение, называется оптимальным. (Оптимальных планов может быть несколько или не быть совсем). Допустимый план, удовлетворяющий условию (2.6), называется опорным.

**2.5. Замечание.** Задачу минимизации линейной формы можно заменить задачей её максимизации (и наоборот) на основании того факта, что в критической точке $X^0 = \left(x_1^0, \ldots, x_n^0\right)$ из $R^n$ имеет место соотношение

$$\min f\left(X^0\right) = -\max\left(-f\left(X^0\right)\right). \qquad (2.11)$$

Для функции от одного переменного соотношение (2.11) очевидно (рис. 2.1)

$$\min f(x) = -\max\left(-f(x)\right) \qquad (2.12)$$

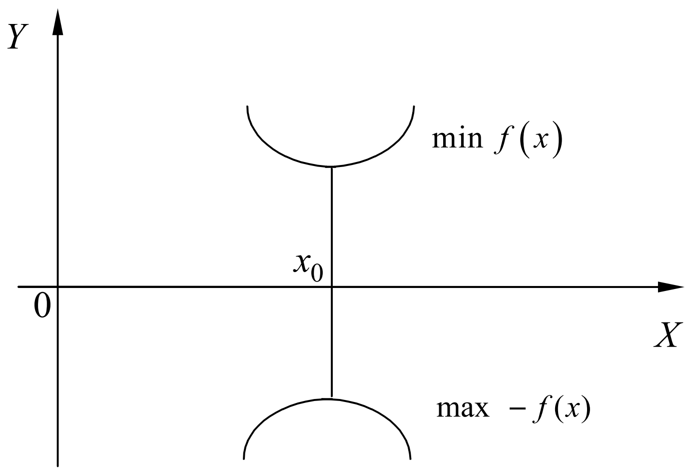



Рис. 2.1

**2.6. Замечание.** Если в условии ЗЛП (2.1) – (2.4) $n_1 < n$, то переменную произвольного знака $x_k\,(\le 0)$ представляют в виде

$$x_k = x_k' - x_k'', \qquad (2.13)$$

где $x_k' \ge 0, x_k'' \ge 0, x_k'' \ge x_k'$.

**2.7. Замечание.** Неравенство смысла «$\ge$» умножением на (– 1) обеих частей превращается в эквивалентное неравенство смысла «$\le$».

**2.8. Определение.** Условимся говорить, что неравенство

$$a_1x_1 + \ldots + a_nx_n \le a \tag{2.14}$$

эквивалентно уравнению

$$a_1x_1 + \ldots + a_nx_n + x_{n+1} = a \tag{2.15}$$

и неравенству

$$x_{n+1} \ge 0, \tag{2.16}$$

и, обратно, уравнение (2.15) и неравенство (2.16) эквивалентны неравенству (2.14), если множество решений неравенства (2.14) совпадает по первым $n$ компонентам со множеством решений уравнения (2.15), при $x_{n+1} \ge 0$. Другими словами, решения для (2.14) и для (2.15) $\cup$ (2.16) имеют вид: $(c_1,\ldots,c_n)$ и $(c_1,\ldots,c_n,c_{n+1})$.

Неизвестную $x_{n+1}$ при этом называют балансовой неизвестной относительно неравенства (2.14).

Отметим без доказательства следующий факт.

**2.9. Теорема.** Всякое неравенство вида (2.14) эквивалентно в смысле п. 2.8 уравнению вида (2.15) и неравенству (2.16) и наоборот.

**2.10. Замечание.** На основании теоремы 2.9 каждое ограничение-неравенство в (2.1) и (2.3) можно превратить в эквивалентное (в смысле 2.8) ограничение-равенство введением подходящей балансовой переменной и тем самым перейти от ОЗЛП к КФЗЛП.

**2.11. Пример.** Привести к эквивалентной КФЗЛП следующую ОЗЛП:

$$f = -4x_1 + x_2 - 3x_3 \quad (\min)$$

при ограничениях

$$\begin{gathered} 4x_1 + x_3 \le 16, \\ 6x_1 - 2x_2 - x_3 \ge 6, \\ x_1 \ge 0. \end{gathered}$$

**О.** По определению 2.2 нужно минимум $f$ заменить отысканием максимума, а ограничения-неравенства заменить ограничениями-равенствами и переменные $x_2, x_3$ заменить неотрицательными переменными. По (2.11) $\min f$ и $\max(-f)$ достигается в одной и той же точке. В первое ограничение вводим балансовую переменную $x_4 \ge 0$, а во второе – балансовую переменную $x_5 \ge 0$. Далее по формуле (2.13) имеем

$$x_2 = x_2' - x_2'',\ \mathrm{x}_3 = x_3' - x_3'',$$
$$x_2' \ge 0,\ x_2'' \ge 0,\ x_3' \ge 0,\ x_3'' \ge 0.$$

Получаем эквивалентную КФЗЛП

$$-f = 4x_1 - x_2 + 3x_3 \quad (\ \max) = 4x_1 - x_2' + x_2'' + 3x_3' - 3x_3'' \quad (\max),$$

при ограничениях

$$4x_1 + x_3' - x_3'' + x_4 = 16$$
$$6x_1 - 2x_2' + 2x_2'' - x_3' + x_3'' - x_5 = 6$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2' \ge 0,\ x_2'' \ge 0,\ x_3' \ge 0,\ x_3'' \ge 0,\ x_4 \ge 0,\ x_5 \ge 0\ . \qquad \otimes.$$

Пусть теперь в некоторой КФЗЛП система ограничений имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{2.17}$$

Система (2.17) должна быть совместной (иначе ЗЛП не имеет допустимых решений), т. е. ранги основной и расширенной матриц системы (2.17) должны быть равны одному и тому же числу $r$ (по теореме Кронекера–Капелли). Поэтому нашей ближайшей целью является нахождение допустимых решений системы (2.17). Покажем, как находить допустимые решения с помощью шагов ПОЗ.

Из общего курса высшей математики известно, что при $r < n$ система (2.17) имеет бесконечно много решений. В основной матрице системы (2.17) имеется так называемый базисный минор $\Delta \ne 0$ порядка $r$. Неизвестные, коэффициенты при которых вошли в $\Delta$, называют базисными, а остальные $n - r$ неизвестных называют свободными.

В общем курсе высшей математики поступали следующим образом: отбрасывали из (2.17) те уравнения, все коэффициенты которых не вошли в $\Delta$, переносили в правые части свободные неизвестные и, считая их как бы известными, решали получившуюся эквивалентную (2.17) систему по правилу Крамера. Тем самым получали выражения базисных неизвестных через свободные.

Этот результат можно получить и с помощью $l \geq r$ шагов ПОЗ. В самом деле, перепишем систему (2.17) в виде $m$ линейных «0»-равенств

$$\begin{cases} 0 = b_1 + a_{11}(-x_1) + \ldots + a_{1n}(-x_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 = b_m + a_{m1}(-x_1) + \ldots + a_{mn}(-x_n) \end{cases} \tag{2.18}$$

Каждый шаг ПОЗ, примененный к системе (2.18), переведет $i$-тый $0$ из левого столбца соответствующей жордановой таблицы

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & -x_1 & \cdots & -x_n \\ \hline 0 & b_1 & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & b_m & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{array} \tag{2.19}$$

в первую её строку, а соответствующую переменную $x_s$ (если $a_{is} \neq 0$) переведет на $i$-тое место вместо $0$. К новой таблице опять применим 1 шаг ПОЗ и т.д. Через $l(\geq r)$ шагов мы будем иметь в левом столбце последней таблицы все $r$ базисных неизвестных. Более того, мы сразу в последней таблице будем иметь выражение базисных неизвестных через свободные. Покажем это на примере.

**2.12. Пример.** Найти общее и два частных решения системы

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_5 = 2 \\ 3x_1 + x_4 + x_5 = 1 \\ x_3 - 2x_5 = 3 \end{cases}. \tag{2.20}$$

**О.** Перепишем систему в виде

$$\begin{cases} 0 = 2 - x_1 - x_2 + 3x_5 \\ 0 = 1 - 3x_1 - x_4 - x_5 \\ 0 = 3 - x_3 + 2x_5 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{c|cccccc} & 1 & -x_1 & -x_2 & -x_3 & -x_4 & -x_5 \\ \hline 0 & 2 & 1 & \boxed{1} & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \end{array}.$$

В жордановой таблице содержится расширенная матрица исходной системы. В ней имеются не равные нулю миноры порядка 3

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \quad \text{и} \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Поэтому $r=3$ и базисные неизвестные – $\{x_2, x_3, x_4\}$. $a_{12}=1\neq 0$. Поэтому $x_2$ переведём в крайний левый столбец новой таблицы с помощью первого шага ПОЗ. Одновременно замечаем, что в новой таблице столбец с 0 вместо $x_2$ можно не писать, так как в «скалярном произведении» верхней строки новой таблицы и следующих строк соответствующие слагаемые будут равны нулю. По правилам 1.4 новая таблица имеет вид

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & -x_1 & -x_3 & -x_4 & -x_5 \\ \hline x_2 & 2 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & \boxed{1} & 0 & -2 \end{array} \Rightarrow \text{по } 1.4 \Rightarrow \begin{array}{c|cccc} & 1 & -x_1 & -x_4 & -x_5 \\ \hline x_2 & 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & \boxed{1} & 1 \\ x_3 & 3 & 0 & 0 & -2 \end{array}$$

$$\Rightarrow \text{по } 1.4 \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} & 1 & -x_1 & -x_5 \\ \hline x_2 & 2 & 1 & -3 \\ x_4 & 1 & 3 & 1 \\ x_3 & 3 & 0 & -2 \end{array} \Rightarrow \begin{aligned} x_2 &= 2 - x_1 + 3x_5 \\ x_4 &= 1 - 3x_1 - x_5 \\ x_3 &= 3 + 2x_5 \end{aligned} \qquad (2.21)$$

Полагая для свободных неизвестных $x_1 = c_1$, $x_5 = c_5$, получаем **общее решение** исходной **системы**: $(c_1, 2 - c_1 + 3c_5,\ 3 + 2c_5,\ 1 - 3c_1 - c_5, c_5)$.

Давая свободным неизвестным значения $c_1 = 0, c_5 = 1$, затем $c_1 = 1,\ c_5 = 0$, получаем два частных решения: $(0,5,5,0,1)$ и $(1,1,3,-2,0)$, которые образуют так называемую фундаментальную систему решений системы (2.20). Отметим, что из (2.20) (2.21) следует и непосредственно. $\otimes$.

**2.13. Определение.** Частное решение системы ЛУ, полученное из общего при нулевых значениях свободных неизвестных, условимся называть **базисным решением системы**. Базисное решение системы ЛУ, не содержащее отрицательный компонент, называется **опорным решением системы** (сравни с п. 2.4).

В примере 2.12 решение (0,2,3,1,0) является базисным и опорным исходной системы ЛУ, получающееся при $c_1 = 0 = c_5$, т. е. при $x_1 = 0 = x_5$.

**2.14. Замечание.** Вообще говоря, из $n$ неизвестных можно выбрать $r$ базисных неизвестных несколькими способами. Но этих способов не более числа

$$C_n^r = \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-r+1)}{r!}. \qquad (2.22)$$

Соответственно и базисных решений система ограничений КФЗЛП может иметь несколько. В частности, базисных опорных решений такая система также может иметь несколько. Целью ЛП и является нахождение тех опорных базисных решений КФЗЛП (среди всего множества допустимых решений), которые дают линейной форме (1.2) максимальное значение.

**2.15. Пример.** В примере 2.12 мы получили для исходной системы базисное решение $(0,2,3,1,0)$. Можно получить другое базисное решение этой системы, применив 1 шаг ПОЗ к последней жордановой таблице с разрешающим элементом 1 из столбца $(-x_5)$. Тогда $x_5$ перейдёт в базисные неизвестные, а $x_4$ – в свободные. Этот пример иллюстрирует замечание 2.14.

**2.16. Замечание.** Из решения примера 2.12 видно, что значения базисных неизвестных в базисном опорном решении находятся в столбце «1» свободных членов в последней жордановой таблице системы ограничений КФЗЛП. Теперь можно показать, как от КФЗЛП перейти к эквивалентной СФЗЛП.

**2.17. Пример.** Найти максимум линейной функции $f = x_1 - x_2 + 3x_4 + x_5$ при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_5 = 2 \\ 3x_1 + x_4 + x_5 = 1, \quad x_i \ge 0, i = \overline{1,5} \\ x_3 - 2x_5 = 3 \end{cases}$$

перейти к эквивалентной СФЗЛП.

**О.** Как и в решении примера 2.12, получаем, что $x_2 = 2 - x_1 + 3x_5$, $x_4 = 1 - 3x_1 - x_5, x_3 = 3 + 2x_5$. Эти значения неизвестных $x_2, x_3, x_4$ подставляем в линейную форму $f$. Получаем СФЗЛП

$$f = x_1 - (2 - x_1 + 3x_5) + 3(1 - 3x_1 - x_5) + x_5 = -7x_1 - 5x_5 + 1, \quad (\max)$$

при

$$\begin{array}{ll} 2 - x_1 + 3x_5 \ge 0 & (\text{так как } x_2 \ge 0) \\ 1 - 3x_1 - x_5 \ge 0 & (\text{так как } x_4 \ge 0) \\ 3 + 2x_5 \ge 0 & (\text{так как } x_3 \ge 0) \\ x_1 \ge 0, x_5 \ge 0. & \end{array}$$

$\otimes$.

# 3. ПРАВИЛА НАХОЖДЕНИЯ ОПОРНЫХ БАЗИСНЫХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ ОГРАНИЧЕНИЙ-РАВЕНСТВ КФЗЛП

Чтобы найти все опорные решения системы ограничений-равенств (2.17), или, что равносильно, (2.18) (а именно такие решения интересуют нас в дальнейшем по экономическому смыслу) произведём анализ системы (2.18).

Если в (2.18) некоторые свободные члены отрицательны, то обе части соответствующего уравнения умножим на (– 1). Это не нарушает эквивалентности системы ограничений. Итак,

$$b_i \geq 0, i = \overline{1,m} \tag{3.1}$$

Выделим в жордановой таблице (2.19) системы (2.18) фрагмент

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & \dots & -x_s & \dots \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & b_i & \dots & a_{is} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & b_k & \dots & \boxed{a_{ks}} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}, \tag{3.2}$$

содержащий разрешающий элемент $a_{ks}$. Если в таблице (3.2) меняем ролями 0 в $k$-той строке и $x_s$, то в новой таблице свободный член в $k$-той строке будет иметь вид $\frac{b_k}{a_{ks}}$ по правилу 1.4.2. Очевидно, ввиду (3.1) $\frac{b_k}{a_{ks}} \geq 0$, если

$$a_{ks} > 0. \tag{3.3}$$

Свободный член в $i$-той строке новой таблицы, $i \neq k$, по правилу 1.4.4 имеет вид

$$b_i' = \frac{b_i a_{ks} - b_k a_{is}}{a_{ks}} = b_i - b_k \frac{a_{is}}{a_{ks}} . \tag{3.4}$$

Очевидно, $b_i' \geq 0$, если $a_{is} \leq 0$ (ввиду (3.1) и (3.3)) или $b_i \geq b_k \frac{a_{is}}{a_{ks}}$ при $a_{is} > 0$.

То есть

$$\frac{a_{ks}}{b_k} \geq \frac{a_{is}}{b_i} \left( \Leftrightarrow \frac{b_i}{a_{is}} \geq \frac{b_k}{a_{ks}} \right) \ \forall a_{is} \geq 0. \tag{3.5}$$

Из (3.1) – (3.5) вытекает

**3.1. Правило отыскания опорного решения совместной системы ЛУ**

1. Преобразуем систему (2.17) в (2.18) так, чтобы в (2.18) все свободные члены были неотрицательны;
2. Записываем в жорданову таблицу (2.19) системы (2.18);
3. В качестве разрешающего столбца выбираем любой из столбцов таблицы (2.19) (кроме столбца «1»), содержащий положительные элементы, и среди последних выбираем в качестве разрешающего тот, который имеет максимальное отношение к своему свободному члену (ввиду (3.5));
4. Совершаем 1 шаг ПОЗ таблицы (2.19) по правилам 1.4 и записываем в новую таблицу;
5. Повторяем шаги 3 и 4 с таблицей (2.19) до тех пор, пока крайний левый столбец не будет заполнен базисными неизвестными, неотрицательные значения которых окажутся записанными в столбце «1» (замечание 2.16);
6. Вместе с нулевыми значениями свободных неизвестных (они расположены в верхней строке таблицы) значения базисных неизвестных и дают опорное решение;
7. Если в таблице (2.19) имеется строка с неотрицательным свободным членом и неположительными остальными элементами, то система (2.18) не имеет опорных решений (ввиду $0 = b_i + \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\left(-x_k\right)$, $a_{ik} \le 0$, $b_i \ge 0$ должно быть $x_k \le 0$ хотя бы для одного $k$).

**3.2. Пример.** С помощью СП найти все опорные решения системы

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 = 24 \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \tag{3.6}$$

**О.** Поступаем согласно п.п. 1 – 4 в 3.1. Получаем

| | 1 | $-x_1$ | $-x_2$ | $-x_3$ | $-x_4$ | $\frac{a_{ks}}{b_{ko}}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 24 | 1 | 1 | 5 | 1 | $1/24$ | $\Rightarrow$ |
| 0 | 0 | 3 | $-1$ | $-3$ | $\boxed{1}$ | $\infty$ | |

| | $1$ | $-x_1$ | $-x_2$ | $-x_3$ | $0$ | $\frac{a_{ks}}{b_{ko}}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $0$ | $24$ | $-2$ | $2$ | $\boxed{8}$ | $-1$ | $1/3$ |
| $x_4$ | $0$ | $3$ | $-1$ | $-3$ | $1$ | $-$ |

$\Rightarrow$

| | $1$ | $-x_1$ | $-x_2$ | $\frac{a_{ks}}{b_{ko}}$ | *опорное решение* |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_3$ | $3$ | $-1/4$ | $\boxed{1/4}$ | $1/12$ | $(0,0,3,9)$ |
| $x_4$ | $9$ | $9/4$ | $-1/4$ | $-$ | |

$\Rightarrow$

| | $1$ | $-x_1$ | $-x_3$ | $\frac{a_{ks}}{b_{k0}}$ | *опорное решение* |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_2$ | $12$ | $-1$ | $4$ | $-$ | $(0,12,0,12)$ |
| $x_4$ | $12$ | $\boxed{2}$ | $1$ | $2/12$ | |

$\Rightarrow$

| | $1$ | $-x_4$ | $-x_3$ | $\frac{a_{ks}}{b_{ko}}$ | *опорное решение* |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_2$ | $18$ | $1/2$ | $\boxed{9/2}$ | $9/36$ | $(6,18,0,0)$ |
| $x_1$ | $6$ | $1/2$ | $1/2$ | $1/12$ | |

$\Rightarrow$

| | $1$ | $-x_4$ | $-x_2$ | $\frac{a_{ks}}{b_{ko}}$ | *опорное решение* |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_3$ | $4$ | $1/9$ | $\boxed{2/9}$ | $2/36$ | $(4,0,4,0)$ |
| $x_1$ | $4$ | $4/9$ | $-1/9$ | $-$ | |

$\Rightarrow$

Если мы заменим $x_2$ на $x_3$, то получим набор базисных неизвестных $(x_2, x_1)$, который уже встречался.

Если за разрешающий столбец в последней таблице взять столбец с $x_4$, то $1/36 < 4/36$ и надо менять ролями $x_4$ с $x_1$. Опять получим набор базисных неизвестных $(x_3, x_4)$, который уже встречался. Поэтому данная система имеет только 4 опорных базисных решения. $\otimes$

# 4. ИДЕОЛОГИЯ РЕШЕНИЯ ЗЛП НА МАКСИМУМ. ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗЛП. ПОНЯТИЕ О СИМПЛЕКС-МЕТОДЕ

**4.1. Определение.** Пусть $X=(x_1,\ldots,x_n)$ и $Y=(y_1,\ldots,y_n)$ есть две различные точки в $R^n$. Отрезком $XY$ в $R^n$ называется множество всех точек в $R^n$ вида

$$U=\gamma X+(1-\gamma)Y, \tag{4.1}$$

где $0\le\gamma\le1$.

(4.1) есть матричная запись координат $U$. Если $\gamma=0$, то $U=Y$, а если $\gamma=1$, то $U=X$. Если $0<\gamma<1$, то $U$ – внутренняя точка отрезка $XY$. Множество $M$ точек из $R^n$ называется выпуклым, если вместе с любыми своими точками $X$ и $Y$ оно содержит и все точки отрезка $XY$.

**4.2. Пример.** В $R^3$ выпуклым множеством будет множество $M$ точек, координаты которых удовлетворяют системе ограничений

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x\ge0, y\ge0, z\ge0 \end{cases} \tag{4.2}$$

Это множество точек изображено на рис. 4.1 (многогранник $OABC$).

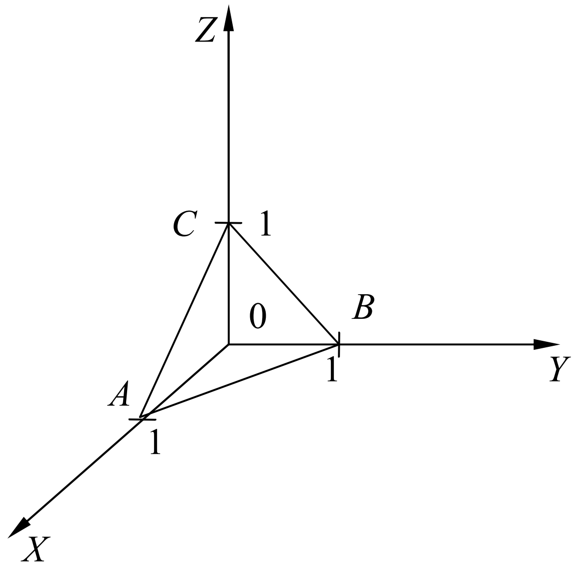



Рис. 4.1

**4.3. Теорема.** Множество $M$ точек из $R^n$, координаты которых удовлетворяют ограничениям (2.5) и (2.6) произвольной КФЗЛП, является выпуклым.

**О.** Пусть $X \in M$, $Y \in M$. Покажем, что любая внутренняя точка (4.1), где $0<\gamma<1$, отрезка $XY$ также лежит в $M$. Действительно, по условию, координаты точек $X$ и $Y$ удовлетворяют любому уравнению из (2.5), т. е.

$$a_{r1}x_1 + \ldots + a_{rn}x_n = b_r \tag{4.3}$$

$$a_{r1}y_1 + \ldots + a_{rn}y_n = b_r \tag{4.4}$$

Умножим обе части (4.3) на $\gamma$, а обе части (4.4) на $(1-\gamma)$ и сложим почленно. Получаем

$$a_{r1}\left[\gamma x_1 + (1-\gamma)y_1\right] + \ldots + a_{rn}\left[\gamma x_n + (1-\gamma)y_n\right] = b_r \tag{4.5}$$

Но (4.5) означает, что координаты внутренней точки $U$ отрезка $XY$ удовлетворяют $r$-тому уравнению из (2.5). Так как $r=\overline{1,m}$, то $U \in M$. $\otimes$.

Основной в теории ЛП является следующая теорема:

**4.4. Теорема.** Линейная форма (1.2) достигает максимума (минимума) в крайней точке (вершине) выпуклого множества $M$ планов КФЗЛП (1.2)$\cup$(2.5)$\cup$(2.6). Если форма (1.2) достигает экстремума в точках $X$ и $Y$ из $M$, то она достигает этого же значения в любой точке $U$ отрезка $XY$ из $M$ .$\varnothing$

Напомним, что точка $X_0$, из выпуклого множества $M$, называется крайней (или вершиной), если для любых точек $X_1$ и $X_2$ из $M$ из равенства $X_0 = \gamma X_1 + (1-\gamma)X_2$ следует, что $X_0 = X_1 = X_2$ (т.е. $X_0$ не может быть внутренней точкой никакого отрезка $X_1X_2$ из $M$, если $X_1 \neq X_2$).

Из теорем 4.3 и 4.4 вытекает

**4.5. Идея решения КФЗЛП**

1. Вычисляем значение $f = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n$ в какой-нибудь точке $X^0 = \left(x_1^0, \ldots, x_n^0\right)$ из многогранника $M$ планов ЗЛП; пусть $f(X^0) = a$.

2. Гиперплоскость $c_1x_1 + \ldots + c_nx_n = a$, которая ортогональна вектору $\bar{c} = \overline{grad\ f} = (c_1, \ldots, c_n)$, рассекает $M$ на две части: $M_1 \cup M_2$; для точек $X \in M_1$ $f(X) < f\left(X^0\right)$, а для точек $X \in M_2$ $f(X) > f\left(X^0\right)$, причем вектор $\overline{grad\ f}$ указывает «в сторону» части $M_2$ (это известное свойство градиента из раздела «Функции многих переменных»).

Если многогранник $M$ планов ЗЛП ограничен в направлении $\overline{grad\ f}$, то на крайней точке (или грани, ортогональной $\overline{grad\ f}$) мы и найдем максимальное значение $f$. Это основано на известном факте, что $\overline{grad\ f}$ есть направление наискорейшего возрастания функции.

Эта теоретическая идея легко реализуется, если число переменных $n = 2$ (рис. 4.2). В этом случае можно применить графический метод решения ЗЛП.

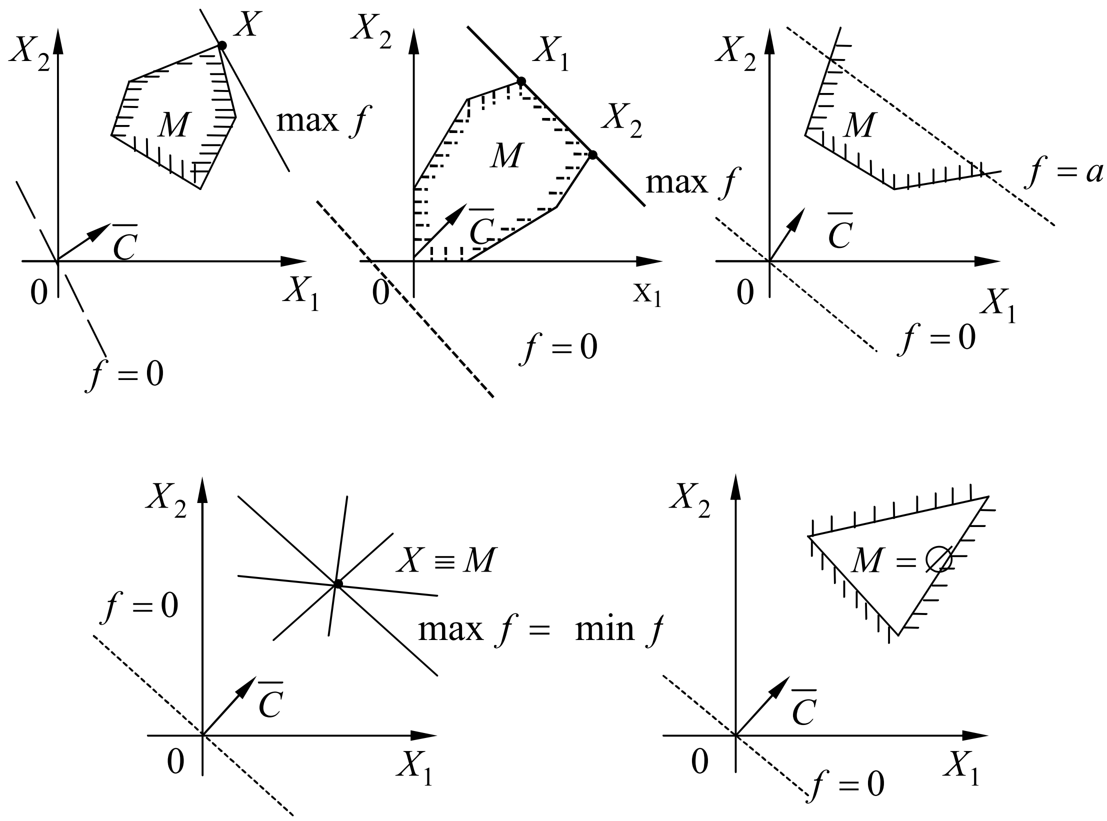



Рис. 4.2

К случаю $n = 2$ сводится и более общий случай, когда $n - r \leq 2$, где $n -$ число переменных, а $r -$ ранг системы ограничений (2.5). Рассмотрим эту ситуацию на примере.

**4.6. Пример.** У фермера есть два участка различного плодородия. Один − 100 га, второй − 200 га. На 1-м участке с 1 га можно собрать 20 ц пшеницы или 35 ц кукурузы. На 2-м участке с 1 га можно собрать 15 ц пшеницы или 30 ц кукурузы. На рынке 1 ц пшеницы стоит 6 условных единиц, а 1 ц кукурузы − 4 условные единицы. Чтобы посев оказался неубыточным, нужно собрать не менее 1500 ц пшеницы и не менее 4500 ц кукурузы. Сколько пшеницы и кукурузы нужно посеять на каждом участке, чтобы получить максимум прибыли?

**О.** Составляем математическую модель данной задачи.

Пусть под пшеницу на 1-м участке нужно отвести $x_1$ га, а на 2-м – $x_2$ га. Пусть под кукурузу нужно отвести на 1-м участке $x_3$ га, а на 2-м – $x_4$ га. Тогда урожай пшеницы будет $20x_1 + 15x_2 \geq 1500$, а урожай кукурузы – $35x_3 + 30x_4 \geq 4500$. Стоимость продукции тогда выразится линейной формой: $f = 6(20x_1 + 15x_2) + 4(35x_3 + 30x_4)$. Таким образом, математическая модель данной задачи есть ОЗЛП.

Найти максимум линейной формы

$$f = 120x_1 + 90x_2 + 140x_3 + 120x_4,$$

при ограничениях

$$x_1 + x_3 = 100$$
$$x_2 + x_4 = 200$$
$$20x_1 + 15x_2 \geq 1500$$
$$35x_3 + 30x_4 \geq 4500$$
$$x_j \geq 0, j = \overline{1,4}.$$

Введением балансовых неизвестных $x_5 \geq 0$ и $x_6 \geq 0$ приводим данную ОЗЛП к эквивалентной КФЗЛП

$$f = 120x_1 + 90x_2 + 140x_3 + 120x_4 \quad (\max), \tag{4.6}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 100 \\ x_2 + x_4 = 200 \\ 20x_1 + 15x_2 - x_5 = 1500 \\ 35x_3 + 30x_4 - x_6 = 4500 \end{cases}, \tag{4.7}$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1,6}. \tag{4.8}$$

Легко вычислить, что ранги основной и расширенной матриц системы (4.7) равны 4, $n - r = 2$. Поэтому ЗЛП можно решать графически. В качестве базисных неизвестных удобно взять $x_3, x_4, x_5, x_6$, так как они тогда легко выразятся через свободные неизвестные $x_1$ и $x_2$:

$$x_3 = 100 - x_1$$
$$x_4 = 200 - x_2$$
$$x_5 = -1500 + 20x_1 + 15x_2$$
$$x_6 = -4500 + 35x_3 + 30x_4 = 5000 - 35x_1 - 30x_2$$

Подставляем значения базисных неизвестных из (4.7) в (4.6), получаем выражение для $f$: $f = 38000 - 20x_1 - 30x_2$.

Из (4.8) получаем ограничения

$$
\begin{array}{ll}
x_1 \le 100 & (4.9.1) \\
x_2 \le 200 & (4.9.2) \\
20x_1 + 15x_2 \ge 1500 & (4.9.3) \\
35x_1 + 30x_2 \le 5000 & (4.9.4) \\
x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 & (4.9.5),(4.9.6)
\end{array}
\qquad (4.9)
$$

Из (4.9) следует, что выпуклый многоугольник $M$ допустимых решений данной ЗЛП (4.6)$\cup$(4.9) можно изобразить на плоскости $X_1OX_2$ (рис. 4.3). Для этого сначала строим граничные прямые $x_1 = 100$, $x_2 = 200$, $20x_1 + 15x_2 = 1500, 35x_1 + 30x_2 = 5000, x_1 = 0, x_2 = 0$. Затем определяем нужные полуплоскости, на которые делит каждая прямая плоскость $X_1OX_2$, с учетом неравенств (4.9). Например, определим полуплоскость $20x_1 + 15x_2 \ge 1500$. Для этого подставим координаты точки, например, $O(0,0)$ в это неравенство. Получим $0 \ge 1500$. Это неверное неравенство. Значит, полуплоскость $20x_1 + 15x_2 \ge 1500$ есть та, которая не содержит точки $O(0,0)$. Аналогично находятся и остальные полуплоскости (4.9). Общая часть полуплоскостей (4.9) и есть выпуклый многоугольник $M$, координаты точек которого удовлетворяют системе ограничений (4.9) (рис. 4.3).

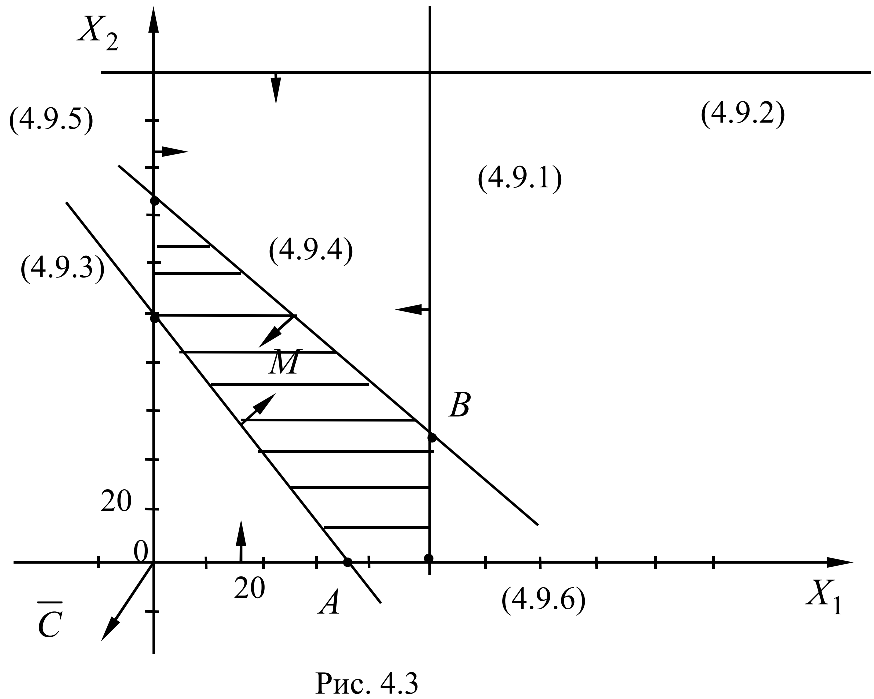



Рис. 4.3

Из (4.8) видно, что $\bar{c} = \overline{grad\ f} = \{-20,-30\}$. Этот вектор даёт нам направление наискорейшего возрастания $f$ на области $M$. Построим прямую перпендикулярную вектору $\bar{c}$, проходящую, например, через точку $B(100,50)$. Это есть линия уровня для $f$: $20(x_1-100)+30(x_2-50)=0$ или $20x_1+30x_2=3500$. В точках этой прямой $f=3500$. Прямую $20x_1+30x_2=3500$ перемещаем параллельно самой себе в направлении вектора $\bar{c}$ по области $M$. В конце движения мы будем находиться в крайней точке $A(75,0)$ многоугольника $M$. (Координаты точки $A$ находим из решения системы $\begin{cases} 20x_1+15x_2=1500 \\ x_2=0 \end{cases}$).

Итак, $f_{\max} = f(A) = 38000 - 20\cdot 75 - 30\cdot 0 = 36500$.

Итак, $x_1=75, x_2=0, x_3=25, x_4=200$ ввиду (4.7).

*Ответ*: оптимальный план посева $(75, 0, 25, 200)$ с максимальной прибылью 36500 у. е. $\otimes$.

Если условие $n-r\le 2$ не выполняется, то для решения КФЗЛП разработан аналитический **симплекс-метод**, заключающийся в последовательном улучшении опорных планов. А именно:

1. Находится какой-нибудь начальный опорный план ЗЛП $X_0$.

2. Если $f(X_0)\ne f_{\max}$ на $M$, то переходим к новому опорному плану $X_1$ такому, что $f(X_1)\ge f(X_0)$. Этот процесс перехода от опорного плана $X_i$ к плану $X_{i+1}$ с $f(X_{i+1})\ge f(X_i)$ продолжается до тех пор пока не будет найден оптимальный план, либо будет установлена неразрешимость ЗЛП (если многогранник $M$ планов КФЗЛП окажется открытой областью в $R^n$ в направлении вектора $\overline{grad\ f}$).

Для того чтобы реализовать пункты 1 и 2, нужно:

1) уметь находить какой-нибудь начальный опорный план;
2) иметь критерий оптимальности опорного плана;
3) уметь находить план $X_{i+1}$ такой, что $f(X_{i+1})\ge f(X_i)$.

# 5. СПОСОБЫ НАХОЖДЕНИЯ НАЧАЛЬНОГО ОПОРНОГО ПЛАНА КФЗЛП

Один из способов нахождения начального опорного плана КФЗЛП следует из правила 3.1. Если к таблице (3.2) добавить «$f$-строку» (или строку целевой функции) $f = 0 - c_1(-x_1) - \ldots - c_n(-x_n)$, то получим запись КФЗЛП из п. 2.2 в табличной форме

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} & 1 & -x_1 & \ldots & -x_n \\ \hline 0 & b_1 & a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & b_m & a_{m1} & \ldots & a_{mn} \\ \hline f & 0 & -c_1 & \ldots & -c_n \end{array} \tag{5.1}$$

Таблица (5.1) ничем не отличается от жордановой таблицы (1.6). В дальнейшем с ней работаем по правилам 1.4 и 3.1 с той лишь разницей, что $f$-строку (по смыслу) нам не нужно выбирать в качестве разрешающей.

Если ранг системы ограничений КФЗЛП (2.17) равен $r$, то через $r$ шагов ПОЗ (правило 3.1.5) от таблицы (5.1) мы перейдём к таблице (5.2), в которой будет содержаться и первое опорное решение КФЗЛП из п. 2.2 и выражение $f$ через свободные неизвестные

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} & 1 & -x_{r+1} & \ldots & -x_{r+s} & \ldots & -x_n \\ \hline x_1 & b_1' & b_{1,r+1} & \ldots & b_{1,r+s} & \ldots & b_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_k & b_{\text{k}}' & b_{k.r+1} & \ldots & b_{k,r+s} & \ldots & b_{kn} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_r & b_r' & b_{r,r+1} & \ldots & b_{r,r+s} & \ldots & b_{rn} \\ \hline f & b_0' & b_{0,r+1} & \ldots & b_{0,r+s} & \ldots & b_{0n} \end{array} \tag{5.2}$$

Таблицу (5.2) называют первой симплексной таблицей (СТ) данной КФЗЛП, т. к. она содержит первый (начальный) опорный план $X_0$ (определение 2.13)

$$X_0 = \left( b_1', \ldots, b_r', \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-r} \right), \tag{5.3}$$

причём

$$b_i' \ge 0, i=\overline{1,r},\ f\left(X_0\right)=b_0', \tag{5.4}$$

ввиду замечания 2.16.

Подводя итоги этих рассуждений, можно сформулировать:

**5.1. Алгоритм нахождения начального опорного плана КФЗЛП**:

1. Записать ЗЛП в виде жордановой таблицы (5.1) так, чтобы все элементы столбца «1» были неотрицательными (см. (3.1));
2. По правилам 3.1 через некоторое число шагов ПОЗ переходим к таблице (5.2), содержащей первый (начальный) опорный план (5.3).

**5.2. Определение.** Говорят, что $i$-тое ограничение из (2.17) имеет предпочтительный вид, если при $b_i \ge 0$ левая часть ограничения содержит некоторую переменную с коэффициентом 1, а в остальные ограничения эта переменная не входит. Эту переменную называют предпочтительной переменной. Если каждое ограничение КФЗЛП имеет предпочтительный вид, то условимся говорить, что система имеет предпочтительный вид.

**5.3. Пример.** В системе

$$\begin{gathered} x_1+3x_2-x_4=8 \\ 2x_2+x_3+7x_4=9 \\ x_2-2x_4=2 \end{gathered}$$

первое и второе ограничения имеют предпочтительные переменные $x_1$ и $x_3$. Третье ограничение не имеет предпочтительных переменных.

Если в КФЗЛП система ограничений имеет предпочтительный вид, то легко найти её начальное опорное решение: в качестве базисных переменных выбираем те, которые обеспечивают предпочтительный вид каждого ограничения.

**5.4. Пример.** Пусть имеем систему ограничений КФЗЛП вида

$$\begin{gathered} x_1+x_2-x_5=10 \\ 5x_1+x_3+3x_5=80 \\ -5x_1+x_4+2x_5=32 \\ x_j \ge 0, j=\overline{1,5} \end{gathered}$$

Найти какое-нибудь опорное базисное решение.

**О.** Система имеет предпочтительный вид. Поэтому легко видим, что $x_2=10-x_1+x_5$, $x_3=80-5x_1-3x_5$, $x_4=32+5x_1-2x_5$. То есть базисные переменные $\{x_2, x_3, x_4\}$ линейно выражаются через свободные переменные $\{x_1, x_5\}$ и опорное решение можно взять такое: $\mathrm{X}_0 = (0, 10, 80, 32, 0)$.

Теперь более подробно рассмотрим наиболее встречающийся случай, когда система ограничений некоторой ЗЛП имеет вид

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i, b_i \geq 0, i = \overline{1,m}. \tag{5.5}$$

Переходим к эквивалентной КФЗЛП вычитанием балансовых переменных $x_{n+i} \geq 0, i = \overline{1,m}$, из левых частей уравнений. Получаем систему ограничений

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - x_{n+i} = b_i, b_i \geq 0, i = \overline{1,m}. \tag{5.6}$$

В этом случае можно использовать **приём** введения **искусственного базиса**. Он состоит в том, что к левым частям ограничений-равенств (5.6) добавляют искусственные переменные $\omega_i$. В целевую функцию $f$ переменные $\omega_i$ вводят с коэффициентом $(-M)$ для задачи на максимум, где $M >> 0$ ($M >> 0$ означает, что $M$ – большое положительное число) и с коэффициентом $M >> 0$ в случае решения задачи на минимум. Новая ЗЛП называется $M$-задачей, соответствующей исходной. $M$-задача имеет уже предпочтительный вид относительно искусственных переменных $\omega_i$.

**5.5. Пример.** Пусть ЗЛП имеет вид

$$f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \quad (\max(\min)), \tag{5.7}$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, b_i \geq 0, i = \overline{1,m}, \tag{5.8}$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1,n}, \tag{5.9}$$

причем ни в одном ограничении из (5.8) нет предпочтительных переменных.

Соответствующая $M$-задача запишется так:

$$\overline{f} = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j - (+) \sum_{i=1}^{m} M \omega_i \quad (\max(\min)), \tag{5.10}$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + \omega_i = b_i, i = \overline{1,m}, \tag{5.11}$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1,n}, \omega_i \geq 0, i = \overline{1,m}. \tag{5.12}$$

Знак (–) в (5.10) относится к задаче на максимум, ( + ) – к задаче на минимум.

Для ЗЛП (5.10) – (5.12) начальный опорный план можно взять следующий:

$$X_0 = \left( \underbrace{0,\ldots,0}_{n}, b_1,\ldots,b_m \right). \tag{5.13}$$

**5.6. Замечание.** Если некоторые из уравнений (5.8) имеют предпочтительный вид, то в них не вводят искусственные переменные, чтобы не увеличивать объём вычислений.

Связь между оптимальными планами исходной задачи и ее $M$ -задачи выражается следующими двумя теоремами.

**5.7. Теорема.** Если в оптимальном плане

$$\overline{X} = \left( x_1,\ldots,x_n;\omega_1,\ldots,\omega_m \right), \tag{5.14}$$

$M$ -задачи (5.10) – (5.12) все искусственные переменные $\omega_i = 0, i = \overline{1,m}$, то план

$$X = \left( x_1,\ldots,x_n \right) \tag{5.15}$$

является оптимальным для исходной задачи (5.7) – (5.9).

**О.** Пусть для определенности ЗЛП (5.10) – (5.12) и (5.7) – (5.9) являются задачами на максимум. Так как план $\overline{X}$ отличается от $X$ только последними компонентами, равными нулю, и план $\overline{X}$ удовлетворяет (5.11), то ясно, что план $X$ удовлетворяет (5.8), т. е. является допустимым для ЗЛП (5.7) – (5.9). В частности

$$\overline{f}\left(\overline{X}\right) = f\left(X\right). \tag{5.16}$$

Предположим, что план $X$ не оптимален для ЗЛП (5.7) – (5.9). Тогда найдется такой план $X_1$, где

$$f\left(X_1\right) > f\left(X\right). \tag{5.17}$$

Тогда из (5.16) и (5.17) следует, что $\overline{f}\left(\overline{X_1}\right) = f\left(X_1\right) > f\left(X\right) = \overline{f}\left(\overline{X}\right)$. Но $\overline{f}\left(\overline{X_1}\right) > \overline{f}\left(\overline{X}\right)$ невозможно по выбору плана $\overline{X}$. Аналогично доказывается и случай задачи на минимум. ⊗.

**5.8. Теорема.** Если в оптимальном плане (5.14) $M$ -задачи хотя бы одна из искусственных переменных отлична от нуля, то исходная задача не имеет решения.

**О.** Пусть для определенности задачи (5.10) – (5.12) и (5.7) – (5.9) есть задачи на максимум. Предположим, что в оптимальном плане $M$-задачи (5.14) $\omega_i > 0$. Тогда выражение (5.10) принимает вид

$$\overline{f} = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j - M\omega_i = f - M\omega_i \,. \tag{5.18}$$

Но тогда $f = \overline{f} + M\omega_i$. Так как $M >> 0$, то $f$ не имеет максимума. ⊗

В качестве примера рекомендуется изучить п.п. 6.10 и 6.11, изложенные ниже.

## 6. КРИТЕРИЙ ОПТИМАЛЬНОСТИ ОПОРНОГО ПЛАНА КФЗЛП НА МАКСИМУМ. ПЕРЕХОД К НЕХУДШЕМУ ОПОРНОМУ ПЛАНУ

После нахождения начального опорного плана (5.3) возникает вопрос: план (5.3) дает максимальное значение формы $f$, или следует находить новые опорные планы с большим значением $f$?

В качестве ответа на этот вопрос рассмотрим следующие две теоремы.

**6.1. Теорема.** Если в симплекс-таблице (5.2) задачи на максимум, содержащей некоторый опорный план $X_0$, все элементы $f$-строки (кроме $b_0'$) неотрицательны

$$\left(b_{0,r+1} \geq 0, \ldots, b_{0n} \geq 0\right), \tag{6.1}$$

то $X_0$ – оптимальный план и $f\left(X_0\right) = b_0' = \max f$ на многограннике $M$ допустимых планов (КФЗЛП из п. 2.2).

**О**. Из (5.2) видно, что

$$f = b_0' - \left(b_{0,r+1}x_{r+1} + \ldots + b_{0,r+s}x_{r+s} + \ldots + b_{0n}x_n\right). \tag{6.2}$$

По определению 2.13 $x_{r+1} = 0, \ldots, x_n = 0$. По (5.9) эти свободные неизвестные неотрицательны. Поэтому при их изменении они могут лишь увеличиваться. Но тогда из (6.2) следует, что значение $f$ уменьшается. То есть, $f\left(X_0\right) \geq f\left(X_1\right)$ для любого другого плана $X_1$. ⊗.

**6.2. Теорема.** Если в СТ (5.2), содержащей некоторый опорный план $X$, в $f$-строке есть хотя бы один отрицательный элемент $\left(b_{0,r+s} < 0\right)$, кроме $b_0'$, которому соответствует столбец $\left(x_{r+s}\right)$ с хотя бы одним положительным элементом $\left(b_{k,r+s} > 0\right)$, то совершив шаг ПОЗ по правилу 3.1 над СТ (5.2), можно перейти к такому новому плану $X_1$, где $f\left(X_1\right) \geq f\left(X\right)$.

**О**. Опорный план ЗЛП, имеющийся в СТ (5.2) по (5.3) имеет вид

$$X = (b_1', \ldots, b_k', \ldots b_r'; 0, \ldots, 0). \tag{6.3}$$

Для получения нового опорного плана $X_1$ применим к СТ (5.2) правила 3.1. В частности, по правилу 3.1.3 элемент $b_{k,r+s}$ можно взять для этой цели в качестве разрешающего, если он удовлетворяет условиям (3.5).

То есть

$$\frac{b_k'}{b_{k,r+s}} = \min_i \left\{ \frac{b_i'}{b_{i,r+s}} \right\} = \theta > 0, \quad i = \overline{1,r}. \tag{6.4}$$

Тогда по правилам 3.1.4, 1.4 и (1.12) получаем новые значения базисных неизвестных

$$x_{i(i \neq k)} = \frac{b_i' b_{k,r+s} - b_k' b_{i,r+s}}{b_{k,r+s}} = b_i' - \theta \cdot b_{i,r+s} > 0, \tag{6.5}$$

$$x_k = \frac{b_k'}{b_{k,r+s}} = \theta > 0, \tag{6.6}$$

и для $f$-строки

$$f(X_1) = \frac{b_0' \cdot b_{k.r+s} - b_k' \cdot b_{0,r+s}}{b_{k,r+s}} = b_0' - b_{0,r+s} \cdot \theta. \tag{6.7}$$

По условию теоремы $b_{0,r+s} < 0$. Поэтому из (6.7) и (6.4) следует, что

$$f(X_1) = b_0' - b_{0,r+s} \cdot \theta \geq b_0' = f(X). \qquad \otimes.$$

### 6.3. Замечание

1. Отношение $\theta$ из (6.4) для столбцов «1» и $(r+s)$-го в СТ (5.2) называется симплексным. Если $\theta$ достигается при $i = k$, то $k$-тую строку и выбирают в качестве разрешающей. Если $\theta$ достигается при $i = \{k, l, \ldots\}$, то в качестве разрешающей можно брать строки $k$-тую, $l$-тую, $\ldots$. Но можно пользоваться следующим правилом:

– в качестве разрешающей выбирают ту строку, для которой будет минимальным отношение элемента следующего после столбца «1» к элементу, претендующему на роль разрешающего. То есть находят $\min \left\{ \frac{b_{i,r+1}}{b_{i,r+s}} \right\}$, $i$

пробегает множество $\{k,l,\ldots\}$. Если и теперь для нескольких строк найдется одинаковое минимальное отношение, то эту процедуру проводят для столбца $r+2, r+3,\ldots$ пока разрешающая строка не определится однозначно.

2. Отметим без доказательства, что в качестве разрешающего столбца на практике лучше брать столбец с отрицательным наименьшим элементом в $f$-строке.

**6.4. Теорема.** Если $f$-строке СТ (5.2), содержащей некоторый невырожденный оптимальный план, имеется хотя бы один нулевой элемент (кроме $b_0'$), то ЗЛП имеет бесконечно много оптимальных планов.

**О.** Пусть в СТ (5.2) $b_{0,r+s}=0$, а план $X_1$ оптимальный. К СТ (5.2) применяем 1 шаг ПОЗ с разрешающим столбцом, содержащим $(-x_{r+s})$. Приходим к новой СТ, в которой $f$-строка не изменилась после применения правила «прямоугольника» для вычисления ее элементов, т. е. значение $f$ прежнее, как при плане $X_1$, хотя столбец «1» мог дать новый оптимальный план $X_2$. Тогда по теореме 4.4 $f$ принимает оптимальное значение и на отрезке $X_1X_2$. $\otimes$.

**6.5. Замечание к теореме 6.2.** Если в $f$-строке СТ, содержащей опорный план некоторой КЗЛП, имеется отрицательный элемент, то следует проверить в данной СТ все отрицательные элементы $f$-строки и соответствующие им столбцы на предмет применения следующей теоремы.

**6.6. Теорема.** Если в $f$-строке СТ (5.2), содержащей некоторый опорный план, есть хотя бы один отрицательный элемент, кроме $b_0'$, которому соответствует столбец из неположительных элементов, то целевая функция $f$ не ограничена на многограннике $M$ планов ЗЛП. (то есть КФЗЛП не имеет решения, $f_{\max}$ не существует на $M$). $\varnothing$.

**6.7. Замечание.** Если в базисном опорном плане ЗЛП имеется базисная неизвестная равная нулю, то такой план называется вырожденным, а ЗЛП называется вырожденной. Из формулы (6.6) следует, что если $x_k=b_k'=0$, то $\theta=0$ и формула (6.7) показывает, что, возможно, значение $f$ не увеличивается после шага ПОЗ. В этом случае нужно перейти к другому опорному плану $X_2$, для которого $f(X_2)>f(X_1)=f(X_0)$. Если же не удается найти на $n$-ном шаге план $X_n$, для которого $f(X_n)>f(X_{n-1})=\ldots=f(X_0)$, то имеет место явление зацикливания. Алгоритм вывода ЗЛП из состояния зацикливания в этом конспекте не рассматривается. В простейшем случае следует попытаться изменить выбор разрешающей строки по замечанию 6.3.

Резюмируя, можно сформулировать следующий алгоритм.

**6.8. Алгоритм симплекс-метода**

1. По условию ЗЛП составляется ее математическая модель в виде КФЗЛП.

2. КЗЛП из 1 записывается в виде жордановой таблицы (5.1). Если ранги основной и расширенной матрицы системы ограничений (2.5) оба равны числу $r$, то через $r$ шагов ПОЗ можно получить первую СТ КЗЛП (5.2) с начальным опорным планом $X_0$.

3. Проверяем $X_0$ на оптимальность по теореме 6.1. Если $X_0$ не является оптимальным планом, то на основании теоремы 6.2 переходим к более оптимальному плану $X_1$ по правилу 3.1.

4. Шаг 3 осуществляется до тех пор, пока не будет получен оптимальный план, либо установлена неразрешимость ЗЛП (теорема 6.6).

**6.9. Замечание.** Если в ЗЛП требуется найти минимум линейной формы $f$, то можно воспользоваться соотношением (2.11) и найти $\max(-f)$, и в конечном результате взять его со знаком (–).

Но существуют и другие методы, которые мы здесь не рассматриваем.

**6.10. Замечание.** Из (5.10) видно, что в $M$ -задача на максимум $\overline{f}$ состоит из двух слагаемых: $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ и $\left(-M\sum_{i=1}^{m}\omega_i\right)$. После выражения $\omega_i, i=\overline{1,m}$, через $\left\{x_j,\ j=\overline{1,n}\right\}$ и приведения подобных членов в (5.10) выражение для $\overline{f}$ принимает вид: $\overline{f}=\sum_{j=1}^{n} b_{0j}^{(1)}\left(-x_j\right)-M\sum_{j=1}^{n} b_{0j}^{(2)}\left(-x_j\right)$. Тогда коэффициент при $\left(-x_j\right)$ имеет вид: $b_{0j}=b_{0j}^{(1)}-b_{0j}^{(2)},\ j=\overline{1,n}$. Поэтому в СТ для $\overline{f}$ удобно отвести две строки: одну для $-\sum_{j=1}^{n} b_{0j}^{(1)} x_j$, другую – для $M\sum_{j=1}^{n} b_{0j}^{(2)} x_j$.

Знак элемента $b_{0j}=b_{0j}^{(1)}-Mb_{0j}^{(2)}$ в (6.1) определяется знаком $Mb_{0j}^{(2)}$, так как $M$ – большое число. Поэтому, пока $b_{0j}^{(2)}\neq 0$, разрешающий столбец можно выбирать только по элементам второй строки (для $M\sum_{j=1}^{n} b_{0j}^{(2)} x_j$). Лишь после того, как все элементы второй строки для $\overline{f}$ окажутся равными нулю, разрешающие столбцы выбирают по первой строке для $f$.

Шаги ПОЗ с симплекс-таблицами $M$-задачи продолжаются до тех пор, пока из базиса не будут исключены все искусственные переменные. По мере исключения из базиса всех $\omega_i, i=\overline{1,m}$, соответствующие столбцы в СТ можно опускать, так как искусственные переменные в базис не возвращают.

**6.11. Пример к замечанию 6.10.**

Решить ЗЛП методом искусственного базиса

$$f=-2x_1-6x_2+5x_3-x_4-4x_5 \quad (\max),$$

при ограничениях

$$\begin{cases} x_1-4x_2+2x_3-5x_4+9x_5=3 \\ x_2-3x_3+4x_4-5x_5=6 \\ x_2-x_3+x_4-x_5=1 \end{cases}.$$
$$x_j \ge 0,\ j=\overline{1,5}$$

**О.** Составляем $M$-задачу. Первое уравнение имеет предпочтительную базисную переменную $x_1$, поэтому вводить в него искусственную переменную не имеет смысла. Во второе и третье уравнения введем искусственные переменные $\omega_1$ и $\omega_2$ соответственно. Целевая функция будет иметь вид

$$\overline{f}=f-M(\omega_1+\omega_2).$$

Приходим к $M$-задаче

$$\overline{f}=-2x_1-6x_2+5x_3-x_4-4x_5-M(\omega_1+\omega_2) \quad (\max)$$
$$x_1-4x_2+2x_3-5x_4+9x_5=3$$
$$x_2-3x_3+4x_4-5x_5+\omega_1=6$$
$$x_2-x_3+x_4-x_5+\omega_2=1$$
$$x_j \ge 0,\ j=\overline{1,5};\ \omega_1 \ge 0,\ \omega_2 \ge 0.$$

Введение искусственной переменной в первое уравнение только бы удлинило решение. Выразим $\overline{f}$ через свободные переменные $x_2, x_3, x_4, x_5$. Для этого из ограничительных уравнений найдем $x_1, \omega_1, \omega_2$ и полученные выражения подставим в $\overline{f}$. После упрощений получим

$$\overline{f}=-14x_2+9x_3-11x_4+14x_5-6-M(-2x_2+4x_3-5x_4+6x_5+7).$$

Теперь $M$-задачу запишем в табличном виде.

Для $\overline{f}$ предусмотрим две строки. Общий множитель $M$ элементов второй строки выносим за ее пределы:

| | 1 | $-x_2$ | $-x_3$ | $-x_4$ | $-x_5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 3 | –4 | 2 | –5 | 9 |
| $\omega_1$ | 6 | 1 | –3 | 4 | –5 |
| $\omega_2$ | 1 | 1 | –1 | $\boxed{1}$ | –1 |
| $\overline{f}$ | –6 | 14 | –9 | 11 | –14 |
| $\overline{f}\ M$ | –7 | –2 | 4 | –5 | 6 |

(6.8)

Разрешающий элемент в таблице (6.8) выбран (по минимальному симплексному отношению $\frac{b_k}{a_{ks}}$ в (3.5)) в столбце с элементом $(-5)$ во второй строке $\overline{f}$-строки.

После шага ПОЗ из базиса выводится искусственная переменная $\omega_2$ и вводится в базис $x_4$. $\omega_2$ исключается из дальнейших расчетов, соответствующий ей столбец опускается:

| | 1 | $-x_2$ | $-x_3$ | $-x_5$ |
|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 8 | 1 | $-3$ | 4 |
| $\omega_1$ | 2 | $-3$ | $\boxed{1}$ | $-1$ |
| $x_4$ | 1 | 1 | $-1$ | $-1$ |
| $\overline{f}$ | $-17$ | 3 | 2 | $-3$ |
| $\overline{f}\ M$ | $-2$ | 3 | $-1$ | 1 |

. (6.9)

В таблице (6.9) еще содержится решение $M$-задачи: $\left(8, 0, 0, 1, 0, \omega_1 = 2, \omega_2 = 0\right)$ и значение $\overline{f}$, соответствующее этому решению $\overline{f} = -17 - 2M$.

Во второй строке $\overline{f}$-строки есть отрицательный элемент (–1). Ему соответствует столбец с $(-x_3)$. Коэффициент при $(-x_3)$ в $\overline{f}$-строке имеет вид: $(2 - M)$. Из $M >> 0$ следует, что $(2 - M) < 0$. Поэтому применяем опять теорему 6.2. То есть, делаем еще один шаг ПОЗ с таблицей (6.9) с разрешающим элементом 1>0. Этим исключим из базиса и вторую искусственную переменную $\omega_1$. Кроме того, все элементы второй строки $\overline{f}$-строки становятся равными нулю и таблица (6.10) соответствует исходной задаче:

|  | 1 | $-x_2$ | $-x_5$ |
|---|---|---|---|
| $x_1$ | 14 | –8 | $\boxed{1}$ |
| $x_3$ | 2 | –3 | –1 |
| $x_4$ | 3 | –2 | –2 |
| $f$ | –21 | 9 | –1 |

(6.10)

В таблице (6.10) содержится опорное решение исходной задачи $(14, 0, 2, 3, 0)$ и значение целевой функции $f = -21$.

Как видно из $f$-строки и теоремы 6.1, это решение не отрицательное. Поэтому делаем еще один шаг ПОЗ с разрешающим элементом 1>0 в столбце с $(-1)$ в $f$-строке. Получаем последнюю таблицу (6.11), удовлетворяющую теореме 6.1.

|  | 1 | $-x_2$ | $-x_1$ |
|---|---|---|---|
| $x_5$ | 14 |  |  |
| $x_3$ | 16 |  |  |
| $x_4$ | 31 |  |  |
| $f$ | –7 | 1 | 1 |

(6.11)

*Ответ:* $X^* = (0, 0, 16, 31, 14)$. $f\left(X^*\right) = f_{\max} = -7.$ $\otimes$.

## 7. ЭКОНОМИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ, ПРИВОДЯЩИЕ К ПОНЯТИЮ ДВОЙСТВЕННОЙ ПАРЫ ЗЛП

**7.1. Пример.** Предприятие $A$ использует $m$ различных ресурсов $R_1, \ldots, R_m$, объёмы которых ограничены величинами $b_1, \ldots, b_m$, для производства $n$ видов изделий $T_1, \ldots, T_n$, объём выпуска, которых характеризуется переменными величинами $x_1, \ldots, x_n$.

Стоимость единицы $i$-того ресурса $R_i$ на рынке I , доступном предприятию $A$, составляет $z_i$ у.е. На производство одного изделия $j$-того вида $T_j$ требуется $a_{ij}$ единиц ресурсов $i$-того вида, $i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$. Тогда себестоимость одного изделия $j$-того вида есть

$$a_{1j}z_1 + \ldots + a_{mj}z_m \text{ у.е.} \tag{7.1}$$

Цена одного изделия $j$-того вида на рынке II может составлять в условиях конкуренции $c_j$ у.е., $j=\overline{1,n}$. Тогда прибыль предприятия $A$ от продажи одного изделия $j$-того вида на рынке II будет

$$c_j-\left(a_{1j}z_1+\ldots+a_{mj}z_m\right) \text{ у.е.} \tag{7.2}$$

Предприятие $A$ намечает такой план

$$X=\left(x_1,\ldots,x_n\right) \tag{7.3}$$

выпуска изделий каждого вида, при котором расход ресурсов не превышал бы их заданного количества, а суммарная выручка

$$f=c_1x_1+\ldots+c_nx_n \tag{7.4}$$

была бы максимальной.

Математическая модель задачи предприятия $A$ – СФЗЛП. Найти максимум линейной формы $f$ из (7.4) при ограничениях (на ресурсы)

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\ldots+a_{1n}x_n\le b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+\ldots+a_{mn}x_n\le b_m \end{cases} \tag{7.5}$$

$$x_j\ge 0, j=\overline{1,n}. \tag{7.6}$$

В это время другое предприятие $B$, не имеющее доступа к рынку I , получило выгодный заказ, и ему нужны те же ресурсы, которые имеет $A$. Руководство предприятия $B$ понимает, что $A$ не выгодно продавать свои ресурсы, не имея выручки (7.4). Поэтому оно предлагает предприятию $A$ такие цены $y_1,\ldots,y_m$ за единицу ресурсов каждого из $m$ видов, которые бы удовлетворили интересы предприятия $A$, т. е., чтобы за ресурсы для одного изделия $j$-того вида $A$ имело

$$a_{1j}y_1+a_{2j}y_2+\ldots+a_{mj}y_m\ge c_j, j=\overline{1,n} \tag{7.7}$$

выручки.

В то же время предприятие $B$, удовлетворив интересы $A$ (7.7), желает затратить на покупку ресурсов минимум денег, т. е., нужно найти минимум линейной формы

$$F=b_1y_1+\ldots+b_my_m, \tag{7.8}$$

при ограничениях (7.7) и

$$y_i\ge 0, i=\overline{1,m}. \tag{7.9}$$

Предложение предприятия $B$ выгодно и предприятию $A$, т. к. оно, не работая, может выполнить план по выручке.

ЗЛП (7.4) – (7.6) и (7.7) – (7.9) доставляют нам типичный случай пары взаимно двойственных задач ЛП, часто встречающихся при реализации встречных интересов.

Из рассмотрения многих похожих ситуаций и анализа конкретных взаимно двойственных задач был выведен и формальный принцип построения к данной задаче её двойственной задачи (**принцип двойственности**).

**7.2. Определение.** Следующие две ОЗЛП:

7.2.1. Максимизировать

$$f = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j \,, \tag{7.10}$$

при ограничениях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j \le b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m_1 1}x_1 + \ldots + a_{m_1 n}x_n \le b_{m_1} \end{cases}, \tag{7.11}$$

$$\begin{cases} a_{m_1+1,1}x_1 + \ldots + a_{m_1+1,n}x_n = b_{m_1+1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}, \tag{7.12}$$

$$x_1 \ge 0, \ldots, x_{n_1} \ge 0, \tag{7.13}$$

$$x_{n_1+1}, \ldots, x_n \text{ не имеют ограничений в знаке.} \tag{7.14}$$

и

7.2.2. Минимизировать

$$F = b_1y_1 + \ldots + b_my_m, \tag{7.15}$$

при ограничениях

$$\begin{cases} a_{1j}y_1 + \ldots + a_{mj}y_m \ge c_j, j = \overline{1, n_1}, n_1 \le n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}, \tag{7.16}$$

$$\begin{cases} a_{1j}y_j + \ldots + a_{mj}y_m = c_j, j = \overline{n_1+1, n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}, \tag{7.17}$$

$$y_i \ge 0, i = \overline{1, m_1}, m_1 \le m, \tag{7.18}$$

$$y_i \text{ не имеет ограничений в знаке } i = \overline{m_1+1, m} \tag{7.19}$$

называются парой взаимно двойственных задач ЛП.

Из этого определения вытекает следующий принцип двойственности.

### 7.3. Принцип построения двойственной задачи

| ***I исходная задача*** | ***I′ двойственная задача*** |
|---|---|
| 1. максимизация $f$ | $1'$. минимизация $F$ |
| 2. $i$-тое ограничение, $i=\overline{1,m}$ | $2'$. переменная $y_i, i=\overline{1,m}$ |
| 3. константы в правых частях ограничений | $3'$. коэффициенты в целевой функции $F$ |
| 4. коэффициенты в целевой функции $f$ | $4'$. константы в правых частях ограничений |
| 5. $j$-тая неотрицательная переменная, $j=\overline{1,n_1}$ | $5'$. $j$-тое ограничение вида $\geq, j=\overline{1,n_1}$ |
| 6. $j$-тая переменная без ограничений в знаке, $j=\overline{n_1+1,n}$ | $6'$. $j$-тое ограничение вида $=$, $j=\overline{n_1+1,n}$ |
| 7. $i$-тое ограничение вида $\leq, i=\overline{1,m_1}$ | $7'$. $i$-тая неотрицательная переменная, $i=\overline{1,m_1}$ |
| 8. $i$-тое ограничение вида $=$, $i=\overline{m_1+1,m}$ | $8'$. $i$-тая переменная не имеет ограничений в знаке, $i=\overline{m_1+1,m}$ |
| 9. матрица $A_{m\times n}$ коэффициентов при неизвестных в ограничениях. | $9'$. матрица $A^T_{\text{m×n}}=B_{n\times m}$ коэффициентов при неизвестных в ограничениях. |

**7.4. Пример.** Построить двойственную задачу к следующей ОЗЛП:

$$F=2x_1-x_2+x_3-2x_4 \quad (\min)$$
$$3x_1-2x_2+x_3-x_4\leq 8$$
$$x_1+3x_2+x_3-2x_4=6$$
$$2x_1-5x_2+3x_4\geq 7$$
$$x_1\geq 0, x_2\geq 0, x_4\geq 0.$$

**О.** Так как в исходной задаче требуется найти минимум, то смотрим на правую колонку п. 7.3. Из п.п. $7.3.5'$ и $7.3.6'$ следует, что все ограничения должны иметь знак «≥» или «=». Поэтому умножим обе части 1-го ограничения на $(-1)$. Получим эквивалентную систему ограничений:

$$-3x_1+2x_2-x_3+x_4\geq -8$$
$$x_1+3x_2+x_3-2x_4=6$$
$$2x_1-5x_2+3x_4\geq 7$$

Из п.п. 7.3.2, 7.3.5 и 7.3.6 следует, что двойственная задача должна иметь три переменные, из которых $u_1 \ge 0, u_3 \ge 0$, а $u_2$ не имеет ограничений в знаке.

Таким образом, из п.п. 7.3.4$'$, 7.3.9$'$ и 7.3.8$'$ следует, что двойственная задача имеет вид $f = -8u_1 + 6u_2 + 7u_3 \quad (\max)$, при ограничениях

$$-3u_1 + u_2 + 2u_3 \le 2$$

$$2u_1 + 3u_2 - 5u_3 \le -1$$

$-u_1 + u_2 = 1$ (т. к. $x_3$ не имеет ограничений в знаке)

$$u_1 - 2u_2 + 3u_3 \le -2$$

$$u_1 \ge 0, u_3 \ge 0. \qquad \otimes.$$

## 8. СООТВЕТСТВИЕ МЕЖДУ НЕИЗВЕСТНЫМИ В ПАРЕ ВЗАИМНО ДВОЙСТВЕННЫХ ЗАДАЧ И ОБЪЕДИНЕННАЯ ЖОРДАНОВА ТАБЛИЦА

Приведём обе задачи 7.2.1 и 7.2.2 к каноническому виду введением в первую задачу балансовых неизвестных $x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}$, а во вторую – балансовых неизвестных $y_{m+1}, \ldots, y_{m+n}$.

**8.0. Замечание.** Если в п. 7.2.1 $m_1 < m$, или в п. 7.2.2 $n_1 < n$, то $m - m_1$ балансовых переменных $x_{n+m_1+1}, \ldots, x_{n+m}$ и $n - n_1$ балансовых переменных $y_{m+n_1+1}, \ldots, y_{m+n}$ считаем равными нулю.

Тогда задача 7.2.1 принимает вид 8.1.

**8.1. Задача**

$$f = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \quad (\max) \tag{8.1}$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i, i = \overline{1,m}, \tag{8.2}$$

$$x_j \ge 0, j = \overline{1, n+m}. \tag{8.3}$$

Задача 7.2.2 принимает вид 8.2.

**8.2. Задача**

$$F = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \quad (\min) \tag{8.4}$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i - y_{m+j} = c_j, j = \overline{1,n}, \tag{8.5}$$

$$y_i \geq 0, i = \overline{1, m+n} \tag{8.6}$$

Задача 8.1 приведена к «единичному базису» относительно переменных $x_{n+1},\dots,x_{n+m}$ (т. к. это предпочтительные переменные) (см. (5.2)), а задача 8.2 – к «минус единичному базису» относительно переменных $y_{m+1},\dots,y_{m+n}$ (ввиду(8.5)). Из (8.2) и (8.5) легко получить выражения «базисных» переменных через «свободные» переменные в каждой задаче 8.1 и 8.2

$$x_{n+i} = b_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-x_j), \quad i = \overline{1,m} \tag{8.7}$$

и $$y_{m+j} = -c_j + \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i, \quad j = \overline{1,n} \tag{8.8}$$

По идеологии двойственности между переменными обеих задач устанавливается следующее 1-1 соответствие:

$$\begin{array}{cccccc} & СП & & & БП & \\ x_1, & \dots, & x_n; & x_{n+1}, & \dots, & x_{n+m} \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ y_{m+1}, & \dots, & y_{m+n}; & y_1, & \dots, & y_m. \\ & БП & & & СП & \end{array} \tag{8.9}$$

Задачи 8.1 и 8.2 ввиду (8.7) и (8.8) легко записываются в табличном виде

| | $1$ | $-x_1$ | $\dots$ | $-x_n$ |
|---|---|---|---|---|
| $x_{n+1}$ | $b_1$ | $a_{11}$ | $\dots$ | $a_{1n}$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $x_{n+m}$ | $b_m$ | $a_{m1}$ | $\dots$ | $a_{mn}$ |
| $f$ | $0$ | $-c_1$ | $\dots$ | $-c_n$ |

(8.10)

| | $1$ | $y_1$ | $\dots$ | $y_m$ |
|---|---|---|---|---|
| $y_{m+1}$ | $-c_1$ | $a_{11}$ | $\dots$ | $a_{m1}$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $y_{m+n}$ | $-c_n$ | $a_{1n}$ | $\dots$ | $a_{mn}$ |
| $F$ | $0$ | $b_1$ | $\dots$ | $b_m$ |

(8.11)

Таблицы (8.10) и (8.11) можно записать и в виде объединённой таблицы

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c}
 & БП & F & y_{m+1} & \dots & y_{m+n} \\
\hline
СП & БП^{\cdot\cdot.СП} & 1 & -x_1 & \dots & -x_n \\
\hline
y_1 & x_{n+1} & b_1 & a_{11} & \dots & a_{1n} \\
\hline
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\hline
y_m & x_{n+m} & b_m & a_{m1} & \dots & a_{mn} \\
\hline
 & f & 0 & -c_1 & \dots & -c_n
\end{array} \qquad (8.12)$$

**8.3. Замечание.** Таблица (8.12) устроена так, что значение $F$ и значения БП из двойственной задачи можно найти в $f$-строке таблицы (8.10) ввиду (8.9). Таким образом, достаточно решить одну из пары взаимно двойственных задач и из этого решения на основании (8.9) извлечь решение другой. Поэтому на практике таблицу (8.12) можно и не писать.

**8.4. Пример к замечанию 8.3**. Для следующей ЗЛП:

$$f = 5x_1 + 4x_2 + 6x_3 \quad (\max)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 8 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 \ge 9 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 11 \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}$$

написать двойственную и найти оптимальные решения обеих задач.

**О.** Так как эта задача на максимум, то по п.п. 7.3.7 и 7.3.8 все ограничения имеют смысл «$\le$» или «=». Поэтому второе и третье ограничения умножаем на $(-1)$. Получаем систему ограничений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 8 \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 \le -9 \\ -3x_1 - x_2 - 2x_3 \le -11 \end{cases}$$

Вводим балансовые переменные $x_j \ge 0, j = \overline{4,6}$. Получаем ограничения КФЗЛП

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8 \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_5 = -9 \\ -3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_6 = -11 \end{cases}$$

Откуда

$$\begin{cases} x_4 = 8 - x_1 - x_2 - x_3 \\ x_5 = -9 + 2x_1 - x_2 + 3x_3 \\ x_6 = -11 + 3x_1 + x_2 + 2x_3 \end{cases} \tag{8.13}$$

Согласно п. 7.3 двойственная задача имеет вид

$$F = 8y_1 - 9y_2 - 11y_3 \quad (\min)$$

$$\begin{cases} y_1 - 2y_2 - 3y_3 \ge 5 \\ y_1 + y_2 - y_3 \ge 4 \\ y_1 - 3y_2 - 2y_3 \ge 6, \end{cases}$$

$$y_i \ge 0, i = \overline{1,3}$$

Вводим балансовые переменные $y_i \ge 0, i = \overline{4,6}$. Получаем ограничения двойственной КФЗЛП

$$\begin{cases} y_1 - 2y_2 - 3y_3 - y_4 = 5 \\ y_1 + y_2 - y_3 - y_5 = 4 \\ y_1 - 3y_2 - 2y_3 - y_6 = 6 \end{cases} \tag{8.14}$$

В соответствии с (8.9) имеем 1–1 соответствие переменных

$$\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ y_4 & y_5 & y_6 & y_1 & y_2 & y_3 \end{matrix} \tag{8.15}$$

По замечанию 8.3 достаточно решить «исходную» КФЗЛП и из (8.15) получить решение двойственной КФЗЛП, или наоборот.

Ввиду (8.13) жорданова таблица для «исходной» КФЗЛП имеет вид

(8.16)

| | 1 | $-x_1$ | $-x_2$ | $-x_3$ |
|---|---|---|---|---|
| $x_4$ | 8 | 1 | 1 | 1 |
| $x_5$ | –9 | –2 | 1 | –3 |
| $x_6$ | –11 | –3 | –1 | –2 |
| $f$ | 0 | –5 | –4 | –6 |

Из сравнения отрицательных элементов в $f$-строке и замечания 6.3.2 следует, что в качестве разрешающего столбца следует выбрать столбец с $(-x_3)$, т. к. $(-6)<\{-5,-4\}$. Поскольку в этом столбце только один положительный элемент, то согласно (3.3) он и есть разрешающий элемент $(a_{13}=1)$.

Один шаг ПОЗ даёт нам новую таблицу:

$$\begin{array}{cc|c|ccc} & & F & y_4 & y_5 & y_1 \\ & & 1 & -x_1 & -x_2 & -x_4 \\ \hline y_6 & x_3 & 8 & 1 & 1 & -1 \\ y_2 & x_5 & 15 & & & 3 \\ y_3 & x_6 & 5 & & & 2 \\ & f & 48 & 1 & 2 & 6 \end{array} \qquad (8.17)$$

По теореме 6.1 план $X^*=(0,0,8,0,15,5)$ является оптимальным и $f_{\max}=f\left(X^*\right)=48$.

Из (8.15) следует, что соответствующий оптимальный план для двойственной задачи есть (по 8.3)

$$Y^*=(y_1,y_2,y_3,y_4,y_5,y_6)=(6,0,0,1,2,0).\ F\left(Y^*\right)=48.$$

Отсюда получаем решение $X$ исходной задачи: $X=(0,0,8)$ и её двойственной задачи: $Y=(6,0,0)$. $f_{\max}(X)=48=F_{\min}(Y)$.

Решение же двойственной задачи более громоздко.

## 9. ПЕРВАЯ ТЕОРЕМА ДВОЙСТВЕННОСТИ И ЕЁ ЭКОНОМИЧЕСКИЙ СМЫСЛ. ВТОРАЯ ТЕОРЕМА ДВОЙСТВЕННОСТИ И ЕЁ ЭКОНОМИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

**9.1. Лемма.** Пусть имеем пару взаимно двойственных задач 7.2.1 и 7.2.2. Тогда для любых допустимых планов

$$X=(x_1,\ldots,x_n) \text{ и } Y=(y_1,\ldots,y_m)$$

прямой и двойственной задачи соответственно имеет место неравенство

$$f(X)\le F(Y), \text{ или } \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \le \sum_{i=1}^{m} b_i y_i. \qquad (9.1)$$

**О.** Умножим $i$-тое ограничение из (7.11) $\cup$ (7.12) на $y_i$. Получаем

$$(a_{i1}x_1+\ldots+a_{in}x_n)y_i \le b_i y_i, i=\overline{1,m}. \qquad (9.2)$$

В (9.2) $m$ неравенств. Сложим их почленно. Получаем

$$\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i\right)y_i \le \sum_{i=1}^{m} b_i y_i . \tag{9.3}$$

Теперь умножим обе части $j$-того ограничения из (7.16) $\cup$ (7.17) на $x_j$. Получаем

$$\left(a_{1j}y_1 + \ldots + a_{mj}y_m\right)x_j \ge c_j x_j,\ j = \overline{1,n}. \tag{9.4}$$

Просуммируем $n$ неравенств (9.4) почленно. Получаем

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i\right)x_j \ge \sum_{j=1}^{n} c_j x_j . \tag{9.5}$$

Левые части в (9.3) и (9.5) совпадают. Поэтому для правых частей (9.3) и (9.5) имеет место соотношение (9.1) $\otimes$.

**9.2. Теорема.** Пусть $X = \left(x_1,\ldots,x_n\right)$ и $Y = \left(y_1,\ldots,y_m\right)$ есть допустимые планы взаимно двойственных задач 7.2.1 и 7.2.2. Если $f\left(X\right) = F\left(Y\right)$, то $X$ – оптимальный план прямой задачи, а $Y$ – оптимальный план двойственной задачи.

**О.** Пусть $X_1$ – любой допустимый план ЗЛП 7.2.1. По лемме 9.1 $f\left(X_1\right) \le F\left(Y\right) = f(X)$. Но тогда $X$ – оптимальный план, т. к. $f\left(X\right) \ge f\left(X_1\right)$ для любого плана $X_1$.

Аналогично, если $Y_1$ – любой допустимый план ЗЛП 7.2.2, то по лемме 9.1 $F\left(Y\right) = f\left(X\right) \le F\left(Y_1\right)$. $\otimes$

**9.3. 1-я теорема двойственности.** Если одна из двойственных задач имеет оптимальный план, то и другая имеет оптимальный план, причем для их любых оптимальных планов $X^*$ и $Y^*$ имеет место $f\left(X^*\right) = F\left(Y^*\right)$.

**О.** Пусть, например, ЗЛП 7.2.1 имеет оптимальный план $X^*$ и он указан в таблице (9.6) с точностью до нумерации переменных.

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} & 1 & -x_1 & \ldots & -x_n \\ \hline x_{n+1} & b'_1 & & & \\ \vdots & \vdots & & & \\ x_{n+m} & b'_m & & & \\ \hline f & Q & q_1 & \ldots & q_n \end{array} \tag{9.6}$$

Таким образом,

$$X^* = \big(\underbrace{x_1,\ldots,x_n}_{СП};\underbrace{x_{n+1},\ldots,x_{n+m}}_{БП}\big) = \big(\underbrace{0,\ldots,0}_{n};b_1',\ldots,b_m'\big), \qquad (9.7)$$

$$f\left(X^*\right) = Q, f = Q - q_1x_1 - \ldots - q_nx_n. \qquad (9.8)$$

С учетом 1-1 соответствия между переменными (8.9) ему соответствует план двойственной задачи (замечание 8.3)

$$Y^* = \left(\underbrace{y_{m+1},\ldots,y_{m+n}}_{БП};\underbrace{y_1,\ldots,y_m}_{СП}\right) = \left(\underbrace{q_1,\ldots,q_n;0,\ldots,0}_{n}\right). \qquad (9.9)$$

Значение целевой функции $F$ на плане (9.9) есть по п. 8.3 $F = \sum_{i=1}^m b_i' y_i + Q = 0 + Q = Q$. Поэтому $F\left(Y^*\right) = f\left(X^*\right)$ и утверждение следует из теоремы 8.2. $\otimes$

**9.4. Теорема.** Если одна из двойственных задач неразрешима вследствие неограниченности целевой функции на множестве допустимых решений, то система ограничений другой задачи противоречива. $\varnothing$

**Экономический смысл 1-й теоремы двойственности состоит в том, что цена продукции, получаемой от реализации оптимального плана, совпадает с суммарной оценкой ресурсов, т. е. оценки ресурсов выступают как инструмент баланса затрат и результатов. Они гарантируют рентабельность оптимального плана и обуславливают убыточность любого плана, отличного от оптимального, что равносильно отсутствию непроизводительных затрат.** (9.10)

**9.5. 2-я Теорема двойственности.**

Для того чтобы опорные планы

$$X^* = \left(x_1^*,\ldots,x_n^*\right) \qquad (9.11)$$

и

$$Y^* = \left(y_1^*,\ldots,y_m^*\right) \qquad (9.12)$$

пары двойственных задач были оптимальными, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$x_j^*\left(\sum_{i=1}^m a_{ij}y_i^* - c_j\right) = 0,\ j = \overline{1,n}, \qquad (9.13)$$

$$y_i^*\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j^* - b_i\right) = 0, i = \overline{1,m}. \qquad (9.14)$$

**О.** Пусть (9.11) и (9.12) – оптимальные планы ЗЛП п.п. 7.2.1 и 7.2.2 соответственно. Тогда они удовлетворяют системам ограничений (7.11) – (7.12) и (7.16) – (7.17).

По теореме 9.3 $f\left(X^*\right)=F\left(Y^*\right)$ т. е.

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^* \tag{9.15}$$

Заменим в (9.15) $b_i$ левыми частями выражений (7.11) – (7.12). Получаем

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* \geq \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^*\right) y_i^* = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^*\right) x_j^* \geq \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^*$$

ввиду (7.16) – (7.17). Поэтому в последнем выражении должен иметь место знак равенства. То есть

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^*\right) y_i^* = \sum_{j=1}^{n} x_j^* \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^*,$$

откуда

$$\sum_{j=1}^{n} x_j^* \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* - c_j\right) = 0, j = \overline{1,n}. \tag{9.16}$$

Этим (9.13) доказано ввиду $x_j^* \geq 0$ и $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* - c_j \geq 0$ по (7.16). Аналогично доказывается и (9.14). $\otimes$

**9.6. Следствие.** Если $i$-тое ограничение в (7.11) – (7.12) ЗЛП 7.2.1 обращается её оптимальным планом $X^*$ в строгое неравенство, то соответствующая $i$-тая переменная $y_i^* \in Y^*$ оптимального плана ЗЛП 7.2.2 равна $0$. То есть

$$a_{i1} x_1^* + \ldots + a_{in} x_n^* < b_i, \Rightarrow y_i^* = 0 \tag{9.17}$$

Аналогично, для $j$-того ограничения ЗЛП 7.2.2 и переменной $x_j^* \in X^*$ имеем

$$a_{1j} y_1^* + \ldots + a_{mj} y_m^* > c_j \Rightarrow x_j^* = 0 \tag{9.18}$$

**О.** Если в (9.13) и (9.14) выражение в скобках отлично от нуля, то другой множитель должен быть равен нулю. $\otimes$.

**9.7. Замечание.** Из (7.7) в примере 7.1 видно, что левая часть в неравенстве (9.18) выражает затраты ресурсов на производство единицы $j$-того изделия по оптимальным ценам за ресурсы $Y^* = \left(y_1^*, \ldots, y_m^*\right)$. Если эти затраты превосходят доход $c_j$ от продажи этой единицы продукции (см. (9.18)), то нет экономического смысла производить $j$-тое изделие, т. е. в плане $X^*$ $x_j^* = 0$ (производят 0 единиц $j$-того изделия).

Точно так же, левая часть в неравенстве в (9.17) означает расход $i$-того ресурса на выполнение плана $X^*$ (см. (7.5)). Если имеет место строгое неравенство из (9.17), то $i$-тый ресурс не дефицитен, ибо он не израсходован и не тормозит производство. Его дефицитная оценка, согласно Л.В. Конторовичу, автору понятия двойственности (СССР), равна нулю (см. (9.17)).

**9.8. Следствие.** Если переменная $y_i^* \in Y^*$ из оптимального плана $Y^*$ ЗЛП п. 7.2.2 положительна $\left(y_i^* > 0\right)$, то соответствующее $i$-тое ограничение в ЗЛП 7.2.1 обращается в точное равенство

$$y_i^* > 0 \Rightarrow a_{i1}x_1^* + \ldots + a_{in}x_n^* = b_i \qquad (9.19)$$

Аналогично

$$x_j^* > 0 \Rightarrow a_{1j}y_j^* + \ldots + a_{mj}y_m^* = c_{j.} \qquad (9.20)$$

**О.** Как и в доказательстве следствия 9.6, (9.19) следует из (9.14), а (9.20) следует из (9.13) $\otimes$.

**9.9. Замечание.** Экономический смысл следствия 9.8 состоит в том, что переменные $y_1, \ldots, y_m$ ЗЛП 7.2.2 выступают как оценки дефицитности ресурсов из ЗЛП 7.2.1. В самом деле, из (7.5) следует, что левая часть равенства в (9.19) выражает расход $i$-того ресурса на выполнение плана $X^*$. Равенство (9.19) означает, что $i$-тый ресурс израсходован полностью. Поэтому он дефицитен и его дефицитная оценка положительна $\left(y_i^* > 0\right)$. Чем больше значение $y_i^*$, тем выше дефицитность ресурса. Добывание дефицитного ресурса выгодно, т. к. его отсутствие тормозит увеличение производства.

Если же $i$-тый ресурс использован не полностью (см. (9.17)), то он не грозит прекращением роста производства и его дефицитная оценка равна нулю $\left(y_i^* = 0\right)$.

Экономический смысл (9.18) и (9.20) состоит в том, что в оптимальный план может быть включена лишь та продукция $j$-того вида, для которой

$$\textstyle\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i^* \le c_j. \qquad (9.21)$$

**9.10. Пример.** Решить ЗЛП

$$f = -6x_1 - 12x_2 + 3x_3 - x_4 \quad (\max),$$

при ограничениях

$$\begin{gathered} 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 - x_4 = 6 \\ -3x_1 + 3x_2 + x_3 = 12 \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4} \end{gathered}$$

**О.** Так как имеется 2 ограничения в данной ЗЛП, то по п. 7.3.2′ двойственная задача будет иметь две переменные $y_1$ и $y_2$. Поэтому двойственную задачу можно решить графически. Из п.п. 7.3.1′, 7.3.5′, 7.3.8′, 7.3.3′, 7.3.9′ следует, что двойственная задача имеет вид

$$F = 6y_1 + 12y_2 \quad (\min),$$

при ограничениях

$$2y_1 - 3y_2 \geq -6 \tag{9.22}$$

$$-4y_1 + 3y_2 \geq -12 \tag{9.23}$$

$$3y_1 + y_2 \geq 3$$

$$-y_1 \geq -1$$

$y_1, y_2$ – не имеют ограничений в знаке.

Решаем данную ЗЛП графически на плоскости $Y_1OY_2$.

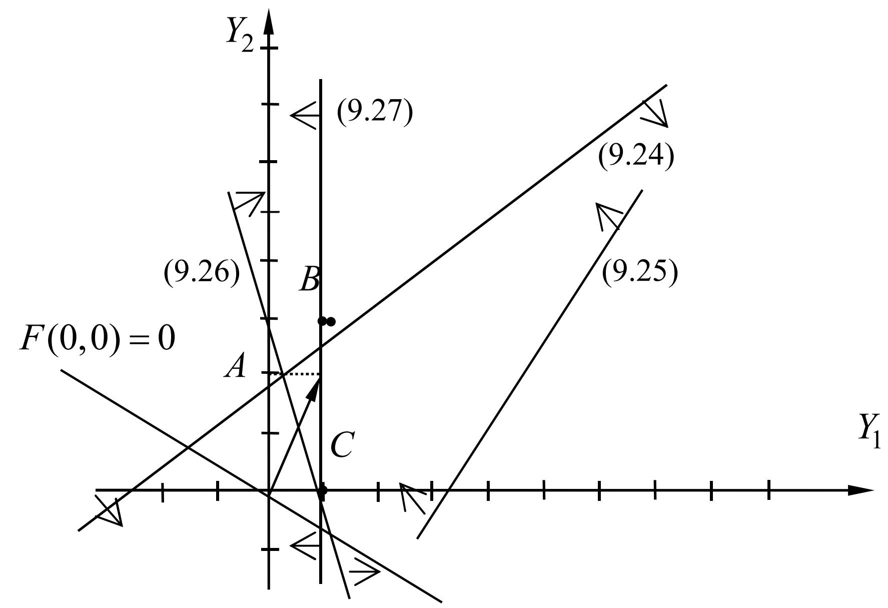



Рис. 9.1

Строим многоугольник решений (планов) с помощью ограничительных прямых:

$$2y_1 - 3y_2 = -6 \quad (9.24)$$

$$-4y_1 + 3y_2 = -12 \quad (9.25)$$

$$3y_1 + y_2 = 3 \quad (9.26)$$

$$-y_1 = -1 \quad (9.27)$$

Многоугольником решений является треугольник $ABC$.

$$\overline{grad\ F} = \{6,12\} \mid\mid \{1,2\}$$

Так как ищем минимум $F$ на точках треугольника $ABC$, то двигаем линию уровня $F = 0$ в направлении вектора $\left(-\overline{grad\ F}\right)$. Из рис. 9.1 видно, что крайняя точка в треугольнике $ABC$ в направлении $-\overline{grad\ F}$ есть точка $C(1;0)$. Поэтому $F_{\min} = F(1;0) = 6$. На оптимальном плане $Y^* = \{1;0\}$ ограничения (9.22) и (9.23) превращаются в строгие неравенства. По (9.18) $x_1^* = 0$ и $x_2^* = 0$. Поэтому оптимальный план исходной задачи имеет вид $X^* = \left(0, 0, x_3^*, x_4^*\right)$.

Значения $x_3^*$ и $x_4^*$ найдём из ограничений исходной задачи при $x_1^* = 0, x_2^* = 0$. Получаем $\begin{cases} 3x_3 - x_4 = 6 \\ x_3 = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_4 = 30 \\ x_3 = 12 \end{cases}$.

*Ответ*: $X^* = (0, 0, 12, 30)$.

# 10. ТРЕТЬЯ ТЕОРЕМА ДВОЙСТВЕННОСТИ. АНАЛИЗ РЕШЕНИЯ ЗЛП

## 10.1. Третья теорема двойственности.

Пусть имеем ЗЛП 7.2.1 и 7.2.2.

Двойственные оценки $y_i^*, i = \overline{1,m}$ показывают приращение $\Delta f_i$ целевой функции $f$, вызванное малым изменением свободного члена $b_i$ в $i$-том ограничении ЗЛП 7.2.1. То есть

$$\Delta f_i\left(X^*\right) \approx \partial f_i\left(X^*\right) = y_i^* \cdot \partial b_i, i = \overline{1,m}, \quad (10.1)$$

где $X^*$ – оптимальный план ЗЛП п. 7.2.1,

$Y^* = \left(y_1^*, \ldots, y_m^*\right)$ – оптимальный план ЗЛП 7.2.2. $\varnothing$.

Экономический смысл теоремы 10.1 содержится в следующем следствии.

**10.2. Следствие.** Величина двойственной оценки $y_i^*$ численно равна приращению целевой функции $f$ при изменении величины $b_i$ $i$-того ресурса на единицу.

**О.** Известно, что дифференциал функции приближённо равен приращению функции. То есть $\partial f\left(X^*\right) = \partial f_{\max} \approx \Delta f_{\max}$. Из (10.1) получаем, что $\partial f_i\left(X^*\right) = y_i^* \cdot \partial b_i$. Так как $\partial b_i = \Delta b_i$, то

$$\Delta f_{i\max} = \Delta f_i\left(X^*\right) \approx y_i^* \cdot \Delta b_i. \tag{10.2}$$

Если $\Delta b_i = 1$, то

$$\Delta f\left(X^*\right) \approx y_i^* \quad \otimes \tag{10.3}$$

Равенство (10.2) тем точнее, чем меньше $\Delta b_i$. Возникает экономический интерес: до каких пределов можно изменять $b_i + \Delta b_i$ (а, значит, левую часть $i$-того ограничения в ЗЛП 7.2.1), чтобы при этом число $f\left(X^*\right)$ не уменьшилось, а, возможно, увеличилось?

**10.3. Определение.** Допустимым интервалом устойчивости оценок по отношению к $i$-тому ограничению по $i$-тому ресурсу называется интервал

$$\left[b_i - \Delta b_i^H; b_i + \Delta b_i^B\right], i = \overline{1,m}, \tag{10.4}$$

внутри которого изменяется $b_i$, а $f\left(X^*\right)$ не уменьшается.

Здесь $\Delta b_i^H$ и $\Delta b_i^B$ – соответственно нижний и верхний пределы изменения $b_i$.

**10.4. Замечание.** Если СТ ЗЛП 7.2.1 (например, (5.2)) содержит оптимальный план $X^* = \left(x_1^*, \ldots, x_r^*\right)$, то матрицу $D = \left(d_{ij}\right)$, состоящую из коэффициентов при свободных неизвестных ($\left(-x_{r+1}, \ldots, -x_n\right)$ в (5.2)) в выражениях базисных неизвестных $x_1^*, \ldots, x_r^*$ через свободные, назовем базовой матрицей ограничений ЗЛП 7.2.1. Эта матрица играет важную роль в послеоптимизационном анализе ЗЛП 7.2.1.

А именно, имеет место следующая теорема:

**10.5. Теорема.**

$$\Delta b_i^H = \min_j \left\{ \frac{x_j^*}{d_{ij}} \right\}, d_{ij} > 0; \quad \Delta b_i^B = \left| \max_j \left\{ \frac{x_j^*}{d_{ij}} \right\} \right|, d_{ij} < 0 \quad \varnothing \qquad (10.5)$$

**10.6. Замечание.** Пусть имеется возможность приобрести дополнительно $\Delta b_i^B$ единиц $i$-того ресурса по цене $t_i$ за единицу ресурса. Тогда затраты на приобретение составят $t_i \cdot \Delta b_i^B$ у.е. Из (10.2) известно приращение $\Delta f_i\left(X^*\right)$ прибыли при увеличении $i$-того ресурса на величину $\Delta b_i^B$. Поэтому покупка ресурса целесообразна, если величина дополнительной прибыли

$$\Delta f_{i\max} - t_i \cdot \Delta b_i^B \approx y_i^* \cdot \Delta b_i^B - t_i \cdot \Delta b_i^B = \Delta b_i^B \left( y_i^* - t_i \right) = \Delta P_i > 0$$

то есть

$$y_i^* - t_i > 0 \qquad (10.6)$$

**10.7. Замечание.** Из (9.21) следует, что целесообразность включения в оптимальный план $X^* = \left(x_1^*, \ldots, x_n^*\right)$ нового $(n+1)$-го вида продукции должно оцениваться числом

$$\Delta_{n+1} = \sum_{i=1}^m a_{i,n+1} y_i^* - c_{n+1} < 0, \qquad (10.7)$$

где $a_{i,n+1}$ – расходы $i$-того ресурса на единицу $(n+1)$-го вида продукции по оптимальным ценам за ресурсы $Y^* = \left(y_1^*, \ldots, y_m^*\right)$, а $c_{n+1}$ – цена на рынке одного изделия $(n+1)$-го вида. Если расходы на ресурсы меньше, чем стоимость одного изделия $(n+1)$-го вида (т. е. выполняется (10.7)), то имеется смысл включать в план производства изделия $(n+1)$-го вида.

**10.8. Пример.** Для изготовления трёх видов продукции $П_1$, $П_2$, $П_3$ используются четыре вида ресурсов $P_1, P_2, P_3, P_4$, которые имеются в количестве соответственно 5, 9, 4 и 8 т. Расход ресурса $P_j, j = \overline{1,4}$, на производство единицы продукции вида $П_i, i = \overline{1,3}$ равен $a_{ij}$ и указан в таблице (10.8). В ней указана и прибыль от реализации единицы продукции вида $П_i$.

Требуется:

1. Найти оптимальное решение прямой и двойственной задач при условии, что ресурс вида $P_1$ используется полностью;

2. Определить изменение максимальной прибыли при изменении ресурсов вида $P_1$ на 2 ед., вида $P_2$ на 5 ед.;

3. Оценить раздельное и суммарное влияние этих изменений на величину максимальной прибыли;

4. Оценить целесообразность введения в план продукции вида $П_4$ с нормами затрат ресурсов на производство её единицы соответственно 2, 1, 1, 2, а прибыль от продажи её единицы – 10;

5. Оценить целесообразность закупки $a \leq 15$ ед. ресурса $P_1$ по цене 0,5 у.е.;

6. Если ответ в п. 4 положительный, то найти оптимальный план для выпуска продукции видов $П_1 - П_4$.

**О.**

| Вид ресурса | Норма расхода на единицу продукции | | | Запас ресурса |
|---|---|---|---|---|
| | $П_1$ | $П_2$ | $П_3$ | |
| $P_1$ | 1 | 1 | 1 | 5 |
| $P_2$ | 1 | 3 | 0 | 9 |
| $P_3$ | 1 | 0 | 0 | 4 |
| $P_4$ | 1 | 2 | 0 | 8 |
| прибыль | 2 | 3 | 1 | |

(10.8)

1. Пусть план выпуска продукции $П_1, П_2, П_3$ есть $X = (x_1, x_2, x_3)$ ед. Тогда математическая модель задачи имеет вид

$$f = 2x_1 + 3x_2 + x_3 \quad (\max)$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 5 \qquad \text{(ввиду условия 1)}$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 9$$

$$x_1 \leq 4$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 8$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1,3}$$

Во второе, третье и четвертое ограничения вводим балансовые переменные $x_j \geq 0,\ j = \overline{4,7}$. Тогда система ограничений приводится к единичному базису относительно $x_4$, $x_5$, $x_6$, $x_7$ (по замечанию 8.0 балансовая переменная $x_4 = 0$)

$$\begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 + 7x_4 = 5 \\ x_1 + 3x_2 + x_5 = 9 \\ x_1 + x_6 = 4 \\ x \ + 2x_2 + x_7 = 8 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x_4 = 5 - x_1 - x_2 - x_3 \\ x_5 = 9 - x_1 - 3x_2 \\ x_6 = 4 - x_1 \\ x_7 = 8 - x_1 - 2x_2 \\ f = 2x_1 + 3x_2 + x_3 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c|c|c|c|c} & 1 & -x_1 & -x_2 & -x_3 \\ \hline x_4 & 5 & 1 & 1 & 1 \\ x_5 & 9 & 1 & 3 & 0 \\ x_6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ x_7 & 8 & 1 & 2 & 0 \\ f & 0 & -2 & -3 & -1 \end{array}$$

Разрешающий элемент берем в столбце с $(-x_2)$ по замечанию 6.3.2. Так как $3/9$ есть $\max\{3/9, 2/8, 1/5\}$, то разрешающий элемент есть 3. Делаем 1 шаг ПОЗ по правилам 1.4. Получаем новую таблицу:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} & 1 & -x_1 & -x_5 & -x_3 \\ \hline x_4 & 2 & 2/3 & -1/3 & \boxed{1} \\ x_2 & 3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ x_6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ x_7 & 2 & 1/3 & -2/3 & 0 \\ f & 9 & -1 & 1 & -1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c|c|c|c|c} & 1 & -x_1 & -x_5 & -x_4 \\ \hline x_3 & 2 & 2/3 & -1/3 & 1 \\ x_2 & 3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ x_6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ x_7 & 2 & 1/3 & -2/3 & 0 \\ f & 11 & -1/3 & 2/3 & 1 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c|c|c|c|c} & 1 & -x_3 & -x_5 & -x_4 \\ \hline x_1 & 3 & 3/2 & -1/2 & \\ x_2 & 2 & -1/2 & 1/2 & \\ x_6 & 1 & -3/2 & & \\ x_7 & 1 & -1/2 & & \\ f & 12 & 1/2 & 1/2 & 3/2 \end{array} \qquad (10.9)$$

В $f$-строке последней таблицы нет отрицательных элементов. По теореме 6.1 план $X = (3, 2, 0, 0, 0, 1, 1)$ с $f(X) = f_{\max} = 12$ является оптимальным.

План исходной задачи $X^* = (3, 2, 0)$ – оптимальный.

Двойственная задача имеет вид

$$F = 5y_1 + 9y_2 + 4y_3 + 8y_4 \quad (\min)$$
$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \ge 2$$

$$y_1 + 3y_2 + 2y_4 \ge 3$$

$$y_1 \ge 1$$

$$y_2 \ge 0, y_3 \ge 0, y_4 \ge 0$$

Приведём двойственную задачу к «минус единичному» базису. Тогда $\{y_5, y_6, y_7\}$ образуют этот базис, а $\{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ – СП.

1-1 соответствие между переменными обеих задач имеет вид

$$\begin{array}{ccccccc} \multicolumn{3}{c}{СП} & & \multicolumn{3}{c}{БП} \\ x_1, & x_2, & x_3; & x_4, & x_5, & x_6, & x_7 \\ y_5, & y_6, & y_7; & y_1, & y_2, & y_3, & y_4. \\ \multicolumn{3}{c}{БП} & & \multicolumn{3}{c}{СП} \end{array} \qquad (10.10)$$

Из (10.9) и (10.10) получаем, что решение двойственной задачи есть $Y = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7) = (1{,}5;\, 0{,}5;\, 0;\, 0;\, 0;\, 0;\, 0{,}5)$, $Y^* = (1{,}5;\, 0{,}5;\, 0;\, 0)$.

Базисными неизвестными, входящими в оптимальный план $X^* = (3, 2, 0)$ являются $x_1$ и $x_2$.Базовую матрицу ограничений получаем из СТ (10.9)

$$D = \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Как следует из замечания 9.9 и выражения для $Y^*$, наиболее дефицитным ресурсом является $P_1$ $\left(1{,}5 = y_1^* > y_2^* = 0{,}5\right)$. Ресурсы $P_3$ и $P_4$ вообще имеют дефицитные оценки $y_3^* = 0 = y_4^*$ и поэтому не дефицитны.

Определим интервал устойчивости двойственных оценок по отношению к ограничению на ресурс $P_1$ по формуле (10.5).

$$\Delta b_1^H = \min_{\substack{j \\ d_{1j} > 0}} \left\{ \frac{x_j^*}{d_{1j}} \right\} = \min \left\{ \frac{3}{1{,}5} \right\} = 2$$

$$\Delta b_1^B = \left| \max_{\substack{j \\ d_{1j} < 0}} \left\{ \frac{x_j^*}{d_{1j}} \right\} \right| = \left| \max \left\{ \frac{2}{-1/2} \right\} \right| = 4$$

По (10.4) интервал устойчивости по отношению к первому ограничению есть интервал $\left[5-2;5+4\right]=\left[3;9\right]$.

Аналогично,

$$\Delta b_2^H=\min_{\substack{j \\ d_{2j}>0}}\left\{\frac{x_j^*}{d_{2j}}\right\}=\left\{\frac{2}{1/2}\right\}=4,\ \Delta b_2^B=\left|\max_{\substack{j \\ d_{2j}<0}}\left\{\frac{3}{-1/2}\right\}\right|=6$$

Интервал устойчивости по ресурсу $P_2$ $\left[9-4;9+6\right]=\left[5;15\right]$.

2, 3. Изменение ресурса $P_1$ составляет 2 ед. Поэтому величина ресурса $P_1$ станет $5+2=7$ ед. $7\in\left[3;9\right]$. По второму ресурсу $P_2$ $9+5=14\in\left[5;15\right]$.

Так как изменения величин ресурсов находятся в пределах устойчивости оценок, то их раздельное влияние на величину прибыли вычислим по формуле (10.2)

$$\Delta f_1\approx y_1^*\cdot\Delta b_1=1{,}5\cdot 2=3.$$

$$\Delta f_2\approx y_2^*\cdot\Delta b_2=0{,}5\cdot 5=2{,}5.$$

Суммарное влияние на величину прибыли равно $\Delta f\approx 3+2{,}5=5{,}5$.

4. Выясним целесообразность введения в план $X^*$ четвёртого вида продукции $\Pi_4$. По условию из формулы (10.7) следует, что

$$\Delta_4=2\cdot 1{,}5+1\cdot 0{,}5+1\cdot 0+2\cdot 0-10=3{,}5-10<0.$$

Прибыль в 10 у.е. превышает затраты на ресурсы в $3{,}5$ у.е. Поэтому ввести в план продукцию вида $\Pi_4$ выгодно.

5. Затраты на покупку 15 ед. ресурса $P_1$ составляют $0{,}5\cdot 15=7{,}5$ у.е.

Приращение величины ресурса $P_1$ на 15 ед. при наличии 5 ед. по условию даёт величину ресурса в 20 ед., что не входит в интервал устойчивости двойственных оценок $\left[3;9\right]$. Можно попытаться закупить только 4 ед. ресурса $P_1$. Тогда затраты на покупку составят $0{,}5\cdot 4=2$ у.е. А прибыль $\Delta f_1$ по формуле (10.2) будет равна $\Delta f_1=y_1^*\cdot\Delta b_1=1{,}5\cdot 4=6$.

В этом случае прибыль будет равна $6-2=4$ у.е. Поэтому можно закупить только 4 ед. ресурса $P_1$ по данной цене для увеличения производства.

6.

| Вид ресурса | Норма расхода на единицу продукции | | | | Запасы ресурса |
|---|---|---|---|---|---|
| | $\Pi_1$ | $\Pi_2$ | $\Pi_3$ | $\Pi_4$ | |
| $P_1$ | 1 | 1 | 1 | 2 | 5 |
| $P_2$ | 1 | 3 | 0 | 1 | 9 |
| $P_3$ | 1 | 0 | 0 | 1 | 4 |
| $P_4$ | 1 | 2 | 0 | 2 | 8 |
| прибыль | 2 | 3 | 1 | 10 | |

(10.11)

Пусть новый план есть $X=(x_1, x_2, x_3, x_4)$. Имеем модель

$$f = 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 10x_4 \quad (\max)$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 5$$
$$x_1 + 3x_2 + x_4 \le 9$$
$$x_1 + x_4 \le 4$$
$$x_1 + 2x_2 + 2x_4 \le 8$$

Вводим балансовые переменные $x_5 = 0$ в первое ограничение (по замечанию 8.0), $x_6 \ge 0, x_7 \ge 0, x_8 \ge 0$ – в остальные. Получаем

$$\begin{aligned} x_5 &= 5 - x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 \\ x_6 &= 9 - x_1 - 3x_2 - x_4 \\ x_7 &= 4 - x_1 - x_4 \\ x_8 &= 8 - x_1 - 2x_2 - 2x_4 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c|c|c|c|c|c} & 1 & -x_1 & -x_2 & -x_3 & -x_4 \\ \hline x_5 & 5 & 1 & 1 & 1 & \boxed{2} \\ x_6 & 9 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ x_7 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ x_8 & 8 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ f & 0 & -2 & -3 & -1 & -10 \end{array}$$

$\max\left\{ 2/5, 1/9, 1/4, 2/8 \right\} = 2/5$. Поэтому разрешающий элемент 2

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{cc|c|c|c|c} & 1 & -x_1 & -x_2 & -x_3 & -x_5 \\ \hline x_4 & 5/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ x_6 & 13/2 & & & & -1/2 \\ x_7 & 3/2 & & & & -1/2 \\ x_8 & 3 & & & & -1 \\ f & 25 & 3 & 2 & 4 & 5 \end{array}.$$

Оптимальный план в этой ситуации $X = \left(0, 0, 0, 5/2, 0, 13/2, 3/2, 3\right)$, $X^* = \left(0, 0, 0, 5/2\right)$. Достаточно выпускать только продукцию $\Pi_4$ в размере 2,5 ед.$\otimes$.

# 11. ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА (ТЗ) ПО СТОИМОСТИ ПЕРЕВОЗОК. ОСНОВНАЯ ТЕРМИНОЛОГИЯ

**11.1. Задача.** Однородный груз сосредоточен в $m$ пунктах отправления $A_1, \ldots, A_m$. В пункте $A_i$ находится $a_i$ единиц груза, $i = \overline{1,m}$. Этот груз нужно доставить в пункты назначения $B_1, \ldots, B_n$. В пункт $B_j$ нужно доставить $b_j$ ед. груза. По условию задачи запасы груза и потребности в нём равны, т. е.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j .$$

Стоимость перевозки единицы груза из пункта $A_i$ в пункт $B_j$ известна и равна $c_{ij}$.

Требуется составить такой план перевозок груза, чтобы транспортные расходы были минимальными.

**О.** Пусть $x_{ij}$ означает количество единиц груза, которое планируется поставлять из пункта $A_i$ в пункт $B_j$.

Тогда стоимость доставки груза из пунктов $A_i, i = \overline{1,m}$, в пункты $B_j, j = \overline{1,n}$, выразится линейной формой

$$f = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \ldots + c_{1n}x_{1n} + \ldots + c_{m1}x_{m1} + \ldots + c_{mn}x_{mn} = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}\right) \quad (11.1)$$

Неизвестные величины $x_{ij}$ должны удовлетворять ограничениям по запасам и по потребностям

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, i = \overline{1,m}, \quad (11.2)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, j = \overline{1,n}. \quad (11.3)$$

Кроме того, ясно, что

$$x_{ij} \ge 0, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}. \quad (11.4)$$

Таким образом, транспортная задача есть КФЗЛП.

Данные задачи удобно записывать в виде так называемой распределительной таблицы (РТ)

| Пункты отправления | Пункты назначения | | |
|---|---|---|---|
| | $B_1(b_1)$ | ... | $B_n(b_n)$ |
| $A_1(a_1)$ | $c_{11}$ $x_{11}$ | ... | $c_{1n}$ $x_{1n}$ |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| $A_m(a_m)$ | $c_{m1}$ $x_{m1}$ | ... | $c_{mn}$ $x_{mn}$ |

(11.5)

Этой таблице соответствуют две матрицы:

$C=\left(c_{ij}\right)$ – матрица тарифов,

$X=\left(x_{ij}\right)$ – матрица перевозок (или план перевозок).

Система ограничений (11.2) и (11.3) ТЗ содержит $m+n$ уравнений с $mn$ переменными.

В теоретическом курсе ЛП доказывается следующая теорема:

**11.2. Теорема.** Система линейных уравнений (11.2) и (11.3) совместима, и ранг $r$ основной и расширенной матриц системы равен $m+n-1$.

Кроме того, имеет место:

**11.3. Теорема.** Для того чтобы ТЗ имела допустимые планы, необходимо и достаточно выполнения равенства

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \tag{11.6}$$

**11.4. Замечание.** Из теоремы 11.2 следует, что каждый опорный план ТЗ должен иметь $mn-\left(m+n-1\right)$ свободных неизвестных, равных нулю, и $m+n-1$ базисных неизвестных.

**11.5. Соглашение.** Если в плане перевозок ТЗ неизвестная $x_{ij}=\alpha_{ij}\neq 0$, то в клетку $\left(i,j\right)$ РТ (11.5), стоящую в $i$-той строке и $j$-том столбце, записываем это число $\alpha_{ij}$ вместо $x_{ij}$. Если же $x_{ij}=0$, то клетку $\left(i,j\right)$ оставляем свободной. Из п. 11.4 следует, что опорный план в РТ (11.5) должен содержать $m+n-1$ занятых клеток.

**11.6. Определение.** Набор клеток РТ (11.5), в котором две и только две соседние клетки лежат в одной строке или в одном столбце, а последняя клетка набора лежит в том же столбце или в той же строке, что и первая, называется замкнутым контуром или **циклом**.

Этот набор можно записать так:

$$\left(i_1,j_1\right)\to\left(i_1,j_2\right)\to\left(i_2,j_2\right)\to\ldots\to\left(i_s,j_s\right)\to\left(i_s,j_1\right). \tag{11.7}$$

Графически цикл представляет собой замкнутую ломаную линию, звенья которой лежат только в строках или столбцах, а вершинами этой ломаной и являются клетки из (11.7). На таблице (11.8) изображен цикл $(1,2)\to(1,4)\to(3,4)\to(3,3)\to(2,3)\to(2,2)$.

| Пункты отправления | Пункты назначения | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | $B_1(b_1)$ | $B_2(b_2)$ | $B_3(b_3)$ | $B_4(b_4)$ | $B_5(b_5)$ |
| $A_1(a_1)$ | $x_{11}$ | $x_{12}$ | $x_{13}$ | $x_{14}$ | $x_{15}$ |
| $A_2(a_2)$ | $x_{21}$ | $x_{22}$ | $x_{23}$ | $x_{24}$ | $x_{25}$ |
| $A_3(a_3)$ | $x_{31}$ | $x_{32}$ | $x_{33}$ | $x_{34}$ | $x_{35}$ |

(11.8)

С понятием цикла РТ (11.5) связаны важные свойства планов ТЗ

**11.7. Теорема.** Допустимый план ТЗ является опорным тогда и только тогда, когда из занятых клеток (см. 11.5) РТ нельзя образовать ни одного цикла. $\varnothing$.

**11.8. Теорема.** Если некоторый допустимый план ТЗ является опорным, то для каждой свободной клетки РТ (см.11.5) можно образовать только один цикл, содержащий данную клетку и некоторую часть занятых клеток. $\varnothing$.

Конечно, ТЗ может быть решена обычным симплекс-методом. Но в связи со специфическим видом ограничений (11.2), (11.3) ТЗ разработаны другие методы решения ТЗ, которые приводят к нахождению оптимального плана с меньшими затратами труда и времени.

## 12. НАХОЖДЕНИЕ ИСХОДНОГО ОПОРНОГО ПЛАНА ТЗ

Идея решения ТЗ состоит в последовательном улучшении опорных планов данной ЗЛП; переходя от одного из них к другому, мы должны получать все меньшие значения линейной формы (11.1), пока не будет получено её минимальное значение.

Поэтому на первом этапе решение ТЗ сводится к нахождению какого-нибудь начального опорного плана ТЗ.

Укажем три способа нахождения исходного опорного плана ТЗ.

**12.1. Правило северо-западного угла.**

В РТ (11.5) начинаем заполнять матрицу перевозок с клетки (1,1) – самой «северо-западной». В клетку (1,1) заносим число $x_{11}=\min\{a_1,b_1\}$. Если $a_1 \ge b_1$, то $x_{11}=b_1$ и первый столбец «закрыт» для заполнения остальных его клеток, т. е. $x_{i1} = 0$ для $i = \overline{2,m}$ (потребности первого потребителя удовлетворены полностью). Двигаемся по первой строке, полагая, $x_{12} = \min\{a_1 - b_1, b_2\}$ и т. д., пока не исчерпаем величину $a_1$. При этом из запасов $a_1$ должны максимально удовлетворяться потребности в грузе потребителей $B_1, B_2, \ldots, B_l$. То есть $x_{11} = b_1, x_{12} = b_2, \ldots, x_{1l} = b_l$. Наконец, пусть $x_{1,l+1} < b_{l+1}$, а $b_1 + b_2 + \ldots + b_{l+1} = a_1$. После этого приступаем к заполнению второй строки таблицы (11.5), начиная с клетки $(2, l+1)$. Запас груза $a_2$ разбрасываем по клеткам второй строки, начиная с клетки $(2, l+1)$, полагая, что $x_{2,l+1} = \min\{b_{l+1} - x_{1,l+1}, a_2\}$ и т. д.

Заметим, что если $a_1 < b_1$, то аналогично «закрывается» для заполнения первая строка, т. е. $x_{11} = a_1, x_{1k} = 0$ для $k = 2, \ldots$ После этого переходим к заполнению клетки (2.1) в таблице (11.5) и т. д.

Этот процесс заполнения матрицы перевозок внутри таблицы (11.5) идет с «северо-запада на юго-восток» до тех пор, пока не исчерпаются ресурсы $a_m$ и удовлетворятся потребности $b_n$.

**12.2. Пример.** Найти опорный план ТЗ, заданной РТ (12.1).

| Поставщики | Потребители | | | | Запасы |
|---|---|---|---|---|---|
| | 6<br>75 | 7<br>25 | 3 | 5 | 100 |
| | 1 | 2<br>55 | 5<br>60 | 6<br>35 | 150 |
| | 3 | 10 | 20 | 1<br>50 | 50 |
| Потребности | 75 | 80 | 60 | 85 | 300 |

(12.1)

**О.** Действуем по правилу 12.1. Полагаем

$$x_{11} = \min\{75,100\} = 75, \qquad x_{12} = \min\{100 - 75, 80\} = 25,$$
$$x_{22} = \min\{80 - 25, 150\} = 55, \qquad x_{23} = \min\{60, 150 - 55\} = 60,$$
$$x_{24} = \min\{85, 150 - (55 + 60)\} = 35, \qquad x_{33} = \min\{50, 85 - 35\} = 50.$$

Получаем исходную матрицу перевозок

$$X_0 = \begin{bmatrix} 75 & 25 & 0 & 0 \\ 0 & 55 & 60 & 35 \\ 0 & 0 & 0 & 50 \end{bmatrix} \qquad \otimes.$$

**12.3. Правило минимального элемента.**

В РТ (11.5) начинаем заполнять матрицу перевозок с клетки $(i, j)$, в которой записан минимальный тариф $c_{ij}$ из всей матрицы тарифов в РТ (11.5). А именно, $x_{ij} = \min\{a_i, b_j\}$. Из рассмотрения исключаем $i$-тую строку, если $a_i < b_j$, или $j$-тый столбец, если $b_j < a_i$ (может случиться, что $a_i = b_j$, тогда из дальнейшего рассмотрения исключается и $i$-тая строка и $j$-тый столбец таблицы (11.5).

На втором шаге находим среди оставшихся для рассмотрения клеток таблицы (11.5) ту, в которой имеется минимальный тариф, и поступаем с ней так же, как с первой клеткой.

Этот процесс заполнения матрицы перевозок продолжается до тех пор, пока все ресурсы не будут распределены, а спрос удовлетворён.

**12.4. Пример.** Найти исходный опорный план ТЗ из примера 12.2 по правилу 12.3.

| Поставщики | Потребители | | | | Запасы $\alpha_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | |
| $A_1$ | 6 | 7<br>5 | 3<br>60 | 5<br>35 | 100 |
| $A_2$ | 1<br>75 | 2<br>75 | 5 | 6 | 150 |
| $A_3$ | 3 | 10 | 20 | 1<br>50 | 50 |
| Потребности $b_j$ | 75 | 80 | 60 | 85 | 300 |

(12.2)

**О.** Наименьшие тарифы $c_{21} = 1$ и $c_{34} = 1$. Начинаем заполнять матрицу перевозок внутри РТ (12.2) с любой из этих клеток. Пусть, например, $x_{21} = 75$. Исключаем из рассмотрения 1-й столбец таблицы (12.2). Наименьший тариф среди оставшихся клеток 2-й строки $c_{22} = 2$. Заполняем клетку (2,2), полагая $x_{22} = 75 = \min\{80, 150 - 75\}$. Исключаем из рассмотрения в таблице (12.2) вторую строку, так как запас $a_2$ исчерпан.

Следующий минимальный тариф $c_{34} = 1$. Полагая $x_{34} = 50$, исключаем из рассмотрения 3-ю строку таблицы (12.2).

Далее $c_{13} = 3, x_{13} = 60$. Исключается из рассмотрения 3-й столбец таблицы (12.2). Среди оставшихся клеток первой строки минимальный тариф $c_{14}=5$. Полагаем $x_{14}=35$. Следующий минимальный тариф $c_{12}=7$. Полагаем $x_{12}=5$. Получили следующую исходную матрицу перевозок:

$$X_0=\begin{bmatrix} 0 & 5 & 65 & 35 \\ 75 & 75 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 50 \end{bmatrix} \qquad \otimes.$$

**12.5. Способ Фогеля.** Пусть ТЗ записана в виде РТ (11.5). В каждой строке (столбце) находятся разности двух наименьших тарифов. Записываем эту разность вне РТ напротив соответствующей строки (столбца). Из всех разностей, записанных напротив строк и столбцов, выберем наибольшую. В соответствующей строке (столбце) загружается клетка с наименьшим тарифом. Соответствующая строка (столбец) исключается из рассмотрения. После этого процедура повторяется без закрывшейся строки (столбца) до тех пор, пока не будут заполнены $m+n-1$ клеток в РТ (11.5).

Если наибольшая разность окажется в нескольких строках и столбцах, то загружают клетку с минимальным тарифом в соответствующей строке (столбце). Если и тарифы окажутся равными, то выбираем клетку, в которую можно записать максимальную поставку груза. $\varnothing$

**12.6. Пример.** Найти начальный опорный план по способу Фогеля в ТЗ заданной таблицей (12.3).

(12.3)

| | $A_i$ | $B_j$: $B_1(30)$ | $B_2(60)$ | $B_3(45)$ | $B_4(25)$ | шаги 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $A_1(50)$ | 4 | 7<br>$5_6$ | 1<br>$45_2$ | 3 | 2 | 2 | 1 | 3 | 7 | $\boxed{7}$ |
| | $A_2(70)$ | 5<br>$30_4$ | 9<br>$15_5$ | 6 | 2<br>$25_3$ | 3 | 3 | $\boxed{3}$ | $\boxed{4}$ | $\boxed{9}$ | – |
| | $A_3(40)$ | 8 | 2<br>$40_1$ | 9 | 11 | $\boxed{6}$ | – | – | – | – | – |
| 1 | | 1 | 5 | 5 | 1 | | | | | | |
| 2 | | 1 | 2 | $\boxed{5}$ | 1 | | | | | | |
| 3 | | 1 | 2 | – | 1 | | | | | | |
| 4 | | 1 | $\boxed{2}$ | – | – | | | | | | |
| 5 | | – | 2 | – | – | | | | | | |
| 6 | | – | 7 | – | – | | | | | | |

**О.** Шаги алгоритма нумеруем 1, 2, 3,... . Максимальные разности заключаем в рамки. В шаге 1 максимальная разность 6, соответствует 3-й строке. В 3-й строке минимальный тариф $c_{32}=2$. Поэтому заполняем клетку (3,2) числом $x_{32}=40$. 3-я строка исключается из рассмотрения после 1-го шага. Число $x_{32}=40$ снабжено индексом 1, что означает номер шага. Аналогичные рассуждения позволяют загрузить и остальные клетки после шагов 2, 3,..., 6. Заметим, что на 5-м шаге во второй строке имеется для использования только один тариф $c_{22}=9$. Поэтому остальные тарифы в этой строке условно считаются равными нулю. Поэтому $9-0=9$. Внизу и слева таблицы (12.3) стоят цифры, указывающие номер шага, при котором исключается из рассмотрения строка или столбец. Это удобно при исправлении ошибок в счете.

Всего заполненных клеток оказалось $m+n-1=3+4-1=6$. План невырожденный. Его стоимость

$$f=7\cdot 5+1\cdot 45+5\cdot 30+9\cdot 15+2\cdot 25+2\cdot 40=495 \text{ у.е.} \qquad \otimes.$$

**12.7. Замечание.** Опорный план, построенный способом Фогеля, по затратам (в задаче на $\min f$) близок к оптимальному. Поэтому его иногда принимают за приближенное решение ТЗ. $\varnothing$.

**12.8. Замечание.** Если начальный опорный план окажется вырожденным (занятых клеток меньше $m+n-1$), то в план добавляют «базисные» нули так, чтобы считались занятыми $m+n-1$ клеток, но чтобы из занятых клеток нельзя было образовать цикл. $\varnothing$.

## 13. РАСПРЕДЕЛИТЕЛЬНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ТЗ

Пусть система $m+n$ уравнений (11.2) $\cup$ (11.3) имеет опорное решение. По п. 11.4 оно содержит $m+n-1$ базисных неизвестных, значения которых отличны от нуля (невырожденный случай). По п. 11.5 в РТ (11.5) тогда имеется $m+n-1$ занятых и $(m-1)(n-1)$ свободных клеток в матрице перевозок.

Пусть $(i_0, j_0)$ свободная клетка в РТ (11.5). По теореме 11.8 существует единственный цикл, содержащий эту свободную клетку, все остальные клетки этого цикла заняты. Пусть этот цикл записан в виде

$$(i_1,j_1)\to(i_1,j_2)\to(i_2,j_2)\to\ldots\to(i_t,j_t)\to(i_t,j_1). \qquad (13.1)$$

Он содержит $2t$ клеток. Пронумеруем их так, чтобы клетка $(i_0, j_0)$ стояла на первом месте, тогда $(i_0, j_0)$ – это $(i_1, j_1)$. Тарифы в клетках, находящихся в вершинах с нечетными номерами берем со знаком плюс, а с четными – со знаком минус. По циклу (13.1) подсчитаем алгебраическую сумму тарифов

$$S_{i_1 j_1} = c_{i_1 j_1} - c_{i_1 j_2} + c_{i_2 j_2} - c_{i_2 j_3} + \ldots + c_{i_t j_t} - c_{i_t j_1}. \qquad (13.2)$$

Имеет место, следующее утверждение.

**13.1. Теорема.** Если $S_{i_1 j_1} < 0$, то путем изменения значений $x_{i_k j_l}$, стоящих в заполненных клетках цикла (13.1), можно получить опорный план ТЗ (11.2) – (11.4) с меньшим значением формы (11.1).

На основании теоремы 13.1 и строится алгоритм распределительного метода решения ТЗ.

**13.2. Алгоритм распределительного метода.**

1. Исходные данные задачи записывают в РТ (11.5);
2. Находят исходный опорный план по правилам 12.1 или 12.3, при этом должны оказаться занятыми $r = m + n - 1$ клеток (в вырожденном случае некоторые из $m + n - 1$ базисных неизвестных могут оказаться равными нулю; тогда $m + n - 1$ клеток считают все равно занятыми, помещая в них «базисные» нули так, чтобы из занятых клеток нельзя было образовать цикл; практика показывает, что при этом базисные нули лучше ставить в клетки с меньшими тарифами); исходный опорный план вносят в таблицу (11.5) и получают новую РТ;
3. Производят оценку первой свободной клетки $(i, j)$ (желательно начинать со свободных клеток с малыми тарифами) путем построения замкнутого цикла (13.1) и вычисления по нему величины $S_{ij}$ по формуле (13.2); если $S_{ij} < 0$, то переходят к п. 4 алгоритма;
4. Перемещают по циклу (13.1) количество груза $\lambda$, равное наименьшему из чисел, размещенных в клетках с четными номерами, в клетки цикла (13.1) с нечетными номерами; после этого перемещения опять возвращаются к п. 3 и, если $S_{ij} \geq 0$, то приступают к оценке следующей свободной клетки, и т.д., пока не обнаружат клетку $(i, j)$ с отрицательной оценкой $S_{ij} < 0$.

Если же окажется, что оценки всех свободных клеток неотрицательны, то оптимальное решение найдено.

Если есть оценки $S_{ij} = 0$ в РТ с оптимальным планом, то ТЗ имеет не единственный оптимальный план. Загружая свободную клетку $(i, j)$ с $S_{ij} = 0$ получим новый оптимальный план.

Если после перемещения груза в количестве $\lambda$ освободится несколько клеток с четными номерами, то свободной оставляют только одну (с наибольшим тарифом), в остальные вписывают «базисные» нули и считают их загруженными.

**13.3. Пример.** Решить распределительным методом транспортную задачу, заданную таблицей (13.3).

| Поставщики | Потребители | | | Запасы |
|---|---|---|---|---|
| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | |
| $A_1$ | 4 | 5 | 1 | 10 |
| $A_2$ | 6 | 3 | 4 | 8 |
| $A_3$ | 1 | 2 | 4 | 12 |
| Потребности | 6 | 14 | 10 | 30 |

(13.3)

**О.** Исходный опорный план получим по правилу минимального элемента. Минимальный тариф есть в клетках (1,3) и (3,1) таблицы (13.3). Начинаем составлять матрицу (план) перевозок с клетки (1,3). $x_{13} = 10 = \min\{a_1, b_3\}$. Исключаем из рассмотрения первую строку и третий столбец таблицы (13.3). Следующий минимальный тариф $c_{31} = 1$. Полагаем $x_{31} = 6 = \min\{a_3, b_1\}$. Исключаем из рассмотрения первый столбец таблицы (13.3). Далее $c_{32} = 2, x_{32} = 6$ и исключаем из рассмотрения третью строку таблицы (13.5). Наконец, $c_{22} = 3, x_{22} = 8$.

Исходный план (матрица) перевозок имеет вид

$$X_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 10 \\ 0 & 8 & 0 \\ 6 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

Расчетная таблица имеет вид

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 4 | 5 | 1<br>10 | 10 |
| | 6 | 3<br>8 | 4<br>«0» | 8 |
| | 1<br>6 | 2<br>6 | 4 | |
| | 6 | 14 | 10 | 12 |

(13.4)

В таблице (13.4) число занятых клеток не удовлетворяет условию $r = m + n - 1 = 3 + 3 - 1 = 5$. Получили вырожденный план. Согласно правилу 13.2.2 в одну из свободных клеток помещаем «базисный» нуль. Например, полагаем $x_{23} = 0$. Теперь получили свободные клетки (1,1), (1,2), (2,1), (3,3). По правилу 13.2.3 проверяем на неотрицательность числа

$S_{11},\ S_{12},\ S_{21},\cdots S_{33}$, вычисленные по формуле (13.2). По теореме 11.8 составляем единственные циклы

$$(1,1)\to(3,1)\to(3,2)\to(2,2)\to(2,3)\to(1,3)\to(1,1)$$
$$(1,2)\to(2,2)\to(2,3)\to(1,3)\to(1,2)$$
$$(2,1)\to(3,1)\to(3,2)\to(2,2)\to(2,1)$$
$$(3,3)\to(3,2)\to(2,2)\to(2,3)\to(3,3)$$

Соответственно этим циклам вычисляем

$$\begin{aligned} &S_{11}=4-1+2-3+4-1=5>0\\ &S_{12}=5-3+4-1=5>0\\ &S_{21}=6-1+2-3=4>0\\ &S_{33}=4-2+3-4=1>0 \end{aligned} \tag{13.5}$$

Так как все числа из (13.5) оказались неотрицательными, то план $\begin{bmatrix}0&0&10\\0&8&0\\6&6&0\end{bmatrix}$ является оптимальным.

Стоимость перевозок $f=10\cdot1+3\cdot8+6\cdot1+6\cdot2+0\cdot4=52$. $\otimes$.

**13.4. Замечание.** В случае вырожденного плана «базисный» нуль можно поместить в любую свободную клетку по правилу 13.2.2. Ответ должен сохраниться. Проверим это, положив $x_{11}=0$. Тогда свободные клетки: (1,2), (2,1), (2,3), (3,3). Циклы:

$$(1,2)\to(1,1)\to(3,1)\to(3,2)\to(1,2)$$
$$(2,1)\to(2,2)\to(3,2)\to(3,1)\to(2,1)$$
$$(3,3)\to(3,1)\to(1,1)\to(1,3)\to(3,1)$$
$$S_{12}=5-4+6-3>0$$
$$S_{21}=6-3+2-1>0$$
$$S_{23}=4-3+2-1+4-1>0$$
$$S_{33}=4-1+4-1>0$$

**13.5. Пример.** Решить распределительным методом ТЗ из примера 12.2.

**О.** Методом северо-западного угла в примере 12.2 найден начальный опорный план (РТ (12.1)) $m+n-1=3+4-1=6$. Поэтому начальный опорный план невырожденный. Применим к свободным клеткам таблицы

(12.1) п. 3 из 13.2. Свободные клетки в таблице (12.1) следующие: (1,3), (1,4), (2,1), (3,1), (3,2), (3,3). Начинаем с клетки (2,1), имеющей минимальный тариф. Единственный цикл (по теореме 11.8), связанный с клеткой (2,1), следующий:

$$\underset{+}{(2,1)} \to \underset{-}{(2,2)} \to \underset{+}{(1,2)} \to \underset{-}{(1,1)} \tag{13.6}$$

Тогда $S_{21} = 1 - 2 + 7 - 6 = 0$

Так как $S_{21} = 0$, то согласно п. 4 из 13.2 приступаем к аналогичной оценке следующей свободной клетки (с наименьшим тарифом). Это клетки (1,3) и (3,1). Начинаем с клетки (1,3). Её цикл

$$(1,3) \to (1,2) \to (2,2) \to (2,3) \tag{13.7}$$

$$S_{13} = 3 - 7 + 2 - 5 = -7 < 0$$

Согласно п. 4 из 13.2 перемещаем груз $\min\{60, 25\} = 25$, размещенный в клетках цикла (13.7) с четными номерами 2 и 4 (т. е. в клетках (1,2) и (2,3)), в клетки с нечетными номерами. Получаем новый план перевозок

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 6<br>75 | 7 | 3<br>25 | 5 | 100 |
| $A_2$ | 1 | 2<br>80 | 5<br>35 | 6<br>35 | 150 |
| $A_3$ | 3 | 10 | 20 | 1<br>50 | 50 |
| | 75 | 80 | 60 | 85 | |

(13.8)

Свободные клетки таблицы (13.8): (1,2), (1,4), (2,1), (3,1), (3,2), (3,3).

Производим оценки этих свободных клеток по возрастанию тарифов. $c_{21} = 1$. Соответствующий цикл: (2,1)→(2,3)→(1,3)→(1,1). $S_{21} = 1 - 5 + 3 - 6 < 0$. Перемещаем груз $\lambda = \min\{35, 75\} = 35$ в клетки с нечетными номерами и вычитаем его из клеток с четными номерами. Получаем новый план перевозок

| | | | |
|---|---|---|---|
| 6<br>40 | 7 | 3<br>60 | 5 |
| 1<br>35 | 2<br>80 | 5 | 6<br>35 |
| 3 | 10 | 20 | 1<br>50 |

(13.9)

Свободные клетки таблицы (13.9): (1,2), (1,4), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3).

Минимальный тариф $c_{31} = 3$. Соответствующий цикл есть

$$\underset{+}{(3,1)} \to \underset{-}{(3,4)} \to \underset{+}{(2,4)} \to \underset{-}{(2,1)}.$$

$$S_{31} = 3 - 1 + 6 - 1 > 0.$$

Далее $c_{14} = 5$,

$$\underset{+}{(1,4)} \to \underset{-}{(2,4)} \to \underset{+}{(2,1)} \to \underset{-}{(1,1)},$$

$$S_{14} = 5 - 6 + 1 - 6 < 0.$$

$\lambda = \min\{35, 40\} = 35$. $\lambda$ добавляем в клетки (1,4) и (2,1) и вычитаем из $x_{24}$ и из $x_{11}$. Получаем новый план перевозок

| | | | |
|---|---|---|---|
| 6<br>5 | 7 | 3<br>60 | 5<br>35 |
| 1<br>70 | 2<br>80 | 5 | 6 |
| 3 | 10 | 20 | 1<br>50 |

(13.10)

Свободные клетки РТ (13.10): (1,2), (2,3), (2,4), (3,1), (3,2), (3,3). $\min\{c_{ij}\} = c_{31} = 3$. Соответствующий цикл:

$$\underset{+}{(3,1)} \to \underset{-}{(3,4)} \to \underset{+}{(1,4)} \to \underset{-}{(1,1)}.$$

$$S_{31} = 3 - 1 + 5 - 6 > 0.$$

$$c_{23} = 5,$$

$$\underset{+}{(2,3)} \to \underset{-}{(1,3)} \to \underset{+}{(1,1)} \to \underset{-}{(2,1)},$$

$$S_{23} = 5 - 3 + 6 - 1 > 0.$$

Остальные оценки свободных клеток в (13.10) также неотрицательны. Поэтому план перевозок (13.10) – оптимальный. ⊗.

# 14. МЕТОД ПОТЕНЦИАЛОВ РЕШЕНИЯ ТЗ

Этот метод является модификацией распределительного метода.

**14.1. Алгоритм метода потенциалов.**

1. Строится исходный опорный план и записывается в РТ (11.5), получается новая РТ;

2. Каждому поставщику $A_i$ (т. е. каждой строке РТ) и каждому потребителю $B_j$ (т. е. каждому столбцу новой РТ) ставим в соответствие числа $u_i$ и $v_j$ соответственно, называемые потенциалами поставщика $A_i$ и потребителя $B_j$ так, что для любой занятой клетки $(i, j)$ из новой РТ выполняется соотношение

$$u_i + v_j = c_{ij}, \qquad (14.1)$$

где $c_{ij}$ – тариф в клетке $(i, j)$ таблицы (11.5); (т. к. занятых клеток $m+n-1$, то уравнений вида (14.1) имеется $m+n-1$, в то время как неизвестных $u_i$ и $v_j$ $m+n$ штук; чтобы решить такую систему, надо одному из неизвестных дать произвольное значение);

3. Для свободных клеток $(i, j)$ новой РТ вычисляются косвенные тарифы

$$c'_{ij} = u_i + v_j \qquad (14.2)$$

и проверяются разности

$$S_{ij} = c_{ij} - c'_{ij} . \qquad (14.3)$$

4. Если для всех свободных клеток $(i, j)$ $S_{ij} \geq 0$, то полученный план оптимален; если же существует клетка $(i, j)$ с $S_{ij} < 0$, то выбирают клетку, для которой оценка $S_{ij} < 0$ минимальна, для нее строится цикл (13.1) и применяют п. 4 из 13.2; получают новый план перевозок;

5. К новому плану применяют шаги 2 и 3 до тех пор, пока не будет получен оптимальный план.

**14.2. Пример.** Хозяйства $A_1, A_2, A_3$ выделяют ежедневно 3, 4 и 2 т молока соответственно на продажу. Его покупают потребители $B_1$ – 2 т, $B_2$ – 2,5 т, $B_3$ – 3,5 т, $B_4$ – 1 т. Стоимость перевозки указана в таблице (14.4). Требуется полностью обеспечить потребителей молоком при минимальных расходах на перевозки.

**О.** По условию задачи стоимости перевозок имеем в таблице

| Совхоз | Потребитель | | | | | $u_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | | |
| $A_1$ | 2<br>1,5 | 3 | 5<br>1,5 | 4 | 3 | 2 |
| $A_2$ | 3<br>0,5 | 2<br>2,5 | 4 | 1<br>1 | 4 | 3 |
| $A_3$ | 4 | 3 | 2<br>2 | 6 | 2 | –1 |
| | 2 | 2,5 | 3,5 | 1 | 9 | |
| $v_j$ | 0 | –1 | 3 | –2 | | |

(14.4)

По правилу минимального элемента получаем начальный опорный план. Минимальный тариф $c_{24}=1$. $x_{24}=\min\{1,4\}=1$. Следующий наименьший тариф $c_{22}=2, x_{22}=2{,}5$. Из рассмотрения исключаем четвертый и второй столбцы и, положив $x_{21}=0{,}5$, исключаем вторую строку таблицы (14.4). Далее, $c_{33}=2, x_{33}=2$ и исключаем из рассмотрения третью строку таблицы (14.4). Аналогично, $c_{11}=2$ влечет $x_{11}=1{,}5$ и $c_{13}=5$ влечет $x_{13}=1{,}5$; первая строка, первый и четвертый столбцы таблицы (14.4) исключаются из рассмотрения. Начальный план сформирован. Он невырожденный, так как заполненных клеток $m+n-1=3+4-1=6$.

Для занятых клеток составляем 6 уравнений с 7-ю неизвестными потенциалами (по п. 14.1.2)

$$\begin{gathered} u_1+v_1=2, u_1+v_3=5, u_2+v_1=3, \\ u_2+v_2=2, u_2+v_4=1, u_3+v_3=2 \end{gathered}. \tag{14.5}$$

Полагаем $v_1=0$. Тогда из системы (14.5) однозначно находим

$$v_1=0, u_1=2, v_3=3, u_2=3, v_2=-1, v_4=-2, u_3=-1. \tag{14.6}$$

Для удобства числа (14.6) записываем против столбцов и строк таблицы. По п. 14.1.3 для свободных клеток таблицы (14.4) проверяем разности $S_{ij}=c_{ij}-c'_{ij}=c_{ij}-\left(u_i+v_j\right)$:

$$S_{12}=3-\left(2-1\right)=2>0$$

$$S_{14}=4-\left(2-2\right)=4>0$$

$$S_{23}=4-(3+3)=-2<0$$

$$S_{31}=4-\left(0-1\right)=5>0$$

$$S_{32}=3-\left(0-1\right)=4>0$$

$$S_{34}=6-\left(-1-2\right)=9>0$$

Так как $S_{23} < 0$, то применяем к клетке (2,3) п. 4 из 14.1. Строим для нее цикл

$$(2,3) \to (2,1) \to (1,1) \to (1,3) \tag{14.7}$$

$$\min\{x_{21}, x_{13}\} = 0,5.$$

Перемещаем груз $0,5$ по циклу (14.7) из клеток с четными номерами в клетки с нечетными номерами, получаем новый план перевозок

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2<br>2 | 3 | 5<br>1 | 4 | $u_1$=0 |
| 3 | 2<br>2,5 | 4<br>0,5 | 1<br>1 | $u_2$= –1 |
| 4 | 3 | 2<br>2 | 6 | $u_3$= –3 |
| $v_1$=2 | $v_2$=3 | $v_3$=5 | $v_4$=2 | |

(14.8)

План, усматриваемый в таблице (14.8), также невырожденный. Полагаем $u_1 = 0$. Тогда потенциалы $u_2, u_3, v_1, v_2, v_3, v_4$ определяются однозначно из системы

$$\begin{array}{l} u_1 + v_1 = 2, u_1 + v_3 = 5, u_2 + v_2 = 2 \\ u_2 + v_3 = 4, u_2 + v_4 = 1, u_3 + v_3 = 2 \end{array}. \tag{14.9}$$

Проверяем план (14.8) на оптимальность, вычисляя для свободных клеток $(i, j)$ таблицы (14.8) числа $S_{ij}$:

$$S_{12} = 3 - (3 + 0) = 0 \qquad S_{14} = 4 - (2 + 0) > 0$$

$$S_{21} = 3 - (2 - 1) > 0 \qquad S_{31} = 4 - (2 - 3) > 0$$

$$S_{32} = 3 - (3 - 3) > 0 \qquad S_{34} = 6 - (2 - 3) > 0$$

Все числа $S_{ij}$ неотрицательны. Поэтому план $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2,5 & 0,5 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ оптимален. Его стоимость

$$f_{\min} = 2 \cdot 2 + 5 \cdot 1 + 2 \cdot 2,5 + 4 \cdot 0,5 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 21. \qquad \otimes.$$

## 15. ОТКРЫТАЯ МОДЕЛЬ ТЗ

Транспортная задача, для которой выполняется условие (11.6), называется ТЗ закрытого типа. Если же

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j, \text{ или } \sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j, \tag{15.1}$$

то ТЗ называют задачей открытого типа.

Открытую модель ТЗ можно преобразовать в закрытую модель. Если выполняется первое неравенство из (15.1), то в математическую модель ТЗ вводится фиктивный $(n+1)$-й пункт назначения $B_{n+1}$. Для этого в РТ (11.5) вводится дополнительный $(n+1)$-й столбец, для которого $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$, а все тарифы на доставку груза в пункт $B_{n+1}$ считаются равными нулю. Целевая функция остается той же.

Если же выполняется второе неравенство в (15.1), то в модель ТЗ вводится фиктивный $(m+1)$-й пункт отправления $A_{m+1}$ с $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$, а тарифы на доставку груза из $A_{m+1}$ полагаем равными нулю. В РТ (11.5) добавится $(m+1)$-я строка с $a_{m+1}$. В этих случаях условие (11.6) формально выполнимо и получаем закрытую модель ТЗ.

Решается такая ТЗ одним из способов, рассмотренных в лекциях 13 и 14.

**15.1. Пример.** Решить ТЗ, которая заданна таблицей (15.2).

| Поставщики | Потребители | | | | Запасы груза |
|---|---|---|---|---|---|
| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | |
| $A_1$ | 3 | 1 | 5 | 2 | 25 |
| $A_2$ | 4 | 6 | 7 | 3 | 25 |
| $A_3$ | 2 | 8 | 4 | 5 | 15 |
| Потребности в грузе | 9 | 20 | 16 | 25 | 70>65 |

(15.2)

Потребуется $\sum_{j=1}^{4} b_j = 70$, что превышает запасы $\sum_{i=1}^{3} a_i = 65$ на 5 ед. груза. Вводим фиктивного поставщика $A_4$ с запасом $a_4 = 5$, для которого $c_{4i} = 0, i = \overline{1,4}$

Получаем новую РТ (15.3):

| Поставщики | Потребители | | | | Запасы груза |
|---|---|---|---|---|---|
| | 3 | 1 | 5 | 2 | 25 |
| | 4 | 6 | 7 | 3 | 25 |
| | 2 | 8 | 4 | 5 | 15 |
| | 0 | 0 | 0 | 0 | 5 |
| Потребность в грузе | 9 | 20 | 16 | 25 | 70 |

(15.3)

Начальный опорный план получен по правилу «минимального элемента». $\min\{c_{ij}\} = c_{12} = 1$. Начинаем распределять груз с клетки (1,2). Получаем (см. лекцию 12) начальный опорный план:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 1<br>20 | 5 | 2<br>5 | 25 | 0 |
| 4<br>5 | 6 | 7 | 3<br>20 | 25 | 1 |
| 2<br>4 | 8 | 4<br>11 | 5 | 15 | – 1 |
| 0 | 0 | 0<br>5 | 0 | 5 | – 5 |
| 9 | 20 | 16 | 25 | | |
| 3 | 1 | 5 | 2 | | |

(15.4)

План невырожденный, т. к. $m+n-1=4+4-1=7$. Определяем потенциалы $u_i$ и $v_j$ для поставщиков и потребителей, полагая $u_1=0$. Тогда $u_2,\ u_3,\ u_4,\ v_j,\ j=\overline{1,4}$, находим однозначно по формуле $u_i+v_j=c_{ij}$ для занятых клеток. Получаем: $u_1=0,\ u_2=1,\ u_3=-1,\ u_4=-5,$ $v_1=3, v_2=1, v_3=5, v_4=2.$

Находим числа $S_{ij}$ для свободных клеток $(i,j)$ в таблице (15.4)

$$S_{ij}=c_{ij}-\left(u_i+v_j\right).$$

$$S_{11}=c_{11}-\left(u_1+v_1\right)=3-\left(0+3\right)=0$$

$$S_{13}=5-\left(0+5\right)=0 \qquad S_{34}=5-\left(2-1\right)>0$$

$$S_{22}=6-\left(1+1\right)>0 \qquad S_{41}=0-\left(3-5\right)>0$$

$$S_{23}=7-\left(5+1\right)=1>0 \qquad S_{42}=0-\left(1-3\right)>0$$

$$S_{32}=8-\left(1-1\right)=8>0 \qquad S_{43}=0-\left(2-5\right)>0.$$

План оптимален, т. к. все $S_{ij}\geq 0$ для свободных клеток $(i,j)$

$$\begin{bmatrix} 0 & 20 & 0 & 5 \\ 5 & 0 & 0 & 20 \\ 4 & 0 & 11 & 0 \end{bmatrix}$$

$$f_{\min}=1\cdot 20+2\cdot 5+4\cdot 5+3\cdot 20+2\cdot 4+4\cdot 11=162$$

По плану $x_{33}=11$. Потребность $B_3$ не удовлетворена на 5 ед. $\otimes$.

# 16. МОДИФИКАЦИИ ТЗ. ЗАДАЧИ ТРАНСПОРТНОГО ТИПА (ЗТТ). ПРОСТЕЙШИЙ ВАРИАНТ ЗАДАЧИ О НАЗНАЧЕНИЯХ

**16.1. Вариация ТЗ.** Иногда целесообразно минимизировать суммарные расходы на перевозку и на производство продукции. Эта ситуация возникает при решении вопроса об оптимальном размещении производственных объектов. Может оказаться более выгодным доставить товар из более далекого завода, но зато имеющего меньшую стоимость производимого товара. В таких ТЗ в верхних правых углах РТ записывается сумма стоимости перевозок и стоимости производства единицы продукции.

**16.1.1. Пример.** Заводы № 1, 2, 3 производят однородную продукцию в количествах соответственно 490, 450 и 470 ед. Себестоимость производства продукции на заводе № 1 составляет 25 ден. ед., на заводе № 2 – 20 ден. ед., на заводе № 3 – 23 ден. ед. Продукция отправляется в пункты $A, Б, В$, потребности которых равны соответственно 300, 340, 360 ед. Стоимости перевозок единицы продукции задаются матрицей $\begin{pmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Составить оптимальный план перевозки продукции с учетом ее себестоимости.

**О.** Запишем исходные данные в таблице

| Заводы | Пункты | | | Кол-во произведенной продукции, $a_{ij}$ | Себестоимость ед. продукции, ден. ед. |
|---|---|---|---|---|---|
| | $A$ | $Б$ | $В$ | | |
| $З_1$ | 7 | 5 | 1 | 490 | 25 |
| $З_2$ | 3 | 4 | 5 | 450 | 20 |
| $З_3$ | 4 | 2 | 1 | 470 | 23 |
| Потребность пунктов $b_j$ | 300 | 340 | 360 | | |

Так как в данной задаче должны учитываться расходы на перевозку и на производство продукции, то в правых верхних углах таблицы указываем сумму стоимости перевозки и стоимости производства.

Данная задача открытого типа, т. е. $\sum_i a_i > \sum_j b_j$, поэтому вводим фиктивный пункт $Г$ с тарифами, равными нулю, и потребностями, равными 1410 – 1000 = 410 ед.

Получаем следующую распределительную таблицу:

| Заводы | Пункты | | | | Кол-во произведенной продукции, $a_i$ | $u_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $А$ | $Б$ | $В$ | $Г$ | | |
| $З_1$ | 32 | 30 | 26<br>80 | 0<br>410 | 490 | 0 |
| $З_2$ | 23<br>300 | 24<br>150 | 25 | 0 | 450 | – 3 |
| $З_3$ | 27 | 25<br>190 | 24<br>280 | 0 | 470 | – 2 |
| Потребность пунктов $b_j$ | 300 | 340 | 360 | 410 | | |
| $v_j$ | 26 | 27 | 26 | 0 | | |

Начальный опорный план строим способом «минимального элемента». Загружено $m+n-1=3+4-1=6$ клеток, так что план невырожденный. Исследуем его на оптимальность методом потенциалов (потенциалы заносим в распределительную таблицу). Все оценки свободных клеток положительны, т. е. построенный план оптимален

$$X^*=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 80 \\ 300 & 150 & 0 \\ 0 & 190 & 280 \end{pmatrix}.$$

По оптимальному плану первый завод отправляет в пункт $В$ 80 ед. продукции; второй завод отправляет в пункты $А$ и $Б$ по 300 и 150 ед. продукции соответственно; третий завод отправляет в пункты $Б$ и $В$ по 190 и 280 ед. продукции соответственно. При этом 410 ед. продукции первого завода останется нереализованными, и минимальные затраты $f_{\min}=80\cdot 26+300\cdot 23+150\cdot 24+190\cdot 25+280\cdot 24=24050$ ден. ед. $\otimes$.

**16.2 . Вариация ТЗ.** Предположим, что от поставщика $A_i$ к потребителю $B_j$ можно доставить (по некоторым причинам: из-за отсутствия транспорта, из-за малой пропускной способности мостов и т.п.) не более $d$ единиц груза. Иногда даже $d=0$. Тогда при решении поступают следующим образом. В РТ столбец $B_j$ разбивают на два столбца: $B'_j$ и $B''_j$. В строке $i$ вместо клетки $(i,j)$ появляются две клетки $(i,j')$ и $(i,j'')$. «Потребителю $B''_j$» приписывается спрос $d$, а «потребителю $B'_j$» – спрос $b_j-d$. Тариф $c_{ij'}=M>>0$ ($M$ – большое число), а тариф $c_{ij''}=c_{ij}$. Если $d=0$, то, и $c_{ij''}=M>>0$. В остальных клетках этих столбцов $B'_j$ и $B''_j$ тарифы равны данным. Если $d=0$, то столбец $B_j$ на практике не разбивают на два столбца, а полагают просто $c_{ij} = M >> 0$. Этим клетка $(i, j')$ блокируется при решении ТЗ на минимум любым из способов 13.2 или 14.1.

**16.2.1. Пример.** Заводы № 1, 2, 3 производят однородную продукцию в количествах соответственно 490, 450 и 470 ед. Продукция отправляется в пункты $A, Б, В$, потребности которых соответственно 300, 340 и 360 ед. Стоимости перевозок единицы продукции задаются матрицей $\begin{pmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Составить оптимальный план перевозок продукции при условии, что коммуникации между заводом № 2 и пунктом $A$ не позволяют пропускать в рассматриваемый период более 200 ед. продукции.

**О.** Данная задача открытого типа. Так как $\sum\limits_{i} a_i > \sum\limits_{j} b_j$, то вводим фиктивный пункт $Г$ с тарифами на перевозку, равными нулю, и потребностями, равными 410 ед.

Столбец $A$ разбиваем на два столбца $A'$ и $A''$. В клетку $(2, 1'')$ заносим тариф 3 и объем продукции в 200 ед. В клетке $(2, 1')$ тариф полагаем равным $M >> 0$ (большое число). Остальные тарифы этих столбцов оставляем без изменения. Расчетная таблица следующая:

| Заводы | Пункты | | | | | $a_i$ | $u_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $A'$ | $A''$ | $Б$ | $В$ | $Г$ | | |
| $З_1$ | 7 | 7 | 5 | 1<br>360 | 0<br>130 | 490 | 0 |
| $З_2$ | M | 3<br>200 | 4 | 5 | 0<br>250 | 450 | 0 |
| $З_3$ | 4<br>100 | 4 | 2<br>340 | 1 | 0<br>30 | 470 | 0 |
| $b_j$ | 100 | 200 | 340 | 360 | 410 | | |
| $v_j$ | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 | | |

Строим опорный план методом «минимального элемента», проверяем план на невырожденность, проверяем план на оптимальность методом потенциалов. Матрица перевозок $X^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 360 \\ 200 & 0 & 0 \\ 100 & 340 & 0 \end{pmatrix}$.

*Ответ*: Первый завод поставляет 360 ед. продукции в пункт $В$; второй завод поставляет 200 ед. продукции в пункт $A$; третий завод поставляет 100 ед. продукции в пункт $A$ и 340 ед. продукции в пункт $Б$.

Минимальные затраты составят

$$f_{\min} = 360 \cdot 1 + 200 \cdot 3 + 100 \cdot 4 + 340 \cdot 2 = 2040 \text{ ден. ед.}$$

Заводы № 1, 2, 3 не реализуют по 130, 250 и 30 ед. продукции соответственно. $\otimes$.

**16.3. Вариация ТЗ.** Если потребность потребителя $B_j$ должна быть удовлетворена обязательно (независимо от того, выгодно это или нет в условиях всей задачи), то матрицу перевозок начинают формировать с $j$-того столбца. Удовлетворяются запросы $B_j$ с учетом возрастания тарифов, начиная с минимального. После этого запасы поставщиков уменьшают на соответствующие величины (из столбца $B_j$). $j$-тый столбец можно исключить из рассмотрения (включив его потом в оптимальную матрицу перевозок) и решать обычным образом ТЗ относительно оставшихся потребителей.

**16.3.1. Пример.** Готовая продукция заводов $A_1, A_2, A_3$ отправляется на склады $B_1, B_2, B_3, B_4$. Завод $A_i, i = \overline{1,3}$ производит $a_i$ изделий. Пропускная способность склада $B_j, j = \overline{1,4}$ составляет $b_j$ единиц продукции. Стоимость перевозки с завода $A_i$ на склад $B_j$ одного изделия задана матрицей $\begin{pmatrix} 4 & 7 & 2 & 5 \\ 8 & 3 & 7 & 8 \\ 9 & 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Требуется методом потенциалов найти оптимальный план перевозок при условии, что склад $B_2$ должен быть загружен полностью.

$$\begin{array}{ll} a_1 = 380 & b_1 = 320 \\ a_2 = 290 & b_2 = 370 \\ a_3 = 330 & b_3 = 260 \\ & b_4 = 150 \end{array}$$

**О.** Поскольку в задаче $\sum\limits_i a_i < \sum\limits_j b_j$, то получаем транспортную задачу открытого типа.

Введем фиктивный завод $A_4$, производительность которого равна 1100 – 1000 = 100 ед., а тарифы на доставку груза положим равными нулю.

Определим план оптимальных перевозок при условии, что склад $B_2$ заполнен полностью. Матрицу перевозок начнем формировать со столбца $B_2$, начиная с минимального тарифа. В клетку $(2,2)$ заносим 290 ед. продукции, оставшиеся 80 ед. – в клетку $(3,2)$ (см. табл.):

| Заводы | Склады | | | | Кол-во продукции, $a_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | |
| $A_1$ | 4 | 7 | 2 | 5 | 380 |
| $A_2$ | 8 | 3<br>290 | 7 | 8 | 290 |
| $A_3$ | 9 | 6<br>80 | 1 | 3 | 330 |
| $A_4$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 100 |
| потребности в продукции, $b_j$ | 320 | 370 | 260 | 150 | |

Исключим из рассмотрения второй столбец (так как склад $B_2$ загружен полностью) и вторую строку (так как завод $A_2$ полностью работает на склад $B_2$). Получаем следующую таблицу:

| Заводы | Склады | | | Кол-во продукции $a_i$ | $u_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | $B_1$ | $B_3$ | $B_4$ | | |
| $A_1$ | 4<br>320 | 2<br>60 | 5 | 380 | 0 |
| $A_3$ | 9 | 1<br>200 | 3<br>50 | 330 – 80 = 250 | – 1 |
| $A_4$ | 0 | 0 | 0<br>100 | 100 | – 4 |
| Потребности в продукции $b_j$ | 320 | 260 | 150 | | |
| $v_j$ | 4 | 2 | 4 | | |

Начальный опорный план строим методом «минимального элемента». Проверяем полученный план на оптимальность. Решая задачу методом потенциалов, получаем решение $X' = \begin{pmatrix} 320 & 60 & 0 \\ 0 & 200 & 50 \end{pmatrix}$, в которое добавляем второй столбец и вторую строку и, следовательно, решение исходной задачи такое:

$$X^* = \begin{pmatrix} 320 & 0 & 60 & 0 \\ 0 & 290 & 0 & 0 \\ 0 & 80 & 200 & 50 \end{pmatrix}.$$

Минимальные затраты составят $f_{\min} = 320 \cdot 4 + 60 \cdot 2 + 290 \cdot 3 + 80 \cdot 6 +$ $+200 \cdot 1 + 50 \cdot 3 = 3100$ ден. ед.

По оптимальному плану завод $A_1$ поставляет 320 ед. и 60 ед. продукции на склады $B_1$ и $B_3$ соответственно; завод $A_2$ всю свою продукцию в объеме 290 ед. поставляет на склад $B_2$; завод $A_3$ поставляет продукцию складам $B_2, B_3, B_4$ в объеме 80, 200 и 50 ед. соответственно. По оптимальному плану склад $B_4$ будет недогружен на 100 ед. продукции. $\otimes$.

**16.4. ЗТТ.** Многие задачи по физическому смыслу не являются транспортными. Но при их решении возникает та же математическая модель, что и у ТЗ. Это задачи об оптимальном распределении производства изделий между предприятиями, о рациональном закреплении механизмов за видами работ, об оптимальном распределении посевных площадей за с/х культурами, об оптимальных назначениях специалистов за видами работ и т. п. Эти задачи условимся называть задачами транспортного типа (ЗТТ).

**16.4.1. Замечание.** Во многих ЗТТ требуется найти максимум целевой функции. Поэтому при составлении начального опорного плана целесообразно воспользоваться противоположным к п. 12.3 правилом «максимального элемента». В формулировке теоремы 13.1 выражение «$S_{i_1 j_1} < 0$» следует заменить выражением «$S_{i_1 j_1} > 0$». Точно также в п.п. 3 и 4 алгоритма 13.2 и в п. 4 алгоритма 14.1 следует всюду заменить «$S_{ij} < 0$» на «$S_{ij} > 0$».

В вариациях ЗТТ типа 16.2 для блокирования клетки ставят тариф $m$, считая его отрицательной величиной. Тогда $S_{ij} = m - \left(u_i + v_j\right) < 0$ и при решении ЗТТ методом потенциалов эта клетка $(i, j)$ не влияет на оптимальность плана. Аналогично поступают и при решении ЗТТ распределительным методом. Клетка $(i, j)$ остается незанятой.

**16.4.2. Пример.** На 4-х станках $A_1, A_2, A_3, A_4$ можно за 1 час изготовить 260, 200, 340 и 500 м ткани. Ткани могут быть разных артикулов 1, 2, 3 в зависимости от сорта нитей. От реализации 1 м ткани артикула $i, i = \overline{1,3}$, изготовленной на станке $A_j$, $j = \overline{1,4}$, получается прибыль в рублях $c_{ij}$

$$\left(c_{ij}\right) = \begin{pmatrix} 2,5 & 2,2 & - & 2,8 \\ 1,6 & 1 & 1,9 & 1,2 \\ 0,8 & 1 & 0,6 & 0,9 \end{pmatrix}$$

Ткань артикула 1 не может производиться на станке $A_3$. Потребность в тканях артикулов 1, 2, 3 соответственно 200, 100 и 150 тыс. м. За 1 месяц станки могут выработать соответственно 200, 300, 250, 400 станко-часов. Требуется составить оптимальный план загрузки станков за данный месяц, чтобы получить максимальную прибыль.

**О.** В начале выясним возможности выполнить заказ на 450000 м ткани. На станке $A_1$ можно изготовить $260 \cdot 200 = 52000$ м, на $A_2$ – 60000 м, на $A_3$ – 85000 м, на $A_4$ – 200000 м. Всего 397000 м. Таким образом, спрос не удовлетворится. Имеем открытую ЗТТ. Дефицит будет равен 53000 м.

Пусть $x_{ij}$ – количество ткани $i$-того артикула, изготовленного на станке $A_j$. Прибыль равна $f = 2{,}5x_{11} + \ldots + 0{,}9x_{34}$. Надо найти максимальное значение $f$ при этих условиях. Согласно лекции 15, введем фиктивный станок $A_5$, с планом для него: покрыть дефицит в 53000 м. Получим закрытую ЗТТ:

| Артикул | Станок | | | | | Потреб. в ткани | $u_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_5$ | | |
| 1 | 2,5<br>0 | 2,2 | $m$ | 2,8<br>200 | 0 | 200 | $u_1$<br>1,7 |
| 2 | 1,6<br>15 | 1 | 1,9<br>85 | 1,2 | 0 | 100 | $u_2$<br>0,8 |
| 3 | 0,8<br>37 | 1<br>60 | 0,6 | 0,9 | 0<br>53 | 150 | $u_3$<br>0 |
| Возмож. станков | 52 | 60 | 85 | 200 | 53 | | |
| $v_j$ | $v_1$<br>0,8 | $v_2$<br>1 | $v_3$<br>1,1 | $v_4$<br>1,1 | $v_5$<br>0 | | |

(16.1)

Тарифы станка $A_5$ согласно лекции 15 $c_{i5} = 0, i = \overline{1,3}$. Клетку $(1,3)$ блокируем, приписав ей тариф $m << 0$, чтобы $S_{13} = m - (u_1 + v_3)$ было меньше 0, т. е. при любом плане клетка $(1,3)$ остается незанятой (см. 13.1).

Формируем исходный опорный план.

Пользуемся правилом «максимального» элемента. Полагаем $x_{14} = 200$. Далее, следующий максимальный тариф $c_{23} = 1{,}9, x_{23} = 85$. Во второй строке следующий максимальный тариф $c_{21} = 1{,}6,\ x_{21} = 15$. Аналогично получаем $c_{32} = 1,\ x_{32} = 60;\ c_{31} = 0{,}8,\ x_{31} = 37$. Наконец, $c_{35} = 0, x_{35} = 53$. Условие $m + n - 1 = 5 + 3 - 1 = 7$ не выполняется. Поэтому поместим в одну из клеток «базисный» 0 так, чтобы из занятых клеток нельзя было образовать цикл (см. п. 13.2.2). Пусть $x_{11} = 0$. Итак, получили исходный план

$$X_0 = \begin{pmatrix} "0" & 0 & 0 & 200 & 0 \\ 15 & 0 & 85 & 0 & 0 \\ 37 & 60 & 0 & 0 & 53 \end{pmatrix} \qquad (16.2)$$

Проверяем план (16.2) на оптимальность. Применяем правило 13.1. Воспользуемся методом потенциалов.

Пусть $u_3 = 0$. Тогда для занятых клеток составляем $m+n-1=7$ уравнений: $v_1+u_1=2{,}5$; $v_4+u_1=2{,}8$; $v_1+u_2=1{,}6$; $v_3+u_2=1{,}9$; $v_1+u_3=0{,}8$; $v_2+u_3=1$; $v_5+u_3=0$. Получаем: $u_3=0, v_5=0, v_2=1, v_1=0{,}8, v_4=1{,}1$, $v_3=1{,}1, u_2=0{,}8, u_1=1{,}7$.

Для свободных клеток $(i,j)$ проверяем оценки $S_{ij}=c_{ij}-\left(u_i+v_j\right)$. Получаем

$$S_{12}=2{,}2-2{,}7=-0{,}5<0$$
$$S_{13}=m-\left(1{,}1+1{,}7\right)<0,\ \text{т. к. } m<<0$$
$$S_{15}=0-1{,}7<0$$
$$S_{22}=1-\left(1+0{,}8\right)<0$$
$$S_{24}=1{,}2-\left(1{,}1+0{,}8\right)<0$$
$$S_{25}=0-0{,}8<0$$
$$S_{33}=0{,}6-1{,}1<0$$
$$S_{34}=0-0=0$$

План (16.2) оптимален. $\otimes$.

**16.5. Простейший вариант задачи о назначениях.**

Имеется $n$ видов работ: $A_1,\ldots,A_n$. Имеется $m$ лиц (механизмов, участков и др.) $B_1,\ldots,B_m$, способных выполнить эти работы с производительностью $\lambda_{ij}$ (производительность $i$-того лица при выполнении $j$-той работы, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$). Требуется так расставить людей на работы, чтобы суммарная производительность была максимальной. На каждый вид работы можно назначить только одно лицо (поэтому $m=n$, закрытая модель).

Условимся, что

$$x_{ij}=\begin{cases}1, \textit{если } i\text{-тое лицо назначено на } j\text{-тую работу}\\ 0, \text{в противном случае}\end{cases} \tag{16.3}$$

По нашему условию (1 лицо на 1 работу)

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}=1,\ i=\overline{1,m=n} \tag{16.4}$$

Так как каждая работа предназначается только для одного лица, то

$$\sum_{i=1}^{m=n} x_{ij}=1,\ j=\overline{1,n=m} \tag{16.5}$$

Суммарная производительность тогда

$$f = \sum_{i=1}^{m=n} \left( \sum_{j=1}^{n=m} x_{ij} \lambda_{ij} \right) \qquad (16.6)$$

Таким образом, математическая модель задачи такова: найти числа $x_{ij} \in \{0, 1\}$, удовлетворяющие условиям-ограничениям (16.4), (16.5), и максимизирующие линейную форму (16.6).

Эта задача решается как и ТЗ.

Если же $\lambda_{ij}$ означает стоимость работы $i$-того лица на $j$-той работе, то (16.6) будет выражать суммарную стоимость работ. В этом случае целесообразно искать минимум $f$.

**16.5.1. Пример.** 4 человека нужно назначить на 4 вида работы. Стоимости $\lambda_{ij}$ указаны в таблице:

| Рабочие | Виды работ | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ | |
| 1 | 2<br>1 | 10 | 15 | 0 | $u_1$<br>0 |
| 2 | 10<br>“0” | 18<br>1 | 20<br>“0” | 9<br>“0” | $u_2$<br>8 |
| 3 | 15 | 24 | 26<br>1 | 10 | $u_3$<br>14 |
| 4 | 12 | 25 | 27 | 8<br>1 | $u_4$<br>7 |
| | $v_1$<br>2 | $v_2$<br>10 | $v_3$<br>12 | $v_4$<br>1 | |

Фирма хочет расставить рабочих так, чтобы заплатить им поменьше. Как распределить работы?

**О.** 1-й рабочий не берется за работу № 4. Ищем начальный опорный план по методу северо-западного угла. $x_{11} = 1, x_{22} = 1, x_{33} = 1, x_{44} = 1$. $f = 2 + 18 + 26 + 8 = 54$. $m + n - 1 = 7 \neq 4$. Поэтому вводим 3 базисных нуля, чтобы из занятых клеток нельзя было образовать цикл. Пусть эти 3 базисных нуля есть $x_{21} = 0 = x_{23} = x_{24}$. План $X_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ "0" & 1 & "0" & "0" \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ проверяем на оптимальность. Воспользуемся методом потенциалов. Пусть $u_1 = 0$. Тогда для занятых клеток имеем:

$$\begin{array}{ll} v_1 + u_1 = 2, v_1 = 2 & v_4 + u_2 = 9, v_4 = 1 \\ v_1 + u_2 = 10, u_2 = 8 & v_3 + u_3 = 26, u_3 = 14 \\ v_2 + u_2 = 18, v_2 = 10 & v_4 + u_4 = 8, u_4 = 7 \\ v_3 + u_2 = 20, v_3 = 12 & \end{array}.$$

Для свободных клеток получаем оценки $S_{ij} = c_{ij} - \left(v_j + u_i\right)$.

$$\begin{array}{ll} S_{12} = 10 - (0 + 10) = 0 & S_{13} = 15 - 12 > 0 \\ S_{14} = 0 - 1 < 0 & S_{34} = 10 - (1 + 14) = -5 < 0 \end{array}$$

Для клетки (3,4) строим единственный цикл: $(3,4) \to (3,3) \to (2,3) \to (2,4)$. $x_{33} = 1, x_{24} = 0.$ $\min\{1, 0\} = 0$ Перемещаем $x_{24} = 0$ по циклу из клеток с четными номерами в клетки с нечетными номерами. Получаем новый план перевозок:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2<br>1 | 10 | 15 | 0 | $u_1$<br>0 |
| 10<br>”0” | 18<br>1 | 20<br>“0” | 9 | $u_2$<br>8 |
| 15 | 24 | 26<br>1 | 10<br>“0” | $u_3$<br>14 |
| 12 | 25 | 27 | 8<br>1 | $u_4$<br>12 |
| $v_1$<br>2 | $v_2$<br>10 | $v_3$<br>12 | $v_4$<br>– 4 | |

Проверяем этот план на оптимальность.

$$u_1 = 0,\ v_1 = 2,\ v_2 = 10,\ u_2 = 18;$$
$$v_3 = 12,\ u_3 = 14,\ v_4 = -4,\ u_4 = 12;$$
$$u_1 + v_1 = 2;\ u_2 + v_1 = 10;\ v_2 + u_2 = 18;\ v_3 + u_2 = 20;$$
$$v_3 + u_3 = 26;\ v_4 + u_3 = 10;\ u_4 + v_4 = 8.$$

Для свободной клетки (4,1) имеем: $S_{41} = 12 - (2 + 12) = -2$. Для нее строим единственный цикл:

$$\begin{array}{cccccc} (4,1) \to & (4,4) \to & (3,4) \to & (3,3) \to & (2,3) \to & (2,1) \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array}$$

$$\min \{ 1 \quad 1 \quad 0 \} = 0$$

$x_{21} = 0$ перемещаем в клетки с нечетными номерами. Получаем новый (3-й) план

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2<br>1 | 10 | 15 | 0 | $u_1$<br>0 |
| 10 | 18<br>1 | 20<br>“0” | 9 | $u_2$<br>6 |
| 15 | 24 | 26<br>1 | 10<br>“0” | $u_3$<br>12 |
| 12<br>0 | 25 | 27 | 8<br>1 | $u_4$<br>10 |
| $v_1$<br>2 | $v_2$<br>12 | $v_3$<br>14 | $v_4$<br>– 2 | |

Проверяем этот план на оптимальность. $u_1 = 0$. Для занятых клеток имеем

$$\begin{aligned}
&v_1 = 2, && v_1 + u_4 = 12, v_4 + u_4 = 8,\\
&u_4 = 10, && v_3 + u_3 = 26, v_4 + u_3 = 10,\\
&v_4 = -2, && v_3 + u_2 = 20, \mathrm{v}_2 + u_2 = 18,\\
&\mathrm{v}_3 = 12, &&\\
&u_3 = 14, &&\\
&u_2 = 6. &&
\end{aligned}$$

$$S_{12} = 10 - (12 + 0) = -2\,.$$

Единственный цикл

$$\begin{array}{cccccccc}
(1,2) \to & (2,2) \to & (2,3) \to & (3,3) \to & (3,4) \to & (4,4) \to & (4,1) \to & (1,1) \\
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1
\end{array} \quad x_{22} = 1.$$

Из клеток с четными номерами перемещаем в клетки с нечетными $x_{22} = 1$. Получаем новый (4-й) план

$$X_{опт} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$f\,(X_{опт}) = 10 + 20 + 10 + 12 = 52$$

Проверка на оптимальность удается. $\otimes$.

# 17. ТЗ В СЕТЕВОЙ ФОРМЕ

**17.1. Определение.** Геометрический неориентированный граф есть множество $X = \{x_i\}$ точек пространства $R^n$ и множество $U = \{u_j\}$ самопересекающихся непрерывных кривых, удовлетворяющих следующим условиям:

1. Каждая замкнутая кривая из $U$ содержит только одну точку из множества $X$;
2. Каждая незамкнутая кривая из $U$ содержит точно две точки из $X$, которые являются её концами;
3. Кривые из $U$ не имеют общих точек, исключая точки множества $X$.

Элементы множества $X$ называются вершинами, а множества $U$ – ребрами графа.

Если вершины изображать кругами, то граф условимся называть граф-схемой.

Условия ТЗ могут быть записаны в виде граф-схемы следующим образом. Поставщики и потребители – это вершины графа. Запасы груза у поставщиков помечаются положительными числами, потребности потребителей в грузах – отрицательными.

Каждую вершину $i$ в граф-схеме делим горизонтальной чертой на две части. В верхней части пишем номер $i$ поставщика или потребителя, а в нижней – его запас $a_i$ или потребность $b_i$. Стоимость перевозки единицы груза от вершины $i$ к вершине $j$ обозначаем $c_{ij}$ и пишем на ребре $(i, j)$.

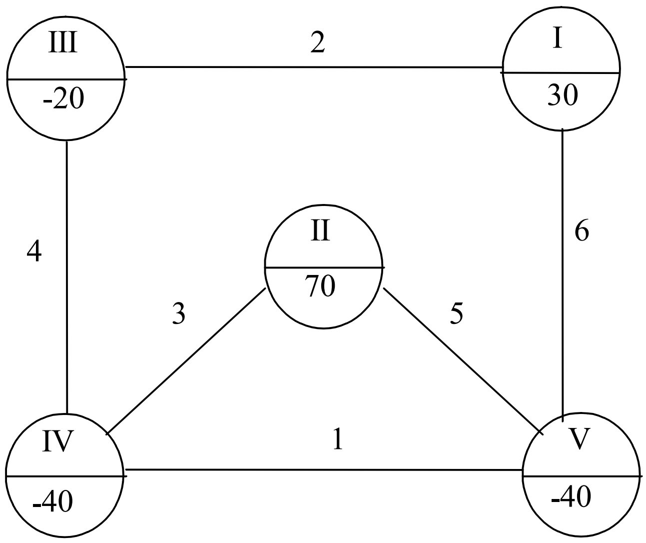



Рис. 17.1

На рис. 17.1 изображены поставщики I и II и потребители III, IV, V. $c_{24}=3,\ c_{25}=5,\ c_{15}=6,\ c_{13}=2,\ c_{34}=4$. Будем обозначать через $x_{ij}$ количество единиц груза, планируемое к перевозке из пункта $i$ в пункт $j$.

Итак, пусть в ТЗ имеется $n$ вершин и $m$ ребер, известны запасы поставщиков $a_i, i=\overline{1,k}$ и потребность потребителей $b_j, j=\overline{1,l},\ k+l=n$.

Если ТЗ является задачей закрытого типа, то

$$\sum_{i=1}^{k} a_i = \sum_{j=1}^{l} b_j \tag{17.1}$$

Стоимость перевозок выразиться линейной формой

$$f = \sum_{i=1}^{k}\left(\sum_{j=1}^{l} c_{ij}x_{ij}\right) \tag{17.2}$$

Требуется найти $\min f$ при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{l} x_{ij} \le a_i, i=\overline{1,k}; \tag{17.3}$$

$$\sum_{i=1}^{k} x_{ij} \ge b_j, j=\overline{1,l}, \tag{17.4}$$

$$x_{ij} \ge 0, i=\overline{1,k}, j=\overline{1,l} \tag{17.5}$$

Условие (17.5) означает, что обратные перевозки не предусматриваются.

Для решения ТЗ в сетевой форме используется модифицированный метод потенциалов, ибо различия между ТЗ в матричной и сетевой формах не существенные.

**17.2. Требования** к опорному плану ТЗ в сетевой форме.

1. Все запасы должны быть распределены, а потребности удовлетворены (17.1); для этого из вершин выходят стрелки с помеченной величиной груза и заходят в другие вершины;
2. К каждой вершине должны или подходить стрелки или выходить из неё;
3. Общее число стрелок должно быть равно $n-1$;
4. Стрелки не должны образовывать замкнутого контура.

**17.3. Алгоритм метода потенциалов в сетевой форме.** Пусть имеем начальный опорный план, удовлетворяющий п. 17.2.

1. Одной из вершин приписываем некоторое число (значение потенцила); потенциалы условимся заключать в прямоугольник;

2. Двигаемся по стрелкам и определяем потенциалы остальных вершин по правилу:

2.1. Если стрелка выходит из вершины $i$ с известным потенциалом и заходит в вершину $j$, то потенциал $П_{\text{j}}$ вершины $j$ вычисляется по формуле

$$П_j = П_i + c_{ij}; \tag{17.6}$$

2.2. Если стрелка выходит из вершины $j$ и заходит в вершину $i$, с известным потенциалом $П_{\text{i}}$, то

$$П_j = П_i - c_{ij}; \tag{17.7}$$

2.3. Если ребро $(i, j)$ не имеет стрелки, то его оценивают числом $S_{ij}$ по формуле

$$S_{ij} = c_{ij} - \left[\max\left\{П_{\text{i}}, П_{\text{j}}\right\} - \min\left\{П_{\text{i}}, П_{\text{j}}\right\}\right]. \tag{17.8}$$

3. Если все ребра без стрелок имеют неотрицательные оценки, то план из п. 17.2 оптимален (т. е. $\min f$ достигнут);

4. Если найдется ребро $(i, j)$ с $S_{ij} < 0$, то предыдущий опорный план улучшаем следующим образом:

4.1. Выбираем ребро $(i, j)$ с $S_{ij} < 0$, для которого значение $\left|S_{ij}\right|$ наибольшее; из вершины этого ребра $(i, j)$ с меньшим потенциалом проводится стрелка к вершине с большим потенциалом; при этом образуется локальный замкнутый контур из стрелок;

4.2. По получившемуся замкнутому контуру перемещаем часть груза $\lambda$ равную минимальной поставке среди стрелок контура, направленных противоположно введенной стрелке, на стрелки с тем же направлением что и новая введенная стрелка, а из стрелок, противоположно направленных к вновь введенной стрелке, снимается груз $\lambda$; стрелка, на которой было выбрано число $\lambda$, аннулируется; поставки на стрелках вне контура остаются неизменными; общее число стрелок сохраняется;

5. Новый опорный план опять проверяется на оптимальность, т.е. возвращаемся к п.п. 2 и 3.

**17.4. Замечание.** Для удобства вычислений (чтобы иметь дело с положительными потенциалами) первый потенциал можно брать не равным нулю, а любому положительному числу.

**17.5. Вырожденный случай ТЗ на сети.** Иногда при полном использовании запасов и полном удовлетворении потребностей количество стрелок оказывается меньше числа $n-1$, где $n$ – общее число вершин (включая и нулевые, в которых запасы (потребности) равны нулю).

В этом случае дополнительно вводится нужное до $n-1$ количество стрелок с нулевыми поставками. Направление стрелок произвольное, но они не должны образовывать замкнутый контур.

**17.6. Открытая модель ТЗ на сети.** Если объем поставок выше объема спроса, то вводят фиктивного потребителя с потребностью равной небалансу. Если объем потребления больше объема поставок, то вводят фиктивного поставщика с поставкой равной небалансу. Фиктивный поставщик (потребитель) соединяется ребрами непосредственно со всеми потребителями (поставщиками). Эти ребра снабжаются тарифом $M >> 0$, чтобы блокировать фиктивные вершины при решении задачи.

**17.7. Пример.** Найти оптимальный план перевозок в ТЗ на сети, указанной на рис. 17.2.

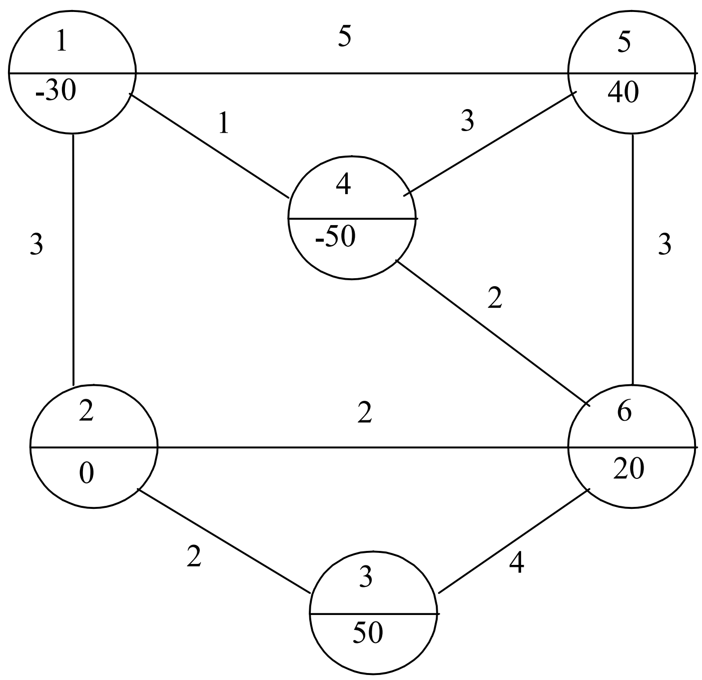



Рис. 17.2

**О.** Запасы груза (110) превышают потребности (80). Вводим фиктивного потребителя 7 со спросом $110-80=30$. Его соединяем со всеми поставщиками ребрами с высокой стоимостью доставки единицы груза: $c_{57}=c_{67}=c_{37}=M=10$. Теперь решаем задачу по общему правилу 17.2 $\cup$ 17.3. Делаем 6 стрелок и полностью распределяем запасы, удовлетворив полностью всех потребителей (рис. 17.3).

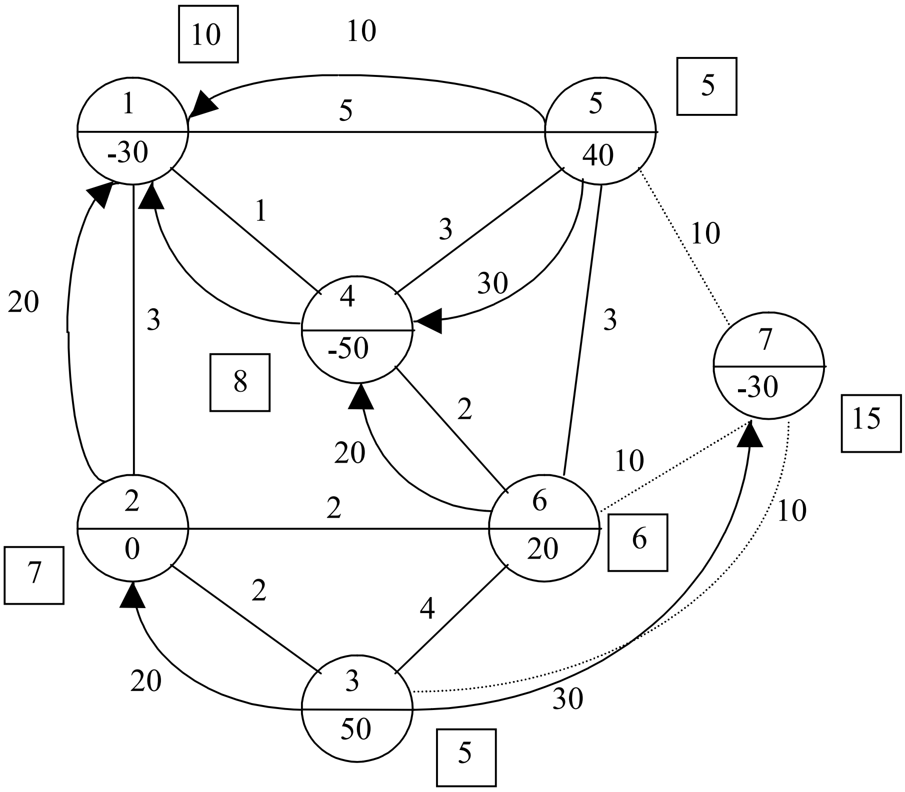



Рис. 17.3

Присваиваем вершинам потенциалы, например, вершине 5 даем потенциал $\Pi_5=5$. Остальные потенциалы находим по формулам (17.6) и (17.7). Находим ребра без стрелок. Для ребра (1,4) по (17.8) оценка $S_{14}=1-(10-8)<0$. План не оптимален. Проводим новую стрелку от вершины 4 к вершине 1. (по п. 17.3.4.1). Получаем локальный замкнутый контур по вершинам (1) – (5) – (4). По правилу 17.3.4.2 груз величиной $\lambda=10$ перемещаем на стрелку (5,4). Получаем новый план перевозок (рис. 17.4), который отличается от предыдущего плана (рис. 17.3) только тем, что груз в 40 единиц от поставщика 5 к потребителю (1) дешевле завезти через потребителя 4, ибо его перевозка теперь стоит 1+3<5, а прямая перевозка от 5 к 1 стоит 5 ден. ед.

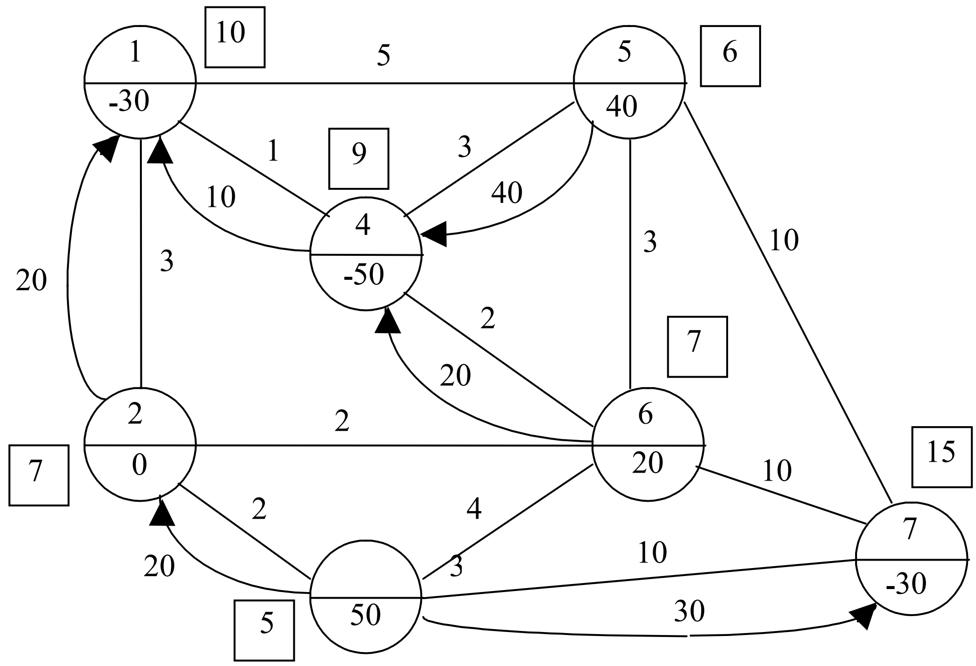



Рис. 17.4

Пусть $П_5 = 6$. Остальные потенциалы находим по правилу 17.3.2. Ребра без стрелок (1,5), (2,6), (3,6), (6,7), (5,7), (5,6). Оценки ребер без стрелок следующие:

$$S_{15} = 5 - (10 - 6) > 0,\ S_{26} = 2 - (7 - 7) > 0,\ S_{36} = 4 - (7 - 5) > 0,$$
$$S_{67} = 10 - (15 - 7) > 0,\ S_{57} = 10 - (15 - 6) > 0, S_{56} = 3 - (7 - 6) > 0.$$

По п. 17.3.3 данный план оптимален. Его стоимость $f_{\min} = 1 \cdot 10 + 3 \cdot 40 + 2 \cdot 20 + 3 \cdot 20 + 2 \cdot 20 = 270$ ден. ед. $\otimes$.

## 18. ТЗ ПО КРИТЕРИЮ ВРЕМЕНИ

При планировании перевозок возможна ситуация, когда важно сэкономить время перевозок. Это перевозки скоропортящихся продуктов, материалов для спасательных и аварийных работ и т.д.

Пусть, как и в ТЗ 11.1 имеем $m$ поставщиков $A_i, i = \overline{1,m}$ с запасами грузов $a_i$ и $n$ потребителей $B_j$, с потребностями $b_j, j = \overline{1,n}$. Пусть $t_{ij}$ – известное время доставки груза по маршруту $A_iB_j$. Требуется составить такой план $(x_{11},\ldots,x_{mn})$ перевозок, при котором спрос удовлетворяется полностью и суммарные затраты времени будут минимальными. Это означает, что перевозки, начатые одновременно от всех поставщиков, должны быть закончены за наименьший промежуток времени $t$, где $t_{ij}$ – самое большее из возможных затрат времени среди маршрутов $\left(A_i, B_j\right)$

$$T = \min t = \max\left\{t_{ij}\right\},$$

где $T$ – время, за которое осуществится план перевозок.

Ограничения

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i, i = \overline{1,m} \quad \text{(вывоз грузов)}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, j = \overline{1,n} \quad \text{(потребители удовлетворены)}$$

$$x_{ij} \ge 0$$

Для решения этой ТЗ делаем РТ и в верхних правых углах клеток $\left(i, j\right)$ ставим «временные тарифы» $t_{ij}$. Начальный опорный план можно строить одним из методов, указанных выше для обычной ТЗ (метод северо-западного угла, метод минимального элемента и т.д.). Сформулируем без доказательства

**18.1. Алгоритм решения ТЗ по критерию времени**.

1. Строим начальный опорный план (любым известным способом);
2. Среди $m + n - 1$ заполненных клеток выбирают ту, у которой $\max t_{ij} = T$ и $x_{ij} > 0$;
3. Все свободные клетки РТ с $t_{ij} > T$ вычеркиваются из рассмотрения;
4. Для клетки $\left(i, j\right)$ из п. 2 строим «разгрузочный» цикл, начиная с неё; основное требование к циклу – наличие груза в нечетных вершинах (если есть несколько клеток в РТ с $t_{ij} = T$, то циклы для них возможны различные). Груз величиной $\underset{\text{нач. с верш. цикла}}{Q = \min\left\{x_{ik}\right\}}$ отнимается от грузов, стоящих в клетках с нечетными номерами в цикле и добавляется к грузам, стоящим в клетках с четными номерами. При выборе $Q$ возникают две возможности:

$$4.1.\ Q = x_{ij} \text{ для клетки } \left(i, j\right) \text{ с } t_{ij} = T; \tag{18.1}$$

$$4.2.\ Q < x_{ij} \text{ для клетки } \left(i, j\right) \text{ с } t_{ij} = T. \tag{18.2}$$

В случае (18.1) клетка $(i, j)$ исключается из дальнейшего рассмотрения. В случае (18.2) клетка $(i, j)$ последовательно разгружается до тех пор, пока не станет $x_{ij} = 0$. Получаем новый план. Для него определим $T^{(1)} < T$.

5. К новому плану применяем п.п. 2 – 4 с $T^{(1)}$ вместо $T$ в п. 2. Поступаем так до тех пор, пока станет невозможным свести к нулю перевозку в клетке с последним значением $T^{(k)}$ (т. е. нельзя для этой клетки построить «загрузочный» цикл). Это будет означать, что минимальное время перевозок найдено.

**18.2. Пример.** Решить ТЗ, заданную таблицу (18.2), по критерию времени

| $A_i$ поставщики | Потребности $B_j$ | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $a_i$ |
| $A_1$ | 9 | 4 | 5<br>10 | 8 | 10 |
| $A_2$ | 5<br>5 | 2<br>10 | 7<br>10 | 6<br>«0» | 25 |
| $A_3$ | 12 | 10 | 5 | 4<br>25 | 25 |
| $b_j$ | 5 | 10 | 20 | 25 | |

(18.3)

**О.** Это есть закрытая модель ТЗ. В (ТЗ по времени) $\sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{j=1}^{4} b_j$.

Строим начальный опорный план методом минимального элемента. Получаем в табл. (18.3) 5 заполненных клеток. В нашем случае $T = t_{23} = 7$. Исключаем из рассмотрения клетки, у которых $t_{ij} > 7$. Они перечеркнуты крест-накрест в таблице (18.3). Это клетки (1,1), (1,4), (3,1) и (3,2). Для клетки (2,3) строим «разгрузочный» цикл: (2,3) – (2,4) – (3,4) – (3,3).

Отметим, что это единственный цикл, начинающийся с клетки (2,3), у которого на нечетных местах есть ненулевой груз. Другие циклы не удовлетворяют требованию 18.1.4. Для построенного цикла $Q = \min\{10, 25\} = 10$.

Перегоняем груз 10 в клетки с четными номерами из клеток с нечетными номерами. Получаем новый план (таблица (18.4)).

| $A_i$ | $B_j$ | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $a_i$ |
| $A_1$ | ~~9~~ | 4 | 5<br>10 | ~~8~~ | 10 |
| $A_2$ | 5<br>5 | 2<br>10 | ~~7~~ | 6<br>10 | 25 |
| $A_3$ | ~~12~~ | ~~10~~ | 5<br>10 | 4<br>15 | 25 |
| $b_j$ | 5 | 10 | 20 | 25 | |

(18.4)

Исключаем из рассмотрения и клетку (2,3).

Определяем на новом плане для занятых клеток $T^{(1)} = \max\limits_{3}\{t_{ij}\} = 6 = t_{24}$.

Для клетки (2,4) строим замкнутый цикл. Так как клетка (2,3) исключена, то оказывается, что для этой клетки нельзя построить нужный цикл.

Значит, оптимальный план $T_{\min} = T^{(1)} = 6$. За это время можно удовлетворить всех потребителей доставив им все нужные грузы (если начать вывозить грузы одновременно от $A_1$ к $B_3$, от $A_2$ к $B_1, B_2, B_4$, от $A_3$ к $B_3, B_4$). $\otimes$.

**18.3. Замечание.** План в (18.4) не является оптимальным по критерию стоимости, если $t_{ij}$ считать тарифами перевозок.

# ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ

# ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 1

## Решение систем линейных уравнений. Базисные решения систем линейных уравнений

Рассмотрим систему $m$ линейных уравнений с $n$ неизвестными

$$\begin{cases} a_{10} = & a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + & \dots & +a_{1n}x_n \\ a_{20} = & a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 + & \dots & +a_{2n}x_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m0} = & a_{m1}x_1 + & a_{m2}x_2 + & \dots & +a_{mn}x_n \end{cases} \tag{1.1}$$

Для решения системы линейных уравнений ее необходимо записать в форме модифицированной жордановой таблицы

| | 1 | $-x_1$ | $\dots$ | $-x_n$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | $a_{10}$ | $a_{11}$ | $\dots$ | $a_{1n}$ |
| . | . | . | . | . |
| 0 | $a_{m0}$ | $a_{m1}$ | $\dots$ | $a_{mn}$ |

и проделать возможное число шагов жордановых исключений, вычеркивая после каждого шага разрешающий столбец и строки, если они целиком состоят из нулевых элементов.

*Преобразование однократного замещения (ПОЗ) для модифицированной жордановой таблицы:*

1) разрешающий элемент заменяется обратной величиной;

2) остальные элементы разрешающей строки делятся на разрешающий элемент;

3) остальные элементы разрешающего столбца делятся на разрешающий элемент и меняют знаки;

4) прочие элементы вычисляются по формуле $b_{ij} = \dfrac{a_{ij}a_{ks} - a_{is}a_{kj}}{a_{ks}}$, $(i \neq k; j \neq s)$. (Преобразованный элемент $b_{ij}$ равен разности произведений элементов, расположенных на главной и побочной диагоналях, деленной на разрешающий элемент).

Если в ходе исключений появится строка, все элементы которой, кроме свободного члена, равны нулю, то данная система несовместна.

В противном случае система совместна. При этом она имеет бесконечное множество решений, если в верхней заглавной строке последней жордановой таблицы останется хотя бы одна переменная, и единственное решение, если все переменные окажутся в левом заглавном столбце.

**Пример 1.1.** Найти решение системы

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - 6x_4 = -3 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 4x_4 = 0 \\ x_1 + x_3 - 2x_4 = 3 \end{cases}.$$

*Решение*:

Представим исходную систему в виде

$$\begin{cases} 0 = -3 + 1(-x_1) + 2(-x_2) + 1(-x_3) - 6(-x_4) \\ 0 = 1(-x_1) + 1(-x_2) + 1(-x_3) - 4(-x_4) \\ 0 = 3 + 1(-x_1) + 1(-x_3) - 2(-x_4) \end{cases}.$$

Теперь запишем ее в виде модифицированной жордановой таблицы и сделаем два шага жордановых исключений. При этом за разрешающие можно принимать любые отличные от нуля элементы основной части таблицы (кроме элементов столбца свободных членов):

| | 1 | $-x_1$ | $-x_2$ | $-x_3$ | $-x_4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $-3$ | 1 | 2 | 1 | $-6$ |
| 0 | 0 | 1 | $\boxed{1}$ | 1 | $-4$ |
| 0 | 3 | 1 | 0 | 1 | $-2$ |

;

| | 1 | $-x_1$ | $-x_3$ | $-x_4$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | $-3$ | $-1$ | $-1$ | 2 |
| $x_2$ | 0 | 1 | 1 | $-4$ |
| 0 | 3 | $\boxed{1}$ | 1 | $-2$ |

;

| | 1 | $-x_3$ | $-x_4$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| $x_2$ | $-3$ | 0 | $-2$ |
| $x_1$ | 3 | 1 | $-2$ |

.

Из последней таблицы выпишем общее решение данной системы

$$\begin{cases} x_1 = -x_3 + 2x_4 + 3 \\ x_2 = 2x_4 - 3 \end{cases},$$

где $x_3$ и $x_4$ могут принимать любые значения.

*Ответ*: $\begin{cases} x_1 = 3 - x_3 + 2x_4 \\ x_2 = -3 + 2x_4 \end{cases}$

где $x_3$ и $x_4$ – любые действительные числа.

**Пример 1.2.** Найти решение системы

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_4 = 5 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 + 2x_3 - x_4 = 3 \\ 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 3 \end{cases}.$$

*Ответ*: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$.

**Пример 1.3.** Найти решение системы

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 2 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 4 \end{cases}.$$

*Решение:*

Запишем систему в виде жордановой таблицы

| | 1 | $-x_1$ | $-x_2$ | $-x_3$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | $\boxed{1}$ | 1 | 1 |
| 0 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 0 | 4 | 4 | 5 | 6 |

.

Сделав два шага жордановых исключений, приходим к таблице, в третьей строке которой свободный член отличен от нуля, а остальные элементы равны нулю

| | 1 | $-x_2$ | $-x_3$ |
|---|---|---|---|
| $x_1$ | 1 | 1 | 1 |
| 0 | $-1$ | $\boxed{1}$ | 2 |
| 0 | 0 | 1 | 2 |

;

| | 1 | $-x_3$ |
|---|---|---|
| $x_1$ | 2 | $-1$ |
| $x_2$ | $-1$ | 2 |
| 0 | 1 | 0 |

.

Система несовместна.

*Ответ*: система несовместна.

**Пример 1.4.** Найти решение системы

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 = -2 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 4 \end{cases}.$$

*Ответ*: $\begin{cases} x_2 = 3x_1 - 2x_3 - 1 \\ x_4 = 5x_1 - 4x_3 - 5 \end{cases}$,

где $x_1$ и $x_3$ – любые действительные числа.

**Пример 1.5.** Найти решение системы

$$\begin{cases} 4x_1 - 17x_2 - 6x_3 - 5x_4 = -17 \\ 43x_1 + 24x_2 - x_3 + 3x_4 = 28 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 = 9 \\ 2x_1 + x_2 = 1 \end{cases}.$$

*Ответ*: $(1;\ -1;\ 3;\ 4)$.

Максимально возможное число базисных решений равно $C_n^r = \dfrac{n!}{r!\cdot(n-r)!}$. В действительности их может оказаться меньше, т.к. некоторые группы по $r$ векторов могут быть линейно зависимы и, следовательно, не будут образовывать базиса. Не будут образовывать базиса и соответствующие этим векторам переменные.

В экономических задачах отрицательные значения переменных, как правило, не имеют реального смысла. Поэтому рассмотрим способ отыскания неотрицательных решений системы линейных уравнений, т. е. решений, среди компонентов которых нет отрицательных чисел.

Неотрицательные базисные решения занимают особое место в математическом программировании и **называются опорными решениями (планами).**

*Для отыскания опорного решения системы линейных уравнений ее необходимо представить в виде жордановой таблицы так, чтобы все свободные члены были неотрицательными, а затем произвести возможное число шагов жордановых исключений, выбирая разрешающие элементы среди положительных чисел основной части таблицы по наименьшему отношению свободных членов к соответствующим положительным элементам столбца, выбранного разрешающим. Искомое опорное решение найдется приравниванием свободных (верхних) переменных нулю, а базисных (боковых) – свободным членам. Если в ходе жордановых исключений встретится 0-строка, в которой все элементы неположительные, а свободный член неотрицателен, то данная система не имеет неотрицательных (в частности, опорных) решений, хотя и является совместной.*

**Пример 1.6.** Найти опорное решение системы

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 3 \\ 2x_1 - x_2 + x_4 = 2 \\ 3x_1 - x_3 - x_4 = -1 \end{cases}$$

*Решение:*

Так как все свободные члены должны быть неотрицательными, то умножим предварительно третье уравнение на (–1).

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 3 \\ 2x_1 - x_2 + x_4 = 2 \\ -3x_1 + x_3 + x_4 = 1 \end{cases}.$$

Запишем полученную систему в виде таблицы

| | 1 | $-x_1$ | $-x_2$ | $-x_3$ | $-x_4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 3 | 2 | $-1$ | 1 | $-1$ |
| 0 | 2 | 2 | $-1$ | 0 | 1 |
| 0 | 1 | $-3$ | 0 | $\boxed{1}$ | 1 |

.

В качестве разрешающего столбца можно выбрать любой столбец, содержащий хотя бы один положительный элемент. Выберем, например, третий $(-x_3)$ столбец. Разрешающую строку определим по наименьшему отношению свободных членов к положительным элементам третьего столбца: $\min\left(\frac{3}{1}; \frac{1}{1}\right) = \frac{1}{1}$.

Меньшее из этих соотношений соответствует третьей строке, значит, эта строка и будет разрешающей. На пересечении третьей строки и столбца $(-x_3)$ находится разрешающий элемент 1. Выполняем шаг жордановых исключений, получаем следующую таблицу:

| | 1 | $-x_1$ | $-x_2$ | $-x_4$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 2 | $\boxed{5}$ | $-1$ | $-2$ |
| 0 | 2 | 2 | $-1$ | 1 |
| $x_3$ | 1 | $-3$ | 0 | 1 |

.

В этой таблице за разрешающий выбираем первый $(-x_1)$ столбец. По наименьшему из соотношений $\min\left(\frac{2}{5};\frac{2}{2}\right) = \frac{2}{5}$ находим разрешающую строку – первую.

Выполняем очередной шаг жордановых исключений с разрешающим элементом 5 и получаем

| | 1 | $-x_2$ | $-x_4$ |
|---|---|---|---|
| $x_1$ | $2/5$ | $-1/5$ | $-2/5$ |
| 0 | $6/5$ | $-3/5$ | $\boxed{9/5}$ |
| $x_3$ | $11/5$ | $-3/5$ | $-1/5$ |

.

В этой таблице разрешающим может быть лишь элемент $9/5$, т. к. он единственный положительный элемент. Получаем

| | 1 | $-x_2$ |
|---|---|---|
| $x_1$ | $2/3$ | $-1/3$ |
| $x_4$ | $2/3$ | $-1/3$ |
| $x_3$ | $7/3$ | $-2/3$ |

.

Полагая $x_2 = 0$, находим одно из опорных решений: $\left(2/3; 0; 7/3; 2/3\right)$.

*Ответ*: $\left(2/3;\ 0;\ 7/3;\ 2/3\right)$.

**Пример 1.7.** Найти опорное решение системы

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 8x_3 = -4 \\ x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 2 \end{cases}.$$

*Решение:*

| | 1 | $-x_1$ | $-x_2$ | $-x_3$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 4 | $-3$ | $-4$ | 8 |
| 0 | 2 | 1 | $\boxed{2}$ | $-6$ |

;

| | 1 | $-x_1$ | $-x_3$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 8 | $-1$ | $-4$ |
| $x_2$ | 1 | $1/2$ | $-3$ |

.

В первой *0*-строке последней таблицы все элементы отрицательны, а свободный член положителен. Значит, данная система не имеет неотрицательных (опорных) решений (хотя решения, содержащие отрицательные элементы, существуют).

*Ответ*: данная система не имеет неотрицательных (опорных) решений (хотя существуют решения с отрицательными элементами).

**Пример 1.8.** Найти все опорные решения системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 16 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 8 \end{cases}.$$

*Ответ*: $(0;\ 10;\ 0;\ 2)$, $(4;\ 12;\ 0;\ 0)$, $(10;\ 0;\ 6;\ 0)$, $(0;\ 0;\ 4;\ 4)$.

## Задачи

– решить системы линейных уравнений:

1. $$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 14 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 7 \end{cases};$$

2. $$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 3 \\ 4x_1 - 4x_2 - 4x_3 - 16x_4 = -8 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 2 \end{cases};$$

3. $$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 1 \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ 2x_1 - 3x_2 - 11x_3 - 15x_4 = 1 \end{cases}.$$

– найти опорное решение системы линейных уравнений

1. $$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 4 \\ 5x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 10 \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases};$$

2. $$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 9 \\ x_1 + x_3 + x_4 = 7 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 13 \end{cases}.$$

– найти все опорные решения системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 = 24 \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases}.$$

## ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 2

### Эквивалентные преобразования систем линейных уравнений и неравенств

Всякому решению $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ неравенства $a_1x_1+\ldots+a_nx_n \le a$ соответствует вполне определенное решение $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$, $\alpha_{n+1}$ уравнения $a_1x_1+\ldots+a_nx_n+x_{n+1}=a$, в котором $x_{n+1}\ge 0$.

*Неравенство* $a_1x_1+\ldots+a_nx_n \le a$ *эквивалентно уравнению* $a_1x_1+\ldots+a_nx_n+x_{n+1}=a$ *и неравенству* $x_{n+1}\ge 0$.

Аналогично: *неравенство* $a_1x_1+\ldots+a_nx_n \ge a$ *эквивалентно линейному уравнению* $a_1x_1+\ldots+a_nx_n-x_{n+1}=a$*, в котором* $x_{n+1}\ge 0$. Переменную $x_{n+1}$ называют *дополнительной (балансовой) переменной.*

**Пример 2.1.** Найти неотрицательное решение системы линейных уравнений и неравенств

$$\begin{cases} -2x_1-2x_2+3x_3+x_5=5 \\ 2x_1+x_2-x_3+4x_4 \le 6 \\ 3x_2+2x_3+x_4+x_5 \ge 8 \end{cases}.$$

*Решение:*

В левую часть первого неравенства вводим балансовую переменную $x_6$ со знаком «плюс», а в левую часть второго неравенства – балансовую переменную $x_7$ со знаком «минус». Присоединяя условие неотрицательности для дополнительных переменных, получаем следующую систему, эквивалентную исходной системе:

$$\begin{cases} -2x_1-2x_2+3x_3+x_5=5 \\ 2x_1+x_2-x_3+4x_4+x_6=6; \\ 3x_2+2x_3+x_4+x_5-x_7=8 \end{cases}$$

$$x_6\ge 0, \quad x_7\ge 0.$$

Эту систему записываем в жорданову таблицу и находим какое-либо опорное решение. Поскольку переменная $x_6$ входит только во второе уравнение, причем с коэффициентом (+1), ее можно сразу отнести к базисным переменным. Поэтому второе уравнение записано не в форме *0-*

строки, а в виде, разрешенном относительно $x_6$.

| | 1 | $-x_1$ | $-x_2$ | $-x_3$ | $-x_4$ | $-x_5$ | $-x_7$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 5 | $-2$ | $-2$ | 3 | 0 | $\boxed{1}$ | 0 |
| $x_6$ | 6 | 2 | 1 | $-1$ | 4 | 0 | 0 |
| 0 | 8 | 0 | 3 | 2 | 1 | 1 | $-1$ |

;

| | 1 | $-x_1$ | $-x_2$ | $-x_3$ | $-x_4$ | $-x_7$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_5$ | 5 | $-2$ | $-2$ | 3 | 0 | 0 |
| $x_6$ | 6 | 2 | 1 | $-1$ | 4 | 0 |
| 0 | 3 | $\boxed{2}$ | 5 | $-1$ | 1 | $-1$ |

;

| | 1 | $-x_2$ | $-x_3$ | $-x_4$ | $-x_7$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_5$ | 8 | 3 | 2 | 1 | $-1$ |
| $x_6$ | 3 | $-4$ | 0 | 3 | 1 |
| $x_1$ | $3/2$ | $5/2$ | $-1/2$ | $1/2$ | $-1/2$ |

.

Из последней таблицы при нулевых значениях свободных переменных искомое неотрицательное решение исходной системы уравнений и неравенств равно: $x_1 = 3/2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = 8$.

*Ответ*: $\left(3/2; 0; 0; 0; 8\right)$.

**Пример 2.2.** Найти неотрицательное решение системы линейных неравенств

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 6 \\ x_1 + x_2 + x_3 \ge 7 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 \ge -12 \end{cases}.$$

*Ответ*: система не имеет опорных (неотрицательных) решений.

**Пример 2.3.** Привести систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 10 \end{cases}$$

с условиями неотрицательности для переменных $x_1 \ge 0$, …, $x_4 \ge 0$ к эквивалентной системе неравенств.

*Решение*:

Запишем данную систему в виде таблицы и сделаем два шага жордановых исключений

| | 1 | $-x_1$ | $-x_2$ | $-x_3$ | $-x_4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 5 | $\boxed{1}$ | $-2$ | 1 | 1 |
| 0 | 10 | 2 | 1 | 3 | $-1$ |

;

| | 1 | $-x_2$ | $-x_3$ | $-x_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 5 | $-2$ | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 5 | $\boxed{1}$ | $-3$ |

;

| | 1 | $-x_2$ | $-x_4$ |
|---|---|---|---|
| $x_1$ | 5 | $-7$ | 4 |
| $x_3$ | 0 | 5 | $-3$ |

.

Выпишем из последней таблицы систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 = 5 + 7x_2 - 4x_4 \\ x_3 = -5x_2 + 3x_4 \end{cases}.$$

Так как величины $x_1$ и $x_3$ неотрицательные, то приходим к системе неравенств $\begin{cases} 5 + 7x_2 - 4x_4 \geq 0 \\ -5x_2 + 3x_4 \geq 0 \end{cases}$. Присоединим условия неотрицательности для переменных $x_2$ и $x_4$. Получаем систему неравенств, эквивалентную исходной системе уравнений

$$\begin{cases} -7x_2 + 4x_4 \leq 5 \\ 5x_2 - 3x_4 \leq 0 \end{cases};$$

$$x_2 \geq 0, \quad x_4 \geq 0.$$

*Ответ*: $\begin{cases} -7x_2 + 4x_4 \leq 5 \\ 5x_2 - 3x_4 \leq 0 \end{cases}$, $x_2 \geq 0, \quad x_4 \geq 0$.

**Пример 2.4.** Найти неотрицательное решение следующей системы линейных уравнений и неравенств:

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - 3x_3 \geq 1 \\ 3x_1 + 4x_3 \geq -2 \\ 3x_1 + x_2 \leq 4 \end{cases}.$$

*Ответ*: $\left(0; \frac{1}{2}; 0\right)$.

### Задачи

– найти два неотрицательных решения системы линейных уравнений и неравенств

1. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 = -3 \\ x_3 - 2x_4 = 2 \\ 3x_2 - x_4 + x_5 \le 5 \\ x_2 + x_5 \ge -3 \end{cases}$; 2. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 \le 1 \\ x_2 - x_3 + x_4 \le 1 \\ x_1 + x_3 + 2x_4 \le 2 \end{cases}$;

3. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_4 \le 2 \\ x_2 + x_3 \le 2 \\ x_1 + x_3 \le 2 \end{cases}$.

– преобразовать системы линейных уравнений в эквивалентные системы линейных неравенств

1. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 2 \\ 2x_1 + x_4 + x_5 = 3 \end{cases}$, $x_j \ge 0 \ \left(j = \overline{1,5}\right)$;

2. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_4 = 4 \\ x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases}$, $x_j \ge 0 \ \left(j = \overline{1,4}\right)$.

## ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 3

### Примеры задач линейного программирования

*Линейное программирование* – область математики, разрабатывающая теорию и численные методы решения задач нахождения экстремума (максимума или минимума) линейной функции многих переменных при наличии линейных ограничений, т.е. равенств или неравенств, связывающих эти переменные.

Для решения экономической задачи математическими методами составляют ее экономико-математическую модель по следующей схеме:

1) выбирают некоторое число переменных величин, заданием числовых значений которых однозначно определяется одно из возможных состояний исследуемого явления;

2) выражаются взаимосвязи, присущие исследуемому явлению, в виде математических соотношений; они образуют систему ограничений;

3) составляют целевую функцию, выражающую количественное выражение выбранного критерия оптимальности;

4) задача математически формулируется как задача отыскания экстремума целевой функции.

**Пример 3.1.** (*Задача о наилучшем использовании ресурсов*).

Для строительства домов на 100 строительных площадках выбрали 5 типовых проектов. По каждому из проектов известны длительность закладки фундамента и строительства остальной части здания, а также жилая площадь дома.

| Вид работы | Длительность выполнения (дни) для типового проекта | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | I | II | III | IV | V |
| Закладка фундамента | 20 | 30 | 35 | 30 | 40 |
| Остальные работы | 40 | 20 | 60 | 35 | 25 |
| Жилая площадь, м$^2$ | 3000 | 2000 | 5000 | 4000 | 6000 |

Параллельно можно вести закладку 10 фундаментов и строительство 15 зданий. Составить план строительства, максимизирующий ввод жилой площади в течение года (300 рабочих дней), при условии, что домов II типа должно быть построено не менее 10.

*Решение:*

Обозначим через $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$, $x_5$ количество домов каждого типа, планируемых к строительству. По условию всего должно быть построено 100 домов, т. е. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 100$.

Поскольку одновременно можно вести работы по закладке не более 10 фундаментов, то годовой фонд времени по этому виду работ ограничен величиной $300 \cdot 10 = 3000$ рабочих дней. На закладку фундаментов потребуется $20x_1 + 30x_2 + 35x_3 + 30x_4 + 40x_5$ рабочих дней. Это количество не может превышать имеющегося фонда времени, поэтому должно выполняться неравенство $20x_1 + 30x_2 + 35x_3 + 30x_4 + 40x_5 \le 3000$.

Фонд времени на строительство остальной части зданий составляет 300·15=4500 рабочих дней. На этот вид работ фактически будет потрачено $40x_1 + 20x_2 + 60x_3 + 35x_4 + 25x_5$ рабочих дней. Значит $40x_1 + 20x_2 + 60x_3 + 35x_4 + 25x_5 \le 4500$.

Учитывая последнее условие задачи, получаем неравенство $x_2 \ge 10$.

Присоединяем естественные условия неотрицательности для каждой переменной: $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$, $x_3 \ge 0$, $x_4 \ge 0$, $x_5 \ge 0$.

Цель задачи – максимизировать вводимую в течение года жилую площадь – выразим в форме функции: $f = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 6x_5$. (Жилая площадь исчисляется в тысячах квадратных метров).

Таким образом, математическая модель задачи имеет вид

$$f = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 6x_5 \ (\max),$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 100 \\ 20x_1 + 30x_2 + 35x_3 + 30x_4 + 40x_5 \le 3000 \\ 40x_1 + 20x_2 + 60x_3 + 35x_4 + 25x_5 \le 4500 \\ x_2 \ge 10 \end{cases};$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0,\ x_5 \ge 0.$$

**Пример 3.2.** (*Составление химической смеси*).

Необходимо составить смесь, содержащую химические вещества $A$, $B$, $D$, которые находятся в исходном сырье двух видов в следующих концентрациях: $A_1$, $A_2$, $B_1$, $B_2$, $D_1$, $D_2$. Стоимость единицы сырья первого вида – $c_1$, второго – $c_2$. При этом вещества $A$ в смеси должно быть не меньше $b_A$, вещества $B$ – не меньше $b_B$, а вещества $D$ – не меньше $b_D$. Стоимость смеси должна быть минимальной.

*Решение*:

Обозначим через $x_1$ массу сырья первого вида, через $x_2$ массу сырья второго вида. Ограничения на количественный состав каждого вещества будут иметь вид неравенств. Масса вещества $A$ для первого вида сырья определяется массой $x_1$ этого сырья и концентрацией $A_1$, поэтому сырье первого вида дает в смеси $A_1x_1$ единиц вещества $A$. Аналогично сырье второго вида дает $A_2x_2$ единиц этого вещества; их суммарная масса не должна быть меньше $b_A$, т. е. $A_1x_1 + A_2x_2 \ge b_A$.

Для веществ $B$ и $D$ аналогичные ограничения будут иметь вид $B_1x_1 + B_2x_2 \ge b_B$ и $D_1x_1 + D_2x_2 \ge b_D$.

Общая стоимость сырья равна сумме стоимостей сырья первого и второго вида: $c_1x_1 + c_2x_2$. Очевидно, что количество сырья каждого вида не может быть отрицательным, т. е. $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$.

Таким образом, математически эта задача записывается в виде

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 (\min),$$

$$\begin{cases} A_1x_1 + A_2x_2 \ge b_A \\ B_1x_1 + B_2x_2 \ge b_B \\ D_1x_1 + D_2x_2 \ge b_D \end{cases};$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

**Пример 3.3.** (*Составление рациона*).

При составлении рациона питания необходимо учитывать калорийность, содержание белков, жиров, углеводов и т.д. Для простоты ограничимся случаем, когда имеются три продукта питания, каждый из которых имеет свою стоимость и содержит определенное количество питательных веществ *A*, *B*, *C*. Необходимо составить рацион питания так, чтобы стоимость его была минимальной.

*Решение*:

Количество единиц продуктов обозначим $x_1$, $x_2$, $x_3$, а стоимость единицы продукта – соответственно $c_1$, $c_2$, $c_3$. В рацион должно входить не менее $b_A$ единиц вещества *A*, не менее $b_B$ единиц вещества *B* и не менее $b_C$ единиц вещества *C*. Концентрация $a_{ij}$ питательных веществ в единице продукта задается таблицей

| Продукт | Питательное вещество | | | Стоимость |
|---|---|---|---|---|
| | *A* | *B* | *C* | |
| 1 ($x_1$) | $a_{11}$ | $a_{12}$ | $a_{13}$ | $c_1$ |
| 2 ($x_2$) | $a_{21}$ | $a_{22}$ | $a_{23}$ | $c_2$ |
| 3 ($x_3$) | $a_{31}$ | $a_{32}$ | $a_{33}$ | $c_3$ |
| | $\geq b_A$ | $\geq b_B$ | $\geq b_C$ | |

Стоимость рациона равна сумме стоимостей использованных продуктов $f = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3(\min)$.

Ограничения на количественный состав рациона запишутся в виде:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3 \geq b_A \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{32}x_3 \geq b_B \\ a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 \geq b_C \end{cases}.$$

По смыслу задачи количества веществ $x_1$, $x_2$, $x_3$ должны быть неотрицательными, т. е. $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$.

**Пример 3.4.** (*Составление рациона*).

При составлении суточного рациона кормления скота можно использовать сено (не более 50 кг) и силос (не более 85 кг). Рацион должен содержать не менее 30 кормовых единиц, 1 кг белка, 100 г кальция и 80 г фосфора.

В таблице приведены данные о содержании указанных компонентов в 1 кг каждого корма и себестоимость этих кормов

| Корм | Количество кормовых ед. | Компоненты | | | Себестоимость, ден. ед. / кг |
|---|---|---|---|---|---|
| | | белок | кальций | фосфор | |
| Сено | 0,5 | 40 | 1,25 | 2 | 1,2 |
| Силос | 0,5 | 10 | 2,5 | 1 | 0,8 |

Определить оптимальный рацион исходя из условия минимума его себестоимости.

**Пример 3.5.** (*Задача о раскрое материала*).

Полосы листового проката длиной 200 см необходимо разрезать на заготовки трех типов: *А*, *Б* и *В* длиной соответственно 57, 82 и 101 см для производства 50 изделий. На каждое изделие требуется по 4 заготовки типов *А* и *Б* и 5 заготовок типа *В*. Известны пять способов раскроя одной полосы. Количество заготовок, нарезаемых из одной полосы при каждом способе раскроя, приведено в таблице.

Определить, какое количество полос проката нужно разрезать каждым способом для изготовления 50 изделий, чтобы отходы от раскроя были наименьшими.

| Способ раскроя | Количество заготовок типа | | |
|---|---|---|---|
| | *А* | *Б* | *В* |
| I | 3 | – | – |
| II | 2 | 1 | – |
| III | 1 | – | 1 |
| IV | – | 2 | – |
| V | – | 1 | 1 |

*Решение:*

Обозначим через $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$, $x_5$ количество полос, раскраиваемых 1-м, 2-м, 3-м, 4-м и 5-м способами.

Для производства 50 изделий необходимо $4 \cdot 50 = 200$ заготовок типа *А*, 200 заготовок типа *Б* и $5 \cdot 50 = 250$ заготовок типа *В*. Если использовать все способы раскроя, то общее количество заготовок типа *А* можно выразить суммой $3x_1 + 2x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 0x_5$, и по условию эта сумма должна равняться 200:

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 200.$$

Аналогично получаются условия выполнения задания по другим типам заготовок:

$$x_2 + 2x_4 + x_5 = 200;$$
$$x_3 + x_5 = 250.$$

По смыслу задачи $x_j \geq 0 \ \left(j = \overline{1,5}\right)$.

Чтобы составить целевую функцию, выражающую суммарную величину отходов, подсчитаем сначала величины отходов при раскрое одной полосы по каждому из способов. Отходы от каждой полосы составят

| | |
|---|---|
| при I способе: | $200 - 57\cdot 3 = 29$ см; |
| при II способе: | $200 - (57\cdot 2 + 82) = 4$ см; |
| при III способе: | $200 - (57 + 101) = 42$ см; |
| при IV способе: | $200 - 82\cdot 2 = 36$ см; |
| при V способе: | $200 - (82 + 101) = 17$ см. |

Суммарную величину отходов можно выразить в виде

$$f = 29x_1 + 4x_2 + 42x_3 + 36x_4 + 17x_5.$$

Таким образом, математическая модель задачи имеет вид

$$f = 29x_1 + 4x_2 + 42x_3 + 36x_4 + 17x_5 \ (\min),$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 200 \\ x_2 + 2x_4 + x_5 = 200 \\ x_3 + x_5 = 250 \end{cases};$$

$$x_j \geq 0 \ \left(j = \overline{1,5}\right).$$

**Пример 3.6.** Снабженческая служба завода получила от поставщиков 500 стальных прутков длиной 5 м. Их нужно разрезать на детали типов *А* и *Б* длиной соответственно 2 и 1,5 м, из которых затем составляют комплекты. В каждый комплект входят 3 детали типа *А* и 2 детали типа *Б*. Составить математическую модель задачи, позволяющую найти план раскроя прутков, гарантирующий получение максимального количества комплектов.

**Пример 3.7.** При изготовлении изделий $И_1$ и $И_2$ используются токарные и фрезерные станки, а также сталь и цветные металлы. По технологическим нормам на производство единицы изделия $И_1$ требуется 300 и 200 единиц соответственно токарного и фрезерного оборудования (в станко-часах) и 10 и 20 единиц стали и цветных металлов (в килограммах). Для производства единицы изделия $И_2$ требуется 400, 100, 70 и 50 соответствующих единиц тех же ресурсов. Цех располагает 12 400 и 6 800 станко-часами оборудования, 640 и 840 кг материалов. Прибыль от реализации единицы изделия $И_1$ – 6 тыс. ден. ед., $И_2$ – 16 тыс. ден. ед. Требуется:

а) свести исходные данные в таблицу, удобную для построения модели;

б) составить математическую модель задачи (показатель эффективности – прибыль).

*Решение:*

а) Обозначим через $x_1$ – число изделий $И_1$, через $x_2$ – число изделий $И_2$, через $f$ – суммарную прибыль от реализации произведенных изделий, тогда исходные данные удобно представить в виде таблицы

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">Ресурсы</td><td colspan="2">Затраты на единицу изделия</td><td rowspan="2">Объем ресурса</td><td rowspan="2">Вид ограничения</td></tr>
<tr><td>$И_1$</td><td>$И_2$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Станки, станко-часы:</td><td>токарные</td><td>300</td><td>400</td><td>12400</td><td>$\le$</td></tr>
<tr><td>фрезерные</td><td>200</td><td>100</td><td>6800</td><td>$\le$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Сталь, кг</td><td>10</td><td>70</td><td>640</td><td>$\le$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Цветные металлы, кг</td><td>20</td><td>50</td><td>840</td><td>$\le$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Прибыль, тыс. ден. ед.</td><td>6</td><td>16</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">План выпуска, шт.</td><td>$x_1$</td><td>$x_2$</td><td></td><td></td></tr>
</table>

б) Так как каждое изделие $И_1$ дает прибыль 6 тыс. ден. ед., а таких изделий изготавливается $x_1$ ед., то все изделия $И_1$ дадут прибыль $6x_1$ тыс. ден. ед.; аналогично изделия $И_2$ обеспечат прибыль $16x_2$ тыс. ден. ед. Суммарную прибыль можно записать в виде $f = 6x_1 + 16x_2$.

Токарного оборудования на изделие $И_1$ требуется 300 станко-часов, на изделие $И_2$ – 400 станко-часов. Тогда для изготовления $x_1$ изделий $И_1$ и $x_2$ изделий $И_2$ потребуется токарного оборудования $300x_1 + 400x_2$ (станко-часов). Так как общий фонд рабочего времени токарных станков не может превышать 12 400 станко-часов, должно выполняться неравенство $300x_1 + 400x_2 \le 12400$. Аналогично можно записать условия, налагаемые на фонд рабочего времени фрезерных станков ($200x_1 + 100x_2 \le 6800$), на лимитирующие материалы (по стали $10x_1 + 70x_2 \le 640$, по цветным металлам $20x_1 + 50x_2 \le 840$).

Переменные $x_1$ и $x_2$ не могут быть выражены отрицательными числами, поэтому $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$.

Математическая модель задачи имеет вид

$$f = 6x_1 + 16x_2 \ (\max),$$

$$\begin{cases} 300x_1 + 400x_2 \le 12400 \\ 200x_1 + 100x_2 \le 6800 \\ 10x_1 + 70x_2 \le 640 \\ 20x_1 + 50x_2 \le 840 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

**Пример 3.8.** Выполнить заказ по производству 32 изделий $И_1$ и 4 изделий $И_2$ взялись бригады $Б_1$ и $Б_2$. Производительность бригады $Б_1$ по производству изделий $И_1$ и $И_2$ составляет соответственно 4 и 2 изделия в единицу времени, фонд рабочего времени этой бригады 9,5 ед. Производительность бригады $Б_2$ составляет соответственно 1 и 3 изделия, а ее фонд рабочего времени – 4 единицы. Затраты, связанные с производством единицы изделия, для бригады $Б_1$ равны соответственно 9 и 20 тыс. ден. ед., для бригады $Б_2$ – 15 и 30 тыс. ден. ед.

Требуется:

а) свести исходные данные в таблицу, удобную для построения модели;

б) составить математическую модель задачи по показателю затрат на выполнение заказа.

**Пример 3.9.** Технологическому отделу завода нужно решить задачу о приготовлении не менее 5 т сплава для производства деталей. Сплав приготавливается из чистой стали и отходов цветных металлов. Расход чистой стали не должен превышать 4 т, а цветных металлов – 6 т. Отношение массы цветных металлов к массе стали в сплаве не должно быть больше, чем 7:8. Производственно-технологические условия таковы, что на процессы плавки и литья не может быть отведено более 18 ч, при этом на 1 т стали уходит 4,5 ч, а на 1 т цветных металлов – 2 ч производственного времени. Стоимость 1 т стали – 3 ден. ед., цветных металлов – 5 ден. ед. Требуется построить математическую модель задачи, на основе которой можно найти состав сплава при условии минимизации его стоимости.

**Пример 3.10.** Завод производит два вида продукции: велосипеды и мотоциклы. При этом цех по сборке велосипедов имеет мощность 100 тыс. штук в год, цех по сборке мотоциклов – 30 тыс. штук в год. Механические цеха завода оснащены взаимозаменяемым оборудованием, и одна группа цехов может производить либо детали для 120 тыс. велосипедов, либо детали для 40 тыс. мотоциклов, либо любую комбинацию деталей, ограниченную этими данными. Другая группа механических цехов может выпускать детали либо для 80 тыс. велосипедов, либо для 60 тыс. мотоциклов, либо любую допустимую их комбинацию. В результате реализации каждой тысячи велосипедов завод получает прибыль в 2 тыс. ден. ед., а каждой тысячи мотоциклов – 3 тыс. ден. ед. Найти такое сочетание объемом выпуска продукции, которое дает наибольшую сумму прибыли.

**Пример 3.11.** (*Транспортная задача*)

Пусть имеются две аптеки, в каждую из которых требуется поставить некоторый препарат $X$ соответственно в количествах $b_1$ и $b_2$. Этот препарат производится на трех фармацевтических заводах, возможности поставок которых $a_1$, $a_2$, $a_3$. Суммарная потребность аптек равна сумме возможных поставок, т. е. $b_1 + b_2 = a_1 + a_2 + a_3$.

Стоимости $c_{ij}$ поставок некоторого количества препарата из пунктов производства $A_i$ в пункты потребления $B_j$ различны. Необходимо так организовать поставки, чтобы их суммарная стоимость была минимальной.

*Решение:*

Обозначим через $x_{ij}$ количество препарата $X$, поставляемого из $A_i\left(i=\overline{1,3}\right)$ в $B_j\left(j=1,2\right)$.

В этом случае ограничения на объем поставок для каждой аптеки будут иметь вид:

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = b_1;\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = b_2,$$

где $x_{11}$, $x_{21}$, $x_{31}$ – поставки в первую аптеку; $x_{12}$, $x_{22}$, $x_{32}$ – поставки во вторую аптеку.

Необходимо учесть, что каждый из заводов может поставить только $a_1$, $a_2$, $a_3$ медикаментов:

$$a_1 = x_{11} + x_{12},\ a_2 = x_{21} + x_{22},\ a_3 = x_{31} + x_{32}.$$

Общая стоимость поставок равна сумме стоимостей поставок с каждого завода в каждую аптеку:

$$f = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + c_{31}x_{31} + c_{32}x_{32}\ (\min).$$

Все перевозки должны быть неотрицательными $x_{ij} \ge 0$.

Таким образом, математическая модель исходной задачи имеет вид

$$f = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + c_{31}x_{31} + c_{32}x_{32}\ (\min),$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} = a_1 \\ x_{21} + x_{22} = a_2 \\ x_{31} + x_{32} = a_3 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = b_1 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = b_2 \end{cases};$$

$$x_{ij} \ge 0.$$

## Задачи

Составить экономико-математические модели задач линейного программирования.

1. Сельскохозяйственное предприятие отвело три земельных массива площадью в 5 000, 8 000 и 9 000 га под посевы ржи, пшеницы и кукурузы. Средняя урожайность по массивам указана в таблице

| Культура | Средняя урожайность (ц/га) массива | | |
|---|---|---|---|
| | I | II | III |
| Рожь | 12 | 14 | 15 |
| Пшеница | 14 | 15 | 22 |
| Кукуруза | 30 | 35 | 25 |

За 1 ц ржи предприятие получает 2 ден. ед. прибыли, за 1 ц пшеницы – 2,5 ден. ед., за 1 ц кукурузы – 1,4 ден. ед. прибыли. Сколько гектаров и на каких массивах следует отвести под каждую культуру, чтобы получить максимальную прибыль, если по плану необходимо сдать не менее 19 000 т ржи, 15 800 т пшеницы и 30 000 т кукурузы?

2. В опытном хозяйстве установили, что откорм животных выгоден тогда, когда животное будет получать в дневном рационе не менее 6 ед. питательного вещества *A*, не менее 12 ед. вещества *B* и не менее 4 ед. вещества *C*. Для кормления животных используются два вида корма. В таблице показано, сколько единиц каждого питательного вещества содержит 1 кг корма каждого вида.

| Питательное вещество | Корм | |
|---|---|---|
| | *I* | *II* |
| *A* | 2 | 1 |
| *B* | 2 | 4 |
| *C* | 0 | 4 |

Цена 1 кг корма I вида равна 50 ден. ед., корма II вида – 60 ден. ед. Составить математическую модель задачи, устанавливающую, сколько корма каждого вида необходимо расходовать ежедневно, чтобы затраты на него были минимальными.

3. Три типа самолетов следует распределить между двумя авиалиниями. В таблице заданы количество самолетов каждого типа, месячный объем перевозок каждым самолетом на каждой авиалинии и соответствующие эксплуатационные расходы.

| Тип самолета | Число самолетов | Месячный объем перевозок одним самолетом по авиалиниям | | Эксплуатационные расходы на один самолет по авиалиниям | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | I | II | I | II |
| 1 | 50 | 15 | 10 | 15 | 20 |
| 2 | 20 | 30 | 25 | 70 | 28 |
| 3 | 30 | 25 | 50 | 40 | 70 |

Требуется распределить самолеты по авиалиниям так, чтобы при минимальных суммарных эксплуатационных расходах перевезти по каждой из них соответственно не менее 300 и 200 ед. груза.

4. При производстве продукции $П_1$ и $П_2$ используют четыре группы оборудования *A*, *B*, *C*, *D*. На выпуск единицы продукции $П_1$ расходуется в единицу времени 1; 0,5; 2 и 0 единиц оборудования *A*, *B*, *C* и *D* соответственно, а на выпуск единицы продукции $П_2$ – 1; 1; 0 и 2 единицы оборудования. Фонд рабочего времени группы *A* – 18, *B* – 12, *C* – 24 и *D* – 18 единиц времени. Предприятие реализует единицу продукции $П_1$ по цене 40 ден. ед., продукции $П_2$ – 60 ден. ед.

Требуется:

а) записать условие задачи в виде таблицы;

б) построить математическую модель задачи, при которой выручка предприятия будет максимальной.

5. Предприятию задан план производства по времени и номенклатуре: требуется не более чем за 6 единиц времени выпустить 30 ед. продукции $П_1$ и 96 ед. продукции $П_2$. Каждый из видов продукции может производиться машинами *А* и *Б*, мощности которых и затраты, вызванные изготовлением каждого из видов продукции на той или иной машине, приведены в таблице

| Машина | Мощность машины для продукции вида | | Затраты на производство продукции вида | |
|---|---|---|---|---|
| | $П_1$ | $П_2$ | $П_1$ | $П_2$ |
| *А* | 6 | 24 | 4 | 47 |
| *Б* | 13 | 13 | 13 | 26 |

Составить оптимальный план работы машин, а именно: найти, сколько времени каждая из машин *А* и *Б* должна быть занята изготовлением каждого из видов продукции $П_1$ и $П_2$, чтобы стоимость всей продукции предприятия оказалась минимальной, и в то же время заданный план был выполнен как по времени, так и по номенклатуре.

6. Бригада приняла заказ на изготовление 50 единиц продукции $П_1$, 30 единиц продукции $П_2$ и 45 единиц продукции $П_3$. Продукция производится на станках *A* и *B*. Для изготовления на станке *A* единицы продукции $П_1$ требуется 4 ед. времени, единицы продукции $П_2$ – 40 ед. времени, единицы продукции $П_3$ – 10 ед. времени, на станке *B* – соответственно 6, 8 и 20 ед. времени. Составить математическую модель задачи, т. е. указать, сколько продукции и какого вида следует изготовить на станках *A* и *B*, чтобы заказ был выполнен в минимальное время.

# ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 4

## Различные формы записи задач линейного программирования. Переход от одной формы записи задачи к другой

*Общей задачей линейного программирования, заданной в произвольной форме записи, называют задачу, в которой требуется максимизировать (минимизировать) линейную функцию*

$$f\left(x_1,\ldots,x_n\right)=\sum_{j=1}^{n}c_j\cdot x_j\,, \tag{4.1}$$

*при условиях*

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\cdot x_j\le a_{i0}\ \left(i=\overline{1,s}\right), \tag{4.2}$$

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\cdot x_j=a_{i0}\ \left(i=\overline{s+1,m}\right). \tag{4.3}$$

Функцию (4.1) называют *целевой*, а условия (4.2), (4.3) – *ограничениями задачи.*

*Задачей линейного программирования*, заданной *в симметричной форме записи*, называют задачу, в которой требуется найти максимум функции

$$f(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{j=1}^{n}c_j\cdot x_j\,,$$

при условиях: $\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}\cdot x_j\le a_{i0}\ \left(i=\overline{1,s}\right);\ x_j\ge 0\ \left(j=\overline{1,n}\right).$

*Задачей линейного программирования*, заданной *в канонической форме записи* называют задачу, в которой требуется найти максимум функции

$$f\left(x_1,\ldots,x_n\right)=\sum_{j=1}^{n}c_j\cdot x_j\,,$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\cdot x_j=a_{i0}\ \left(i=\overline{s+1,m}\right),$$

где $s=0;\ x_j\ge 0\ \left(j=\overline{1,n}\right).$

Поскольку $\min f=-\max\left(-f\right)$ задачу минимизации функции $f$ формально можно свести к задаче максимизации противоположной функции $\left(-f\right)$. Найдя максимальное значение функции $\left(-f\right)$, его знак нужно заменить на противоположный. Тем самым определится минимальное значение исходной функции $f$.

*Переменную $x_t$, не подчиненную условию неотрицательности, заменяют парой неотрицательных переменных, приняв $x_t = x_t' - x_t''$.*

**Пример 4.1.** Привести задачу линейного программирования к канонической форме записи

$$f = 2x_1 + x_2 \ (\max),$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 1 \\ -2x_1 + 3x_2 \le 16; \\ 4x_1 + x_2 \le 12 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

*Решение:*

Введем неотрицательные переменные $x_3$, $x_4$, $x_5$, получаем

$$f = 2x_1 + x_2 \ (\max),$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ -2x_1 + 3x_2 + x_4 = 16; \\ 4x_1 + x_2 + x_5 = 12 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0,\ x_5 \ge 0.$$

**Пример 4.2.** Привести к канонической форме записи задачу

$$f = x_1 + x_2 \ (\max),$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \le 1 \\ 2x_1 + x_2 = 2 \end{cases};$$

$$x_1 \ge 0.$$

*Решение:*

Чтобы первое ограничение записать в форме равенства, добавим в левую часть неотрицательную переменную $x_3$. Переменная $x_2$ не подчинена условию неотрицательности, поэтому заменим ее разностью двух неотрицательных переменных $x_2'$ и $x_2''$: $x_2 = x_2' - x_2''$. В результате данная задача примет каноническую форму:

$$f = x_1 + x_2' - x_2'' \ (\max),$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2' + x_2'' + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2' - x_2'' = 2 \end{cases};$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2' \ge 0,\ x_2'' \ge 0,\ x_3 \ge 0.$$

**Пример 4.3.** Привести задачу линейного программирования к канонической форме записи

$$f = 8x_1 + x_2 + 4x_3 \ (\min),$$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 \ge 1 \\ 3x_1 - x_3 \le 3 \\ x_1 + 2x_2 = 4 \end{cases};$$

$$x_1 \ge 0, \ x_3 \ge 0.$$

**Пример 4.4.** Привести к канонической форме записи задачу:

$$f = 3x_1 - 2x_2 - x_3 \ (\min),$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 \ge 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 \le 6 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4 \end{cases};$$

$$x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0.$$

**Пример 4.5.** Привести к симметричной форме записи задачу, заданную в канонической форме:

$$f = x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 - 2x_5 \ (\max),$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = 4 \\ 2x_2 + 4x_3 - x_4 = 8 \\ x_2 + x_3 + x_5 = 6 \end{cases};$$

$$x_j \ge 0 \ \left(j = \overline{1,5}\right).$$

*Решение:*

Так как переменные $x_1$, $x_4$, $x_5$ неотрицательные, можем перейти от исходной системы уравнений к эквивалентной системе неравенств (исключив эти переменные):

$$\begin{cases} -x_2 - 2x_3 \le 4 \\ 2x_2 + 4x_3 \ge 8 \\ x_2 + x_3 \le 6 \end{cases}.$$

Из целевой функции исключаем переменные $x_1 = 4 + x_2 + 2x_3$, $x_4 = -8 + 2x_2 + 4x_3$, $x_5 = 6 - x_2 - x_3$, получаем $f = 4 + x_2 + 2x_3 + 2x_2 - x_3 -$

$-(-8+2x_2+4x_3)-2(6-x_2-x_3)=3x_2-x_3$. В результате приходим к задаче, заданной в симметричной форме записи:

$$f=3x_2-x_3\ (\max),$$

$$\begin{cases} -x_2-2x_3\le 4 \\ -2x_2-4x_3\le -8; \\ x_2+x_3\le 6 \end{cases}$$

$$x_2\ge 0,\ x_3\ge 0.$$

**Пример 4.6.** Привести к симметричной форме записи задачу, заданную в каноническом виде:

$$f=-2x_1-x_2-x_3+2x_4+x_5\ (\max),$$

$$\begin{cases} -2x_3-x_4+x_5=4 \\ -x_2+4x_3+2x_4=8; \\ x_1+x_3+x_4=6 \end{cases}$$

$$x_j\ge 0\quad \left(j=\overline{1,5}\right).$$

**Пример 4.7.** Свести к симметричной форме записи следующую задачу, заданную в общем виде:

$$f=-2x_1+x_2-5x_3+8x_4-x_5+3x_6-7\ (\min),$$

$$\begin{cases} x_2+2x_3-4x_4-x_5-3x_6=12 \\ x_1+2x_2+x_3+2x_4+2x_5-3x_6=16; \\ x_1+2x_2+2x_3-x_4+3x_5-5x_6=19 \end{cases}$$

$$x_j\ge 0\ \left(j=\overline{1,6}\right).$$

*Решение*:

От задачи минимизации функции *f* перейдем к задаче максимизации функции (–*f*):

$$-f=2x_1-x_2+5x_3-8x_4+x_5-3x_6+7\ (\max).$$

Систему ограничительных уравнений приведем к разрешенной форме, выделив некоторый базис переменных. Затем, опустив базисные переменные, перейдем к эквивалентной системе неравенств. Для завершения преобразований выразим целевую функцию через переменные, вошедшие в полученную систему неравенств.

Описанные преобразования системы ограничений в целевой функции удобнее проводить одновременно, приписав к жордановой таблице снизу строку для целевой функции (*f*-строку). В процессе жордановых исключений эту строку не следует выбирать разрешающей, но преобразовывать ее элементы необходимо по обычным правилам. В результате целевая функция, как и базисные переменные, окажется выраженной через свободные переменные.

В условиях данной задачи разрешающие элементы можно выбирать произвольно.

| | 1 | $-x_1$ | $-x_2$ | $-x_3$ | $-x_4$ | $-x_5$ | $-x_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 12 | 0 | 1 | 2 | −4 | −1 | −3 |
| 0 | 16 | $\boxed{1}$ | 2 | 1 | 2 | 2 | −3 |
| 0 | 19 | 1 | 2 | 2 | −1 | 3 | −5 |
| $-f$ | 7 | −2 | 1 | −5 | 8 | −1 | 3 |

;

| | 1 | $-x_2$ | $-x_3$ | $-x_4$ | $-x_5$ | $-x_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 12 | 1 | 2 | −4 | −1 | −3 |
| $x_1$ | 16 | 2 | 1 | 2 | 2 | −3 |
| 0 | 3 | 0 | $\boxed{1}$ | −3 | 1 | −2 |
| $-f$ | 39 | 5 | −3 | 12 | 3 | −3 |

;

| | 1 | $-x_2$ | $-x_4$ | $-x_5$ | $-x_6$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 6 | $\boxed{1}$ | 2 | −3 | 1 |
| $x_1$ | 13 | 2 | 5 | 1 | −1 |
| $x_3$ | 3 | 0 | −3 | 1 | −2 |
| $-f$ | 48 | 5 | 3 | 6 | −9 |

;

| | 1 | $-x_4$ | $-x_5$ | $-x_6$ |
|---|---|---|---|---|
| $x_2$ | 6 | 2 | −3 | 1 |
| $x_1$ | 1 | 1 | 7 | −3 |
| $x_3$ | 3 | −3 | 1 | −2 |
| $-f$ | 18 | −7 | 21 | −14 |

.

Из последней таблицы получаем

$$-f = 7x_4 - 21x_5 + 14x_6 + 18 \ \left(\max\right),$$

$$\begin{cases} x_2 = -2x_4 + 3x_5 - x_6 + 6 \\ x_1 = -x_4 - 7x_5 + 3x_6 + 1 \\ x_3 = 3x_4 - x_5 + 2x_6 + 3 \end{cases}.$$

Учитывая неотрицательность базисных переменных $x_1$, $x_2$, $x_3$, опускаем их и приходим к эквивалентной системе неравенств, а вместе с тем и к симметричной форме записи задачи:

$$-f = 7x_4 - 21x_5 + 14x_6 + 18 \ (\max),$$

$$\begin{cases} 2x_4 - 3x_5 + x_6 \le 6 \\ x_4 + 7x_5 - 3x_6 \le 1 \\ -3x_4 + x_5 - 2x_6 \le 3 \end{cases};$$

$$x_4 \ge 0;\ x_5 \ge 0;\ x_6 \ge 0.$$

**Пример 4.8.** Привести задачу линейного программирования, заданную в каноническом виде, к симметричной форме записи:

$$f = 2x_1 + 3x_2 - x_4 + 2x_5 + 6 \ (\max),$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 9x_2 + 5x_3 - 2x_4 - 2x_5 = 7 \\ 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 1 \\ 9x_1 - 8x_2 - 7x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 3 \end{cases};$$

$$x_j \ge 0 \quad \left(j = \overline{1,5}\right).$$

## Задачи

– привести к канонической форме записи следующие задачи линейного программирования:

1. $f = 6x_1 + 5x_2 \ (\min)$

$$\begin{cases} 5x_1 + 11x_2 \ge 55 \\ x_1 + x_2 \ge 8 \\ 11x_1 + 3x_2 \ge 32 \\ 16x_1 + 13x_2 \le 210 \\ 17x_1 + 12x_2 \le 205 \end{cases};$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

2. $f = -2x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 \ (\min)$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 4 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 6 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 \ge 2 \\ x_2 + 3x_3 + 5x_4 \le 6 \\ -2x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 \le 4 \end{cases};$$

$$x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0.$$

3. $f = -x_1 + 5x_2 + 2x_4 - 3x_5 \ (\min)$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 + 2x_5 \le 2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 \le 3 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 \le 6 \\ -5x_1 + x_2 + x_5 \ge 8 \end{cases};$$

$$x_j \ge 0 \quad \left(j = \overline{1,5}\right).$$

4. $f = -x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 \ (\max)$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 \le 6 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \ge 8 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 \le 10 \\ -3x_1 + 5x_2 + 3x_3 - x_4 = 15 \end{cases};$$

$$x_j \ge 0 \quad \left(j = \overline{1,4}\right).$$

5. $f = x_1 - x_2 - 2x_3 \ (\min)$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 \geq 4 \\ -3x_1 + x_2 + x_3 \leq 9 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 10 \end{cases};$$

$x_j \geq 0 \quad \left(j = \overline{1,3}\right).$

6. $f = 2x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 - 2x_5 \ (\max)$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 = 5 \\ x_2 + 4x_3 - 2x_4 \leq 4 \end{cases};$$

$x_1 \geq 0$, $x_3 \geq 0$, $x_4 \geq 0$.

**7.** $f = 2x_1 - x_3 \ (\max)$

$$\begin{cases} -4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 8 \\ -2x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 2 \\ -x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 3 \end{cases};$$

$x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

8. $f = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 \ (\max)$

$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 - 4x_3 - 2x_4 \geq 12 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 = 4 \end{cases};$$

$x_1 \geq 0$, $x_3 \geq 0$, $x_4 \geq 0$, $x_5 \geq 0$.

– представить ЗЛП в симметричной форме:

1. $f = 7x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - 9 \quad (\max)$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 9 \\ 3x_1 - x_2 + x_5 = 12 \end{cases};$$

$x_j \geq 0 \quad \left(j = \overline{1,5}\right).$

2. $f = 2x_1 + x_2 + 8x_3 \quad (\max)$

$$\begin{cases} -4x_1 + x_2 + 2x_3 = 12 \\ 6x_1 + 5x_3 - x_4 = 30 \end{cases};$$

$x_j \geq 0 \quad \left(j = \overline{1,4}\right).$

3. $f = x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 \quad (\max)$

$$\begin{cases} 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 4 \\ -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6 \end{cases};$$

$x_j \geq 0 \quad \left(j = \overline{1,4}\right).$

4. $f = -x_1 + x_2 + x_4 + 3x_5 \quad (\min)$

$$\begin{cases} -x_1 - x_3 - x_4 + x_5 = 12 \\ -x_1 - x_3 - x_4 + 4x_5 = 8 \\ -x_1 + x_2 - x_4 + 2x_5 = 18 \end{cases};$$

$x_j \geq 0 \quad \left(j = \overline{1,5}\right).$

5. $f = 2x_1 + 6x_2 - 2x_4 + 2x_5 \quad (\min)$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 16 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 30 \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 + 2x_5 = 8 \end{cases};$$

$x_j \geq 0 \quad \left(j = \overline{1,5}\right).$

# ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 5

## Графический способ решения задач линейного программирования

Графический способ решения задач целесообразно использовать для решения задач с двумя переменными, записанных в симметричной форме, а также для задач со многими переменными при условии, что в их канонической записи содержится не более двух свободных переменных.

*Задачи с двумя переменными.*

В этом случае задачу можно записать в следующем виде:

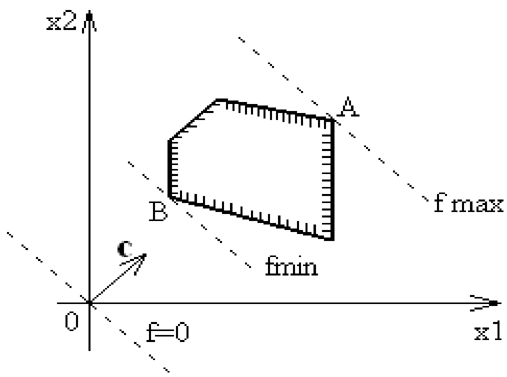
$$f = c_1 x_1 + c_2 x_2 \quad (\max),$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le a_{10} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le a_{m0} \end{cases};$$

$$x_1 \ge 0, \; x_2 \ge 0.$$

Областью допустимых решений этой задачи может быть либо выпуклый многоугольник, либо выпуклая многоугольная неограниченная область, либо пустая область, либо единственная точка.

Для практического решения задачи необходимо построить область допустимых решений, вектор $\overline{grad\ f} = \bar{c} = (c_1; c_2)$ и перпендикулярно к нему одну из прямых семейства $f$ = *const*, например $f$ = 0. Искомая точка *A* найдется параллельным перемещением вспомогательной прямой $f$ = 0 в направлении возрастания вектора $\bar{c}$. В противоположной вершине *B* допустимой области функция $f$ достигает минимума. Координаты точки *A* (а также точки *B*) можно определить либо по чертежу, либо решив совместно уравнения прямых, пересекающихся в этой точке.




**Пример 5.1.** Решить задачу линейного программирования графическим способом.

$$f = 2x_1 + 3x_2 \quad (\max)/(\min),$$

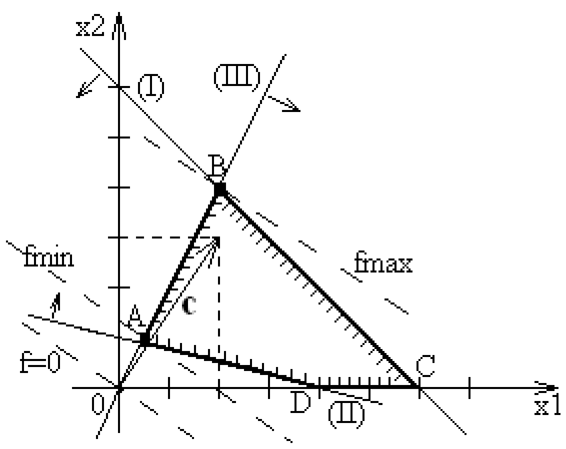
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 6 \\ x_1 + 4x_2 \ge 4; \\ 2x_1 - x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \; x_2 \ge 0.$$

*Решение*:

Для построения области допустимых решений строим в системе координат $x_1 0 x_2$ соответствующие данным ограничениям-неравенствам граничные прямые $x_1 + x_2 = 6$ (I), $x_1 + 4x_2 = 4$ (II), $2x_1 - x_2 = 0$ (III).

Находим полуплоскости, в которых выполняются данные неравенства. Для этого достаточно выбрать произвольную точку, через которую не проходит соответствующая граничная прямая, и проверить, удовлетворяет ли эта пробная точка ограничению-неравенству. Если удовлетворяет, то данное неравенство выполняется в полуплоскости, содержащей пробную точку. В противном случае выбирается полуплоскость, не содержащая пробной точки. В качестве пробной точки удобно выбирать начало координат *O* (0; 0). В нашем примере область допустимых решений – множество точек четырехугольника *ABCD*.




Строим вектор $\overline{grad\ f} = \overline{c} = (c_1;\ c_2) = (2;\ 3)$. (Иногда для большей наглядности удобно строить вектор $\lambda\overline{c}$ ($\lambda > 0$)). Перпендикулярно к вектору $\overline{c}$ проводим линию уровня $f = 0$. Параллельным перемещение прямой $f = 0$ находим крайнюю точку *B* области допустимых решений, в которой целевая функция достигает максимума, и точку *A*, в которой достигается минимум. Координаты точки *B* определяются системой $\begin{cases} x_1 + x_2 = 6 \\ 2x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$, откуда *B*(2; 4), $f_{\max} = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 4 = 16$. Точку минимума *A* находим, решая систему уравнений граничных прямых $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + 4x_2 = 4 \end{cases}$. Получаем, что А $\left(\frac{4}{9};\ \frac{8}{9}\right)$, $f_{\min} = 2 \cdot \frac{4}{9} + 3 \cdot \frac{8}{9} = \frac{32}{9}$.

*Ответ*: *B* (2; 4), $f_{\max} = 16$; А $\left(\frac{4}{9};\ \frac{8}{9}\right)$, $f_{\min} = \frac{32}{9}$.

**Пример 5.2.** При продаже двух видов товаров (*A* и *B*) торговое предприятие использует четыре вида ресурсов. Нормы затрат ресурсов на реализацию 1 единицы товара, объем ресурсов приведены в таблице. Доход от реализации 1 единицы товара *A* составляет 2 ден. ед., товара *B* – 3 ден. ед.

Определить оптимальный план реализации товаров, обеспечивающий торговому предприятию максимальную прибыль.

| Ресурсы | Норма затрат ресурсов на реализацию 1 ед. товара | | Количество ресурсов на предприятии |
|---|---|---|---|
| | *A* | *B* | |
| I | 2 | 2 | 12 |
| II | 1 | 2 | 8 |
| III | 4 | 0 | 16 |
| IV | 0 | 4 | 12 |

*Ответ*: $\overline{x}^*=(4;\ 2)$, $f_{\max}=14$ ден. ед.

*Задачи со многими переменными*

Задачу со многими переменными можно решить графически, если в ее канонической форме записи присутствует не более двух свободных переменных, т. е. $n-r\le 2$, где $n$ – число переменных, $r$ – ранг матрицы системы ограничительных уравнений задачи. Чтобы решить такую задачу, систему ограничительных уравнений необходимо преобразовать к разрешенному виду, т.е. выделить некоторый базис переменных. Затем базисные переменные следует опустить и перейти к эквивалентной системе неравенств. Целевая функция также должна быть выражена только через свободные переменные. Полученную двухмерную задачу решают обычным графическим методом. Найдя две координаты оптимального решения, подставляют их в ограничительные уравнения исходной задачи и определяют остальные координаты оптимального решения.

Решая графически полученную двухмерную задачу, следует помнить, что на каждой граничной прямой соответствующее неравенство обращается в равенство, поэтому опущенная при образовании этого неравенства базисная переменная равна нулю. В связи с этим в каждой из вершин области допустимых решений, по крайней мере, две переменные исходной задачи принимают нулевые значения.

**Пример 5.3.** Найти $f=16x_1+x_2-x_3-5x_4-5x_5 \quad (\max)/(\min)$,

при ограничениях $\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3=20 \\ -2x_1+3x_2+x_4=12; \\ 2x_1+4x_2-x_5=16 \end{cases}$ $x_j\ge 0 \quad \left(j=\overline{1,5}\right)$.

*Решение*:

В данной задаче $n=5$, $r=3$. Так как $n-r=5-3=2$, то задачу можно решить графически. Решим систему ограничительных уравнений относительно любых трех переменных. В данном случае проще всего решить систему относительно $x_3$, $x_4$ и $x_5$

$$\begin{cases} x_3=20-2x_1-x_2\ge 0 \\ x_4=12+2x_1-3x_2\ge 0 \\ x_5=-16+2x_1+4x_2\ge 0 \end{cases};$$

$$x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0.$$

Подставляем найденные значения для $x_3$, $x_4$, $x_5$ в целевую функцию, получаем

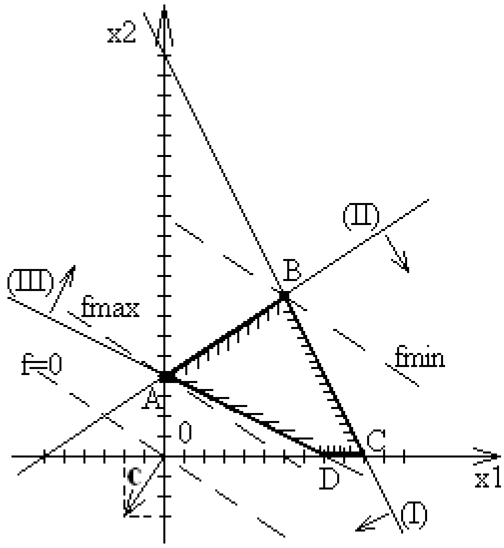
$$f = 16x_1 + x_2 - (20 - 2x_1 - x_2) - 5(12 + 2x_1 - 3x_2) - 5(-16 + 2x_1 + 4x_2) = -2x_1 - 3x_2.$$

Задача линейного программирования с двумя переменными принимает вид

$$f = -2x_1 - 3x_2 \left(\max\right)/\left(\min\right),$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 20 \\ -2x_1 + 3x_2 \le 12; \\ 2x_1 + 4x_2 \ge 16 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$




На рисунке представлен многоугольник решений *ABCD*, линия уровня $f = 0$ и вектор $\overline{grad\ f} = \bar{c} = \left(-2;\ -3\right)$.

Максимального значения целевая функция $f$ достигает в точке $A$ (0; 4), $f_{\max} = -12$. Минимального значения целевая функция $f$ достигает в точке $B$ (6; 8), $f_{\min} = -36$. Подставив координаты точек $A$ и $B$ в выражения для $x_3$, $x_4$, $x_5$, найдем остальные координаты экстремальных точек:

$$\begin{cases} x_3 = 20 - 2\cdot 0 - 4 = 16 \\ x_4 = 12 + 2\cdot 0 - 3\cdot 4 = 0 \\ x_5 = -16 + 2\cdot 0 + 4\cdot 4 = 0 \end{cases}, \ A' = \left(0;\ 4;\ 16;\ 0;\ 0\right);$$

$$\begin{cases} x_3 = 20 - 2\cdot 6 - 8 = 0 \\ x_4 = 12 + 2\cdot 6 - 3\cdot 8 = 0 \\ x_5 = -16 + 2\cdot 6 + 4\cdot 8 = 28 \end{cases}, \ B' = \left(6;\ 8;\ 0;\ 0;\ 28\right).$$

*Ответ*: $A' = \left(0;\ 4;\ 16;\ 0;\ 0\right), f_{\max} = -12; B' = \left(6;\ 8;\ 0;\ 0;\ 28\right), f_{\min} = -36$.

**Пример 5.4.** Решить графически задачу линейного программирования

$$f = 6x_1 + 10x_2\ \left(\min\right),$$

$$\begin{cases} 8x_1 + 4x_2 - x_3 - x_4 = 60 \\ 8x_1 + 16x_2 - x_3 - x_5 = 108; \\ 8x_1 + 18x_2 - x_4 - x_5 = 120 \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \quad \left(j = \overline{1,5}\right).$$

*Ответ*: $\bar{x}^* = \left(6;\ 4;\ 4;\ 0;\ 0\right)$, $f_{\min} = 76$

**Пример 5.5.** Предприятию задан план производства по времени и номенклатуре: требуется не более чем за 6 ед. времени выпустить 30 ед. продукции $П_1$ и 96 ед. продукции $П_2$. Каждый из видов продукции может производиться машинами *А* и *Б*, мощности которых и затраты, вызванные изготовлением каждого из видов продукции на той или иной машине, приведены в таблице

| Машина | Мощность машины для продукции вида | | Затраты на производство продукции вида | |
|---|---|---|---|---|
| | $П_1$ | $П_2$ | $П_1$ | $П_2$ |
| *А* | 6 | 24 | 4 | 47 |
| *Б* | 13 | 13 | 13 | 26 |

Составить оптимальный план работы машин, а именно: найти, сколько времени каждая из машин *А* и *Б* должна быть занята изготовлением каждого из видов продукции $П_1$ и $П_2$, чтобы стоимость всей продукции предприятия оказалась минимальной, и в то же время заданный план был выполнен как по времени, так и по номенклатуре.

*Ответ*: $\overline{x}^*=\left(5;1;\,0;\,{}^{72}\!/\!_{13};\,0;\,{}^{6}\!/\!_{13}\right)$, $f_{\min}=211$ ден. ед.

## Задачи

1. Найти максимум и минимум функции $f=2x_1+3x_2$ при условии, что система ограничений есть четырехугольник с вершинами $A(2;\,3)$, $B(3;\,6)$, $C(9;\,8)$, $D(6;\,2)$.

– решить графически

1. $f=2x_1+x_2 \quad (\max)/(\min)$,
$$\begin{cases}2x_1+4x_2\le 16\\ -4x_1+2x_2\le 8\\ x_1+3x_2\ge 9\end{cases}$$
$x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0$.

2. $f=6x_1-2x_2\ (\max)$,
$$\begin{cases}x_1-x_2\le 1\\ 3x_1-x_2\le 6\end{cases};$$
$x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0$.

3. $f=2{,}5x_1+3x_2\ (\max)$,
$$\begin{cases}x_1-2x_2\ge 2\\ -2x_1+3x_2\ge 2\end{cases};$$
$x_1$, $x_2$ – любого знака.

4. $f=2x_1-6x_2\ (\min)$,
$$\begin{cases}-x_1-x_2\le -2\\ -x_1+x_2\le 1\end{cases};$$
$x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0$.

5. $f=x_1+x_2\ (\max)$,
$$\begin{cases}x_1-x_2\ge 1\\ x_1-x_2\le -1\end{cases};$$
$x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0$.

6. $f=2x_1+4x_2\ (\max)$,
$$\begin{cases}3x_1+6x_2\le 12\\ 2x_1-x_2\ge -2\\ -x_1+3x_2\ge 0\end{cases};$$
$x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0$.

# ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 6

## Симплекс-метод

Пусть задача записана в канонической форме записи:

$$f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \ (\max);$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = a_{i0} \ \left(i = \overline{1,m}\right);$$

$$x_j \geq 0 \ \left(j = \overline{1,n}\right).$$

Решение этой задачи складывается из двух этапов:

– на первом этапе находят какой-либо начальный опорный план $\overline{x}_0$;

– на втором этапе по специальным правилам переходят от начального плана $\overline{x}_0$ к другому, более оптимальному плану $\overline{x}_1$, затем к следующему $\overline{x}_2$ и т. д., пока задача не будет решена.

**Нахождение начального опорного плана**

1) *Записываем задачу в форме жордановой таблицы так, чтобы все элементы столбца свободных членов были неотрицательными (те уравнения системы ограничений, в которых свободные члены отрицательны, предварительно умножаются на (−1)). Полученная таблица называется симплексной.*

2) *Симплексную таблицу преобразовываем шагами жордановых исключений, замещая нули в левом столбце соответствующими* $x_i$. *При этом на каждом шаге разрешающим может быть выбран любой столбец, содержащий хотя бы один положительный элемент. Строка целевой функции на выбор разрешающих столбцов на данном этапе никакого влияния не оказывает. Разрешающая строка определяется по наименьшему из отношений свободных членов к соответствующим положительным элементам разрешающего столбца.*

Если в процессе исключений встретится *0*-строка, все элементы которой состоят из нулей, а свободный член отличен от нуля, то система ограничительных уравнений решений не имеет.

Если же встретится *0*-строка, в которой, кроме свободного члена, других положительных элементов нет, то система ограничительных уравнений не имеет неотрицательных решений.

**Нахождение оптимального опорного плана**

1) *Если в f-строке нет отрицательных элементов* (не считая свободного члена), *то план оптимален.*

– если в *f*-строке нет также и нулевых элементов, то оптимальный план единственный;

– если же среди элементов есть хотя бы один нулевой, то оптимальных планов бесконечное множество.

2) *Если в f-строке есть хотя бы один отрицательный элемент, а в соответствующем ему столбце нет положительных элементов, то целевая функция не ограничена в допустимой области. Задача неразрешима.*

3) *Если в f-строке есть хотя бы один отрицательный элемент, а в каждом столбце с таким элементом есть хотя бы один положительный элемент, то можно перейти к новому опорному плану, более близкому к оптимальному.*

Для этого столбец с отрицательным элементом в *f*-строке выбирают за разрешающий. (Если в *f*-строке отрицательных элементов несколько, за разрешающий выбирают столбец с наибольшим по абсолютной величине отрицательным элементом в *f*-строке). Далее определяют по минимальному симплексному отношению разрешающую строку и делают шаг жордановых исключений. Полученный опорный план вновь исследуют на оптимальность.

*Описанный процесс повторяется до тех пор, пока не будет найден оптимальный опорный план, либо установлена неразрешимость задачи.*

Задачу минимизации можно формально заменить задачей максимизации функции $(-f)$, поскольку $\min f = -\max(-f)$.

**Пример 6.1.** Решить симплекс-методом

$$f = 2x_1 + 3x_2 \left(\max\right),$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = 9 \\ x_1 + x_5 = 4 \\ x_1 + 2x_2 + x_6 = 8 \end{cases};$$

$$x_j \geq 0, \ \left(j = \overline{1,6}\right).$$

*Решение*:

Задача записана в канонической форме записи. Выделим базисные переменные:

$$f = -2\left(-x_1\right) + \left(-3\right)\left(-x_2\right) \quad \left(\max\right),$$

$$\begin{cases} x_3 = 5 + 1\left(-x_1\right) + 1\left(-x_2\right) \\ x_4 = 9 + 1\left(-x_1\right) + 3\left(-x_2\right) \\ x_5 = 4 + 1\left(-x_1\right) \\ x_6 = 8 + 1\left(-x_1\right) + 2\left(-x_2\right) \end{cases}.$$

Записываем задачу в форме модифицированной жордановой таблицы

| | 1 | $-x_1$ | $-x_2$ |
|---|---|---|---|
| $x_3$ | 5 | 1 | 1 |
| $x_4$ | 9 | 1 | $\boxed{3}$ |
| $x_5$ | 4 | 1 | 0 |
| $x_6$ | 8 | 1 | 2 |
| $f$ | 0 | $-2$ | $-3$ |

.

Так как в левом столбце все нули уже замещены соответствующими $x_i$, то можно сразу перейти к отысканию оптимального опорного плана. Для этого в $f$-строке находим наибольший по модулю отрицательный элемент $(-3)$. Соответствующий столбец является разрешающим. Находим разрешающую строку: $\min\left\{\frac{5}{1};\frac{9}{3};\frac{8}{2}\right\}=\frac{9}{3}=3$ – это минимальное соотношение соответствует второй строке, и на пересечении разрешающих строки и столбца находим число (3) – разрешающий элемент. Делая шаг жордановых исключений (см. практическое занятие 1), получаем следующую симплекс-таблицу:

| | 1 | $-x_1$ | $-x_4$ |
|---|---|---|---|
| $x_3$ | 2 | $\boxed{2/3}$ | $-1/3$ |
| $x_2$ | 3 | $1/3$ | $1/3$ |
| $x_5$ | 4 | 1 | 0 |
| $x_6$ | 2 | $1/3$ | $-2/3$ |
| $f$ | 9 | $-1$ | 1 |

.

В $f$-строке есть отрицательный элемент $(-1)$, план не оптимален. В столбце, содержащем этот элемент, находим разрешающий элемент $(2/3)$ и, сделав шаг жордановых исключений, получаем следующую симплекс-таблицу:

| | 1 | $-x_3$ | $-x_4$ |
|---|---|---|---|
| $x_1$ | 3 | $3/2$ | $-1/2$ |
| $x_2$ | 2 | $-1/2$ | $1/2$ |
| $x_5$ | 1 | $-3/2$ | $1/2$ |
| $x_6$ | 1 | $-1/2$ | $-1/2$ |
| $f$ | 12 | $3/2$ | $1/2$ |

.

Так как в $f$-строке нет отрицательных элементов, то найден оптимальный опорный план, и, кроме этого, в этой строке нет нулей. Значит, найденный оптимальный опорный план единственный.

Оптимальный план $\overline{x}^{*}=(3;2;0;0;1;1)$, $f_{\max}=2\cdot 3+3\cdot 2=12$.

*Ответ*: $\overline{x}^{*}=(3;2;0;0;1;1)$, $f_{\max}=2\cdot 3+3\cdot 2=12$.

**Пример 6.2.** Найти оптимальный опорный план задачи

$$f=3x_1-x_2+5 \quad (\max),$$

$$\begin{cases} x_1+x_2-x_3-x_4=-4 \\ x_1-2x_2-x_3-x_5=-7; \\ 2x_1-x_2+x_4+x_5=7 \end{cases}$$

$$x_j\geq 0, \ \left(j=\overline{1,5}\right).$$

*Решение*:

Задача записана в канонической форме записи, но два свободных члена отрицательны, поэтому умножим первое и второе уравнения на $(-1)$. Получаем

$$\begin{cases} -x_1-x_2+x_3+x_4=4 \\ -x_1+2x_2+x_3+x_5=7. \\ 2x_1-x_2+x_4+x_5=7 \end{cases}$$

Сразу выделить базисные переменные мы не можем, поэтому находим начальный опорный план. Для этого строим первую симплекс-таблицу

| | 1 | $-x_1$ | $-x_2$ | $-x_3$ | $-x_4$ | $-x_5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 4 | $-1$ | $-1$ | 1 | $\boxed{1}$ | 0 |
| 0 | 7 | $-1$ | 2 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 7 | 2 | $-1$ | 0 | 1 | 1 |
| $f$ | 5 | $-3$ | 1 | 0 | 0 | 0 |

.

Для первого шага жорданова исключения примем за разрешающий, например, четвертый $(-x_4)$ столбец (в нем есть положительные элементы). Разрешающую строку определим из соотношений: $\min\left\{\frac{4}{1};\frac{7}{1}\right\}=\frac{4}{1}$, т. е. первая строка будет разрешающей. Делаем шаг жордановых исключений (с разрешающим элементом (1)) и получаем следующую симплекс-таблицу:

| | 1 | $-x_1$ | $-x_2$ | $-x_3$ | $-x_5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_4$ | 4 | $-1$ | $-1$ | 1 | 0 |
| 0 | 7 | $-1$ | 2 | 1 | 1 |
| 0 | 3 | 3 | 0 | $-1$ | $\boxed{1}$ |
| $f$ | 5 | $-3$ | 1 | 0 | 0 |

.

Сделав два шага жордановых исключений, приходим к следующим симплекс-таблицам:

| | 1 | $-x_1$ | $-x_2$ | $-x_3$ |
|---|---|---|---|---|
| $x_4$ | 4 | $-1$ | $-1$ | 1 |
| 0 | 4 | $-4$ | 2 | $\boxed{2}$ |
| $x_5$ | 3 | 3 | 0 | $-1$ |
| $f$ | 5 | $-3$ | 1 | 0 |

;

| | 1 | $-x_1$ | $-x_2$ |
|---|---|---|---|
| $x_4$ | 2 | $\boxed{1}$ | $-2$ |
| $x_3$ | 2 | $-2$ | 1 |
| $x_5$ | 5 | 1 | 1 |
| $f$ | 5 | $-3$ | 1 |

.

Мы нашли начальный опорный план в базисе $x_3$, $x_4$, $x_5$. Если начальную симплекс-таблицу преобразовывать с другими разрешающими элементами, то получится другой базис, следовательно, и другой опорный план.

Найденный опорный план не оптимален, так как в $f$-строке присутствует отрицательный элемент ($-3$). В соответствующем ему столбце имеются положительные элементы, поэтому план можно улучшить. Для получения нового опорного плана преобразуем последнюю таблицу шагом жордановых исключений с первым разрешающим столбцом. Разрешающей будет первая строка, т. к. $\min\left\{\frac{2}{1}; \frac{5}{1}\right\} = \frac{2}{1}$. В результате получаем таблицу

| | 1 | $-x_4$ | $-x_2$ |
|---|---|---|---|
| $x_1$ | 2 | 1 | $-2$ |
| $x_3$ | 6 | 2 | $-3$ |
| $x_5$ | 3 | $-1$ | $\boxed{3}$ |
| $f$ | 11 | 3 | $-5$ |

,

содержащую новый опорный план $\overline{x}_1 = (2; 0; 6; 0; 3)$, которому отвечает большее, чем прежнему, значение целевой функции $f\left(\overline{x}_1\right) = 11$. И этот план не оптимален, так как в $f$-строке присутствует отрицательный элемент ($-5$). Сделав еще один шаг жордановых исключений с разрешающим элементом (3), получаем таблицу

$$\begin{array}{|c|c|cc|}
\hline
 & 1 & -x_4 & -x_5 \\
\hline
x_1 & 4 & 1/3 & 2/3 \\
x_3 & 9 & 1 & 1 \\
x_2 & 1 & -1/3 & 1/3 \\
\hline
f & 16 & 4/3 & 5/3 \\
\hline
\end{array}.$$

В $f$-строке нет отрицательных элементов, условие оптимальности выполнено.

Оптимальный опорный план $\overline{x}^*=(4;1;9;0;0)$, $f_{\max}=3\cdot 4-1+5=16$.

*Ответ*: $\overline{x}^*=(4;1;9;0;0)$, $f_{\max}=16$.

**Пример 6.3.** Найти какой-нибудь опорный план задачи

$$f=x_1-3x_2-2x_3-x_4+5 \quad (\max),$$

$$\begin{cases} 4x_1-2x_2-2x_3+3x_4=2 \\ 2x_1-x_2+x_3-x_4=3 \\ 2x_1-x_2+5x_3-6x_4=1 \end{cases};$$

$$x_j\ge 0,\ \left(j=\overline{1,4}\right).$$

*Ответ*: Задача неразрешима.

**Пример 6.4.** Решить симплекс-методом

$$f=8x_1+6x_2 \quad (\max),$$

$$\begin{cases} 5x_1+2x_2+x_3=20 \\ 6x_1+12x_2+x_4=72 \end{cases};$$

$$x_j\ge 0,\ \left(j=\overline{1,4}\right).$$

*Ответ*: $\overline{x}^*=(2;5;0;0)$, $f_{\max}=46$.

**Пример 6.5.** Решить задачу

$$f=2x_1+3x_2 \quad (\max),$$

$$\begin{cases} 3x_1+2x_2-x_3=84 \\ 3x_1+13x_2-x_4=150 \end{cases};$$

$$x_j\ge 0,\ \left(j=\overline{1,4}\right).$$

*Ответ*: функция не ограничена в области допустимых решений.

**Пример 6.6.** Найти оптимальный план раскроя листового материала по данным примера 3.5.

*Решение*:

В примере была составлена экономико-математическая модель задачи

$$f = 29x_1 + 4x_2 + 42x_3 + 36x_4 + 17x_5 \quad (\min),$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 200 \\ x_2 + 2x_4 + x_5 = 200 \\ x_3 + x_5 = 250 \end{cases};$$

$$x_j \ge 0 \ \left(j = \overline{1,5}\right).$$

Предварительно преобразуем целевую функцию к виду

$$-f = -29x_1 - 4x_2 - 42x_3 - 36x_4 - 17x_5 \quad (\max).$$

Запишем задачу в симплекс-таблицу и найдем начальный опорный план.

| | 1 | $-x_1$ | $-x_2$ | $-x_3$ | $-x_4$ | $-x_5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 200 | 3 | 2 | $\boxed{1}$ | 0 | 0 |
| 0 | 200 | 0 | 1 | 0 | 2 | 1 |
| 0 | 250 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| $-f$ | 0 | 29 | 4 | 42 | 36 | 17 |

;

| | 1 | $-x_1$ | $-x_2$ | $-x_4$ | $-x_5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_3$ | 200 | 3 | 2 | 0 | 0 |
| 0 | 200 | 0 | 1 | 2 | 1 |
| 0 | 50 | $-3$ | $-2$ | 0 | $\boxed{1}$ |
| $-f$ | $-8400$ | $-97$ | $-80$ | 36 | 17 |

;

| | 1 | $-x_1$ | $-x_2$ | $-x_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $x_3$ | 200 | 3 | 2 | 0 |
| 0 | 150 | 3 | 3 | $\boxed{2}$ |
| $x_5$ | 50 | $-3$ | $-2$ | 0 |
| $-f$ | $-9250$ | $-46$ | $-46$ | 36 |

,

| | 1 | $-x_1$ | $-x_2$ |
|---|---|---|---|
| $x_3$ | 200 | 3 | 2 |
| $x_4$ | 75 | $3/2$ | $\boxed{3/2}$ |
| $x_5$ | 50 | $-3$ | $-2$ |
| $-f$ | $-11950$ | $-100$ | $-100$ |

.

Этот план не оптимален, так как в $f$-строке имеются отрицательные элементы. Выберем, например, за разрешающий второй столбец.

Разрешающим элементом в нем будет число $\left(\frac{3}{2}\right)$. После шага жордановых исключений приходим к таблице

| | 1 | $-x_1$ | $-x_4$ |
|---|---|---|---|
| $x_3$ | 100 | 1 | $-\frac{4}{3}$ |
| $x_2$ | 50 | $\boxed{1}$ | $\frac{2}{3}$ |
| $x_5$ | 150 | $-1$ | $\frac{4}{3}$ |
| $-f$ | $-6950$ | 0 | $\frac{200}{3}$ |

,

содержащей опорный план $\overline{x}_1^* = (0; 50; 100; 0; 150)$. Этот план оптимален, так как в *f*-строке нет отрицательных элементов. Но в *f*-строке присутствует нулевой элемент. Это свидетельствует о том, что существует еще один опорный оптимальный план. Найдем его. За разрешающий выбираем столбец, содержащий этот нулевой элемент. Разрешающая строка определяется, как обычно, по минимальному симплексному отношению.

Получаем таблицу

| | 1 | $-x_2$ | $-x_4$ |
|---|---|---|---|
| $x_3$ | 50 | | |
| $x_1$ | 50 | | |
| $x_5$ | 200 | | |
| $-f$ | $-6950$ | 0 | $\frac{200}{3}$ |

.

Второй опорный оптимальный план имеет вид $\overline{x}_2^* = (50; 0; 50; 0; 200)$. Но в таком случае любая выпуклая линейная комбинация опорных планов $\overline{x}_1^*$ и $\overline{x}_2^*$: $\overline{x}^* = \lambda\overline{x}_1^* + (1-\lambda)\overline{x}_2^* = \lambda(0; 50; 100; 0; 150) + (1-\lambda)(50; 0; 50; 0; 200) =$ $= (50 - 50\lambda; 50\lambda; 50 + 50\lambda; 0; 200 - 50\lambda)$, где $0 \le \lambda \le 1$, также будет представлять собой оптимальный план.

Наличие не единственного оптимального плана с практической точки зрения очень удобно, так как имеется возможность выбрать параметр $\lambda$ с учетом других показателей, характеризующих план, но не нашедших отражения в целевой функции. Например, по смыслу нашей задачи компоненты оптимального плана должны выражаться целыми числами.

По первому оптимальному плану $\overline{x}_1^* = (0; 50; 100; 0; 150)$ нужно разрезать вторым способом 50 полос проката, третьим способом – 100 полос проката и пятым способом – 150 полос проката.

По второму оптимальному плану $\overline{x}_2^* = (50; 0; 50; 0; 200)$ нужно разрезать первым способом 50 полос проката, третьим способом – 50 полос и пятым способом – 200 полос проката.

В обоих случаях отходы от раскроя будут наименьшими и составят 6950 см.

*Ответ*: $\overline{x}^* = (50 - 50\lambda; 50\lambda; 50 + 50\lambda; 0; 200 - 50\lambda)$, где $0 \le \lambda \le 1$, $f_{\min} = 6950$ см.

**Пример 6.7.** Найти оптимальный план выпуска велосипедов и мотоциклов по условиям примера 3.10.

*Ответ*: $\overline{x}^* = (48; 24; 52; 6; 0; 0)$, $f_{\max} = 168$ ден. ед.

**Пример 6.8.** Найти оптимальный план строительства жилых домов по условиям примера 3.1.

*Ответ*: $\overline{x}^* = (45;\ 10;\ 0;\ 0;\ 45;\ 0;\ 1375;\ 0)$, $f_{\max} = 425$ тыс. м$^2$.

**Пример 6.9.** Имеющийся фонд материалов $b_1$, $b_2$, $b_3$ необходимо так распределить между изготовителями, чтобы получить максимальную прибыль от реализации всей продукции, произведенной из данных материалов. Нормы $a_{ij}$ $\left(i = \overline{1,3};\ j = \overline{1,5}\right)$ расхода материала на единицу продукции и прибыль $c_j$, получаемая от реализованной единицы продукции, представлены в таблице

| Материал | Продукция | | | | | Объем материала |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $П_1$ | $П_2$ | $П_3$ | $П_4$ | $П_5$ | |
| $b_1$ | 0,7 | 0,9 | 1,5 | 2,3 | 1,8 | 50000 |
| $b_2$ | 1,4 | 0,3 | 0,7 | 2,5 | 2,0 | 28000 |
| $b_3$ | 0,5 | 2,1 | 1,8 | 0,7 | 2,0 | 40000 |
| Прибыль $c_j$ | 5 | 7 | 6 | 9 | 8 | |
| План $\overline{x}$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | |

*Ответ*: $\overline{x}^* = (0;\ 15952;\ 0;\ 9286;\ 0; 14286;\ 0;\ 0)$, $f_{\max} = 195238$ ден. ед.

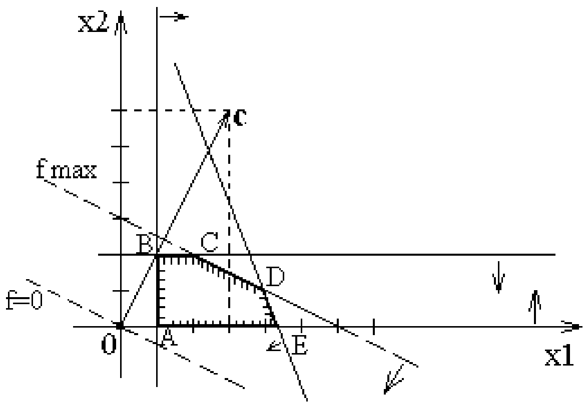
**Пример 6.10.** Решить задачу

$$f = 3x_1 + 6x_2 \quad (\max),$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 6 \\ 5x_1 + 2x_2 \le 22 \\ x_1 \ge 1 \\ 0 \le x_2 \le 2 \end{cases}.$$

*Решение*:

На рисунке приведено графическое решение данной задачи.




Особенность задачи состоит в том, что любая линия уровня целевой функции параллельна прямой, соответствующей первому ограничению. Это обуславливает наличие альтернативных оптимальных планов. Любая точка отрезка *CD* обеспечивает целевой функции оптимальность $f_{\max} = 18$.

Решаем задачу симплекс-методом

$$f = 3x_1 + 6x_2 \quad (\max),$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_4 = 22 \\ x_1 - x_5 = 1 \\ x_2 + x_6 = 2 \end{cases};$$

$$x_j \ge 0, \left(j = \overline{1,6}\right).$$

| | 1 | $-x_1$ | $-x_2$ | $-x_5$ |
|---|---|---|---|---|
| $x_3$ | 6 | 1 | 2 | 0 |
| $x_4$ | 22 | 5 | 2 | 0 |
| 0 | 1 | $\boxed{1}$ | 0 | $-1$ |
| $x_6$ | 2 | 0 | 1 | 0 |
| $f$ | 0 | $-3$ | $-6$ | 0 |

;

| | 1 | $-x_2$ | $-x_5$ |
|---|---|---|---|
| $x_3$ | 5 | 2 | 1 |
| $x_4$ | 17 | 2 | 5 |
| $x_1$ | 1 | 0 | $-1$ |
| $x_6$ | 2 | $\boxed{1}$ | 0 |
| $f$ | 3 | $-6$ | $-3$ |

;

| | 1 | $-x_6$ | $-x_5$ |
|---|---|---|---|
| $x_3$ | 1 | $-2$ | $\boxed{1}$ |
| $x_4$ | 13 | $-2$ | 5 |
| $x_1$ | 1 | 0 | $-1$ |
| $x_2$ | 2 | 1 | 0 |
| $f$ | 15 | 6 | $-3$ |

;

| | 1 | $-x_6$ | $-x_3$ |
|---|---|---|---|
| $x_5$ | 1 | $-2$ | 1 |
| $x_4$ | 8 | $\boxed{8}$ | $-5$ |
| $x_1$ | 2 | $-2$ | 1 |
| $x_2$ | 2 | 1 | 0 |
| $f$ | 18 | 0 | 3 |

;

| | 1 | $-x_4$ | $-x_3$ |
|---|---|---|---|
| $x_5$ | 3 | $1/4$ | $-1/4$ |
| $x_6$ | 1 | $1/8$ | $-5/8$ |
| $x_1$ | 4 | $1/4$ | $-1/4$ |
| $x_2$ | 1 | $-1/8$ | $5/8$ |
| $f$ | 18 | 0 | 3 |

.

Получаем два оптимальных плана $\overline{x}_1^*=(2;\ 2;\ 0;\ 8;\ 1;\ 0)$, $\overline{x}_2^*=(4;\ 1;\ 0;\ 0;\ 3;\ 1)$. Составляем общее решение $\overline{x}^*=\lambda\cdot\overline{x}_1^*+(1-\lambda)\cdot\overline{x}_2^*=$ $=\lambda(2;\ 2)+(1-\lambda)(4;\ 1)=(2\lambda+4-4\lambda;\ 2\lambda+1-\lambda)=(4-2\lambda;\ 1+\lambda)$ , где $0\le\lambda\le1$.

*Ответ*: $\overline{x}^*=(4-2\lambda;\ 1+\lambda)$, где $0\le\lambda\le1$, $f_{\max}=18$.

**Пример 6.11.** Решить задачу графически и симплекс-методом.

$$f=2x_1+x_2\quad(\max),$$
$$\begin{cases}3x_1+4x_2\ge12\\ x_1\le3\end{cases};$$
$$x_1\ge0,\ x_2\ge0.$$

*Ответ*: целевая функция не ограничена.

**Пример 6.12.** Для получения сплава используются три вида сырья, содержащего никель, железо и прочие вещества. В сплав может входить не менее 4 % никеля и не более 75 % железа и 20 % прочих компонентов. Известна стоимость различных видов сырья и процентное содержание в нем соответствующих компонентов сплава.

| Компоненты сплава | Содержание компонентов для вида сырья, % | | |
|---|---|---|---|
| | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ |
| Железо | 40 | 70 | 80 |
| Никель | 4 | 3 | 6 |
| Прочие | 20 | 10 | 8 |
| Стоимость за 1 кг, ден. ед. | 10 | 5 | 7 |

Определить оптимальный состав шихты, для которого стоимость 1 кг сплава будет минимальной.

*Ответ*: $\overline{x}^*=(1;\ 0;\ 0;\ 0;\ 0{,}35)$, $f_{\min}=10$ ден. ед. за 1 кг.

## Задачи

– решить графически и симплекс-методом следующие задачи:

1. $f = 2x_1 + x_2 \quad (\max)$,

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \ge 12 \\ x_1 \le 3 \\ x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

2. $f = -x_1 + 3x_2 \quad (\min)$,

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \le -4 \\ x_1 - x_2 \le 1 \\ x_2 \ge 1 \\ x_1 + x_2 \ge 5 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$

3. $f = -x_1 + 4x_2 \quad (\max)$,

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \ge 1 \\ x_1 + 2x_2 \ge 2 \\ x_1 + x_2 \le 4 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$

– решить симплекс-методом следующие задачи:

1. $f = 2x_1 + 3x_2 \quad (\max)$,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = 9 \\ x_1 + x_5 = 4 \\ x_1 + 2x_2 + x_6 = 8 \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ \left(j = \overline{1,6}\right)$

2. $f = 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \quad (\min)$,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 6 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7 \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ \left(j = \overline{1,4}\right)$

3. $f = 2x_1 - 6x_2 + 3x_5 \quad (\max)$,

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 20 \\ -x_1 - 2x_2 + x_4 + 3x_5 = 24 \\ 3x_1 - x_2 - 12x_5 + x_6 = 18 \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ \left(j = \overline{1,6}\right)$

4. $f = x_1 - 2x_2 + 4x_3 \quad (\min)$,

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_2 + 4x_3 + 4x_4 = 2 \\ x_3 - x_4 = 1 \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ \left(j = \overline{1,4}\right)$

# ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 7

## Постановка двойственной задачи

Каждой задаче линейного программирования можно поставить в соответствие задачу, называемую *двойственной к исходной.*

Пусть задана общая задача линейного программирования (*исходная задача*):

$$f=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \quad (\max), \tag{7.1}$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i & \left(i=\overline{1,m_1};\ m_1 \le m\right) \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i & \left(i=\overline{m_1+1,\ m}\right) \end{cases}; \tag{7.2}$$

$$x_j \ge 0 \quad \left(j=\overline{1,n_1};\ n_1 \le n\right), \tag{7.3}$$

где $x_j$ произвольного знака при $j=\overline{n_1+1,\ n}$.

Двойственная к ней задача имеет вид:

$$F=\sum_{i=1}^{m} b_i y_i \quad (\min), \tag{7.4}$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j & \left(j=\overline{1,n_1};\ n_1 \le n\right) \\ \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = c_j & \left(j=\overline{n_1+1,\ n}\right) \end{cases}; \tag{7.5}$$

$$y_i \ge 0 \quad \left(i=\overline{1,m_1};\ m_1 \le m\right), \tag{7.6}$$

где $y_i$ произвольного знака при $i=\overline{m_1+1,\ m}$.

### Правило построения двойственной задачи

1. *Упорядочивается запись исходной задачи, т. е. если целевая функция исходной задачи максимизируется, то ограничения-неравенства должны быть вида* (≤), *если минимизируется, то вида* (≥). Выполнение этих условий достигается умножением соответствующих ограничений на (– 1).

2. *Если исходная задача является задачей максимизации, то двойственная будет задачей минимизации*. При этом вектор, образованный из коэффициентов при неизвестных целевой функции исходной задачи, совпадает с вектором констант в правых частях ограничений двойственной задачи. Аналогично связаны между собой векторы, образованные из коэффициентов при неизвестных целевой функции двойственной задачи, и константы в правых частях ограничений исходной задачи.

3. *Каждой переменной* $y_i$ *двойственной задачи соответствует i-тое ограничение исходной задачи, и, наоборот, каждой переменной* $x_j$ *исходной задачи соответствует j-тое ограничение двойственной задачи.*

4. *Матрица* $A^T$ *из коэффициентов при неизвестных двойственной задачи образуется транспонированием матрицы* $A = \left(a_{ij}\right)_{m \times n}$, *составленной из коэффициентов при неизвестных исходной задачи.*

5. *Если на j-тую переменную исходной задачи наложено условие неотрицательности, то j-тое ограничение двойственной задачи будет неравенством, в противном случае – будет равенством.* Аналогично связаны между собой ограничения исходной задачи и переменные двойственной задачи.

**Пример 7.1.** Построить двойственную задачу к следующей задаче, заданной в общей форме:

$$f = 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 \quad (\min),$$

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 \le 8 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 6 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \le 5 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_4 + 3x_5 \ge 7 \end{cases};$$

$$x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0;\ x_4 \ge 0.$$

*Решение*:

Упорядочим запись исходной задачи. Так как требуется найти минимум целевой функции, то неравенства в системе ограничений должны быть вида $(\ge)$.

Умножив первую и третью строки системы ограничений на $(-1)$, приведем систему ограничений к следующему виду:

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 + x_5 \ge -8 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 6 \\ -x_1 - x_2 - x_3 + x_4 \ge -5 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_4 + 3x_5 \ge 7 \end{cases}.$$

Двойственная задача будет иметь четыре переменные, так как прямая задача содержит четыре ограничения (четыре строки в системе).

В соответствии с правилом, запишем двойственную задачу:

$$F = -8y_1 + 6y_2 - 5y_3 + 7y_4 \quad (\max),$$

(коэффициенты столбца свободных членов системы ограничений исходной задачи являются коэффициентами при неизвестных целевой функции двойственной задачи)

$$\begin{cases} -3y_1 + y_2 - y_3 + 2y_4 \le 2 \\ 2y_1 + 3y_2 - y_3 - 5y_4 \le -1 \\ -y_1 + y_2 - y_3 = 1 \\ -y_1 + 3y_2 + y_3 + y_4 \le 1 \\ y_1 - 2y_2 + 3y_4 = -2 \end{cases};$$

$$y_1 \ge 0; \quad y_3 \ge 0; \quad y_4 \ge 0.$$

Третье и пятое ограничения двойственной задачи записаны в виде равенства, так как на соответствующие им переменные $x_3$ и $x_5$ в исходной задаче не задано условие неотрицательности. На переменные $y_1$, $y_3$ и $y_4$ задается условие неотрицательности в связи с тем, что в исходной задаче им соответствуют ограничения в виде неравенств.

**Пример 7.2.** Построить двойственную задачу к следующей задаче, заданной в канонической форме записи:

$$f = 2x_2 + x_4 \quad (\max),$$

$$\begin{cases} x_2 + x_3 + 3x_4 = 9 \\ 3x_2 - 2x_4 + x_5 = 5 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 6 \end{cases};$$

$$x_j \ge 0 \quad \left(j = \overline{1,5}\right).$$

*Решение*:

Двойственная задача будет иметь три переменные: $y_1$, $y_2$, $y_3$, и по общему правилу получаем двойственную задачу:

$$F = 9y_1 + 5y_2 + 6y_3 \quad (\min),$$

$$\begin{cases} y_3 \ge 0 \\ y_1 + 3y_2 + 2y_3 \ge 2 \\ y_1 \ge 0 \\ 3y_1 - 2y_2 + y_3 \ge 1 \\ y_2 \ge 0 \end{cases}.$$

**Пример 7.3.** Построить задачу, двойственную к задаче линейного программирования, заданной в симметричной форме записи:

$$f = x_1 + x_2 + x_3 \quad (\min),$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \ge 9 \\ 2x_1 + x_3 \ge 4 \end{cases};$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0.$$

**Пример 7.4.** Построить двойственную задачу к следующей задаче, заданной в канонической форме:

$$f = x_1 + x_2 + 2x_3 \quad (\max),$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 4 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 6 \\ 2x_1 + x_3 = 5 \end{cases};$$

$$x_j \ge 0 \quad \left(j = \overline{1,3}\right).$$

**Пример 7.5.** Построить задачу, двойственную к ЗЛП:

$$f = 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \quad (\min),$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 \ge 7 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 \ge 9 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 \le 5 \end{cases};$$

$$x_2 \ge 0.$$

**Пример 7.6.** Построить задачу, двойственную к ЗЛП:

$$f = -12x_1 + 10x_2 - 15x_3 - 11x_4 \quad (\max),$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + x_4 \ge 3 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4 \\ 4x_1 - 5x_2 + 2x_4 \ge -1 \\ x_1 + 3x_3 + 2x_4 \ge 2 \\ -2x_1 + x_2 - 3x_4 = -5 \end{cases};$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_4 \ge 0.$$

**Пример 7.7.** На кондитерской фабрике весь ассортимент выпускаемой карамели разделен на три однородные группы $K_1$, $K_2$ и $K_3$. Расход основного сырья и его запас указаны в таблице. Другие виды сырья, входящие в готовый продукт в небольших количествах, не учитываются. В качестве критерия оптимальности плана принимается максимум прибыли. Требуется составить математическую модель прямой и двойственной задач.

| Основное сырье | Расход сырья на 1 т | | | Общий запас сырья |
|---|---|---|---|---|
| | $K_1$ | $K_2$ | $K_3$ | |
| I (сахарный песок) | 0,7 | 0,7 | 0,7 | 700 |
| II (патока) | 0,3 | 0,3 | 0,2 | 300 |
| III (фруктовое пюре) | 0 | 0,2 | 0,3 | 150 |
| Уровень прибыли | 100 | 110 | 120 | |

**Пример 7.8.** Предприятие оптовой торговли, исходя из специализации, может реализовывать четыре вида товаров $T_1$, $T_2$, $T_3$ и $T_4$. Лимитируемые при этом ресурсы и нормы расхода на единицу реализуемых товаров представлены в таблице.

Построить модели прямой и двойственной задач при условии, что заказ на $T_2$ должен составить 1600 единиц, а заказ на $T_3$ должен составить 1500 единиц товаров.

| Лимитируемые ресурсы и показатели | Товарная группа | | | | Объем ресурса | Знак ограничения |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $T_1$ | $T_2$ | $T_3$ | $T_4$ | | |
| Складские площади, м$^2$ | 1,8 | 2,6 | 1,6 | 1,0 | 11000 | $\le$ |
| Трудовые ресурсы, чел.-ч. | 1,5 | 1,4 | 0,5 | 0,8 | 9500 | $\le$ |
| Издержки обращения, ден. ед. | 17 | 23 | 28 | 12 | 12000 | $\le$ |
| Товарные запасы, ден. ед. | 3,1 | 4,2 | 3,0 | 2,0 | 18000 | $\le$ |
| Уровень товарооборота, ден. ед. | 200 | 150 | 170 | 50 | 750000 | $\ge$ |
| Минимально допустимый план товарооборота по группе | $\ge$1200 | =1600 | =1500 | $\ge$1200 | – | – |
| Прибыль от единицы продукции, ден. ед. | 120 | 50 | 30 | 100 | | |

## Задачи

– исходя из общего правила, составить задачи, двойственные к задачам

1. $f = 3x_1 + x_2 \quad (\max)$,
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 6 \\ 4x_1 + x_2 \le 4 \end{cases};$$
$x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$.

2. $f = 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 \quad (\min)$,
$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 - x_4 = 7 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 8 \end{cases};$$

3. $f = 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 \quad (\max)$,

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 \le 8 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + 2x_5 \le 9 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 - x_5 \ge 4 \end{cases};$$

$x_3 \ge 0$.

4. $f = 7x_1 + 6x_2 + 3x_3 - x_4 \quad (\min)$,

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 \ge 12 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \le 10 \\ 3x_1 + 5x_2 + 4x_4 = 7 \end{cases};$$

$x_2 \ge 0$, $x_3 \ge 0$.

5. $f = 2x_1 + 10x_2 - 2x_3 \quad (\max)$,

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 \ge 1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 \le 3 \end{cases};$$

$x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$, $x_3 \ge 0$.

6. $f = 2{,}5x_1 + 2x_2 + 3x_3 \quad (\min)$,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 6 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 \ge 9 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 11 \end{cases};$$

$x_1 \ge 0$, $x_3 \ge 0$.

# ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 8

## Принцип двойственности

### Теорема существования оптимальных планов пары двойственных задач

**Теорема 8.1.** *Для существования оптимального плана любой из пары двойственных задач необходимо и достаточно существование допустимого плана для каждой из них.*

### Первая теорема двойственности

**Теорема 8.2.** *Если одна из двойственных задач имеет оптимальное решение* $\overline{x}^* = \left(x_1^*;\ \ldots;\ x_n^*\right)$, *то и другая имеет оптимальное решение* $\overline{y}^* = \left(y_1^*;\ \ldots;\ y_m^*\right)$. *При этом экстремальные значения целевых функций задач совпадают, т. е.* $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^*$.

*Если целевая функция одной из задач двойственной пары не ограничена, то другая задача не имеет решения.*

*Для разрешимости одной из двойственных задач необходимо и достаточно, чтобы каждая из задач имела хотя бы одно решение.*

*Для того чтобы планы* $\overline{x} = \left(x_1,\ \ldots,\ x_n\right)$ *и* $\overline{y} = \left(y_1,\ \ldots,\ y_m\right)$ *являлись оптимальными решениями пары двойственных задач, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство*

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i .$$

Экономическое содержание первой теоремы двойственности состоит в следующем: если задача определения оптимального плана, максимизирующего выпуск продукции, разрешима, то разрешима и задача определения оценок ресурсов. Причем цена продукта, полученного в результате реализации оптимального плана, совпадает с суммарной оценкой ресурсов. Совпадения значений целевых функций для соответствующих решений пары двойственных задач достаточно для того, чтобы эти решения были оптимальными. Это значит, что план производства и вектор оценок ресурсов являются оптимальными тогда и только тогда, когда цена произведенной продукции и суммарная оценка ресурсов совпадают. Оценки выступают как инструмент балансирования затрат и результатов. Двойственные оценки обладают тем свойством, что они гарантируют рентабельность оптимального плана, т. е. равенство общей оценки продукции и ресурсов обусловливает убыточность всякого другого плана, отличного от оптимального. Двойственные оценки позволяют сопоставлять и балансировать затраты и результаты системы.

**Пример 8.1.** Для задачи $f = 4x_1 + 2x_2 \quad (\max)$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 6 \\ x_1 \le 4 \\ 2x_1 + x_2 \le 12 \end{cases};$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

необходимо построить двойственную задачу и найти оптимальные решения обеих задач.

*Решение*:

Двойственная задача имеет вид

$$F = 6y_1 + 4y_2 + 12y_3 \quad (\min),$$

$$\begin{cases} y_1 + y_2 + 2y_3 \ge 4 \\ y_1 + y_3 \ge 2 \end{cases};$$

$$y_i \ge 0 \quad \left(i = \overline{1,3}\right).$$

Приведя ограничительные неравенства задач к эквивалентным уравнениям и разрешив их относительно базисных переменных, получим

для прямой задачи

$$f = 4x_1 + 2x_2 \quad (\max),$$

$$\begin{cases} x_3 = 6 - x_1 - x_2 \ge 0 \\ x_4 = 4 - x_1 \ge 0 \\ x_5 = 12 - 2x_1 - x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \quad j = \left(\overline{1,5}\right)$$

для двойственной задачи

$$F = 6y_1 + 4y_2 + 12y_3 \quad (\min),$$

$$\begin{cases} y_4 = -4 + y_1 + y_2 + 2y_3 \ge 0 \\ y_5 = -2 + y_1 + y_3 \ge 0 \end{cases}$$

$$y_i \ge 0 \quad \left(i = \overline{1,5}\right)$$

Объединим задачи в одну таблицу

| | | *БП* | $F$ | $y_4$ | $y_5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| *СП* | *БП* | *СП* | 1 | $-x_1$ | $-x_2$ |
| $y_1$ | $x_3$ | | 6 | 1 | 1 |
| $y_2$ | $x_4$ | | 4 | 1 | 0 |
| $y_3$ | $x_5$ | | 12 | 2 | 1 |
| 1 | $f$ | | 0 | –4 | –2 |

Отсюда видно, что любая базисная переменная двойственной задачи равна сумме произведений коэффициентов отвечающего ей столбца на соответствующие переменные, стоящие в левом заглавном столбце. Например, $y_4 = 1 \cdot y_1 + 1 \cdot y_2 + 2 \cdot y_3 - 4$.

Аналогично вычисляется и значение целевой функции

$$F = 6 \cdot y_1 + 4 \cdot y_2 + 12 \cdot y_3 + 0.$$

Построенная двойственная таблица позволяет легко установить соответствие между переменными прямой и двойственной задач. Так, базисным переменным (*БП*) $x_3$, $x_4$, $x_5$ исходной задачи соответствуют свободные переменные (*СП*) $y_1$, $y_2$, $y_3$ двойственной задачи. Аналогично *СП* $x_1$ и $x_2$ прямой задачи соответствуют *БП* $y_4$, $y_5$ двойственной задачи.

Выполнив два шага жордановых преобразований, приходим к оптимальному решению:

| | | *БП* | $F$ | $y_2$ | $y_1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| *СП* | *БП* | *СП* | 1 | $-x_4$ | $-x_3$ |
| $y_5$ | $x_2$ | | 2 | –1 | 1 |
| $y_4$ | $x_1$ | | 4 | 1 | 0 |
| $y_3$ | $x_5$ | | 2 | –1 | –1 |
| 1 | $f$ | | 20 | 2 | 2 |

Максимальное значение функции $f$ = 20 исходной (прямой) задачи достигается при следующих значениях переменных: $x_1^* = 4$, $x_2^* = 2$, $x_3^* = 0$, $x_4^* = 0$, $x_5^* = 2$.

Значения свободных переменных двойственной задачи равны нулю $\left(y_3^* = y_4^* = y_5^* = 0\right)$, а значения базисных переменных находим из последней строки таблицы $\left(y_1^* = 2, y_2^* = 2\right)$. При этом значение функции $F$ = 20 минимально и равно значению функции прямой задачи.

*Ответ*: $\overline{x}^* = \left(4;\ 2;\ 0;\ 0;\ 2\right)$, $f_{\max} = 20$; $\overline{y}^* = (2;\ 2;\ 0;\ 0;\ 0)$, $F_{\min} = 20$.

В примере 8.1, используя соответствие между переменными, по решению исходной задачи было найдено решение двойственной задачи. В некоторых случаях удобнее поступать наоборот.

**Пример 8.2.** Найти оптимальное решение задачи

$$f = 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 \quad (\min),$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 - x_3 \geq 4 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 6 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \quad \left(j = \overline{1,3}\right)$$

*Решение*:

Двойственная задача имеет вид

$$F = 4y_1 + 6y_2 \quad (\max),$$

$$\begin{cases} 4y_1 + 5y_2 \leq 4 \\ 3y_1 + y_2 \leq 2 \\ -y_1 + 2y_2 \leq 3 \end{cases}$$

$$y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0$$

Решаем двойственную задачу симплекс-методом (вначале приводим задачу к канонической форме записи):

$$F = 4y_1 + 6y_2 \quad (\max),$$

$$\begin{cases} 4y_1 + 5y_2 + y_3 = 4 \\ 3y_1 + y_2 + y_4 = 2 \\ -y_1 + 2y_2 + y_5 = 3 \end{cases}$$

$$y_i \geq 0 \quad \left(i = \overline{1,5}\right)$$

| *БП* *СП* | 1 | $-y_1$ | $-y_2$ |
|---|---|---|---|
| $y_3$ | 4 | 4 | $\boxed{5}$ |
| $y_4$ | 2 | 3 | 1 |
| $y_5$ | 3 | –1 | 2 |
| $F$ | 0 | –4 | –6 |

;

| *БП* *СП* | 1 | $-y_1$ | $-y_3$ |
|---|---|---|---|
| $y_2$ | $4/5$ | $4/5$ | $1/5$ |
| $y_4$ | $6/5$ | $11/5$ | $-1/5$ |
| $y_5$ | $7/5$ | $-13/5$ | $-2/5$ |
| $F$ | $24/5$ | $4/5$ | $6/5$ |

.

Оптимальное решение двойственной задачи: $y_1^* = 0$, $y_2^* = 4/5$, $y_3^* = 0$, $y_4^* = 6/5$, $y_5^* = 7/5$, $F_{\max} = 24/5$.

На основании соответствия между переменными прямой и двойственной задач $\begin{array}{c} \overbrace{x_1 \quad x_2 \quad x_3}^{СП} \; \overbrace{x_4 \quad x_5}^{БП} \\ \updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow \\ \underbrace{y_3 \quad y_4 \quad y_5}_{БП} \; \underbrace{y_1 \quad y_2}_{СП} \end{array}$ запишем оптимальное решение исходной задачи: $x_1^* = 6/5$, $x_2^* = 0$, $x_3^* = 0$, $x_4^* = 4/5$, $x_5^* = 0$, $f_{\min} = 24/5$.

*Ответ*: $\bar{x}^* = \left(6/5;\ 0;\ 0;\ 4/5;\ 0\right)$, $f_{\min} = 24/5$; $\bar{y}^* = \left(0;\ 4/5;\ 0;\ 6/5;\ 7/5\right)$, $F_{\max} = 24/5$.

При решении двойственных задач могут встретиться следующие случаи:

а) обе задачи разрешимы (имеют планы);

б) области допустимых решений обеих задач пустые;

в) одна задача имеет неограниченную область допустимых решений, вторая – пустую.

**Пример 8.3.** Найти решение прямой и двойственной задач для задачи

$$f = 6x_1 + 4x_2 \quad (\max),$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \le 8 \\ 2x_1 + x_2 \le 6 \end{cases};$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

*Ответ*: $\bar{x}^* = \left(8/3;\ 2/3\right)$, $f_{\max} = 56/3$; $\bar{y}^* = \left(1/3;\ 8/3\right)$, $F_{\min} = 56/3$.

**Пример 8.4.** Найти решение прямой и двойственной задач для задачи

$$f = 6x_1 + 3x_2 \quad (\min),$$

$$\begin{cases} -3x_1 - x_2 \ge 3 \\ -2x_1 + x_2 \le -2 \end{cases};$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

*Ответ*: область решений исходной задачи пустая; $F_{\max}$ не определено.

**Пример 8.5.** Для задачи

$$f = 6x_1 + 2x_2 \quad (\max),$$

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 \le 3 \\ x_1 - 3x_2 \le -6 \end{cases};$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$$

необходимо построить двойственную и найти оптимальные решения задач.

*Ответ*: задачи не имеют опорных (неотрицательных) решений.

**Теорема 8.3.** *Если какая-то переменная* $x_j^*$ $\left(j=\overline{1,n}\right)$ *оптимального плана положительна, то j-тое ограничение двойственной задачи ее оптимальным планом обращается в строгое равенство. Если оптимальное решение исходной задачи обращает какое-то i-тое* $\left(i=\overline{1,m}\right)$ *ограничение в строгое неравенство, то в оптимальном плане двойственной задачи переменная* $y_i$ *равна нулю.*

Эта теорема справедлива для задач симметричной двойственной пары. Для задач в канонической и общей форме она справедлива только при ограничениях, имеющих вид неравенств, и при неотрицательности переменных.

**Пример 8.6**. Найти решение прямой задачи путем графического анализа двойственной задачи.

$$f=-6x_1-12x_2+3x_3-x_4 \quad (\max),$$

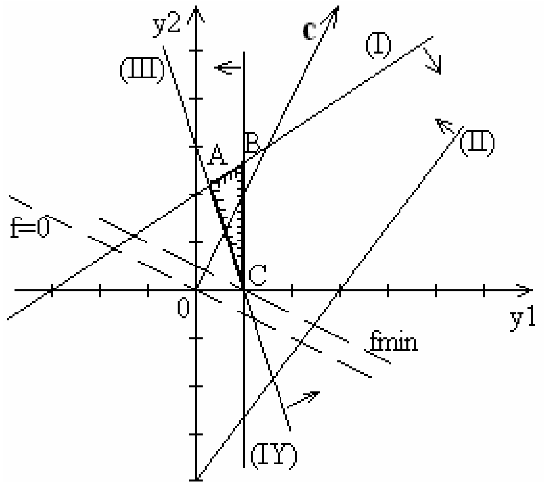
$$\begin{cases}2x_1-4x_2+3x_3-x_4=6\\ -3x_1+3x_2+x_3=12\end{cases}$$

$$x_j\geq 0 \quad \left(j=\overline{1,4}\right)$$

*Решение*:

Запишем условие двойственной задачи:

$$F=6y_1+12y_2 \quad (\min),$$




$$\begin{cases}2y_1-3y_2\geq -6\\ -4y_1+3y_2\geq -12\\ 3y_1+y_2\geq 3\\ -y_1\geq -1\end{cases}$$

$y_1$ и $y_2$ – любые

Графическое решение этой задачи представлено на рисунке. Область допустимых решений ограниченная (треугольник *ABC*). Оптимальное решение достигается в точке *C* (1; 0) и $F_{\min}=6$. Подставляя это решение в систему ограничений двойственной задачи, видим, что первое и второе ограничения являются строгими неравенствами $(2\cdot 1-3\cdot 0=2>-6$ и $-4\cdot 1+3\cdot 0=-4>-12)$ . Следовательно, соответствующие им переменные исходной задачи $x_1$ и $x_2$ должны обращаться в нуль. Тогда, подставляя в исходную систему ограничений значения переменных $x_1 = x_2 = 0$, получаем $\begin{cases} 3x_3 - x_4 = 6 \\ x_3 = 12 \end{cases}$, откуда находим, что $x_3 = 12$, $x_4 = 30$. Следовательно, оптимальное решение исходной прямой задачи $\overline{x}^* = (0;\ 0;\ 12;\ 30)$. При этом $f_{\max} = 3 \cdot 12 - 1 \cdot 30 = 6$. Так как $f = F = 6$, то вычисления выполнены правильно.

*Ответ*: $\overline{x}^* = (0;\ 0;\ 12;\ 30)$, $f_{\max} = 6$.

**Пример 8.7.** Исходя из специализации, предприятие может выпускать четыре вида продукции $П_j$ $\left(j = \overline{1, 4}\right)$, используя для этого три вида сырья $C_i$ $\left(i = \overline{1, 3}\right)$. Общие объемы имеющегося сырья $b_i$, нормы их расхода на единицу продукции и цена реализации единицы каждого вида продукции представлены в таблице.

1. Определить оптимальный ассортимент выпускаемой продукции, обеспечивающий максимум реализации. Единственный ли оптимальный план имеет задача? Если нет, то записать выражение для всех оптимальных планов.

2. Составить модель двойственной задачи и, используя соответствие между переменными прямой и двойственной задач, найти оптимальный план двойственной задачи.

| Вид сырья | Продукция | | | | Объем сырья |
|---|---|---|---|---|---|
| | $П_1$ | $П_2$ | $П_3$ | $П_4$ | |
| I | 2 | 1 | 0,5 | 4 | 2400 |
| II | 1 | 5 | 3 | 0 | 1200 |
| III | 3 | 0 | 5 | 1 | 3000 |
| Цена реализации | 75 | 30 | 60 | 120 | |

**Пример 8.8.** Нужно составить диету (смесь), включающую питательные вещества $П_1$, $П_2$ и $П_3$. Для составления диеты могут быть использованы продукты $M_1$, $M_2$ и $M_3$, содержащие указанные вещества в различных сочетаниях. Содержание питательных веществ в диете, продуктах и цены на них указаны в таблице

| Питательное вещество | Содержание питательных веществ в продуктах | | | Минимальное содержание питательных веществ в диете | Двойственные переменные |
|---|---|---|---|---|---|
| | $M_1$ | $M_2$ | $M_3$ | | |
| $П_1$ | 4 | 4 | 6 | 62 | $y_1$ |
| $П_2$ | 6 | 1 | 2 | 30 | $y_2$ |
| $П_3$ | 4 | 6 | 4 | 44 | $y_3$ |
| Цена продукта | 8 | 5 | 6 | | |
| План $\overline{x}$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | | |

Составить пару двойственных задач, решить одну из них симплексным методом и получить решение другой.

## Задачи

– для приведенных ниже задач записать двойственную задачу. Решить одну из них симплексным методом и получить решение другой

1. $f=7x_1+13x_2+8x_3 \quad (\max)$,

$$\begin{cases} x_1+2x_2 \le 3 \\ x_1+x_3 \le 4 \\ x_1+3x_2+2x_3 \le 2 \end{cases};$$

$$x_j \ge 0 \quad \left(j=\overline{1,3}\right).$$

2. $f=5x_1+4x_2+6x_3 \quad (\max)$,

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3 \le 6 \\ 2x_1-x_2+3x_3 \ge 9 \\ 3x_1+x_2+2x_3 \ge 11 \end{cases};$$

$$x_j \ge 0 \quad \left(j=\overline{1,3}\right).$$

3. $f=-x_1+4x_2+6x_3 \quad (\min)$,

$$\begin{cases} -x_1+2x_2+4x_3 \ge 15 \\ -2x_1-x_2+2x_3 \le 2 \\ 4x_1+8x_2-x_3 \ge 17 \\ x_1+x_2+x_3 \ge 6 \end{cases};$$

$$x_j \ge 0 \quad \left(j=\overline{1,3}\right).$$

4. $f=3x_1+4x_2-6x_3 \quad (\min)$,

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3 \ge 8 \\ -3x_1+2x_2-2x_3=10 \\ 5x_1-4x_2+x_3 \ge 7 \end{cases};$$

$$x_j \ge 0 \quad \left(j=\overline{1,3}\right).$$

– для приведенной ЗЛП построить двойственную ЗЛП, решить ее графически и получить решение прямой задачи.

$$f=-x_1-7x_2+4x_3-9x_4-8x_5+3x_6 \ (\max),$$

$$\begin{cases} 3x_1+2x_2+3x_3-2x_4+x_5+x_6=18 \\ 2x_1+x_2-x_3-3x_4+2x_5 \ge 24 \end{cases};$$

$$x_j \ge 0 \quad \left(j=\overline{1,6}\right).$$

# ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 9

## Теоремы двойственности и их экономическое содержание

**Вторая теорема двойственности (о дополняющей нежесткости)**

**Теорема 9.1.** *Для того, чтобы планы* $\overline{x}^*$ *и* $\overline{y}^*$ *пары двойственных задач были оптимальными, необходимо и достаточно выполнение условий*

$$x_j^*\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* - c_j\right) = 0, \qquad (9.1)$$

$$y_i^*\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* - b_i\right) = 0. \qquad (9.2)$$

Эти условия называются *условиями дополняющей нежесткости*. Из них следует: если какое-либо неравенство системы ограничений одной из задач не обращается в строгое равенство оптимальным планом этой задачи, то соответствующая компонента оптимального плана двойственной задачи должна равняться нулю. Если же какая-либо компонента оптимального плана одной из задач положительна, то соответствующее ограничение в двойственной задаче ее оптимальным планом должно обращаться в строгое равенство. Если $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* < b_i$, то $y_i^* = 0$; если $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* = b_i$, то $y_i^* > 0$. Точно так же: если $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* > c_j$, то $x_j^* = 0$; если $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* = c_j$, то $x_j^* > 0$.

Экономически это означает, что если по некоторому оптимальному плану $\overline{x}^*$ производства расход *i*-того ресурса строго меньше его запаса $b_i$, то в оптимальном плане соответствующая двойственная оценка единицы этого ресурса равна нулю. Если же в некотором оптимальном плане оценок его *i*-тая компонента строго больше нуля, то в оптимальном плане производства расход соответствующего ресурса равен его запасу. Отсюда следует вывод: двойственные оценки могут служить мерой дефицитности ресурсов. Дефицитный ресурс (полностью используемый по оптимальному плану) имеет положительную оценку, а избыточный ресурс (используемый не полностью) имеет нулевую оценку.

**Пример 9.1.** Продукция в цехе может производиться тремя технологическими способами $(T_1, T_2, T_3)$.

Объемы ресурсов $b_i$ $\left(i = \overline{1,3}\right)$ и их расход в единицу времени для каждой технологии, а также производительности технологий (в денежных единицах за единицу времени работы по данной технологии) представлены в таблице.

Требуется определить оптимальный план использования каждого технологического способа $x_j$ $\left(j = \overline{1,3}\right)$, т. е. время использования каждого способа. Записать решение двойственной задачи и проверить условия о дополняющей нежесткости.

| Ресурсы | Технологический способ | | | Объем ресурса | $\overline{y}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | $T_1$ | $T_2$ | $T_3$ | | |
| Рабочая сила, чел.-ч | 15 | 20 | 25 | $\le 1200$ | $y_1$ |
| Сырье, т | 2 | 3 | 2,5 | $\le 150$ | $y_2$ |
| Электроэнергия, кВт-ч | 35 | 60 | 60 | $\le 3000$ | $y_3$ |
| Производительность технологического способа | 300 | 250 | 450 | | |
| План $\overline{x}$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | | |

*Решение*:

Запишем модели прямой и двойственной задач

прямая задача

$$f = 300x_1 + 250x_2 + 450x_3 \quad (\max),$$

$$\begin{cases} 15x_1 + 20x_2 + 25x_3 \le 1200 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2{,}5x_3 \le 150 \\ 35x_1 + 60x_2 + 60x_3 \le 3000 \end{cases};$$

$x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$, $x_3 \ge 0$.

двойственная задача

$$F = 1200y_1 + 150y_2 + 3000y_3 \quad (\min),$$

$$\begin{cases} 15y_1 + 2y_2 + 35y_3 \ge 300 \\ 20y_1 + 3y_2 + 60y_3 \ge 250 \\ 25y_1 + 2{,}5y_2 + 60y_3 \ge 450 \end{cases};$$

$y_1 \ge 0$, $y_2 \ge 0$, $y_3 \ge 0$.

Решая задачу симплекс-методом, получаем решение прямой задачи

| | 1 | $-x_1$ | $-x_2$ | $-x_3$ |
|---|---|---|---|---|
| $x_4$ | 1200 | 15 | 20 | $\boxed{25}$ |
| $x_5$ | 150 | 2 | 3 | 2,5 |
| $x_6$ | 3000 | 35 | 60 | 60 |
| $f$ | 0 | –300 | –250 | –450 |

;

| | 1 | $-x_1$ | $-x_2$ | $-x_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $x_3$ | 48 | 0,6 | 0,8 | 0,04 |
| $x_5$ | 30 | $\boxed{0{,}5}$ | 1 | –0,1 |
| $x_6$ | 120 | –1 | 12 | –2,4 |
| $f$ | 21600 | –30 | 110 | 18 |

;

| | 1 | $-x_5$ | $-x_2$ | $-x_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $x_3$ | 12 | –1,2 | –0,4 | 0,16 |
| $x_1$ | 60 | 2 | 2 | –0,2 |
| $x_6$ | 180 | 2 | 14 | –2,6 |
| $f$ | 23400 | 60 | 170 | 12 |

.

Оптимальный план использования технологий $\overline{x}^* = (60;\ 0;\ 12;|0;\ 0;\ 180)$, $f_{\max} = 23400$ ден. ед., т.е. первую технологию целесообразно применять в течение 60 часов, третью – в течение 12 часов, вторую технологию применять нецелесообразно. При этом продукции будет выпущено на 23400 ден. ед.

Решение двойственной задачи находим по решению прямой задачи, используя соответствие между переменными $\begin{array}{ccc|ccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ y_4 & y_5 & y_6 & y_1 & y_2 & y_3 \end{array}$: $\overline{y}^* = (12;\ 60;\ 0;|\,0;\ 170;\ 0)$, $F_{\min} = 23400$ ден. ед.

Так как $y_1^* = 12 > 0$, $y_2^* = 60 > 0$, то первый и второй ресурсы используются полностью ($x_4^* = x_5^* = 0$). Третий ресурс избыточен $x_6^* = 180$. Его двойственная оценка равна нулю $y_3^* = 0$. Таким образом, если при *j*-том технологическом способе производства суммарная оценка ресурсов, идущих на выпуск единицы продукции, выше дохода $c_j$, то данный способ $(x_j^* = 0)$ не должен внедряться. Если же *j*-тый технологический способ используется в оптимальном плане, то суммарная оценка ресурсов, необходимых для производства единицы продукции, равна доходу $c_j$. Проверим условия о дополняющей нежесткости

– для прямой задачи:

$$\begin{array}{l|l|l} 15x_1^* + 20x_2^* + 25x_3^* = 1200 & x_4^* = 0 & y_1^* = 12 > 0 \\ 2x_1^* + 3x_2^* + 2{,}5x_3^* = 150 & x_5^* = 0 & y_2^* = 60 > 0 \\ 35x_1^* + 60x_2^* + 60x_3^* = 2820 < 3000 & x_6^* = 180 > 0 & y_3^* = 0 \end{array}$$

– для двойственной задачи:

$$\begin{array}{l|l|l} 15y_1^* + 2y_2^* + 35y_3^* = 300 & y_4^* = 0 & x_1^* = 60 > 0 \\ 20y_1^* + 3y_2^* + 60y_3^* = 420 > 250 & y_5^* = 170 > 0 & x_2^* = 0 \\ 25y_1^* + 2{,}5y_2^* + 60y_3^* = 450 & y_6^* = 0 & x_3^* = 12 > 0 \end{array}$$

Условия (9.1), (9.2) выполняются.

*Ответ*: $\overline{x}^* = (60;0;12;|\,0;0;180)$, $f_{\max} = 23400$ ден. ед., $\overline{y}^* = (12;\ 60;\ 0;|\,0;\ 170;\ 0)$, $F_{\min} = 23400$ ден. ед.

**Третья теорема двойственности (теорема об оценках)**

**Теорема 9.2.** *В оптимальном решении двойственной задачи значения переменных* $y_i^*$ *(оценок) численно равны частным производным* $\dfrac{\partial f_{\max}}{\partial b_i}$ *для исходной задачи. Двойственные оценки показывают приращение функции, вызванное малым изменением свободного* *члена соответствующего ограничения задачи линейного программирования.*

*Двойственная оценка численно равна изменению целевой функции при изменении соответствующего ресурса на единицу. Двойственные оценки $y_i$ часто называются скрытыми, теневыми или маргинальными оценками ресурсов.*

**Пример 9.2.** По условию примера 9.1. выяснить экономический смысл двойственных переменных.

*Решение*:

Ранее были найдены решения прямой задачи $\overline{x}^*=\left(60;0;12\,|\,0;0;180\right)$, $f_{\max}=23400$ и двойственной задачи $\overline{y}^*=\left(12;60;0\,|\,0;170;0\right)$, $F_{\min}=23400$.

Как следует из решения, первый и второй ресурсы потребляются полностью. Их двойственные оценки положительны. Приращение первого ограниченного ресурса на единицу ведет к увеличению целевой функции на 12 единиц, второго – на 60 единиц, третий ресурс избыточен: $x_6^*=180$. Его двойственная оценка равна нулю $(y_3^*=0)$. Поэтому дальнейшее его увеличение не влияет на значение целевой функции.

Определим, что показывают значения дополнительных двойственных оценок $y_4^*=0$, $y_5^*=170$, $y_6^*=0$. Оптимальный план исходной задачи $\overline{x}^*=\left(60;\ 0;\ 12;|0;\ 0;\ 180\right)$, $f_{\max}=23400$ ден. ед. говорит о том, что первую технологию целесообразно использовать в течение 60 часов, третью – в течение 12 часов. Вторая технология вообще не должна внедряться – она заведомо убыточна. Если ее все же использовать, то она в течение каждого часа работы будет снижать достигнутый уровень выпуска на $y_5^*=170$ ден. ед. Значения $y_4^*=y_6^*=0$ свидетельствуют о том, что первая и третья технологии являются неубыточными. В самом деле, из второго ограничения двойственной задачи следует:

$$20y_1+3y_2+60y_3-y_5=250.$$

Стоимость ресурсов, используемых в единицу времени при работе по второму технологическому способу, составит

$$20y_1^*+3y_2^*+60y_3^*=20\cdot 12+3\cdot 60+60\cdot 0=420 \text{ ден. ед.}$$

В единицу же времени этот способ может дать продукции на 250 ден. ед. Поэтому убыток в единицу времени при работе этим способом составит $y_5^*=420-250=170$ ден. ед.

Запишем задачу в матрично-векторной форме следующим образом:

| исходная задача | двойственная задача |
|---|---|
| $\bar{p}\cdot\bar{x} \quad (\max)$, | $\bar{b}\cdot\bar{y} \quad (\min)$, |
| $A\cdot\bar{x}\le\bar{b}$; | $A^T\cdot\bar{y}\ge\bar{p}$; |
| $\bar{x}\ge 0$ | $\bar{y}\ge 0$ |

где $\bar{p}$ – вектор прибыли продукции;

$\bar{x}$ – искомый вектор – план производства продукции;

$A$ – матрица коэффициентов при неизвестных – нормы потребления ресурсов;

$\bar{b}$ – вектор ограничений по ресурсам;

$\bar{y}$ – вектор оценок ресурсов.

Анализ задач линейного программирования может проводиться:

– путем сопоставления различных вариантов решений;

– с помощью анализа внутренней структуры каждого из полученных решений, базирующегося на свойствах двойственных оценок, приведенных ниже.

Двойственные оценки являются:

а) *показателем дефицитности ресурсов и продукции*. Величина $y_i^*$ является оценкой $i$-того ресурса. Чем больше значение оценки $y_i^*$, тем выше дефицитность ресурса. Для недефицитного ресурса $y_i^*=0$.

б) *показателем влияния ограничений на значение целевой функции*. При незначительном приращении $\Delta b_i$ является точной мерой влияния ограничений на целевую функцию. Поэтому представляет практический интерес определение предельных значений ограничений (нижней и верхней границ), в которых величины оценок остаются неизменными.

в) *показателем эффективности производства отдельных видов продукции с позиций критерия оптимальности*. Суть заключается в том, что в оптимальный план может быть включена лишь та продукция $j$-го вида, для которой выполняется условие

$$\sum a_{ij}y_i^* < p_j .$$

г) *инструментом сопоставления суммарных условных затрат и результатов*. Это свойство следует из принципа двойственности, в котором устанавливается связь между значениями функций прямой и двойственной задач.

Двойственные оценки можно использовать для экономического анализа решения при условии, что ограничения на ресурсы изменяются лишь в определенных пределах. В этой связи говорят о *допустимом интервале устойчивости оценок*. Интервал устойчивости оценок по отношению к $i$-тому ограничению имеет вид

$$\left[b_i - \Delta b_i^{н};\quad b_i + \Delta b_i^{в}\right]\ \left(i = \overline{1,\ m}\right), \tag{9.3}$$

где $\Delta b_i^{н}$ называют *нижним пределом уменьшения*,

$\Delta b_i^{в}$ – *верхним пределом увеличения* и вычисляют по формулам

$$\Delta b_i^{н} = \min_{\substack{j \\ d_{ij}>0}} \left\{ \frac{x_j^*}{d_{ij}} \right\};\ \Delta b_i^{в} = \left| \max_{\substack{j \\ d_{ij}<0}} \left\{ \frac{x_j^*}{d_{ij}} \right\} \right|. \tag{9.4}$$

Целесообразность включения в план новых видов продукции оценивается характеристикой

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i - p_j\ . \tag{9.5}$$

Если $\Delta_j < 0$, то данный вид продукции после введения в план улучшает его. При $\Delta_j > 0$ включение продукции в план нецелесообразно.

Пусть имеется возможность приобрести дополнительно $i$-тый ресурс в объеме $\Delta b_i$. Эта величина находится в пределах устойчивости двойственных оценок. Цена единицы ресурса равна $c_i$.

Следовательно, приращение прибыли $\Delta f_{i\max} = \Delta b_i \cdot y_i^*$, в то время, как затраты на приобретение ресурса составляют $\Delta c_i = \Delta b_i \cdot c_i$. Данное мероприятие будет эффективным, если обеспечит дополнительную прибыль, т. е. если $\Delta p_i > 0$, где

$$\Delta p_i = \Delta f_{i\,\max} - \Delta c_i \tag{9.6}$$

**Пример 9.3**. Для изготовления четырех видов продукции (*А*, *Б*, *В* и *Г*) используются три вида ресурсов (I, II, III).

Наличие ресурсов, нормы их расхода на единицу продукции и получаемая прибыль от единицы продукции заданы в таблице.

| Вид ресурса | Запас ресурса | Норма расхода на единицу продукции | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | *А* | *Б* | *В* | *Г* |
| I | 240 | 2 | 1 | 1 | 3 |
| II | 60 | 1 | 0 | 2 | 1 |
| III | 300 | 1 | 2 | 1 | 0 |
| Прибыль | | 4 | 2 | 3 | 5 |

Необходимо:

а) найти оптимальные решения прямой и двойственной задач;

б) определить изменение максимальной прибыли при изменении ресурсов I вида – на (–10) ед., II – на (+60) ед., III – на (+30) ед.; оценить раздельное и суммарное влияние этих изменений на величину максимальной прибыли;

в) оценить целесообразность введения в план пятого вида продукции *Д*, нормы затрат ресурсов на единицу которого равны соответственно 2, 4, 2, а прибыль – (15);

г) оценить целесообразность закупки 100 единиц ресурса III вида по цене $c_3 = 0{,}5$.

*Решение*:

Математическая модель задачи имеет вид

$$f = 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 \quad (\max),$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 \le 240 \\ x_1 + 2x_3 + x_4 \le 60 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \le 300 \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \quad \left(j = \overline{1,4}\right)$$

а) решаем задачу симплекс-методом (опуская подробности, сразу приводим оптимальное решение)

| *БП* *СП* | 1 | $-x_4$ | $-x_5$ | $-x_7$ | $-x_6$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 60 | $11/5$ | $4/5$ | $-2/5$ | $-1/5$ |
| $x_2$ | 120 | $-4/5$ | $-1/5$ | $3/5$ | $-1/5$ |
| $x_3$ | 0 | $-3/5$ | $-2/5$ | $1/5$ | $3/5$ |
| $f$ | 480 | $2/5$ | $8/5$ | $1/5$ | $3/5$ |

.

Значения целевой функции и неизвестных величин оптимального плана $x_1^* = 60$, $x_2^* = 120$, $x_3^* = 0$, $x_4^* = 0$, $x_5^* = x_6^* = x_7^* = 0$, $f_{\max} = 480$ ден.ед.

Используя соответствие между переменными исходной и двойственной задач $\begin{array}{cccc|ccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & y_1 & y_2 & y_3 \end{array}$, запишем оптимальное решение двойственной задачи $y_1^* = 8/5$, $y_2^* = 3/5$, $y_3^* = 1/5$, $y_4^* = y_5^* = y_6^* = 0$, $y_7^* = 2/5$, $F_{\min} = 480$ ден. ед. Как показывают значения оценок, наиболее дефицитным является ресурс I, так как $y_1^* = 8/5$, а наименее дефицитным – ресурс III, так как $y_3^* = 1/5$.

б) базисными неизвестными, входящими в оптимальный план, являются $x_1$, $x_2$ и $x_3$. Выпишем матрицу из коэффициентов при базисных неизвестных

$$A = \left[a_{ij}\right] = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Построим матрицу, обратную матрице $A$

$$A^{-1} = \left[d_{ij}\right] = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 4/5 & -1/5 & -2/5 \\ -1/5 & -1/5 & 3/5 \\ -2/5 & 3/5 & 1/5 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Чтобы определить изменение максимальной прибыли при изменении ресурсов, необходимо найти интервалы устойчивости двойственных оценок, в пределах которых они точно измеряют влияние ограничений на целевую функцию.

Определим интервал устойчивости по отношению к ограничению по ресурсу I вида. Используя формулы (9.4), находим

$$\Delta b_1^{н} = \min_{\substack{j \\ d_{ij}>0}} \left\{ \frac{x_j^*}{d_{ij}} \right\} = \min \left\{ \frac{60}{4/5} \right\} = 75$$

($x_1^* = 60$, в первой строке матрицы $A^{-1}$ выбираем $d_{ij} > 0$, т. е. $d_{ij} = 4/5$);

$$\Delta b_1^{в} = \left| \max_{\substack{j \\ d_{ij}<0}} \left\{ \frac{x_j^*}{d_{ij}} \right\} \right| = \left| \max \left\{ \frac{120}{-1/5};\ \frac{0}{-2/5} \right\} \right| = 0$$

( $x_2^* = 120$, $x_3^* = 0$, в первой строке матрицы $A^{-1}$ выбираем $d_{ij} < 0$, т.е. $d_{ij} = \left\{-1/5;\ -2/5\right\}$).

В соответствии с (9.3) интервал устойчивости оценок по отношению к первому ограничению принимает следующий вид:

$$\left[b_1 - \Delta b_1^{н};\quad b_1 + \Delta b_1^{в}\right] = \left[240 - 75;\ 240 + 0\right] = \left[165;\ 240\right].$$

Аналогичным образом находим интервалы устойчивости оценок по отношению к ограничениям по двум другим видам ресурсов.

По ресурсу II:

$$\Delta b_2^{н} = \min_{\substack{j \\ d_{ij} > 0}} \left\{\frac{x_j^*}{d_{ij}}\right\} = \min\left\{\frac{0}{3/5}\right\} = 0;$$

$$\Delta b_2^{в} = \left|\max_{\substack{j \\ d_{ij} < 0}} \left\{\frac{x_j^*}{d_{ij}}\right\}\right| = \left|\max\left\{\frac{60}{-1/5};\ \frac{120}{-1/5}\right\}\right| = 300.$$

Интервал устойчивости оценок по отношению ко второму ограничению принимает следующий вид:

$$\left[b_2 - \Delta b_2^{н};\quad b_2 + \Delta b_2^{в}\right] = \left[60 - 0;\ 60 + 300\right] = \left[60;\ 360\right].$$

По ресурсу III:

$$\Delta b_3^{н} = \min_{\substack{j \\ d_{ij} > 0}} \left\{\frac{x_j^*}{d_{ij}}\right\} = \min\left\{\frac{120}{3/5};\ \frac{0}{1/5}\right\} = 0;$$

$$\Delta b_3^{в} = \left|\max_{\substack{j \\ d_{ij} < 0}} \left\{\frac{x_j^*}{d_{ij}}\right\}\right| = \left|\max\left\{\frac{60}{-2/5}\right\}\right| = 150.$$

Интервал устойчивости оценок по отношению к третьему ограничению принимает следующий вид:

$$\left[b_3 - \Delta b_3^{н};\quad b_3 + \Delta b_3^{в}\right] = \left[300 - 0;\ 300 + 150\right] = \left[300;\ 450\right].$$

Так как изменения ресурсов находятся в пределах устойчивости оценок, то их раздельное влияние на величину прибыли $\Delta f_{i\max}$ определяется произведением оценки $y_i^*$ и величины изменения $\Delta b_i$ (по формуле $\Delta f_{i\max} = \Delta b_i \cdot y_i^*$). Таким образом,

$$\Delta f_{1\max} = y_1^* \Delta b_1 = {}^{8}\!/_{5} \cdot (-10) = -16;$$

$$\Delta f_{2\max} = y_2^* \Delta b_2 = {}^{3}\!/_{5} \cdot (+60) = 36;$$

$$\Delta f_{3\max} = y_3^* \Delta b_3 = {}^{1}\!/_{5} \cdot (+30) = 6.$$

Суммарное влияние $\Delta f_{\max} = \Delta f_{1\max} + \Delta f_{2\max} + \Delta f_{3\max} = -16 + 36 + 6 = 26$.

в) оценим целесообразность введения в план пятого вида продукции *Д*. Для этого по формуле $\Delta_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i - p_j$ вычислим характеристику

$$\Delta_5 = \sum_{i=1}^{3} a_{i5} y_i^* - p_5 = \left(2 \cdot {}^{8}\!/_{5} + 4 \cdot {}^{3}\!/_{5} + 2 \cdot {}^{1}\!/_{5}\right) - 15 = -9 < 0.$$

Так как прибыль превышает затраты, введение в план пятого вида продукции выгодно.

г) приращение третьего ресурса на величину $\Delta b_3 = 100$ находится в пределах устойчивости двойственных оценок. Следовательно, $\Delta f_{3\max} = \Delta b_3 \cdot y_3^* = 100 \cdot {}^{1}\!/_{5} = 20$, в то время как затраты $(\Delta c_i = \Delta b_i \cdot c_i)$ на приобретение 100 ед. ресурса III вида $\Delta c_3 = \Delta b_3 \cdot c_3 = 100 \cdot 0{,}5 = 50$. Поскольку величина $\Delta p$ дополнительной прибыли (9.6) отрицательна $\left(\Delta p_3 = \Delta f_{3\max} - \Delta c_3 = 20 - 50 = -30\right)$, то закупать ресурс III вида нецелесообразно.

*Ответ*:

а) $\overline{x}^* = (60;\ 120;\ 0;\ 0;\ 0;\ 0;\ 0)$, $f_{\max} = 480$;

$\overline{y}^* = \left({}^{8}\!/_{5};\ {}^{3}\!/_{5};\ {}^{1}\!/_{5};\ 0;\ 0; 0;\ {}^{2}\!/_{5}\right)$, $F_{\min} = 480$.

б) $\Delta f_{\max} = 26$.

в) введение в план пятого вида продукции выгодно.

г) закупать ресурс III вида нецелесообразно.

**Пример 9.4**. Предприятие может выпускать 4 вида продукции $П_1$, $П_2$, $П_3$, $П_4$. Для этого используется три вида ресурсов. Общий объем ресурсов равен $b_1 = 2400$, $b_2 = 1200$, $b_3 = 3000$. Нормы расхода ресурса на единицу продукции $j$-того вида заданы матрицей

$$\left(a_{ij}\right) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0{,}5 & 4 \\ 1 & 5 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & 1 \end{bmatrix}.$$

$c_1 = 75$, $c_2 = 30$, $c_3 = 60$, $c_4 = 120$ – цены реализации единицы каждой продукции.

а) определить оптимальный ассортимент выпускаемой продукции, доставляющий предприятию максимум выручки;

б) составить модель двойственной задачи. Используя соответствие между переменными прямой и двойственной задач, выписать оптимальное решение двойственной задачи. Дать содержательный экономический анализ основных и дополнительных переменных прямой и двойственной задач;

в) построить матрицу $\left(\eta_{ik}\right)$ коэффициентов взаимозаменяемости ресурсов. Дать экономическую интерпретацию ее элементов;

г) оценить рентабельность новой продукции и ее цену, характеристики которой $a_{15} = 2$, $a_{25} = 4$, $a_{35} = 3$, $c_5 = 180$.

*Ответ*:

а) $\overline{x}^* = (0; 0; 400; 550;| 0; 0; 50)$, $f_{\max} = 90000$ ден. ед.

б) $\overline{y}^* = \left(30;\ 15;\ 0;|\ 0;\ 75;\ 0;\ 0\right)$, $F_{\min} = 90000$ ден. ед.

в)

| $i$ $\quad k$ | $1\left(y_1^* = 30\right)$ | $2\left(y_2^* = 15\right)$ | $3\left(y_3^* = 0\right)$ |
|---|---|---|---|
| 1 $\left(y_1^* = 30\right)$ | 1 | $1/2$ | 0 |
| 2 $\left(y_2^* = 15\right)$ | 2 | 1 | 0 |
| 3 $\left(y_3^* = 0\right)$ | $\infty$ | $\infty$ | 1 |

г) Продукция $П_5$ будет рентабельной при установлении ее цены $c_5 \geq 120$.

## Задачи

1. Имеются три вида ресурсов I, II и III, которые используются для производства трех видов продукции: *А*, *Б* и *В*. Нормы расхода ресурсов на единицу продукции каждого вида приведены в таблице.

| Ресурс | Норма расхода на единицу продукции | | |
|---|---|---|---|
| | *А* | *Б* | *В* |
| I | 1 | 2 | 0 |
| II | 2 | 1 | 0 |
| III | 0 | 1 | 1 |

В распоряжении предприятия находится 500 единиц ресурса I вида, 550 единиц ресурса II и 200 единиц ресурса III видов. Прибыль от реализации единицы продукции *А* составляет 3 ден. ед., продукции *Б* – 4 ден. ед., продукции *В* – 1 ден. ед.

а) определить оптимальный план производства продукции по критерию максимума прибыли;

б) составить и решить двойственную задачу;

в) оценить целесообразность закупки 250 единиц ресурса II по цене $c_2 = 0{,}7$ ден. ед. за единицу;

г) оценить целесообразность введения в план четвертого вида продукции (*Г*), нормы затрат ресурсов на единицу которого равны 3, 1 и 2, а прибыль от его реализации 5 ден. ед;

д) определить изменение максимальной прибыли при изменении ресурсов I – на (+70) ед., II – на (+200) ед., III – на (–40) ед. Оценить раздельное и суммарное влияние этих изменений.

# ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 10

## Транспортная задача

Простейшая задача на перевозки по критерию стоимости формулируется следующим образом. В *m* пунктах производства $A_1, \ldots, A_m$ находится однородный продукт (уголь, картофель и т.д.) в количествах соответственно $a_1, \ldots, a_m$ единиц, который должен быть доставлен *n* потребителям $B_1, \ldots, B_n$ в количествах $b_1, \ldots, b_n$ единиц. Известны транспортные издержки $c_{ij}$ (расходы), связанные с перевозкой единицы продукта из пункта $A_i$ $\left(i = \overline{1,\ m}\right)$ в пункт $B_j$ $\left(j = \overline{1,\ n}\right)$. Требуется составить такой план перевозок, который обеспечивал бы при минимальных транспортных издержках удовлетворение спроса всех пунктов потребления за счет распределения всего продукта, произведенного всеми пунктами поставки.

*Для разрешимости поставленной задачи необходимо и достаточно, чтобы сумма запасов продукта равнялась сумме спроса на него, т. е.*

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \qquad (10.1)$$

Такую транспортную задачу называют *закрытой* или *задачей с правильным балансом*, если же условие (10.1) нарушается, – открытой. На практике условие (10.1), как правило, не выполняется. Если суммарный запас продукта превышает общий спрос, т. е. $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$, то в рассмотрение вводится фиктивный ($n$ + 1)-й пункт потребления $B_{n+1}$ со спросом, равным небалансу, т. е. $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$ и одинаковыми тарифами, обычно равными нулю. Если же общий спрос потребителей больше суммарного запаса продукта, то вводится фиктивный ($m$ + 1)-й пункт отправления $A_{m+1}$ с запасом продукта $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$. Тарифы на доставку продукта фиктивным поставщиком полагают равными нулю, что не отразится на целевой функции.

Предположим, что рассматривается задача закрытого типа. Поместим все данные задачи в таблицу, которую будем называть *распределительной* или *транспортной*. За $x_{ij}$ примем количество груза, перевозимого из $i$-того пункта отправления в $j$-тый пункт назначения. Предполагаем, что все $x_{ij} \geq 0$, т.е. обратные перевозки не рассматриваются.

| | $B_1(b_1)$ | $B_2(b_2)$ | … | $B_n(b_n)$ |
|---|---|---|---|---|
| $A_1(a_1)$ | $c_{11}$ $x_{11}$ | $c_{12}$ $x_{12}$ | … | $c_{1n}$ $x_{1n}$ |
| $A_2(a_2)$ | $c_{21}$ $x_{21}$ | $c_{22}$ $x_{22}$ | … | $c_{2n}$ $x_{2n}$ |
| … | … | … | … | … |
| $A_m(a_m)$ | $c_{m1}$ $x_{m1}$ | $c_{m2}$ $x_{m2}$ | … | $c_{mn}$ $x_{mn}$ |

.

Матрицу $\left(c_{ij}\right)_{m\times n}$ называют *матрицей тарифов*, а числа $c_{ij}$ – *тарифами*.

*Планом транспортной задачи* называют матрицу $X = \left(x_{ij}\right)_{m\times n}$. Ее еще называют *матрицей перевозок*.

Составим математическую модель задачи. Целевая функция $f$, выражающая суммарные транспортные затраты, связанные с реализацией плана $X$ перевозок, запишется в виде

$$f = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \ldots + c_{mn}x_{mn} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}\,. \tag{10.2}$$

Переменные $x_{ij}$ должны удовлетворять ограничениям по запасам

$$x_{i1} + x_{i2} + \ldots + x_{in} = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad \left(i = \overline{1,\ m}\right) \tag{10.3}$$

и ограничениям по потребностям

$$x_{1j} + x_{2j} + \ldots + x_{mj} = \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad \left(j = \overline{1,\ n}\right) \tag{10.4}$$

все $\qquad x_{ij} \geq 0 \quad \left(i = \overline{1,\ m};\quad j = \overline{1,\ n}\right)$

**Пример 10.1.** В резерве железнодорожных станций $A_1$, $A_2$ и $A_3$ находится соответственно 100, 150 и 50 порожних вагонов, пригодных для перевозки зерна. Зерно находится в четырех пунктах, которым требуется 75, 80, 60 и 85 вагонов соответственно. Стоимость перегона одного вагона со станции $A_1$ в указанные пункты составляет 6, 7, 3 и 5 ден. ед., со станции $A_2$ – 1, 2, 5 и 6 ден. ед., со станции $A_3$ – 3, 10, 20 и 1 ден. ед. соответственно. Составить экономико-математическую модель задачи, пользуясь которой, можно найти вариант перегона вагонов со станций в пункты погрузки зерна, при котором общие затраты минимизируются.

*Решение*:

В качестве «груза» следует рассматривать вагоны, «поставщиками» будут станции $A_1$, $A_2$ и $A_3$, «потребителями» будут пункты погрузки зерна, смысл тарифов $c_{ij}$ – стоимость перегона 1 вагона от поставщика к потребителю. Условия задачи запишем в таблицу.

| | $B_1(75)$ | $B_2(80)$ | $B_3(60)$ | $B_4(85)$ |
|---|---|---|---|---|
| $A_1(100)$ | 6<br>$x_{11}$ | 7<br>$x_{12}$ | 3<br>$x_{13}$ | 5<br>$x_{14}$ |
| $A_2(150)$ | 1<br>$x_{21}$ | 2<br>$x_{22}$ | 5<br>$x_{23}$ | 6<br>$x_{24}$ |
| $A_3(50)$ | 3<br>$x_{31}$ | 10<br>$x_{32}$ | 20<br>$x_{33}$ | 1<br>$x_{34}$ |

.

Переходя к построению экономико-математической модели, обозначим через $x_{ij}$ количество вагонов, направляемых со станции $A_i$ в пункт $B_j$. Целевая функция $f$ должна выражать общие затраты по перегону порожняка со всех станций во все пункты погрузки зерна (затраты минимизируются), поэтому

$$f = 6x_{11} + 7x_{12} + 3x_{13} + \ldots + 10x_{32} + 20x_{33} + 1x_{34} \quad (\min).$$

Приступая к формированию ограничений, сравниваем суммарный резерв вагонов 100 + 150 + 50 = 300 с общим количеством вагонов, необходимым всем пунктам погрузки зерна: 75 + 80 + 60 + 85 = 300. Эти суммы равны, задача с правильным балансом (закрытого типа).

Условия использования всего вагонного парка имеют вид

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 100 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 150 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 50 \end{cases}$$

Условия удовлетворения заявок для всех пунктов погрузки зерна запишутся следующим образом:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} = 75 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 80 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 60 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 85 \end{cases}$$

По смыслу задачи переменные должны выражаться неотрицательными числами $x_{ij} \geq 0 \quad \left(i = \overline{1,\ 3}; \quad j = \overline{1,\ 4}\right)$.

*Ответ*:

$$f = 6x_{11} + 7x_{12} + 3x_{13} + \ldots + 10x_{32} + 20x_{33} + 1x_{34} \quad (\min),$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 100 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 150 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 50 \end{cases}; \qquad \begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} = 75 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 80 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 60 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 85 \end{cases};$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \left(i = \overline{1,\ 3}; \quad j = \overline{1,\ 4}\right)$$

**Пример 10.2.** Составить экономико-математическую модель задачи, при помощи которой можно найти план посева зерновых культур на участках различного плодородия, максимизирующий прибыль. Все необходимые данные приведены в таблице

| Зерновая культура | Урожайность по участкам (ц/га) | | | | Посевная площадь, га | Закупочные цены ден. ед. | Затраты средств по участкам на 1 га, ден. ед. | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | I | II | III | IV | | | I | II | III | IV |
| Пшеница | 35 | 25 | 20 | 15 | 2400 | 6,5 | 50 | 40 | 40 | 40 |
| Кукуруза на зерно | 60 | 40 | 30 | 50 | 1700 | 5,0 | 90 | 90 | 70 | 65 |
| Ячмень | 30 | 20 | 15 | 15 | 350 | 4,3 | 50 | 40 | 40 | 45 |
| Рожь | 25 | 30 | 20 | 15 | 250 | 7,0 | 50 | 50 | 45 | 40 |
| Просо | 40 | 20 | 15 | 10 | 100 | 7,2 | 60 | 50 | 50 | 50 |
| Площадь участка, га | 3000 | 1000 | 300 | 500 | 4800 | | | | | |

**Пример 10.3.** Пусть имеются две аптеки, в каждую из которых требуется поставить некоторый препарат $X$ соответственно в количествах $b_1$ и $b_2$. Этот препарат производится на трех фармацевтических заводах, возможности поставок которых $a_1$, $a_2$, $a_3$. Суммарная потребность аптек равна сумме возможных поставок, т.е. $b_1 + b_2 = a_1 + a_2 + a_3$.

Стоимости $c_{ij}$ поставок некоторого количества препарата из пунктов производства $A_i$ в пункты потребления $B_j$ различны. Необходимо так организовать поставки, чтобы их суммарная стоимость была минимальной.

## Задачи

1. При поставках медикаментов критерием является минимальная стоимость их доставки. Запасы вакцины и потребность в ней указаны в приведенной ниже таблице (в центнерах). Стоимость доставки 1 центнера медикаментов указана. Составить модель задачи, в которой критерием является минимальная стоимость доставки.

| | $B_1(30)$ | $B_2(10)$ | $B_3(20)$ | $B_4(40)$ |
|---|---|---|---|---|
| $A_1(16)$ | 5 | 10 | 5 | 10 |
| $A_2(40)$ | 8 | 4 | 4 | 8 |
| $A_3(32)$ | 6 | 3 | 6 | 3 |
| $A_4(12)$ | 4 | 7 | 7 | 5 |

.

2. Студенческие отряды $CO$-1, $CO$-2 и $CO$-3 численностью в 40, 30 и 35 человек принимают участие в сельскохозяйственных работах. Для уборки картофеля на полях $\Pi_1$, $\Pi_2$, $\Pi_3$ и $\Pi_4$ необходимо выделить соответственно 15, 35, 21 и 24 человек. Производительность труда студентов зависит от урожайности картофеля, а также от состава отряда и характеризуется для указанных отрядов и полей элементами матрицы

$$\left(p_{ij}\right)=\begin{bmatrix} 9 & 7 & 5 & 5 \\ 6 & 8 & 5 & 7 \\ 9 & 6 & 8 & 5 \end{bmatrix}.$$

Составить модель задачи, в которой критерием является максимальное количество картофеля, собранного студентами за рабочий день.

## ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 11

### Опорный план транспортной задачи и его построение

**Теорема 11.1.** *Ранг матрицы системы ограничительных уравнений транспортной задачи на единицу меньше числа уравнений, т.е. $r = m + n - 1$.*

План перевозок будем строить непосредственно в транспортной таблице. Если переменная $x_{ij}$ принимает значение $a_{ij}$, отличное от нуля, то в соответствующую клетку $(i; j)$ таблицы будем вписывать это значение, если же $x_{ij} = 0$, то клетку $(i; j)$ оставляем свободной. Согласно сформулированной теореме, каждый опорный план будет «загружать» $m + n - 1$ клеток, а остальные останутся свободными.

Второе требование к опорному плану связано с циклами в транспортной таблице.

*Циклом в транспортной таблице* называют набор клеток, в котором две и только две соседние клетки расположены в одной строке или одном столбце и последняя клетка набора лежит в той же строке или столбце, что и первая.

Упомянутый набор клеток можно записать в виде

$$(i_1;\ j_1)\to(i_1;\ j_2)\to(i_2;\ j_2)\to\ldots\to(i_k;\ j_s)\to(i_k;\ j_1).$$

Графическим изображением цикла является замкнутая ломаная линия (контур), звенья которой расположены только в строках и столбцах таблицы. Каждое звено соединяет две и только две соседние клетки цикла. Таким образом, *план транспортной задачи является опорным тогда и только тогда, когда из занятых им $m + n - 1$ клеток нельзя образовать ни одного цикла*.

При решении транспортной задачи будем использовать следующие этапы:

1) построение начального опорного плана;

2) оценка этого плана;

3) переход от имеющегося опорного плана к новому опорному плану с меньшими транспортными затратами (при решении задачи на минимум).

Рассмотрим способы построения начального опорного плана. Составить опорный план можно различными способами. Однако для всех способов непременным является требование, чтобы в процессе заполнения распределительной таблицы в каждую загружаемую клетку вписывалась максимально возможная по величине поставка. В таком случае каждый раз будет либо исчерпываться весь запас груза у поставщика («закрывается строка»), либо полностью удовлетворяется спрос потребителя («закрывается столбец»).

Способ **«северо-западного угла»**

*Первой загружается клетка (1; 1). Если закрывается строка, то следующей загружается клетка (2; 1); если же закрывается столбец, то следующей загружается клетка (1; 2). Каждый раз загружается клетка, соседняя либо по строке, либо по столбцу (в зависимости от конкретных данных задачи). Последней будет загружена клетка (m, n). В результате загруженные клетки расположатся вдоль диагонали (1; 1) – (m, n), поэтому способ «северо-западного угла» называют еще диагональным способом.*

**Пример 11.1.** Построить исходный опорный план транспортной задачи, условие которой представлено в таблице, по правилу «северо-западного угла»

| Поставщики | Потребители | | | | Запас груза $a_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | |
| $A_1$ | 4 | 3 | 2 | 6 | 50 |
| $A_2$ | 2 | 4 | 5 | 1 | 70 |
| $A_3$ | 3 | 6 | 7 | 5 | 100 |
| Потребность в грузе $b_j$ | 40 | 60 | 50 | 70 | |

*Решение*:

Начальная транспортная таблица имеет вид

| | $B_1(40)$ | $B_2(60)$ | $B_3(50)$ | $B_4(70)$ |
|---|---|---|---|---|
| $A_1(50)$ | 4<br>$x_{11}$ | 3<br>$x_{12}$ | 2<br>$x_{13}$ | 6<br>$x_{14}$ |
| $A_2(70)$ | 2<br>$x_{21}$ | 4<br>$x_{22}$ | 5<br>$x_{23}$ | 1<br>$x_{24}$ |
| $A_3(100)$ | 3<br>$x_{31}$ | 6<br>$x_{32}$ | 7<br>$x_{33}$ | 5<br>$x_{34}$ |

.

Проверим условие $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$: 50 + 70 + 100 = 40 + 60 + 50 + 70 = $= 220$. Модель закрытого типа, можно построить начальный опорный план методом «северо-западного угла».

В клетку (1; 1) вписываем число $x_{11} = \min(50,\ 40) = 40$ единицам. В данном случае потребность потребителя $B_1$ полностью удовлетворяется запасом поставщика $A_1$. Первый столбец в дальнейшем в расчет не принимается.

| | $B_1(40)$ | $B_2(60)$ | $B_3(50)$ | $B_4(70)$ |
|---|---|---|---|---|
| $A_1(50)$ | 4<br>40 | 3<br>$x_{12}$ | 2<br>$x_{13}$ | 6<br>$x_{14}$ |
| $A_2(70)$ | 2<br>– | 4<br>$x_{22}$ | 5<br>$x_{23}$ | 1<br>$x_{24}$ |
| $A_3(100)$ | 3<br>– | 6<br>$x_{32}$ | 7<br>$x_{33}$ | 5<br>$x_{34}$ |

.

Потребность потребителя $B_2$ за счет поставщика $A_1$ можно удовлетворить только частично. В клетку (1; 2) вписываем число $x_{12} = \min(50-40,\ 60) = \min(10,\ 60) = 10$ единиц. В результате такого распределения запас груза у поставщика $A_1$ полностью исчерпан, т. е. первая строка таблицы в дальнейшем в расчет не принимается.

| | $B_1(40)$ | $B_2(60)$ | $B_3(50)$ | $B_4(70)$ |
|---|---|---|---|---|
| $A_1(50)$ | 4<br>40 | 3<br>10 | 2<br>– | 6<br>– |
| $A_2(70)$ | 2<br>– | 4<br>50 | 5<br>$x_{23}$ | 1<br>$x_{24}$ |
| $A_3(100)$ | 3<br>– | 6<br>– | 7<br>$x_{33}$ | 5<br>$x_{34}$ |

.

Поскольку потребность потребителя $B_2$ удовлетворена за счет поставщика $A_1$ частично, переходим к распределению запаса груза от поставщика $A_2$. В клетку (2; 2) вписываем число $x_{22} = \min(70,\ 60-10) = \min(70,\ 50) = 50$ ед. В этом случае потребность потребителя $B_2$ полностью удовлетворена (далее не рассматриваем $B_2$), а у поставщика $A_2$ осталось 20 ед. груза.

| | $B_1(40)$ | $B_2(60)$ | $B_3(50)$ | $B_4(70)$ |
|---|---|---|---|---|
| $A_1(50)$ | 4<br>40 | 3<br>10 | 2<br>– | 6<br>– |
| $A_2(70)$ | 2<br>– | 4<br>50 | 5<br>20 | 1<br>– |
| $A_3(100)$ | 3<br>– | 6<br>– | 7<br>$x_{33}$ | 5<br>$x_{34}$ |

Потребность потребителя $B_3$ за счет поставщика $A_2$ можно удовлетворить частично (на 20 ед.). В клетку (2; 3) вписываем число $x_{23} = \min(20, 50) = 20$ ед. В этом случае запас груза у поставщика $A_2$ полностью исчерпан и переходим к распределению запаса груза поставщика $A_3$.

В клетку (3; 3) вписываем число $x_{33} = \min(100, 50-20) = = \min(100, 30) = 30$ ед. В результате потребность потребителя $B_3$ полностью удовлетворена, а у поставщика $A_3$ осталось 70 ед. груза.

Потребность потребителя $B_4$ составляет 70 ед., а у поставщика $A_3$ осталось 70 ед. груза. В клетку (3; 4) вписываем число $x_{34} = 70$ ед. Окончательно получаем таблицу

| | $B_1(40)$ | $B_2(60)$ | $B_3(50)$ | $B_4(70)$ |
|---|---|---|---|---|
| $A_1(50)$ | 4<br>40 | 3<br>10 | 2 | 6 |
| $A_2(70)$ | 2 | 4<br>50 | 5<br>20 | 1 |
| $A_3(100)$ | 3 | 6 | 7<br>30 | 5<br>70 |

.

Исходным опорным планом перевозок является

$$X_1 = \begin{bmatrix} 40 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 30 & 70 \end{bmatrix}$$

Этому плану соответствует значение целевой функции

$$f_1 = 4 \cdot 40 + 3 \cdot 10 + 4 \cdot 50 + 5 \cdot 20 + 7 \cdot 30 + 5 \cdot 70 = 1050.$$

$$Ответ:\ X_1 = \begin{bmatrix} 40 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 30 & 70 \end{bmatrix},\ f_1 = 1050$$

*Способ* **«минимального элемента»**

*Первой в распределительной таблице загружается клетка с наименьшим тарифом. Далее загружается клетка той же строки (или столбца) со следующим по величине тарифом и т. д.*

**Пример 11.2.** Составить исходный опорный план транспортной задачи, условие которой представлено в примере 11.1, по правилу «минимального элемента».

*Решение*:

Начальная транспортная таблица

| | $B_1(40)$ | $B_2(60)$ | $B_3(50)$ | $B_4(70)$ |
|---|---|---|---|---|
| $A_1(50)$ | 4<br>$x_{11}$ | 3<br>$x_{12}$ | 2<br>$x_{13}$ | 6<br>$x_{14}$ |
| $A_2(70)$ | 2<br>$x_{21}$ | 4<br>$x_{22}$ | 5<br>$x_{23}$ | 1<br>$x_{24}$ |
| $A_3(100)$ | 3<br>$x_{31}$ | 6<br>$x_{32}$ | 7<br>$x_{33}$ | 5<br>$x_{34}$ |

.

Загрузка начинается с клетки, которой соответствует наименьший тариф $c_{ij}$ из всей матрицы тарифов. Такой клеткой является (2; 4), $c_{24} = 1$. В клетку (2; 4) вписываем число $x_{24} = \min(70,\ 70) = 70$ и исключаем из дальнейшего рассмотрения вторую строку и четвертый столбец.

| | $B_1(40)$ | $B_2(60)$ | $B_3(50)$ | $B_4(70)$ |
|---|---|---|---|---|
| $A_1(50)$ | 4<br>$x_{11}$ | 3<br>$x_{12}$ | 2<br>$x_{13}$ | 6<br>– |
| $A_2(70)$ | 2<br>– | 4<br>– | 5<br>– | 1<br>70 |
| $A_3(100)$ | 3<br>$x_{31}$ | 6<br>$x_{32}$ | 7<br>$x_{33}$ | 5<br>– |

Из оставшихся тарифов наименьшим является $c_{13} = 2$. В клетку (1; 3) вписываем число $x_{13} = \min(50,\ 50) = 50$. В этом случае из дальнейшего рассмотрения исключаются первая строка и третий столбец.

| | $B_1(40)$ | $B_2(60)$ | $B_3(50)$ | $B_4(70)$ |
|---|---|---|---|---|
| $A_1(50)$ | 4<br>– | 3<br>– | 2<br>50 | 6<br>– |
| $A_2(70)$ | 2<br>– | 4<br>– | 5<br>– | 1<br>70 |
| $A_3(100)$ | 3<br>$x_{31}$ | 6<br>$x_{32}$ | 7<br>– | 5<br>– |

.

Распределяем груз от поставщика $A_3$. В третьей строке клетка (3; 1) имеет наименьший тариф, $c_{31}=3$. В эту клетку заносим число $x_{31}=$ $=\min(100,\ 40)=40$. Оставшееся количество единиц груза от поставщика $A_3$ помещаем в клетку (3; 2) $x_{32}=\min(100-40,\ 60)=(60,\ 60)=60$.

| | $B_1(40)$ | $B_2(60)$ | $B_3(50)$ | $B_4(70)$ |
|---|---|---|---|---|
| $A_1(50)$ | 4<br>– | 3<br>– | 2<br>50 | 6<br>– |
| $A_2(70)$ | 2<br>– | 4<br>– | 5<br>– | 1<br>70 |
| $A_3(100)$ | 3<br>40 | 6<br>60 | 7<br>– | 5<br>– |

.

В результате полного распределения грузов получаем исходное опорное решение

$$X_2=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 70 \\ 40 & 60 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

для которого $f_2=2\cdot 50+1\cdot 70+3\cdot 40+6\cdot 60=650$.

Очевидно, что для данного опорного плана не выполняется условие $m+n-1=3+4-1=6$. План $X_2$ вырожденный.

*Ответ*: $X_2=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 70 \\ 40 & 60 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $f_2=650$.

### Способ Фогеля

*Прежде всего, по каждой строке и каждому столбцу находят разности двух наименьших тарифов (будем записывать их за пределами распределительной таблицы напротив соответствующих строк и столбцов). Из этих разностей выделяется наибольшая, и в соответствующей строке (столбце) загружается клетка с наименьшим тарифом. Закрывшаяся строка (столбец) исключается из дальнейшего рассмотрения. Описанная операция повторяется до тех пор, пока не закроются все строки и столбцы.*

*Если наибольшая разность окажется сразу в нескольких строках и столбцах, то выбирают из них ту строку (столбец), в которой придется загружать клетку с меньшим тарифом. Если и эти показатели будут одинаковыми, то выбирают клетку, в которую придется записать наибольшую поставку.*

Опорный план, построенный способом Фогеля, весьма близок по затратам к оптимальному плану, а нередко получается сразу оптимальный план. Поэтому опорный план, построенный этим способом, иногда принимают за приближенное решение задачи.

Среди задач транспортного типа часто встречаются *вырожденные задачи*, т. е. такие, в опорных планах которых некоторые базисные переменные принимают нулевые значения. Вырожденность задачи практически может проявиться уже при построении начального опорного плана, когда после загрузки клетки одновременно закрываются и строка, и столбец. В этом случае, чтобы набрать необходимый комплект из $m + n - 1$ клеток, в очередную подлежащую загрузке клетку в той же строке (столбце) вписывают нулевую поставку и считают клетку загруженной.

**Пример 11.3.** Составить методом Фогеля опорный план транспортной задачи, условие которой дано в примере 11.1.

*Решение:*

Поступаем следующим образом. По каждой строке и каждому столбцу определяем разность между двумя наименьшими тарифами и из всех разностей выбираем наибольшую. Такой разностью на первом этапе является $c_{34} - c_{24} = 5 - 1 = 4$ для четвертого столбца. В клетку (2; 4) вписываем число $x_{24} = \min(70,\ 70)$. Остаток груза по второй строке равен нулю, и потребность в грузе по четвертому столбцу равна нулю, а это значит, что на втором этапе вторая строка и четвертый столбец в расчет приниматься не будут.

На втором этапе наибольшей разностью будет $c_{33} - c_{13} = 7 - 2 = 5$ в третьем столбце. В клетку (1; 3) вписываем число $x_{13} = \min(50,\ 50) = 50$. На данном этапе остатки груза по первой строке и третьему столбцу равны нулю, т. е. первая строка и третий столбец на следующем этапе в расчет не принимаются.

| | $B_1(40)$ | $B_2(60)$ | $B_3(50)$ | $B_4(70)$ | Запас груза $a_i$ | Этап № 1 | Этап № 2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A_1(50)$ | 4 | 3 | 2<br>$50_2$ | 6 | 50; 0 | 1 | 1 |
| $A_2(70)$ | 2 | 4 | 5 | 1<br>$70_1$ | 70; 0 | 1 | – |
| $A_3(100)$ | 3<br>$40_3$ | 6<br>$60_4$ | 7 | 5 | 100; 50; 0 | 2 | 3 |
| Потребность в грузе $b_j$ | 40; 0 | 60; 0 | 50; 0 | 70; 0 | 220 | | |
| Этап № 1 | 1 | 1 | 3 | <u>***4***</u> | | | |
| Этап № 2 | 1 | 3 | <u>***5***</u> | – | | | |

Остались одна строка и два столбца. В этом случае запас груза от поставщика $A_3$ распределяем по третьей строке для полного удовлетворения спроса потребителей $B_1$ и $B_2$. Последовательность поставок груза в соответствующую клетку на каждом этапе можно отмечать числом в нижнем правом углу клетки. Проделав несколько таких этапов, получим опорный план перевозок, который близок к оптимальному, а иногда совпадает с ним.

Полученный опорный план задачи можно представить в виде

$$X_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 70 \\ 40 & 60 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Для этого плана транспортные издержки $f_3 = 2\cdot 50 + 1\cdot 70 + 3\cdot 40 +$ $+6\cdot 60 = 650$ ден. ед. План $X_3$ вырожденный. Такой же план получен и по правилу «минимального элемента». Естественно, совпадение планов $X_2$ и $X_3$ случайно.

*Ответ*: $X_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 70 \\ 40 & 60 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $f_3 = 650$ ден. ед

**Пример 11.4.** По условиям примера 10.1. составить опорный план способом Фогеля.

*Ответ*: $X_4 = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 60 & 35 \\ 70 & 80 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 50 \end{bmatrix}$, $f_{\min} = 665$ ден. ед.

## Задачи

– для задач определить опорные планы перевозок по правилу «северо-западного угла», по правилу «минимального элемента», методом Фогеля и соответствующие значения целевых функций:

1.

| Поставщики | Потребители | | | | Запас груза $a_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | |
| $A_1$ | 5 | 1 | 2 | 3 | 300 |
| $A_2$ | 6 | 3 | 7 | 1 | 200 |
| $A_3$ | 4 | 5 | 3 | 2 | 500 |
| $A_4$ | 2 | 4 | 6 | 4 | 700 |
| Потребность в грузе $b_j$ | 230 | 420 | 650 | 400 | 1700 |

2.

| Поставщики | Потребители | | | | | | Запас груза $a_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $B_5$ | $B_6$ | |
| $A_1$ | 5 | 3 | 1 | 4 | 2 | 6 | 1780 |
| $A_2$ | 4 | 2 | 3 | 6 | 1 | 3 | 2000 |
| $A_3$ | 1 | 3 | 7 | 4 | 5 | 2 | 1530 |
| $A_4$ | 3 | 4 | 6 | 7 | 1 | 5 | 2860 |
| Потребность в грузе $b_j$ | 850 | 1870 | 1950 | 1670 | 1000 | 830 | 8170 |

3.

| Поставщики | Потребители | | | | | | | Запас груза $a_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $B_5$ | $B_6$ | $B_7$ | |
| $A_1$ | 5 | 1 | 4 | 3 | 6 | 7 | 2 | 1040 |
| $A_2$ | 4 | 2 | 6 | 5 | 1 | 8 | 3 | 2700 |
| $A_3$ | 7 | 3 | 1 | 4 | 2 | 5 | 6 | 1885 |
| $A_4$ | 2 | 5 | 7 | 1 | 4 | 3 | 4 | 1457 |
| Потребность в грузе $b_j$ | 590 | 740 | 875 | 1537 | 1200 | 1500 | 640 | 7082 |

# ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 12

## Распределительный метод

Оптимальный план транспортной задачи находится в результате упорядоченного преобразования одного опорного плана в другой так, что транспортные расходы после каждого преобразования уменьшаются. Упомянутые преобразования осуществляются непосредственно в распределительной таблице. При этом используется следующее свойство циклов: *если в распределительной таблице содержится опорный план, то для* *каждой свободной клетки можно образовать, и при том только один, цикл, содержащий эту свободную клетку и некоторую часть загруженных клеток*. Эти циклы изображаются в распределительной таблице контурами, одна вершина которых находится в свободной клетке, а остальные – только в загруженных клетках.

Если пронумеровать клетки, начиная со свободной, то при преобразовании прежнего плана в новый план, поставки в нечетных клетках увеличиваются на $\lambda$, а в четных клетках уменьшаются на $\lambda$. Эту операцию называют *сдвигом* $\lambda$ *по циклу*.

В результате сдвига загружается свободная клетка $(k;\ s)$. Чтобы освободить при этом одну клетку, $\lambda$ должна равняться минимальной из поставок $x_{ij}$ в четных клетках цикла, т. е. $\lambda = \min\limits_{\text{четн.}} x_{ij}$.

При сдвиге $\lambda$ по циклу вместо одной может освободиться сразу несколько клеток (вырожденная задача). Свободной оставляют только одну (с наибольшим тарифом) клетку, а в остальные освободившиеся клетки вписывают нули и считают их загруженными.

Величину

$$\Delta_{ks} = c_{ks} - c_{kl} + c_{ml} - \ldots - c_{ps} \tag{12.1}$$

называют оценкой свободной клетки $(k;\ s)$. Если эта оценка отрицательная (целевая функция находится на минимум), то клетку $(k;\ s)$ следует загружать. Такие клетки называют *перспективными*. Если же оценки всех свободных клеток неотрицательные, то содержащийся в распределительной таблице опорный план является оптимальным.

Если в распределительной таблице, содержащей оптимальный план, имеются свободные клетки с нулевыми оценками, то задача имеет не единственный оптимальный план. Загружая свободную клетку с нулевой оценкой, можно найти еще один оптимальный опорный план. И так для каждой свободной клетки с нулевой оценкой. Все множество оптимальных планов можно записать в виде выпуклой линейной комбинации найденных оптимальных опорных планов.

Если в транспортной таблице имеется несколько свободных клеток с отрицательными оценками, загружают свободную клетку с наибольшей по абсолютной величине отрицательной оценкой.

Алгоритм **распределительного** метода

1. *Условия задачи записывают в форме распределительной таблицы.*
2. *Сравнивают общий запас груза с суммарным спросом и в случае нарушения равенства (10.1) вводят в рассмотрение фиктивного поставщика (или потребителя).*
3. *Строят начальный опорный план.*
4. *Вычисляют оценки* $\Delta_{ks}$ *свободных клеток по формуле (12.1). Если оценки всех свободных клеток неотрицательны, то построенный опорный план является оптимальным и остается подсчитать минимальные расходы* $f_{\min}$. *Если же среди оценок есть отрицательные, то выбирают клетку с наибольшей по абсолютной величине отрицательной оценкой и переходят к следующему пункту алгоритма.*
5. *Загружают выделенную в предыдущем пункте свободную клетку, получают новый опорный план и возвращаются к п. 4 алгоритма.*

**Пример 12.1.** Найти оптимальный план перегона вагонов по условию примера 10.1.

| | $B_1(75)$ | $B_2(80)$ | $B_3(60)$ | $B_4(85)$ |
|---|---|---|---|---|
| $A_1(100)$ | 6<br>$x_{11}$ | 7<br>$x_{12}$ | 3<br>$x_{13}$ | 5<br>$x_{14}$ |
| $A_2(150)$ | 1<br>$x_{21}$ | 2<br>$x_{22}$ | 5<br>$x_{23}$ | 6<br>$x_{24}$ |
| $A_3(50)$ | 3<br>$x_{31}$ | 10<br>$x_{32}$ | 20<br>$x_{33}$ | 1<br>$x_{34}$ |

.

*Решение:*

Составим начальный опорный план, например, способом «северо-западного угла» , получаем:

| | $B_1(75)$ | $B_2(80)$ | $B_3(60)$ | $B_4(85)$ |
|---|---|---|---|---|
| $A_1(100)$ | 6<br>75 | 7<br>25 | 3 | 5 |
| $A_2(150)$ | 1 | 2<br>55 | 5<br>60 | 6<br>35 |
| $A_3(50)$ | 3 | 10 | 20 | 1<br>50 |

, $f_1 = 1295$.

Для всех свободных клеток составляем циклы:

$$\Delta_{13} = c_{13} - c_{23} + c_{22} - c_{12} = 3 - 5 + 2 - 7 = -7:$$

$$\Delta_{14} = c_{14} - c_{24} + c_{22} - c_{12} = 5 - 6 + 2 - 7 = -6;$$

$$\Delta_{21} = c_{21} - c_{11} + c_{12} - c_{22} = 1 - 6 + 7 - 2 = 0;$$

$$\Delta_{31} = c_{31} - c_{11} + c_{12} - c_{22} + c_{24} - c_{34} = 3 - 6 + 7 - 2 + 6 - 1 = 7;$$

$$\Delta_{32} = c_{32} - c_{34} + c_{24} - c_{22} = 10 - 1 + 6 - 2 = 13;$$

$$\Delta_{33} = c_{33} - c_{34} + c_{24} - c_{23} = 20 - 1 + 6 - 5 = 20.$$

Поскольку для свободных клеток (1; 3) и (1; 4) оценки отрицательны, то опорный план не является оптимальным. Для улучшения плана выбираем клетку с наибольшей по абсолютной величине отрицательной оценкой (клетка (1; 3)) и т. к. $\lambda = \min\limits_{четн.} x_{ij} = \min\limits_{четн.}\{60;\ 25\} = 25$, то сдвигаем по циклу $\lambda = 25$.

Находим новый опорный план

| | $B_1(75)$ | $B_2(80)$ | $B_3(60)$ | $B_4(85)$ |
|---|---|---|---|---|
| $A_1(100)$ | 6<br>75 | 7 | 3<br>25 | 5 |
| $A_2(150)$ | 1 | 2<br>80 | 5<br>35 | 6<br>35 |
| $A_3(50)$ | 3 | 10 | 20 | 1<br>50 |

, $f_2 = 1120$.

Исследуем построенный опорный план на оптимальность. Вновь находим оценки для свободных клеток

$$\Delta_{12} = c_{12} - c_{13} + c_{23} - c_{22} = 7 - 3 + 5 - 2 = 7;$$

$$\Delta_{14} = c_{14} - c_{24} + c_{23} - c_{13} = 5 - 6 + 5 - 3 = 1;$$

$$\Delta_{21} = c_{21} - c_{23} + c_{13} - c_{11} = 1 - 5 + 3 - 6 = -7;$$

$$\Delta_{31} = c_{31} - c_{11} + c_{13} - c_{23} + c_{24} - c_{34} = 3 - 6 + 3 - 5 + 6 - 1 = 0;$$

$$\Delta_{32} = c_{32} - c_{34} + c_{24} - c_{22} = 10 - 1 + 6 - 2 = 13;$$

$$\Delta_{33} = c_{33} - c_{34} + c_{24} - c_{23} = 20 - 1 + 6 - 5 = 20.$$

Оценка $\Delta_{21} = -7$ отрицательная. Сдвигаем по циклу $\lambda = \min\limits_{\text{четн.}} x_{ij} = \min\limits_{\text{четн.}}\{35;\ 75\} = 35$. Получаем новый опорный план:

| | $B_1(75)$ | $B_2(80)$ | $B_3(60)$ | $B_4(85)$ |
|---|---|---|---|---|
| $A_1(100)$ | 6<br>40 | 7 | 3<br>60 | 5 |
| $A_2(150)$ | 1<br>35 | 2<br>80 | 5 | 6<br>35 |
| $A_3(50)$ | 3 | 10 | 20 | 1<br>50 |

, $f_3 = 875$.

$$\Delta_{12} = c_{12} - c_{22} + c_{21} - c_{11} = 0;\ \Delta_{14} = c_{14} - c_{24} + c_{21} - c_{11} = -6;$$

$$\Delta_{23} = c_{23} - c_{13} + c_{11} - c_{21} = 7;\ \Delta_{31} = c_{31} - c_{21} + c_{24} - c_{34} = 7;$$

$$\Delta_{32} = c_{32} - c_{34} + c_{24} - c_{22} = 13;\ \Delta_{33} = c_{33} - c_{34} + c_{24} - c_{21} + c_{11} - c_{13} = 27.$$

Оценка $\Delta_{14} = -6$ отрицательна, полученный план не оптимален. Заполняя клетку (1; 4) поставкой $\lambda = \min\limits_{четн.} x_{ij} = \min\limits_{четн.} \{35;\ 40\} = 35$, получаем следующий опорный план:

| | $B_1(75)$ | $B_2(80)$ | $B_3(60)$ | $B_4(85)$ |
|---|---|---|---|---|
| $A_1(100)$ | 6<br>5 | 7 | 3<br>60 | 5<br>35 |
| $A_2(150)$ | 1<br>70 | 2<br>80 | 5 | 6 |
| $A_3(50)$ | 3 | 10 | 20 | 1<br>50 |

, $f_4 = 665$,

где оценки всех свободных клеток неотрицательны: $\Delta_{12} = 0$, $\Delta_{23} = 7$, $\Delta_{24} = 6$, $\Delta_{31} = 1$, $\Delta_{32} = 7$, $\Delta_{33} = 21$.

Этот опорный план является оптимальным. Ему соответствуют минимальные транспортные расходы $f_{\min} = 665$ ден. ед. Итак, по оптимальному плану $X_1^* = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 60 & 35 \\ 70 & 80 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 50 \end{bmatrix}$ со станции *А* следует направить 5 вагонов в первый пункт погрузки зерна, 60 вагонов в третий и 35 вагонов в четвертый пункты погрузки зерна; со станции *Б* в первый пункт необходимо направить 70 вагонов, остальные 80 вагонов – во второй пункт погрузки зерна; со станции *В* все 50 вагонов направляются в четвертый пункт.

Среди оценок $\Delta_{12} = 0$. Это свидетельствует о том, что задача имеет еще один оптимальный план. Чтобы найти его, продолжим решение и загрузим клетку (1; 2) поставкой $\lambda = \min\limits_{четн.} \{80;\ 5\} = 5$. В результате получим следующую таблицу:

| | $B_1(75)$ | $B_2(80)$ | $B_3(60)$ | $B_4(85)$ |
|---|---|---|---|---|
| $A_1(100)$ | 6 | 7<br>5 | 3<br>60 | 5<br>35 |
| $A_2(150)$ | 1<br>75 | 2<br>75 | 5 | 6 |
| $A_3(50)$ | 3 | 10 | 20 | 1<br>50 |

с оптимальным планом

$$X_2^* = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 60 & 35 \\ 75 & 75 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 50 \end{bmatrix}.$$

Все множество оптимальных планов задачи будет представлять собой выпуклую линейную комбинацию планов $X_1^*$ и $X_2^*$:

$$X^* = \lambda X_1^* + (1-\lambda)X_2^* = \begin{bmatrix} 5\lambda & 5-5\lambda & 60 & 35 \\ 75-5\lambda & 75+5\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 50 \end{bmatrix},$$

где $0 \le \lambda \le 1$.

Ответ: $X^* = \begin{bmatrix} 5\lambda & 5-5\lambda & 60 & 35 \\ 75-5\lambda & 75+5\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 50 \end{bmatrix},$

где $0 \le \lambda \le 1$; $f_{\min} = 665$ ден. ед.

## Задачи

1. В трех аптечных управлениях скопился излишек $a_i$ (в тысячах упаковок) витамина С. В пяти других аптечных управлениях его недостаток составил $b_j$ (в тысячах упаковок). Стоимости перевозки 1 тысячи упаковки (в десятках условных единиц) указаны в приведенной ниже таблице. Найти оптимальный план перевозок.

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $B_5$ | $a_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 8 | 6 | 10 | 4 | 7 | 11 |
| $A_2$ | 9 | 5 | 9 | 6 | 3 | 14 |
| $A_3$ | 7 | 5 | 8 | 5 | 4 | 15 |
| $b_j$ | 5 | 7 | 6 | 13 | 9 | 40 |

2. Найти оптимальный план перевозок зерна из районов $A_1$, $A_2$, $A_3$ и $A_4$ республики, в которых запасы составляют соответственно 800, 700, 1000 и 500 тыс. ц, на три элеватора $B_1$, $B_2$ и $B_3$ мощностью 1000, 1100 и 900 тыс. ц. Затраты на перевозку 1 ц зерна из районов на элеваторы приведены в таблице

| Районы | Элеваторы | | | Запас $a_i$, тыс. ц |
|---|---|---|---|---|
| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | |
| | Затраты на перевозку 1 ц зерна, ден. ед. | | | |
| $A_1$ | 3 | 5 | 6 | 800 |
| $A_2$ | 7 | 2 | 4 | 700 |
| $A_3$ | 4 | 3 | 5 | 1000 |
| $A_4$ | 6 | 4 | 7 | 500 |
| Мощность $b_j$ элеватора, тыс. ц | 1000 | 1100 | 900 | 3000 |

# ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 13

## Метод потенциалов (закрытая, открытая модели)

При решении транспортной задачи распределительным методом наиболее трудоемкой является операция вычисления оценок свободных клеток. Этого недостатка лишен так называемый *модифицированный распределительный метод* или *метод потенциалов*, отличающийся от распределительного метода только вычислением оценок свободных клеток.

Алгоритм **метода потенциалов**

1. *Условия задачи записывают в форме распределительной таблицы.*
2. *Сравнивают общий запас груза с суммарным спросом и в случае нарушения равенства* $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$ *вводят в рассмотрение фиктивного поставщика (или потребителя).*
3. *Строят начальный опорный план.*
4. *Вычисляют потенциалы (для занятых клеток)* $u_i$ *и* $v_j$ *поставщиков и потребителей посредством решения системы уравнений* $u_i + v_j = c_{ij}$.
5. *Вычисляют оценки* $\Delta_{ij}$ *для свободных клеток по формуле*

$$\Delta_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j). \qquad (13.1)$$

*Если оценки всех свободных клеток неотрицательны (целевая функция задана на минимум), то исследуемый план является оптимальным и остается подсчитать транспортные расходы. Если же среди оценок есть отрицательные, то выбирают клетку с наибольшей по абсолютной величине отрицательной оценкой и переходят к следующему пункту алгоритма.*

6. *Загружают выделенную в предыдущем пункте свободную клетку, получают новый опорный план и возвращаются к п. 4 алгоритма.*

Если все оценки положительны (целевая функция задана на минимум), то существует единственный оптимальный план. Если же среди неотрицательных оценок имеется хотя бы одна нулевая, то задача имеет множество оптимальных планов.

**Пример 13.1.** Студенческие отряды заняты уборкой картофеля в трех хозяйствах. Картофель выращивается в этих хозяйствах на площадях в 20, 60 и 40 га, а урожайность составила соответственно 150, 200 и 175 ц/га. Предполагается поставить г. Минску 1100 т, ближайшему спиртзаводу 400 т, а 800 т необходимо доставить на железнодорожную станцию для последующей отправки за пределы Республики Беларусь. Стоимости перевозки картофеля от упомянутых хозяйств до указанных пунктов сдачи приведены в таблице.

Спланировать перевозки так, чтобы по возможности выполнить план поставок картофеля при минимальных затратах.

| Хозяйство | Стоимость, ден. ед./т | | |
|---|---|---|---|
| | до Минска | до спиртзавода | до железнодорожной станции |
| № 1 | 80 | 20 | 40 |
| № 2 | 100 | 30 | 20 |
| № 3 | 70 | 10 | 30 |

*Решение*:

Прежде всего, перейдем к единым единицам измерения. Урожайность в тоннах по хозяйствам составит соответственно 15, 20 и 17,5 т/га, собрано будет $15 \cdot 20 = 300$, $20 \cdot 60 = 1200$ и $17{,}5 \cdot 40 = 700$ т, всего 2200 т. Поставить потребителям необходимо 2300 т. Таким образом, построенная задача открытого типа. Придется ввести в рассмотрение фиктивного поставщика (*ФП*) с «запасом» картофеля в 2300 – 2200 = 100 т и нулевыми «тарифами» на перевозку.

Запишем все данные задачи в виде транспортной таблицы (табл. 1).

*Таблица 1*

| | $M(1100)$ | $СЗ(400)$ | $ЖС(800)$ | $u_i$ |
|---|---|---|---|---|
| $№1(300)$ | 80<br>300 | 20 | 40 | 0 |
| $№2(1200)$ | 100<br>700 | 30 | 20<br>500 | 20 |
| $№3(700)$ | 70 | 10<br>400 | 30<br>300 | 30 |
| $ФП(100)$ | 0<br>100 | 0 | 0 | –80 |
| $v_j$ | 80 | –20 | 0 | |

В таблицу сразу заносим опорный план, построенный способом «минимального элемента». Загружено $m + n - 1 = 6$ клеток, значит план невырожденный. Для исследования его на оптимальность, находим потенциалы $u_i$ и $v_j$ для занятых клеток по правилу $u_i + v_j = c_{ij}$ и заносим их в таблицу (полагая вначале $u_1 = 0$).

Теперь по формуле (13.1) определяем оценки для свободных клеток

$$\Delta_{12} = 20 - \left(0 + (-20)\right) = 40;\ \Delta_{13} = 40 - (0 + 0) = 40;$$

$$\Delta_{22} = 30 - \left(20 + (-20)\right) = 30;\ \Delta_{31} = 70 - (30 + 80) = -40;$$

$$\Delta_{42} = 0 - \left(-80 + (-20)\right) = 100;\ \Delta_{43} = 0 - (-80 + 0) = 80.$$

Среди оценок имеется отрицательная оценка, поэтому построенный план неоптимальный и его следует преобразовать в новый план, загрузив клетку (3; 1). Для этой клетки строим цикл (3; 1) → (2; 1) → (2; 3) → (3; 3) и находим поставку $\lambda = \min\limits_{\text{четн.}} x_{ij} = \min\limits_{\text{четн.}}\{700;\ 300\} = 300$. После сдвига по циклу $\lambda = 300$ получаем новый опорный план (табл. 2).

*Таблица 2*

| | *М* (1100) | *СЗ* (400) | *ЖС* (800) | $u_i$ |
|---|---|---|---|---|
| № 1 (300) | 80<br>300 | 20 | 40 | 0 |
| № 2 (1200) | 100<br>400 | 30 | 20<br>800 | 20 |
| № 3 (700) | 70<br>300 | 10<br>400 | 30 | –10 |
| *ФП* (100) | 0<br>100 | 0 | 0 | –80 |
| $v_j$ | 80 | 20 | 0 | |

Исследуем его на оптимальность. Находим потенциалы, заносим их в табл. 2 и просчитываем оценки для свободных клеток

$$\Delta_{12} = 20 - (0 + 20) = 0 \qquad \Delta_{13} = 40 - (0 + 0) = 40$$

$$\Delta_{22} = 30 - (20 + 20) = -10 \qquad \Delta_{33} = 30 - (-10 + 0) = 40$$

$$\Delta_{42} = 0 - (-80 + 20) = 60 \qquad \Delta_{43} = 0 - (-80 + 0) = 80$$

Среди оценок одна отрицательная $(\Delta_{22} = -10)$, поэтому план неоптимальный и его следует улучшить, загружая клетку (2; 2) поставкой $\lambda = \min\limits_{четн.} x_{ij} = \min\limits_{четн.}\{400;\ 400\} = 400$. Получаем новый опорный план (табл. 3), в котором в клетку (3; 3) заносим поставку, равную 0 (чтобы исключить вырожденность).

*Таблица 3*

| | $M(1100)$ | $СЗ(400)$ | $ЖС(800)$ | $u_i$ |
|---|---|---|---|---|
| $№1(300)$ | 80<br>300 | 20 | 40 | 0 |
| $№2(1200)$ | 100 | 30<br>400 | 20<br>800 | 10 |
| $№3(700)$ | 70<br>700 | 10<br>0 | 30 | –10 |
| $ФП(100)$ | 0<br>100 | 0 | 0 | –80 |
| $v_j$ | 80 | 20 | 10 | |

Повторяя весь процесс, получаем следующие оценки:

$$\Delta_{12} = 20 - (0 + 20) = 0; \qquad \Delta_{13} = 40 - (0 + 10) = 30;$$
$$\Delta_{21} = 100 - (10 + 80) = 10; \qquad \Delta_{33} = 30 - (-10 + 10) = 30;$$
$$\Delta_{42} = 0 - (-80 + 20) = 60; \qquad \Delta_{43} = 0 - (-80 + 10) = 70.$$

Отрицательных оценок нет, следовательно, построенный план является оптимальным: $X^* = \begin{bmatrix} 300 & 0 & 0 \\ 0 & 400 & 800 \\ 700 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $f_{\min} = 101000$ ден. ед.

По оптимальному плану хозяйство № 1 весь собранный картофель (300 т) должно направить в г. Минск; хозяйство № 2 доставляет 400 т на спиртзавод и 800 т на железнодорожную станцию; хозяйство № 3 отправляет 700 т в г. Минск. Судя по последней строке в табл. 3 г. Минск недополучит 100 т картофеля. Транспортные расходы минимизируются и составляют 101000 ден. ед.

*Ответ*: $X^* = \begin{bmatrix} 300 & 0 & 0 \\ 0 & 400 & 800 \\ 700 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $f_{\min} = 101000$ ден. ед.

**Пример 13.2.** Найти оптимальный план перевозок

| | $B_1(35)$ | $B_2(40)$ | $B_3(40)$ | $B_4(30)$ |
|---|---|---|---|---|
| $A_1(40)$ | 3 | 2 | 4 | 1 |
| $A_2(50)$ | 2 | 3 | 1 | 5 |
| $A_3(30)$ | 3 | 2 | 4 | 4 |

.

*Ответ*: $X^*_{1,2} = \begin{bmatrix} 0 & 10 & 0 & 30 \\ 10 & 0 & 40 & 0 \\ 0 & 30 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $f_{\min} = 170$ ден. ед.

**Пример 13.3.** Найти оптимальный план перевозок топлива из трех хранилищ $A_1$, $A_2$, $A_3$, в которых имеется в наличии соответственно 300, 150, 200 т топлива, предназначенного для пяти АЗС: $B_1$, $B_2$, $B_3$, $B_4$, $B_5$. Потребности в топливе составляют соответственно 80, 170, 150, 160 и 90 т при следующей матрице затрат на перевозку 1 т топлива:

$$\begin{bmatrix} 4 & 7 & 1 & 5 & 2 \\ 6 & 2 & 4 & 1 & 3 \\ 5 & 6 & 7 & 4 & 8 \end{bmatrix}.$$

*Ответ*: $X^* = \begin{bmatrix} 60 & 0 & 150 & 0 & 90 \\ 0 & 150 & 0 & 0 & 0 \\ 20 & 20 & 0 & 160 & 0 \end{bmatrix}$, $f_{\min} = 1730$ ден. ед.

**Пример 13.4.** С трех складов $A_1$, $A_2$, $A_3$ необходимо доставить овощи в пять торговых точек $B_1$, $B_2$, $B_3$, $B_4$, $B_5$. Требуется закрепить склады за торговыми точками так, чтобы общая сумма затрат на перевозку была минимальной.

| Склады | Торговые точки | | | | | Объем вывоза, т |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $B_5$ | |
| | Стоимость перевозки 1 т груза, ден. ед | | | | | |
| $A_1$ | 7 | 3 | 5 | 4 | 2 | 40 |
| $A_2$ | 6 | 2 | 3 | 1 | 7 | 150 |
| $A_3$ | 3 | 5 | 2 | 6 | 4 | 100 |
| Объем ввоза, т | 20 | 80 | 90 | 60 | 40 | 290 |

*Ответ*: $X^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 40 \\ 0 & 80 & 10 & 60 & 0 \\ 20 & 0 & 80 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $f_{\min} = 550$ ден. ед.

**Пример 13.5**. В трех хранилищах $A_1$, $A_2$, $A_3$ имеется соответственно 70, 90 и 50 т топлива. Требуется спланировать перевозку топлива четырем потребителям $B_1$, $B_2$, $B_3$, $B_4$, спрос которых равен соответственно 50, 70, 40, 40 т, так, чтобы затраты на транспортировку были минимальны. Стоимость перевозки 1 т топлива задана матрицей

$$\left(c_{ij}\right) = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 & 6 \\ 4 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

*Ответ*: $X_1^* = \begin{bmatrix} 0 & 70 & 0 & 0 \\ 40 & 0 & 0 & 40 \\ 10 & 0 & 40 & 0 \end{bmatrix}$, $X_2^* = \begin{bmatrix} 0 & 30 & 0 & 40 \\ 40 & 40 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 40 & 0 \end{bmatrix}$ $f_{\min} = 640$ ден. ед.

Десять тонн топлива, находящегося в хранилище $A_2$, осталось нераспределенным.

## Задачи

1. Найти оптимальный план перевозок транспортной задачи, условие которой представлено в таблице

| Поставщики | Потребители | | | | Запас груза, т |
|---|---|---|---|---|---|
| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | |
| $A_1$ | 4 | 10 | 5 | 3 | 60 |
| $A_2$ | 6 | 7 | 2 | 8 | 100 |
| $A_3$ | 8 | 9 | 12 | 11 | 70 |
| Потребность в грузе, т | 50 | 55 | 70 | 45 | |

2. Требуется перевезти товары с трех комбинатов-поставщиков $A_1$, $A_2$, $A_3$ $\left(a_1 = 30 \text{ т}, a_2 = 50 \text{ т}, a_3 = 45 \text{ т}\right)$ четырем оптовым базам $B_1$, $B_2$, $B_3$, $B_4$, спрос которых равен соответственно 20, 25, 35 и 40 т. Известна матрица транспортных расходов на доставку 1 т от поставщиков к оптовым базам

$$\left[c_{ij}\right] = \begin{bmatrix} 12 & 15 & 14 & 10 \\ 16 & 20 & 18 & 17 \\ 19 & 21 & 16 & 13 \end{bmatrix} \left(i = \overline{1,\ 3};\quad j = \overline{1,\ 4}\right).$$

Определить оптимальный план перевозок товара от поставщиков к оптовым базам, минимизирующий суммарные транспортные расходы.

3. Четыре магазина $B_1$, $B_2$, $B_3$, $B_4$ получают овощи из трех совхозов $A_1$, $A_2$, $A_3$, которые ежедневно могут поставлять соответственно 10, 12, 18 т овощей. Суточные потребности магазинов составляют 9, 10, 12, 15 т.

$$\left[c_{ij}\right]=\begin{bmatrix} 15 & 17 & 20 & 22 \\ 24 & 18 & 19 & 21 \\ 23 & 16 & 17 & 20 \end{bmatrix} \left(i=\overline{1,\ 3};\quad j=\overline{1,\ 4}\right).$$

Матрица $\left[c_{ij}\right]$ – транспортные расходы на доставку 1 т овощей из совхоза каждому магазину.

Составить план доставки овощей из совхозов магазинам, минимизирующий транспортные издержки.

## ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 14

### Усложненные постановки задачи транспортного типа

Обычно при составлении экономико-математической модели задачи транспортного типа приходится вводить целый ряд дополнительных ограничений, вследствие чего поиск оптимального решения усложняется.

Нередко встречаются задачи, в которых может оказаться экономически более выгодным доставлять сырье из отдаленного источника, но зато при меньшей его себестоимости. В таких задачах критерием оптимальности служит сумма затрат на производство единицы груза и на его перевозку.

Часто необходимо вводить ограничения, чтобы отдельные поставки от определенного поставщика определенному потребителю были исключены. В матрице перевозок, содержащей оптимальный план, определенные клетки должны остаться свободными. Это достигается искусственным завышением показателей $c_{ij}$ в клетках, перевозки через которые следует запретить.

Иногда приходится учитывать ограничения по пропускной способности некоторых маршрутов. Если по маршруту $A_k B_s$ можно провезти не более *d* единиц груза, то $B_s$-й столбец матрицы перевозок разбивается на два: $B_s'$ и $B_s''$. В первом спрос принимается равным разности между действительным спросом $b_s$ и ограничением *d*, во втором – равным ограничению *d*. Тарифы $c_{ij}$ в обоих столбцах одинаковы и равны данным, но в первом в клетке, соответствующей ограничению, вместо истинного тарифа $c_{ks}$ ставится искусственно завышенный тариф *M* (клетка блокируется). Далее задача решается обычным способом.

Некоторые поставки по определенным маршрутам обязательны и должны войти в оптимальный план независимо от того, выгодно это или нет в условиях всей задачи. Тогда соответственно уменьшают запасы груза у поставщиков и спрос у потребителей и решают задачу относительно тех поставок, которые не обязательны.

Во многих задачах транспортного типа целевая функция максимизируется. Поэтому при составлении начального опорного плана в первую очередь стараются заполнять клетки с наиболее высокими значениями показателя критерия оптимальности. Выбор клетки, подлежащей заполнению при переходе от одного опорного плана к другому, должен производиться не по отрицательной, а по положительной оценке. Оптимальным будет опорный план, которому в распределительной таблице сопутствуют свободные клетки с неположительными оценками.

**Пример 14.1.** Студенческие отряды *СО*-1, *СО*-2 и *СО*-3 численностью в 30, 40, 20 человек принимают участие в сельскохозяйственных работах. Для уборки картофеля на полях $\Pi_1$, $\Pi_2$, $\Pi_3$ и $\Pi_4$ необходимо выделить соответственно 14, 26, 16 и 34 человек. Производительность труда студентов зависит от урожайности картофеля, а также от состава отряда и характеризуется для указанных отрядов и полей элементами матрицы

$$\begin{bmatrix} 5 & 8 & 4 & 7 \\ 9 & 8 & 5 & 9 \\ 7 & 9 & 8 & 6 \end{bmatrix}$$

(в центнерах на человека за рабочий день).

Требуется методом потенциалов найти план распределения студентов по полям так, чтобы за рабочий день было убрано максимально возможное количество картофеля. Определить, сколько центнеров картофеля будет убрано с четырех полей при оптимальном распределении студентов.

*Решение*:

Пусть $x_{ij}$ – количество студентов, отправляемых на *j*-тое поле из *i*-того отряда. По условию задачи $f = 5x_{11} + 8x_{12} + \ldots + 8x_{33} + 6x_{34}$ и это убранное количество картофеля должно быть максимальным, т. е. при решении данной задачи целевая функция максимизируется.

Ограничения по количеству студентов (по отрядам) имеют вид

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 30 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 40. \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 20 \end{cases}$$

Ограничения по количеству человек на полях следующие:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} = 14 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 26 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 16 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 34 \end{cases}.$$

Модель закрытого типа (30 + 40 + 20 = 14 + 26 + 16 + 34 = 90). Строим транспортную таблицу. Так как функцию *f* требуется максимизировать, то начальный опорный план построим по правилу «максимального элемента», т. е. в первую очередь заполняем клетки с максимальными тарифами.

| | $\Pi_1(14)$ | $\Pi_2(26)$ | $\Pi_3(16)$ | $\Pi_4(34)$ | $u_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $CO-1(30)$ | 5 | 8<br>22 | 4 | 7<br>8 | 0 |
| $CO-2(40)$ | 9<br>14 | 8 | 5 | 9<br>26 | 2 |
| $CO-3(20)$ | 7 | 9<br>4 | 8<br>16 | 6 | 1 |
| $v_j$ | 7 | 8 | 7 | 7 | |

После заполнения таблицы проверяем полученный план на невырожденность: заполнено *m* + *n* – 1 = 6 клеток, план невырожденный. Проверяем его на оптимальность. Для этого в таблицу заносим потенциалы, которые находим по занятым клеткам по формуле $u_i + v_j = c_{ij}$ (полагая вначале $u_1 = 0$).

Для незанятых клеток высчитываем оценки

$$\Delta_{11} = 5 - (0+7) = -2; \quad \Delta_{13} = 4 - (0+7) = -3; \quad \Delta_{22} = 8 - (2+8) = -2;$$
$$\Delta_{23} = 5 - (2+7) = -4; \quad \Delta_{31} = 7 - (1+7) = -1; \quad \Delta_{34} = 6 - (1+7) = -2$$

Все оценки отрицательные, значит полученный план оптимальный и единственный (нет нулевых оценок).

Матрица распределения $F^* = \begin{bmatrix} 0 & 22 & 0 & 8 \\ 14 & 0 & 0 & 26 \\ 0 & 4 & 16 & 0 \end{bmatrix}$, $f_{\max} = 756$ ц.

По оптимальному плану первый студенческий отряд должен отправить на поля $П_2$ и $П_4$ соответственно 22 и 8 студентов. Второй студенческий отряд должен отправить на поля $П_1$ и $П_4$ соответственно 14 и 26 студентов. Третий студенческий отряд отправляет по 4 и 16 студентов на поля $П_2$ и $П_3$ соответственно. При таком распределении будет убрано максимальное количество центнеров картофеля с полей.

*Ответ*: $F^* = \begin{bmatrix} 0 & 22 & 0 & 8 \\ 14 & 0 & 0 & 26 \\ 0 & 4 & 16 & 0 \end{bmatrix}$, $f_{\max} = 756$ ц.

**Пример 14.2.** Пять автопарков (*АП*) города с ежемесячной потребностью в бензине соответственно в 40, 30, 80, 60 и 50 т снабжаются четырьмя бензохранилищами (*БХ*) вместимостью 55, 70, 35 и 100 т соответственно. Доставка горючего из бензохранилищ осуществляется автотранспортом. Средние транспортные издержки в расчете на 1 т топлива приведены в таблице.

| Бензохранилище | Автопарк | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | $АП_1$ | $АП_2$ | $АП_3$ | $АП_4$ | $АП_5$ |
| $БХ_1$ | 6 | 5 | 9 | 7 | 4 |
| $БХ_2$ | 10 | 11 | 8 | 3 | 2 |
| $БХ_3$ | 12 | 8 | 7 | 9 | 6 |
| $БХ_4$ | 10 | 7 | 12 | 3 | 5 |

Требуется составить план перевозки горючего, обеспечивающий минимальные суммарные транспортные затраты при следующих условиях: из бензохранилища $БХ_2$ весь запас бензина поставляется в автопарк $АП_3$; потребность автопарка $АП_1$ удовлетворяется полностью; в бензохранилище $БХ_3$ остается резервный запас в 20 т бензина для чрезвычайных нужд.

*Ответ*: $X_1^* = \begin{bmatrix} 40 & 15 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 60 & 40 \\ \hline 0 & 15 & 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $X_2^* = \begin{bmatrix} 40 & 10 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 60 & 10 \\ \hline 0 & 20 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,
$f_{\min} = 1350$ ден. ед.

**Пример 14.3.** На четырех ткацких станках с объемом рабочего времени 200, 300, 250 и 400 станко-часов за 1 ч можно изготовить соответственно 260, 200, 340 и 500 м ткани трех артикулов I, II, III. Составить оптимальную программу загрузки станков, если прибыль (в ден. ед.) от реализации 1 м ткани $i$-того артикула при ее изготовлении на $j$-том станке характеризуется элементами матрицы $\begin{bmatrix} 2{,}5 & 2{,}2 & - & 2{,}8 \\ 1{,}6 & 1{,}0 & 1{,}9 & 1{,}2 \\ 0{,}8 & 1{,}0 & 0{,}6 & 0{,}9 \end{bmatrix}$, а суммарная потребность в ткани каждого из артикулов равна 200, 100 и 150 тыс. м, учитывая, что ткань I артикула не может производиться на третьем станке.

*Ответ*: $X^* = \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 200 & 0 \\ 15 & 0 & 85 & 0 & 0 \\ 37 & 600 & 0 & 0 & 53 \end{array}\right]$, $f_{\max} = 835{,}1$ тыс. ден. ед.

**Пример 14.4.** Готовая продукция заводов $A_1$, $A_2$, $A_3$ отправляется на склады $B_1$, $B_2$, $B_3$, $B_4$. Заводы производят 380, 290, 330 единиц продукции соответственно. Пропускная способность складов составляет 320, 370, 260 и 150 единиц груза соответственно. Стоимость перевозки одного изделия задана матрицей

$$\left[c_{ij}\right] = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 2 & 5 \\ 8 & 3 & 7 & 8 \\ 9 & 6 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Требуется:

а) найти такой план перевозок, при котором затраты на перевозки минимальны и найти эти затраты;

б) найти оптимальный план перевозок при дополнительном условии, что склад $B_2$ должен быть загружен полностью.

*Ответ*:

а) $X_1^* = \left[\begin{array}{cccc} 320 & 0 & 60 & 0 \\ 0 & 290 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 200 & 130 \\ \hline 0 & 80 & 0 & 20 \end{array}\right]$, $X_2^* = \left[\begin{array}{cccc} 300 & 0 & 80 & 0 \\ 0 & 290 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 180 & 150 \\ \hline 20 & 80 & 0 & 0 \end{array}\right]$,

$f_{\min} = 2860$ ден. ед.

б) $X = \left[\begin{array}{cccc} 320 & 60 & 0 & 0 \\ 0 & 290 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 260 & 50 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 100 \end{array}\right]$, где $f = 3100$ ден. ед.

## Задачи

1. На пять строительных площадок $B_1$, $B_2$, $B_3$, $B_4$, $B_5$ поступает кирпич с трех заводов. Потребность в кирпиче на строительных площадках равна соответственно 50, 60, 45, 35 и 40 тыс. шт. Данные о производительности заводов за день, затратах на производство кирпича и транспортных расходах приведены в таблице

| Завод | Транспортные расходы на 1 тыс. шт. по строительным площадкам, ден. ед. | | | | | Производительность завода за день, тыс. шт. | Затраты на производство 1 тыс. шт. кирпича, ден. ед. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $B_5$ | | |
| $A_1$ | 19 | 20 | 17 | 25 | 28 | 60 | 40 |
| $A_2$ | 27 | 33 | 24 | 18 | 23 | 100 | 35 |
| $A_3$ | 22 | 24 | 26 | 21 | 25 | 55 | 38 |

Определить оптимальный план закрепления строительных площадок за кирпичными заводами при условии, что недостающее количество кирпича 15 тыс. шт. в день можно обеспечить за счет:

а) увеличения производительности завода $A_1$ (затраты на производство 1 тыс. шт. возрастут на 25 ден. ед.);

б) увеличения производительности завода $A_2$ (затраты на производство 1 тыс. шт. возрастут на 40 ден. ед.).

2. Готовая продукция заводов $A_1$, $A_2$, $A_3$ отправляется на склады $B_1$, $B_2$, $B_3$, $B_4$. Заводы производят 250, 150, 400 единиц продукции соответственно. Пропускная способность складов составляет 100, 500, 100 и 300 единиц груза соответственно. Стоимость перевозки с завода $A_i$ $\left(i=\overline{1,\ 3}\right)$ на склад $B_j$ $\left(j=\overline{1,\ 4}\right)$ одного изделия задана матрицей

$$\left[c_{ij}\right]=\begin{bmatrix}2 & 1 & 3 & 6\\ 1 & 4 & 7 & 9\\ 6 & 2 & 4 & 5\end{bmatrix}.$$

Требуется:

а) найти такой план перевозок, при котором затраты на перевозки минимальны, найти эти затраты;

б) найти оптимальный план перевозок при дополнительном условии, что склад $B_4$ должен быть загружен полностью.

# ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 15

## Транспортная задача в сетевой постановке

Если условия транспортной задачи заданы в виде картосхемы, на которой условно изображены поставщики, потребители и связывающие их дороги, указаны величины запасов груза и потребностей в нем, а также числа $c_{ij}$, являющиеся показателями принятого в задаче критерия оптимальности, то транспортная задача задана в *сетевой форме*.

Описанную картосхему будем называть *транспортной сетью*. Пункты расположения поставщиков и потребителей будем изображать кружками и называть *вершинами (узлами) сети*, запасы груза будем записывать в кружках положительными, а потребности – отрицательными числами. Дороги, связывающие пункты расположения и потребления груза и другие пункты, будем изображать линиями и называть ребрами (дугами, звеньями) сети. При изображении транспортной сети реальный масштаб не соблюдается. На сети могут быть изображены вершины, в которых нет ни поставщиков, ни потребителей. Наличие таких вершин не повлияет на способ решения, если считать, что запасы (потребности) груза в них равны нулю. Такие вершины называют *нулевыми*.

Решение задачи на сети начинается с построения начального опорного плана. Поставки груза из вершины в вершину обозначаются стрелками с указанием величин поставок.

*Опорный план должен удовлетворять следующим требованиям:*

1) *все запасы должны быть распределены, а потребности удовлетворены;*
2) *к каждой вершине должна подходить или выходить из нее хотя бы одна стрелка;*
3) *общее количество стрелок должно быть на единицу меньше числа вершин;*
4) *стрелки не должны образовывать замкнутый контур.*

Далее план проверяется на оптимальность. Для этого вычисляем потенциалы. Одной из вершин присваиваем некоторое значение потенциала (например, равное нулю). После этого, двигаясь по стрелкам, определяем потенциалы остальных вершин, руководствуясь правилом:

– *если стрелка выходит из вершины, то к потенциалу этой вершины прибавляем показатель $c_{ij}$ критерия оптимальности, если же направление стрелки противоположно, то $c_{ij}$ вычитаем.*

После вычисления потенциалов находим характеристики ребер без стрелок по правилу:

– *из большего потенциала вычитается меньший потенциал, а разность вычитается из показателя $c_{ij}$, отвечающего данному ребру. Если все ребра без стрелок имеют неотрицательные характеристики, то составленный план является оптимальным.*

Если среди характеристик есть отрицательные характеристики, план неоптимален. Для улучшения плана надо «загрузить» то ребро без стрелки, которому соответствует отрицательная характеристика. Если таких ребер несколько, то выбирается ребро с наибольшей по абсолютной величине отрицательной характеристикой и к нему подрисовывается новая стрелка. При этом образуется замкнутый контур из стрелок. *Новая стрелка направляется от вершины с меньшим потенциалом к вершине с большим потенциалом.*

*При определении величины поставки для «загружаемого» ребра рассматриваются все стрелки образовавшегося контура, имеющие направление, противоположное направлению новой стрелки, и среди них находится стрелка с наименьшей поставкой λ.* Выбранная таким образом величина прибавляется ко всем поставкам со стрелками, имеющими то же направление, что и новая стрелка, и вычитается из поставок в стрелках, имеющих противоположное направление. Поставки в стрелках, не входящих в контур, не изменяются. Стрелка, по которой выбрано число λ, ликвидируется, и общее число стрелок остается прежним.

*Вырождение плана транспортной задачи в сетевой постановке внешне проявляется в том, что при полном использовании запасов и полном удовлетворении потребностей количество стрелок оказывается меньше, чем n – 1, где n – общее число вершин (включая и нулевые).*

Способ преодоления вырождения весьма прост: дополнительно вводится нужное количество стрелок с нулевыми поставками. Направления стрелок выбираются произвольно, однако они не должны образовывать замкнутый контур.

**Пример 15.1.** Решить транспортную задачу, заданную в сетевой форме

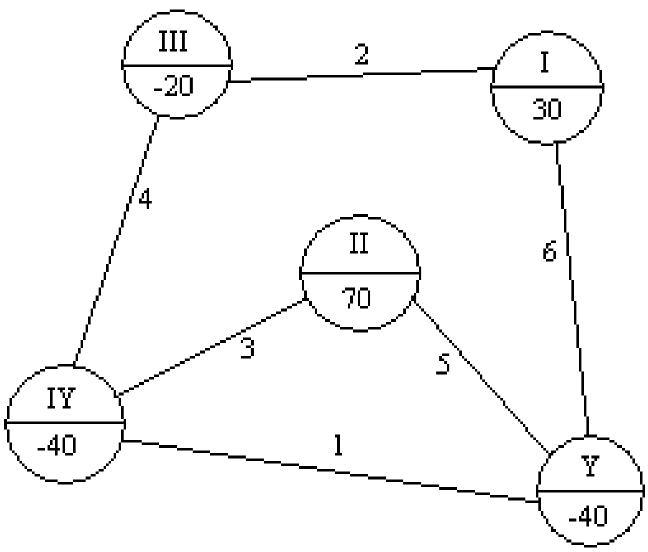



Рис. 15.1

*Решение*:

Задача закрытого типа, т.к. 20 + 40 + 40 = 30 +70 = 100. Строим начальный опорный план (рис. 15.2). Из пункта I отправляем груз в пункт III в объеме 20 единиц и в пункт V в объеме 10 единиц. Из пункта II отправляем груз в пункт IV в объеме 40 единиц и в пункт в V в объеме 30 единиц. Все запасы распределены, а потребности удовлетворены. К каждой вершине подходит или выходит из нее хотя бы одна стрелка.

Количество стрелок равно 4, т. е. на одну меньше числа вершин. Стрелки замкнутый контур не образуют. Построен начальный опорный план.

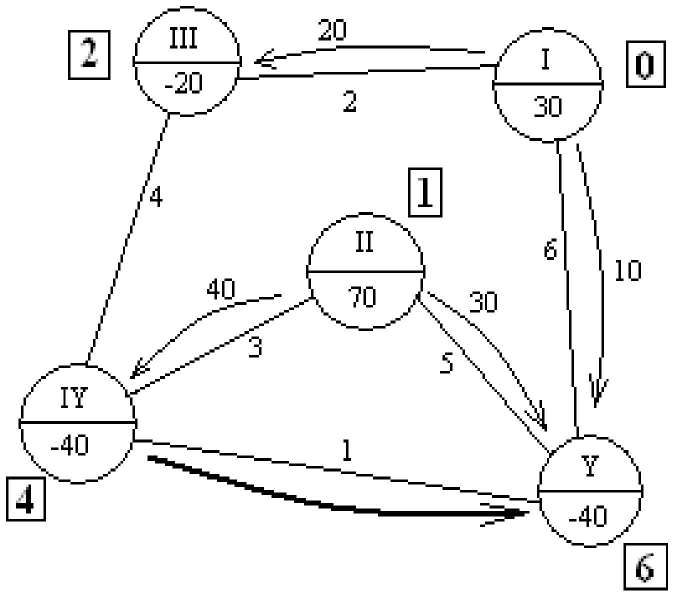



Рис. 15.2

Проверяем план на оптимальность. Для этого вычислим потенциалы. Одной из вершин (вершине I) присвоим значение потенциала, равное нулю (потенциал выделен и заключен в рамку). После этого, двигаясь по стрелкам, определяем потенциалы остальных вершин.

В нашем примере потенциал вершины III равен 0 + 2 = 2 (стрелка выходит из вершины I). Потенциал вершины V равен 0 + 6 = 6 (стрелка выходит из вершины I). Потенциал вершины II равен 6 – 5 = 1 (стрелка входит в вершину V). Потенциал вершины IV 1 + 3 = 4 (стрелка выходит из вершины II).

Вычислим характеристики ребер без стрелок $\Delta_{34} = 4 - (4 - 2) = 2$, $\Delta_{45} = 1 - (6 - 4) = -1$. Таким образом, ребро IV – V обладает отрицательной характеристикой. План не оптимален.

Для улучшения плана «загрузим» ребро IV – V. Новую стрелку направляем от вершины IV к вершине V (от вершины с меньшим потенциалом к вершине с большим потенциалом).

Рассматриваем все стрелки образовавшегося контура с противоположным направлением для новой стрелки. Это стрелка II – V с поставкой $\lambda = 30$. Преобразовываем исходный план и получаем новый опорный план (рис. 15.3).

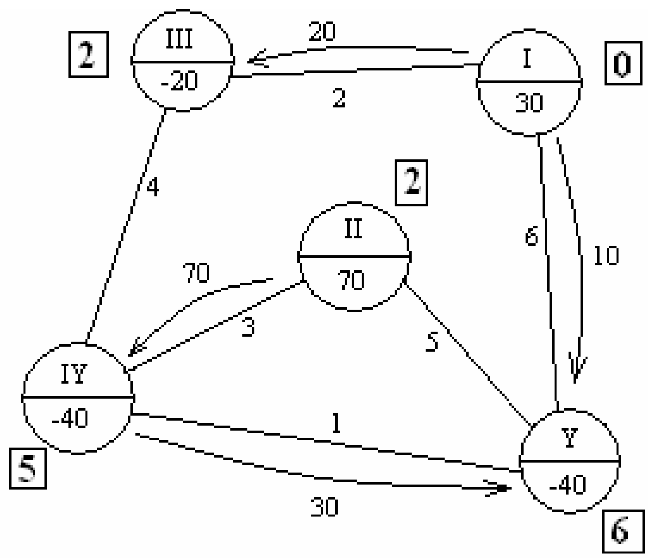



Рис. 15.3

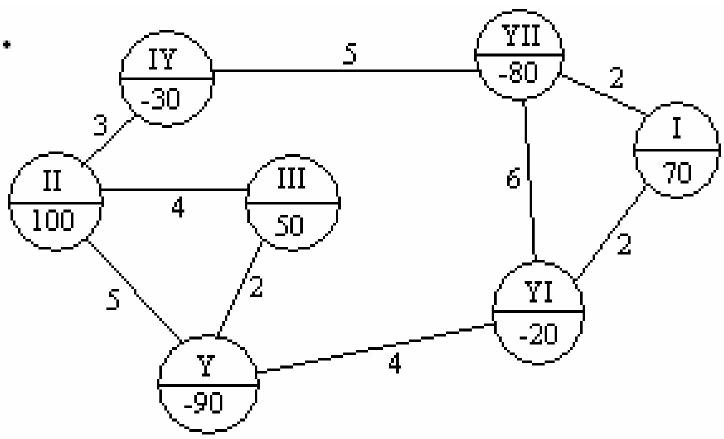
Исследуем его на оптимальность подобно предыдущему. Заносим потенциалы и вычисляем характеристики ребер без стрелок $\Delta_{34} = 4 - (5-2) = 1$, $\Delta_{25} = 5 - (6-2) = 1$. Все характеристики положительные, построенный план оптимален и единственен. По этому плану поставщик I отправляет 20 единиц груза потребителю III и 10 единиц груза потребителю V. Поставщик II отправляет весь груз (70 единиц) к потребителю IV , оставляет там 40 единиц, а остальной груз отправляет потребителю V . При этом значение целевой функции составит $f_{\min} = 20 \cdot 2 + 10 \cdot 6 + 70 \cdot 3 + 30 \cdot 1 = 340$.

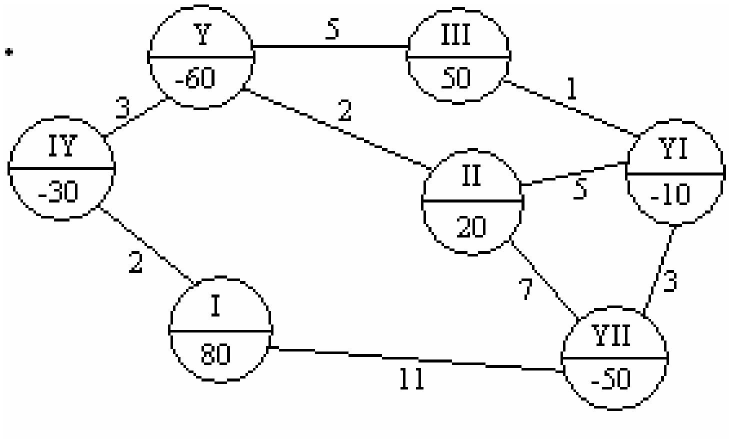
*Ответ*: $f_{\min} = 340$.

## Задачи

– решить транспортные задачи, заданные в сетевой форме

1. *



2. 


## ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 16

## Транспортная задача в сетевой постановке (открытая модель)

В случае открытой модели вводят фиктивного потребителя (поставщика) со спросом, равным небалансу. Фиктивный потребитель (поставщик) соединяется ребрами непосредственно со всеми поставщиками (потребителями). При этом показатели $c_{ij}$ ребер, соединяющих фиктивного потребителя (поставщика) с поставщиками (потребителями), следует брать одинаковыми и сравнительно большими. Делается это для того, чтобы исключить возможность использования фиктивной вершины в качестве промежуточного пункта.

**Пример 16.1.** Решить задачу, условия которой представлены на рисунке 16.1.

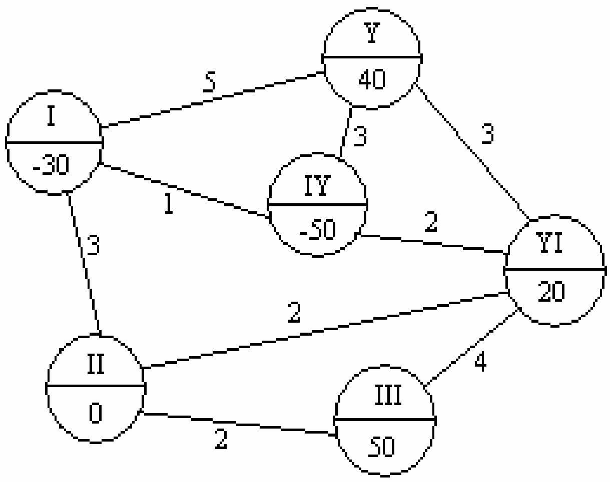



Рис. 16.1

*Решение*:

В данном случае суммарные запасы груза $(50 + 40 + 20 = 110)$ превышают суммарные потребности $(30 + 0 + 50 = 80)$, поэтому нужно ввести фиктивного потребителя со спросом, равным 110 – 80 = 30 единицам. Вводим «фиктивную» вершину VII , соединенную со всеми поставщиками «фиктивными» ребрами с показателями, равными 10 (рис. 16.2).

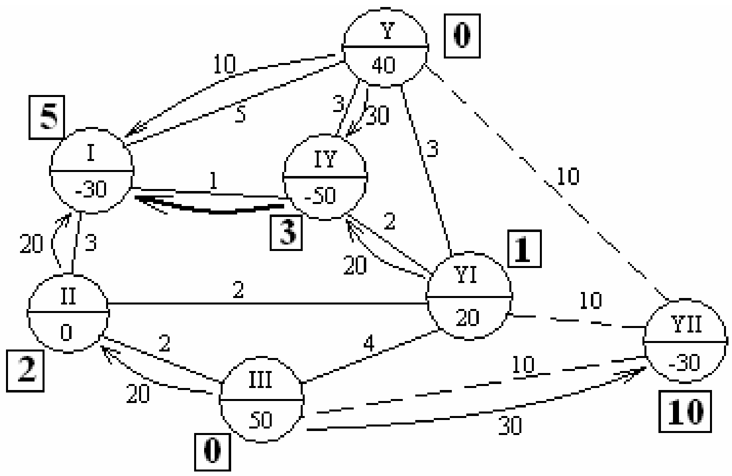



Рис. 16.2

Распределив поставки, находим потенциалы (полагая вначале для вершины V потенциал, равный нулю), далее находим характеристики ребер без стрелок $\Delta_{14} = 1-(5-3) = -1$, $\Delta_{26} = 2-(2-1) = 1$, $\Delta_{36} = 4-(1-0) = 3$, $\Delta_{56} = 3-(1-0) = 2$, $\Delta_{57} = 10-(10-0) = 0$, $\Delta_{67} = 10-(10-1) = 1$. Ребро (I – IV ) имеет отрицательную характеристику, план неоптимален, и ребро I – IV следует «загрузить» поставкой $\lambda = 10$.

Транспортная сеть с новым опорным планом

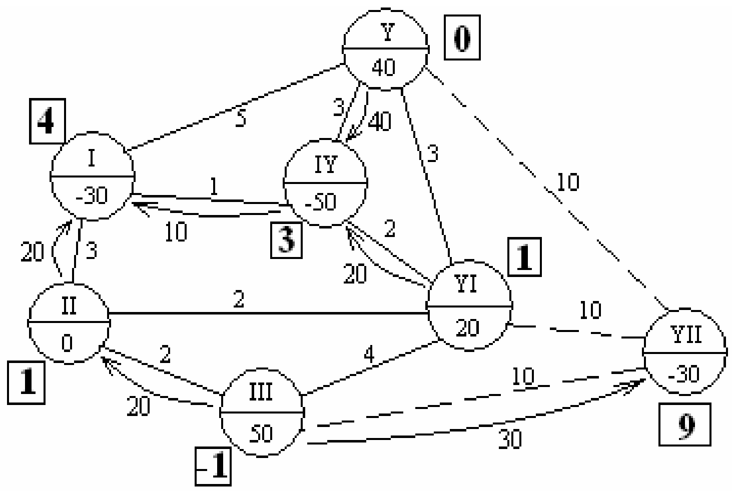



Рис. 16.3

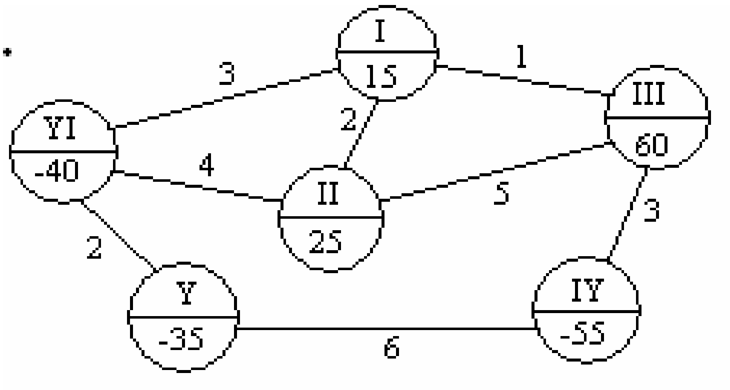
Для этого плана находим потенциалы (рис. 16.3). Далее определяем характеристики ребер без стрелок $\Delta_{15} = 5-(4-0)=1$, $\Delta_{26} = 2-(1-1)=2$, $\Delta_{36} = 4-(1-(-1))=2$, $\Delta_{56} = 3-(1-0)=2$, $\Delta_{57} = 10-(9-0)=1$, $\Delta_{67} = 10-(9-1)=2$.

Построенный план оптимальный и единственный. Минимальные транспортные затраты составляют $10\cdot1+20\cdot3+20\cdot2+20\cdot2+40\cdot3 =$ $= 270$ ден. ед.

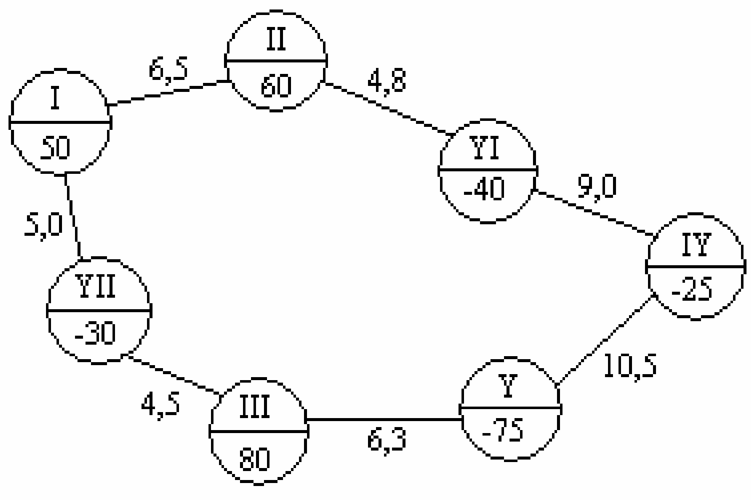
## Задачи

– решить транспортные задачи, заданные в сетевой форме

1. *




2.



# ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 17

## Индивидуальные контрольные задания

1. Найти два неотрицательных решения следующих систем линейных уравнений и неравенств. Сделать проверку.

1.1. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_4 \le 15 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 \ge -4 \\ x_2 + 3x_3 - x_4 \ge 0 \end{cases}$

1.2. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 = -3 \\ x_3 - 2x_4 = 2 \\ 3x_2 - x_4 + x_5 \le 5 \\ x_2 + x_4 \ge -3 \end{cases}$

1.3. $\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_5 = 5 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 4x_4 \le 6 \\ x_1 + 2x_3 + x_5 \ge 8 \end{cases}$

1.4. $\begin{cases} -x_1 - x_2 + 2x_3 - x_5 = -1 \\ x_1 + 2x_2 + x_5 \ge 4 \\ x_1 - x_2 + x_4 \ge 5 \end{cases}$

1.5. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 10 \\ x_1 + x_3 + x_4 \ge 7 \\ -3x_1 - 2x_3 + x_5 \le 4 \end{cases}$

1.6. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 \le 6 \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 - x_4 \ge -2 \end{cases}$

1.7. $\begin{cases} 2x_1 - x_3 + 2x_4 = 11 \\ x_1 + x_2 - x_4 \le 0 \\ 2x_1 - 2x_3 + 3x_4 \ge 13 \end{cases}$

1.8. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 = -1 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 - x_4 \le 4 \\ x_1 + x_3 + x_4 \ge 5 \end{cases}$

1.9. $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - x_4 = 3 \\ -3x_1 + 2x_2 + 3x_4 \le 3 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 + 2x_4 \ge 4 \end{cases}$

1.10. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 - 7x_4 = 3 \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 - 2x_4 \le 3 \\ 8x_1 + 12x_2 - 9x_3 + 8x_4 \ge 3 \end{cases}$

1.11. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le 4 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_3 + x_4 = 3 \end{cases}$

1.12. $\begin{cases} -2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_5 = 5 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 \le 7 \\ 3x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 \ge 9 \end{cases}$

1.13. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = -3 \\ x_1 + 3x_4 \le 12 \\ x_2 + x_3 \ge 1 \end{cases}$

1.14. $\begin{cases} -x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 8 \\ 3x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 \ge 0 \\ x_1 - x_4 \ge 7 \end{cases}$

1.15. $\begin{cases} -x_1 - x_2 + 3x_3 + x_5 = 5 \\ x_2 - x_3 + 4x_4 + x_6 \le 6 \\ 3x_3 + x_4 + x_5 - x_7 \ge 8 \end{cases}$

1.16. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_4 + 10x_5 + x_6 = 23 \\ x_1 + 5x_2 + 5x_3 - x_4 + 2x_5 \ge -5 \\ 2x_2 + x_3 + x_4 - 8x_5 - x_6 \le 2 \end{cases}$

1.17. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 6 \\ x_2 + 2x_3 - x_4 \le 4 \\ 2x_1 + x_3 + x_4 \ge 6 \end{cases}$

1.18. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + 4x_5 = 7 \\ x_1 - 2x_2 + x_4 \le 8 \\ x_1 + x_2 + 3x_5 \ge 6 \end{cases}$

1.19. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 \le 6 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 \ge 7 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 \ge -12 \end{cases}$

1.20. $\begin{cases} 2x_2 + x_3 - x_4 \le 6 \\ x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 \ge 3 \\ x_2 + x_3 + x_4 \le 5 \end{cases}$

2. Решить графически следующие задачи линейного программирования.

2.1. $f = x_1 - x_2 \quad (\min)$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \le 1 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 2 \\ x_1 + x_2 \ge 0{,}5 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$

2.2. $f = x_1 + 2x_2 + 4 \quad (\max)$

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 \ge 6 \\ x_1 - x_2 \le 1 \\ x_2 \le 5 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$

2.3. $f = x_1 + x_2 \quad (\max)$

$$\begin{cases} x_1 \le 1 \\ x_2 \le 2 \\ -1 \le x_1 - x_2 \le 0 \end{cases}$$

2.4. $f = x_1 - x_2 \quad (\max)$

$$\begin{cases} 1 \le x_1 + x_2 \le 2 \\ 2 \le x_1 - 2x_2 \le 3 \\ 1 \le 2x_1 - x_2 \le 2 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$

2.5. $f = 2x_1 + x_2 \quad (\min)$

$$\begin{cases} x_1 \ge 1 \\ x_2 \le 4 \\ -x_1 + x_2 \le 2 \\ 3x_1 + 2x_2 \ge 9 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$

2.6. $f = -x_1 - 3x_2 \quad (\min)$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 \ge 0 \\ 3x_1 + 4x_2 \le 13 \\ x_1 - x_2 \le 2 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$

2.7. $f = x_1 + 2x_2 \quad (\max)$

$$\begin{cases} 0 \le x_1 \le 2 \\ 0 \le x_2 \le 3 \\ x_1 - x_2 \ge -1 \\ x_1 - 3x_2 \le -1 \end{cases}$$

2.8. $f = 3x_1 + 2x_2 \quad (\min)$

$$\begin{cases} -5x_1 + 2x_2 \le 10 \\ x_1 - x_2 \le 1 \\ x_2 \ge 2 \\ x_1 \ge 0 \end{cases}$$

2.9. $f = 0{,}5x_1 + 2{,}5x_2 + 0{,}5 \quad (\max)$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 1 \\ x_1 + x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$

2.10. $f = -2x_1 - 3x_2 \quad (\max)$

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 \le 1 \\ x_1 + x_2 \le 11 \\ x_2 \le 6 \\ x_1 \ge 2 \end{cases}$$

2.11. $f = 4x_1 + 3x_2 \quad (\max)$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 5 \\ 5x_1 - 4x_2 \le 19 \\ x_1 - 5x_2 \ge -19 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$

2.12. $f = 2x_1 + 3x_2 + 17 \quad (\max)$

$$\begin{cases} -x_1 + 5x_2 \le 2 \\ 5x_1 + x_2 \ge 0 \\ 3x_1 - 4x_2 \le 3 \end{cases}$$

2.13. $f = x_1 + 3x_2 \quad (\max)$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \le 4 \\ 8x_1 - x_2 \ge 1 \\ 3x_1 + 4x_2 \ge 5 \end{cases}$$

2.14. $f = x_1 + 1{,}5x_2 + 3 \quad (\max)$

$$\begin{cases} x_2 \le 14 \\ 3x_1 - 2x_2 \le 1 \\ 4x_1 + x_2 \ge 27 \end{cases}$$

2.15. $f = -3x_1 + 1{,}5x_2 \quad (\max)$

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \le 21 \\ 0 \le x_1 \le 2 \\ x_2 \ge 1 \end{cases}$$

2.16. $f = 4x_1 + 7x_2 \quad (\max)$

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 \le 21 \\ 7x_1 + 2x_2 \le 49 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$

2.17. $f = 3x_1 + 2x_2 \quad (\max)$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 2 \\ 3x_1 + 4x_2 \le 12 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$

2.18. $f = x_1 + x_2 \quad (\max)/(\min)$

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 \ge 6 \\ 9x_1 + 8x_2 \le 157 \\ -3x_1 + 11x_2 \ge 16 \end{cases}$$

2.19. $f = 3x_1 + 2x_2 \quad (\max)/(\min)$

$$\begin{cases} -4x_1 + 5x_2 \le 29 \\ 3x_1 - x_2 \le 14 \\ 5x_1 + 2x_2 \ge 38 \end{cases}$$

2.20. $f = -x_1 + 2x_2 \quad (\min)$

$$\begin{cases} 9x_1 + 7x_2 \le 79 \\ 2x_1 - 5x_2 \le 11 \\ 2x_1 + x_2 \ge 4 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$

3. Следующие задачи линейного программирования решить графически и симплекс-методом.

3.1. $f = -x_1 + 3x_2 \quad (\min)$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \le -4 \\ x_1 - x_2 \le 1 \\ x_2 \ge 1 \\ x_1 + x_2 \ge 5 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$

3.2. $f = 3x_1 - 2x_2 \quad (\max)$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \le 2 \\ -x_1 - 2x_2 \ge -1 \\ x_2 \le 2 \\ x_1 + x_2 \ge -2 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$

3.3. $f = x_1 - x_2 \quad (\min)$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge 1 \\ -3x_1 + x_2 \le 1 \\ x_1 + x_2 \le 2 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$

3.4. $f = -x_1 + 4x_2 \quad (\max)$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \ge 1 \\ x_1 + 2x_2 \ge 2 \\ x_1 + x_2 \le 4 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$

3.5. $f = 5x_1 - 2x_2 \quad (\max)$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 4 \\ x_1 \le 3 \\ x_1 + x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$

3.6. $f = x_1 + x_2 \quad (\max)$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 10 \\ 2x_1 + x_2 \le 10 \\ x_1 + 3x_2 \ge 3 \\ 5x_1 - x_2 \ge -5 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$

3.7. $f = x_1 - x_2 \quad (\min)$

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 \ge 3 \\ x_1 \le 2 \\ x_1 + 3x_2 \le 12 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$

3.8. $f = x_1 + x_2 \quad (\min)$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \ge 7 \\ 3x_1 + 2x_2 \ge 21/2 \\ x_1 - 2x_2 \le 4 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$

3.9. $f = 2x_1 + x_2 \quad (\max)$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \le 10 \\ 5x_1 - x_2 \ge 10 \\ x_1 + 3x_2 \le 5 \\ 5x_1 - x_2 \le 5 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$

3.10. $f = 2x_1 - 3x_2 \quad (\min)$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \ge -2 \\ 3x_1 + 2x_2 \ge 6 \\ 3x_1 + x_2 \le 10 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$

– составить математическую модель следующей задачи линейного программирования и решить ее графически и симплекс-методом.

В цехе имеется три группы станков $B_1$, $B_2$, $B_3$ в количествах $b_1$, $b_2$, $b_3$ соответственно, на которых требуется изготовить изделия двух видов: $A_1$ и $A_2$. Известно, что каждое изделие вида $A_j$, $j=\overline{1,\ 2}$ обрабатывается на $a_{ij}$ станках группы $B_i$, $i=\overline{1,\ 3}$. Прибыль от одного изделия вида $A_j$ составляет $c_j$ денежных единиц. Сколько изделий каждого вида должен изготавливать цех, чтобы получить максимальную прибыль? Все данные представлены таблицей.

| Виды станков | Виды изделий | | Станочный парк |
|---|---|---|---|
| | $A_1$ | $A_2$ | |
| $B_1$ | $a_{11}$ | $a_{12}$ | $b_1$ |
| $B_2$ | $a_{21}$ | $a_{22}$ | $b_2$ |
| $B_3$ | $a_{31}$ | $a_{32}$ | $b_3$ |
| Прибыль | $c_1$ | $c_2$ | |

3.11. $a_{11}=2\quad a_{12}=5\quad a_{21}=4\quad a_{22}=3\quad a_{31}=1\quad a_{32}=2$
$b_1=70\quad b_2=75\quad b_3=30\quad c_1=8\quad c_2=10$

3.12. $a_{11}=8\quad a_{12}=3\quad a_{21}=4\quad a_{22}=2\quad a_{31}=1\quad a_{32}=3$
$b_1=84\quad b_2=72\quad b_3=45\quad c_1=10\quad c_2=8$

3.13. $a_{11}=3\quad a_{12}=3\quad a_{21}=8\quad a_{22}=3\quad a_{31}=2\quad a_{32}=5$
$b_1=51\quad b_2=96\quad b_3=64\quad c_1=7\quad c_2=9$

3.14. $a_{11}=2\quad a_{12}=3\quad a_{21}=2\quad a_{22}=3\quad a_{31}=2\quad a_{32}=5$
$b_1=84\quad b_2=72\quad b_3=55\quad c_1=6\quad c_2=5$

3.15. $a_{11}=3\quad a_{12}=1\quad a_{21}=4\quad a_{22}=3\quad a_{31}=2\quad a_{32}=5$
$b_1=45\quad b_2=69\quad b_3=73\quad c_1=8\quad c_2=12$

3.16. $a_{11}=2\quad a_{12}=6\quad a_{21}=2\quad a_{22}=3\quad a_{31}=7\quad a_{32}=4$
$b_1=72\quad b_2=40\quad b_3=75\quad c_1=8\quad c_2=6$

3.17. $a_{11}=5\quad a_{12}=2\quad a_{21}=2\quad a_{22}=7\quad a_{31}=3\quad a_{32}=3$
$b_1=90\quad b_2=70\quad b_3=60\quad c_1=6\quad c_2=10$

3.18. $a_{11}=4\quad a_{12}=3\quad a_{21}=2\quad a_{22}=5\quad a_{31}=4\quad a_{32}=1$
$b_1=64\quad b_2=70\quad b_3=48\quad c_1=12\quad c_2=6$

3.19. $a_{11}=1 \quad a_{12}=3 \quad a_{21}=5 \quad a_{22}=2 \quad a_{31}=4 \quad a_{32}=5$
$b_1=19 \quad b_2=40 \quad b_3=41 \quad c_1=6 \quad c_2=10$

3.20. $a_{11}=1 \quad a_{12}=4 \quad a_{21}=4 \quad a_{22}=3 \quad a_{31}=7 \quad a_{32}=1$
$b_1=40 \quad b_2=69 \quad b_3=105 \quad c_1=8 \quad c_2=10$

4. На предприятии имеется возможность выпускать $n$ видов продукции $\Pi_j$ $\left(j=\overline{1,n}\right)$. При ее изготовлении используются ресурсы $P_1$, $P_2$, и $P_3$. Размеры допустимых затрат ресурсов ограничены соответственно величинами $b_1$, $b_2$ и $b_3$. Расход ресурса $i$-того $\left(i=\overline{1,3}\right)$ вида на единицу продукции $j$-того вида составляет $a_{ij}$ единиц. Цена единицы продукции $j$-того вида равна $c_j$ ден. ед.

Требуется:

а) симплексным методом найти план выпуска продукции по видам с учетом имеющихся ограниченных ресурсов, который обеспечивал бы предприятию максимальный доход. Дать содержательный ответ;

б) сформулировать в экономических терминах двойственную задачу и составить ее математическую модель;

в) используя решение исходной задачи и соответствие между двойственными переменными, найти компоненты оптимального плана двойственной задачи – двойственные оценки $y_i^*$ $\left(i=\overline{1,3}\right)$.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 4.1. | $n = 3$ | $b_1 = 24$ | $a_{11} = 5$ | $a_{21} = 5$ | $a_{31} = 2$ | $c_1 = 18$ |
| | | $b_2 = 10$ | $a_{12} = 7$ | $a_{22} = 2$ | $a_{32} = 1$ | $c_2 = 12$ |
| | | $b_3 = 6$ | $a_{13} = 4$ | $a_{23} = 1$ | $a_{33} = 1$ | $c_3 = 8$ |
| 4.2. | $n = 3$ | $b_1 = 150$ | $a_{11} = 2$ | $a_{21} = 1$ | $a_{31} = 3$ | $c_1 = 8$ |
| | | $b_2 = 180$ | $a_{12} = 3$ | $a_{22} = 4$ | $a_{32} = 4$ | $c_2 = 7$ |
| | | $b_3 = 120$ | $a_{13} = 4$ | $a_{23} = 5$ | $a_{33} = 2$ | $c_3 = 6$ |
| 4.3. | $n = 4$ | $b_1 = 280$ | $a_{11} = 2$ | $a_{21} = 1$ | $a_{31} = 1$ | $c_1 = 4$ |
| | | $b_2 = 80$ | $a_{12} = 1$ | $a_{22} = 0$ | $a_{32} = 2$ | $c_2 = 3$ |
| | | $b_3 = 250$ | $a_{13} = 1$ | $a_{23} = 1$ | $a_{33} = 1$ | $c_3 = 6$ |
| | | | $a_{14} = 1$ | $a_{24} = 1$ | $a_{34} = 0$ | $c_4 = 7$ |
| 4.4. | $n = 3$ | $b_1 = 600$ | $a_{11} = 10$ | $a_{21} = 1$ | $a_{31} = 5$ | $c_1 = 35$ |
| | | $b_2 = 30$ | $a_{12} = 20$ | $a_{22} = 1$ | $a_{32} = 6$ | $c_2 = 60$ |
| | | $b_3 = 144$ | $a_{13} = 23$ | $a_{23} = 1$ | $a_{33} = 6$ | $c_3 = 63$ |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 4.5. | $n = 3$ | $b_1 = 500$ | $a_{11} = 2$ | $a_{21} = 0$ | $a_{31} = 0$ | $c_1 = 3$ |
| | | $b_2 = 550$ | $a_{12} = 1$ | $a_{22} = 2$ | $a_{32} = 1$ | $c_2 = 4$ |
| | | $b_3 = 200$ | $a_{13} = 0$ | $a_{23} = 1$ | $a_{33} = 0$ | $c_3 = 1$ |
| 4.6. | $n = 3$ | $b_1 = 360$ | $a_{11} = 18$ | $a_{21} = 6$ | $a_{31} = 5$ | $c_1 = 9$ |
| | | $b_2 = 192$ | $a_{12} = 15$ | $a_{22} = 4$ | $a_{32} = 3$ | $c_2 = 10$ |
| | | $b_3 = 180$ | $a_{13} = 12$ | $a_{23} = 8$ | $a_{33} = 3$ | $c_3 = 16$ |
| 4.7. | $n = 3$ | $b_1 = 12$ | $a_{11} = 2$ | $a_{21} = 3$ | $a_{31} = 2$ | $c_1 = 14$ |
| | | $b_2 = 27$ | $a_{12} = 1$ | $a_{22} = 3$ | $a_{32} = 1$ | $c_2 = 6$ |
| | | $b_3 = 6$ | $a_{13} = 6$ | $a_{23} = 9$ | $a_{33} = 2$ | $c_3 = 22$ |
| 4.8. | $n = 4$ | $b_1 = 1000$ | $a_{11} = 1$ | $a_{21} = 2$ | $a_{31} = 0$ | $c_1 = 2$ |
| | | $b_2 = 500$ | $a_{12} = 2$ | $a_{22} = 1$ | $a_{32} = 1$ | $c_2 = 40$ |
| | | $b_3 = 1200$ | $a_{13} = 3$ | $a_{23} = 0$ | $a_{33} = 4$ | $c_3 = 10$ |
| | | | $a_{14} = 1$ | $a_{24} = 0$ | $a_{34} = 1$ | $c_4 = 15$ |
| 4.9. | $n = 3$ | $b_1 = 12$ | $a_{11} = 6$ | $a_{21} = 5$ | $a_{31} = 4$ | $c_1 = 1$ |
| | | $b_2 = 25$ | $a_{12} = 4$ | $a_{22} = 3$ | $a_{32} = 5$ | $c_2 = 2$ |
| | | $b_3 = 18$ | $a_{13} = 3$ | $a_{23} = 2$ | $a_{33} = 4$ | $c_3 = 3$ |
| 4.10. | $n = 5$ | $b_1 = 3$ | $a_{11} = 1$ | $a_{21} = 0$ | $a_{31} = 1$ | $c_1 = 5$ |
| | | $b_2 = 2$ | $a_{12} = 1$ | $a_{22} = 1$ | $a_{32} = 1$ | $c_2 = 2$ |
| | | $b_3 = 2$ | $a_{13} = 1$ | $a_{23} = 1$ | $a_{33} = 0$ | $c_3 = 8$ |
| | | | $a_{14} = 2$ | $a_{24} = 1$ | $a_{34} = 2$ | $c_4 = 3$ |
| | | | $a_{15} = 2$ | $a_{25} = 2$ | $a_{35} = 1$ | $c_5 = 6$ |
| 4.11. | $n = 4$ | $b_1 = 4$ | $a_{11} = 1$ | $a_{21} = 2$ | $a_{31} = 0$ | $c_1 = 2$ |
| | | $b_2 = 3$ | $a_{12} = 3$ | $a_{22} = 1$ | $a_{32} = 1$ | $c_2 = 4$ |
| | | $b_3 = 3$ | $a_{13} = 0$ | $a_{23} = 0$ | $a_{33} = 4$ | $c_3 = 1$ |
| | | | $a_{14} = 1$ | $a_{24} = 0$ | $a_{34} = 1$ | $c_4 = 1$ |
| 4.12. | $n = 5$ | $b_1 = 3$ | $a_{11} = 1$ | $a_{21} = 2$ | $a_{31} = 3$ | $c_1 = 3$ |
| | | $b_2 = 5$ | $a_{12} = 2$ | $a_{22} = 3$ | $a_{32} = 1$ | $c_2 = 4$ |
| | | $b_3 = 4$ | $a_{13} = 3$ | $a_{23} = 1$ | $a_{33} = 2$ | $c_3 = 1$ |
| | | | $a_{14} = 6$ | $a_{24} = 6$ | $a_{34} = 6$ | $c_4 = 3$ |
| | | | $a_{15} = 2$ | $a_{25} = 0$ | $a_{35} = 4$ | $c_5 = 2$ |
| 4.13. | $n = 4$ | $b_1 = 2$ | $a_{11} = 1$ | $a_{21} = 0$ | $a_{31} = 1$ | $c_1 = 3$ |
| | | $b_2 = 2$ | $a_{12} = 1$ | $a_{22} = 1$ | $a_{32} = 0$ | $c_2 = 7$ |
| | | $b_3 = 2$ | $a_{13} = 0$ | $a_{23} = 1$ | $a_{33} = 1$ | $c_3 = 4$ |
| | | | $a_{14} = 2$ | $a_{24} = 0$ | $a_{34} = 0$ | $c_4 = 2$ |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4.14. | $n = 3$ | $b_1 = 5$ | $a_{11} = 0$ | $a_{21} = 2$ | $a_{31} = 1$ | $c_1 = 20$ |
| | | $b_2 = 4$ | $a_{12} = 2$ | $a_{22} = 4$ | $a_{32} = 0$ | $c_2 = 8$ |
| | | $b_3 = 2$ | $a_{13} = 5$ | $a_{23} = 2$ | $a_{33} = 1$ | $c_3 = 30$ |
| 4.15. | $n = 3$ | $b_1 = 4$ | $a_{11} = 1$ | $a_{21} = 1$ | $a_{31} = 1$ | $c_1 = 3$ |
| | | $b_2 = 7$ | $a_{12} = 3$ | $a_{22} = 0$ | $a_{32} = 3$ | $c_2 = 8$ |
| | | $b_3 = 12$ | $a_{13} = 0$ | $a_{23} = 2$ | $a_{33} = 2$ | $c_3 = 5$ |
| 4.16. | $n = 3$ | $b_1 = 18$ | $a_{11} = 1$ | $a_{21} = 2$ | $a_{31} = 1$ | $c_1 = 3$ |
| | | $b_2 = 16$ | $a_{12} = 2$ | $a_{22} = 1$ | $a_{32} = 1$ | $c_2 = 4$ |
| | | $b_3 = 8$ | $a_{13} = 1$ | $a_{23} = 1$ | $a_{33} = 0$ | $c_3 = 2$ |
| 4.17. | $n = 3$ | $b_1 = 1$ | $a_{11} = 1$ | $a_{21} = 1$ | $a_{31} = 2$ | $c_1 = 3$ |
| | | $b_2 = 2$ | $a_{12} = 2$ | $a_{22} = 1$ | $a_{32} = 0$ | $c_2 = 1$ |
| | | $b_3 = 1$ | $a_{13} = 0$ | $a_{23} = 2$ | $a_{33} = 3$ | $c_3 = 4$ |
| 4.18. | $n = 4$ | $b_1 = 4$ | $a_{11} = 1$ | $a_{21} = 2$ | $a_{31} = 0$ | $c_1 = 2$ |
| | | $b_2 = 3$ | $a_{12} = 3$ | $a_{22} = 1$ | $a_{32} = 1$ | $c_2 = 6$ |
| | | $b_3 = 3$ | $a_{13} = 0$ | $a_{23} = 0$ | $a_{33} = 4$ | $c_3 = 2$ |
| | | | $a_{14} = 1$ | $a_{24} = 0$ | $a_{34} = 1$ | $c_4 = 3$ |
| 4.19. | $n = 3$ | $b_1 = 2$ | $a_{11} = 1$ | $a_{21} = 1$ | $a_{31} = 1$ | $c_1 = 1$ |
| | | $b_2 = 3$ | $a_{12} = 1$ | $a_{22} = 0$ | $a_{32} = 1$ | $c_2 = 1$ |
| | | $b_3 = 4$ | $a_{13} = 0$ | $a_{23} = 2$ | $a_{33} = 1$ | $c_3 = 1$ |
| 4.20. | $n = 3$ | $b_1 = 180$ | $a_{11} = 4$ | $a_{21} = 3$ | $a_{31} = 1$ | $c_1 = 10$ |
| | | $b_2 = 210$ | $a_{12} = 2$ | $a_{22} = 1$ | $a_{32} = 2$ | $c_2 = 14$ |
| | | $b_3 = 244$ | $a_{13} = 1$ | $a_{23} = 3$ | $a_{33} = 5$ | $c_3 = 12$ |

5. Решить транспортную задачу. Заданы мощности поставщиков $a_i$ $\left(i = \overline{1,\ 3}\right)$, емкости потребителей $b_j$ $\left(j = \overline{1,\ 3}\right)$ и стоимости $c_{ij}$ перевозки единицы продукции от каждого поставщика каждому потребителю. Требуется найти план перевозок, обеспечивающий минимальные суммарные транспортные издержки. Данные представлены в таблицах.

5.1.

| $a_i$ \ $b_j$ | 40 | 120 | 170 |
|---|---|---|---|
| 90 | 5 | 6 | 8 |
| 65 | 6 | 9 | 10 |
| 75 | 4 | 7 | 5 |

5.2.

| $a_i$ \ $b_j$ | 25 | 40 | 35 |
|---|---|---|---|
| 20 | 3 | 6 | 4 |
| 90 | 5 | 9 | 3 |
| 60 | 4 | 8 | 6 |

5.3.

| $b_j$ / $a_i$ | 16 | 20 | 35 |
|---|---|---|---|
| 15 | 6 | 7 | 5 |
| 8 | 5 | 6 | 4 |
| 20 | 9 | 10 | 6 |

5.4.

| $b_j$ / $a_i$ | 20 | 12 | 8 |
|---|---|---|---|
| 22 | 7 | 6 | 3 |
| 18 | 8 | 4 | 2 |
| 16 | 2 | 3 | 1 |

5.5.

| $b_j$ / $a_i$ | 19 | 31 | 10 |
|---|---|---|---|
| 20 | 5 | 8 | 3 |
| 10 | 2 | 4 | 2 |
| 12 | 7 | 6 | 3 |

5.6.

| $b_j$ / $a_i$ | 14 | 20 | 22 |
|---|---|---|---|
| 50 | 3 | 8 | 9 |
| 18 | 3 | 4 | 5 |
| 12 | 2 | 7 | 6 |

5.7.

| $b_j$ / $a_i$ | 20 | 18 | 17 |
|---|---|---|---|
| 30 | 9 | 7 | 4 |
| 15 | 5 | 3 | 2 |
| 45 | 10 | 8 | 5 |

5.8.

| $b_j$ / $a_i$ | 18 | 40 | 12 |
|---|---|---|---|
| 32 | 9 | 8 | 4 |
| 15 | 8 | 7 | 3 |
| 7 | 4 | 3 | 2 |

5.9.

| $b_j$ / $a_i$ | 17 | 13 | 25 |
|---|---|---|---|
| 20 | 8 | 3 | 6 |
| 15 | 4 | 2 | 5 |
| 30 | 9 | 4 | 7 |

5.10.

| $b_j$ / $a_i$ | 12 | 19 | 9 |
|---|---|---|---|
| 18 | 5 | 8 | 2 |
| 22 | 2 | 9 | 4 |
| 15 | 6 | 7 | 3 |

5.11.

| $b_j$ / $a_i$ | 14 | 20 | 30 |
|---|---|---|---|
| 25 | 4 | 5 | 9 |
| 10 | 2 | 3 | 3 |
| 12 | 4 | 5 | 8 |

5.12.

| $b_j$ / $a_i$ | 40 | 12 | 20 |
|---|---|---|---|
| 17 | 8 | 4 | 9 |
| 30 | 6 | 3 | 7 |
| 15 | 5 | 2 | 4 |

5.13.

| $b_j$ / $a_i$ | 17 | 21 | 8 |
|---|---|---|---|
| 24 | 5 | 7 | 4 |
| 16 | 4 | 8 | 3 |
| 20 | 6 | 9 | 4 |

5.14.

| $b_j$ / $a_i$ | 20 | 12 | 37 |
|---|---|---|---|
| 15 | 5 | 3 | 7 |
| 10 | 3 | 2 | 3 |
| 24 | 6 | 4 | 8 |

5.15.

| $a_i$ \ $b_j$ | 10 | 7 | 18 |
|---|---|---|---|
| 15 | 6 | 3 | 7 |
| 18 | 4 | 2 | 9 |
| 12 | 5 | 3 | 8 |

5.16.

| $a_i$ \ $b_j$ | 9 | 31 | 20 |
|---|---|---|---|
| 20 | 3 | 9 | 8 |
| 14 | 4 | 6 | 7 |
| 12 | 2 | 4 | 5 |

5.17.

| $a_i$ \ $b_j$ | 20 | 10 | 30 |
|---|---|---|---|
| 35 | 6 | 3 | 7 |
| 15 | 3 | 2 | 4 |
| 20 | 5 | 4 | 8 |

5.18.

| $a_i$ \ $b_j$ | 20 | 14 | 16 |
|---|---|---|---|
| 30 | 5 | 2 | 6 |
| 15 | 2 | 1 | 3 |
| 25 | 4 | 2 | 8 |

5.19.

| $a_i$ \ $b_j$ | 25 | 19 | 21 |
|---|---|---|---|
| 40 | 5 | 3 | 6 |
| 17 | 2 | 1 | 2 |
| 23 | 7 | 4 | 8 |

5.20.

| $a_i$ \ $b_j$ | 21 | 30 | 32 |
|---|---|---|---|
| 17 | 5 | 9 | 7 |
| 32 | 4 | 6 | 5 |
| 20 | 9 | 5 | 4 |

6. В пунктах $A_i \left(i=\overline{1,3}\right)$ производится однородная продукция в количествах $a_i$ единиц. Готовая продукция поставляется в пункты $B_j \left(j=\overline{1,4}\right)$, потребности которых составляют $b_j$ единиц. Стоимости $c_{ij}$ перевозки единицы продукции из пункта $A_i$ в пункт $B_j$ заданы матрицей $(c_{ij})$.

Требуется:

а) методом потенциалов найти план перевозок продукции, при котором минимизируются суммарные затраты по ее изготовлению и доставке потребителям;

б) вычислить суммарные затраты $f_{\min}$;

в) установить пункты, в которых остается нераспределенная продукция, и указать ее объем.

6.1.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $a_1 = 750$ | $b_1 = 450$ | $c_{11} = 1$ | $c_{21} = 4$ | $c_{31} = 5$ |
| $a_2 = 200$ | $b_2 = 300$ | $c_{12} = 6$ | $c_{22} = 3$ | $c_{32} = 8$ |
| $a_3 = 550$ | $b_3 = 350$ | $c_{13} = 5$ | $c_{23} = 5$ | $c_{33} = 10$ |
| | $b_4 = 250$ | $c_{14} = 3$ | $c_{24} = 7$ | $c_{34} = 4$ |

6.2.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $a_1 = 300$ | $b_1 = 250$ | $c_{11} = 3$ | $c_{21} = 7$ | $c_{31} = 3$ |
| $a_2 = 700$ | $b_2 = 450$ | $c_{12} = 7$ | $c_{22} = 5$ | $c_{32} = 6$ |
| $a_3 = 400$ | $b_3 = 150$ | $c_{13} = 6$ | $c_{23} = 4$ | $c_{33} = 5$ |
| | $b_4 = 350$ | $c_{14} = 4$ | $c_{24} = 9$ | $c_{34} = 1$ |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 6.3. | $a_1 = 450$ | $b_1 = 150$ | $c_{11} = 6$ | $c_{21} = 5$ | $c_{31} = 7$ |
| | $a_2 = 200$ | $b_2 = 300$ | $c_{12} = 4$ | $c_{22} = 1$ | $c_{32} = 11$ |
| | $a_3 = 350$ | $b_3 = 50$ | $c_{13} = 8$ | $c_{23} = 4$ | $c_{33} = 9$ |
| | | $b_4 = 400$ | $c_{14} = 3$ | $c_{24} = 4$ | $c_{34} = 6$ |
| 6.4. | $a_1 = 350$ | $b_1 = 200$ | $c_{11} = 4$ | $c_{21} = 4$ | $c_{31} = 2$ |
| | $a_2 = 750$ | $b_2 = 50$ | $c_{12} = 5$ | $c_{22} = 7$ | $c_{32} = 6$ |
| | $a_3 = 300$ | $b_3 = 600$ | $c_{13} = 8$ | $c_{23} = 1$ | $c_{33} = 4$ |
| | | $b_4 = 400$ | $c_{14} = 6$ | $c_{24} = 2$ | $c_{34} = 7$ |
| 6.5. | $a_1 = 500$ | $b_1 = 250$ | $c_{11} = 4$ | $c_{21} = 5$ | $c_{31} = 4$ |
| | $a_2 = 200$ | $b_2 = 150$ | $c_{12} = 8$ | $c_{22} = 1$ | $c_{32} = 6$ |
| | $a_3 = 600$ | $b_3 = 350$ | $c_{13} = 3$ | $c_{23} = 6$ | $c_{33} = 5$ |
| | | $b_4 = 250$ | $c_{14} = 7$ | $c_{24} = 4$ | $c_{34} = 3$ |
| 6.6. | $a_1 = 500$ | $b_1 = 200$ | $c_{11} = 7$ | $c_{21} = 6$ | $c_{31} = 4$ |
| | $a_2 = 900$ | $b_2 = 650$ | $c_{12} = 7$ | $c_{22} = 1$ | $c_{32} = 7$ |
| | $a_3 = 100$ | $b_3 = 150$ | $c_{13} = 8$ | $c_{23} = 2$ | $c_{33} = 5$ |
| | | $b_4 = 300$ | $c_{14} = 4$ | $c_{24} = 7$ | $c_{34} = 6$ |

Студенческие отряды *СО*-1, *СО*-2 и *СО*-3 численностью в $a_1$, $a_2$, и $a_3$ человек принимают участие в сельскохозяйственных работах. Для уборки картофеля на полях $П_1$, $П_2$, $П_3$ и $П_4$ необходимо выделить соответственно $b_1$, $b_2$, $b_3$ и $b_4$ человек. Производительность труда студентов зависит от урожайности картофеля, а также от состава отряда и характеризуется для указанных отрядов и полей элементами матрицы $\left(p_{ij}\right)$ (в центнерах на человека за рабочий день).

Требуется:

а) методом потенциалов найти план распределения студентов по полям так, чтобы за рабочий день было убрано максимально возможное количество картофеля;

б) определить, сколько центнеров картофеля будет убрано с четырех полей при оптимальном распределении студентов.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 6.7 | $a_1 = 25$ | $b_1 = 22$ | $p_{11} = 8$ | $p_{21} = 7$ | $p_{31} = 9$ |
| | $a_2 = 30$ | $b_2 = 15$ | $p_{12} = 4$ | $p_{22} = 9$ | $p_{32} = 7$ |
| | $a_3 = 35$ | $b_3 = 23$ | $p_{13} = 7$ | $p_{23} = 8$ | $p_{33} = 5$ |
| | | $b_4 = 30$ | $p_{14} = 6$ | $p_{24} = 6$ | $p_{34} = 8$ |
| 6.8 | $a_1 = 20$ | $b_1 = 30$ | $p_{11} = 7$ | $p_{21} = 9$ | $p_{31} = 4$ |
| | $a_2 = 45$ | $b_2 = 14$ | $p_{12} = 6$ | $p_{22} = 5$ | $p_{32} = 8$ |
| | $a_3 = 25$ | $b_3 = 26$ | $p_{13} = 9$ | $p_{23} = 6$ | $p_{33} = 5$ |
| | | $b_4 = 20$ | $p_{14} = 5$ | $p_{24} = 7$ | $p_{34} = 9$ |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 6.9. | $a_1 = 45$ | $b_1 = 20$ | $p_{11} = 4$ | $p_{21} = 6$ | $p_{31} = 7$ |
| | $a_2 = 15$ | $b_2 = 22$ | $p_{12} = 5$ | $p_{22} = 7$ | $p_{32} = 6$ |
| | $a_3 = 30$ | $b_3 = 18$ | $p_{13} = 6$ | $p_{23} = 4$ | $p_{33} = 8$ |
| | | $b_4 = 30$ | $p_{14} = 6$ | $p_{24} = 9$ | $p_{34} = 4$ |
| 6.10 | $a_1 = 30$ | $b_1 = 32$ | $p_{11} = 9$ | $p_{21} = 6$ | $p_{31} = 4$ |
| | $a_2 = 25$ | $b_2 = 24$ | $p_{12} = 7$ | $p_{22} = 6$ | $p_{32} = 7$ |
| | $a_3 = 45$ | $b_3 = 28$ | $p_{13} = 8$ | $p_{23} = 7$ | $p_{33} = 9$ |
| | | $b_4 = 16$ | $p_{14} = 4$ | $p_{24} = 5$ | $p_{34} = 5$ |
| 6.11 | $a_1 = 25$ | $b_1 = 30$ | $p_{11} = 6$ | $p_{21} = 5$ | $p_{31} = 5$ |
| | $a_2 = 35$ | $b_2 = 18$ | $p_{12} = 9$ | $p_{22} = 9$ | $p_{32} = 4$ |
| | $a_3 = 50$ | $b_3 = 40$ | $p_{13} = 6$ | $p_{23} = 8$ | $p_{33} = 6$ |
| | | $b_4 = 22$ | $p_{14} = 8$ | $p_{24} = 7$ | $p_{34} = 8$ |
| 6.12 | $a_1 = 30$ | $b_1 = 14$ | $p_{11} = 5$ | $p_{21} = 9$ | $p_{31} = 7$ |
| | $a_2 = 40$ | $b_2 = 26$ | $p_{12} = 8$ | $p_{22} = 8$ | $p_{32} = 9$ |
| | $a_3 = 20$ | $b_3 = 16$ | $p_{13} = 4$ | $p_{23} = 5$ | $p_{33} = 8$ |
| | | $b_4 = 34$ | $p_{14} = 7$ | $p_{24} = 9$ | $p_{34} = 6$ |
| 6.13 | $a_1 = 35$ | $b_1 = 28$ | $p_{11} = 7$ | $p_{21} = 7$ | $p_{31} = 9$ |
| | $a_2 = 25$ | $b_2 = 15$ | $p_{12} = 4$ | $p_{22} = 5$ | $p_{32} = 4$ |
| | $a_3 = 40$ | $b_3 = 37$ | $p_{13} = 6$ | $p_{23} = 6$ | $p_{33} = 7$ |
| | | $b_4 = 20$ | $p_{14} = 5$ | $p_{24} = 8$ | $p_{34} = 4$ |
| 6.14 | $a_1 = 20$ | $b_1 = 36$ | $p_{11} = 6$ | $p_{21} = 6$ | $p_{31} = 9$ |
| | $a_2 = 35$ | $b_2 = 32$ | $p_{12} = 5$ | $p_{22} = 4$ | $p_{32} = 8$ |
| | $a_3 = 55$ | $b_3 = 24$ | $p_{13} = 9$ | $p_{23} = 8$ | $p_{33} = 4$ |
| | | $b_4 = 18$ | $p_{14} = 8$ | $p_{24} = 6$ | $p_{34} = 7$ |

В аптеках $A_1$, $A_2$, $A_3$ находятся антибиотики (в тыс. упаковок). Населенные пункты $B_j$ $\left(j = \overline{1,\ 6}\right)$ подали заявки на приобретение антибиотиков.

Требуется:

а) найти оптимальный план перевозки лекарства от $A_i$ $\left(i = \overline{1,\ 3}\right)$ аптеки к $B_j$ $\left(j = \overline{1,\ 6}\right)$ населенному пункту (критерий оптимальности – минимальная стоимость);

б) определить минимальную стоимость;

в) определить населенные пункты, которые недополучат лекарство (или аптеки, в которых останется излишек лекарственных средств).

Все данные приведены в таблице (указаны тарифы на перевозку одной тысячи упаковок).

6.15.

| | $B_1(30)$ | $B_2(10)$ | $B_3(50)$ | $B_4(70)$ | $B_5(30)$ | $B_6(70)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $A_1(120)$ | 2 | 1 | 2 | 4 | 3 | 5 |
| $A_2(60)$ | 5 | 4 | 2 | 8 | 6 | 7 |
| $A_3(50)$ | 1 | 2 | 3 | 2 | 1 | 3 |

6.16.

| | $B_1(50)$ | $B_2(15)$ | $B_3(30)$ | $B_4(60)$ | $B_5(50)$ | $B_6(20)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $A_1(100)$ | 1 | 4 | 8 | 3 | 5 | 3 |
| $A_2(60)$ | 1 | 3 | 5 | 8 | 2 | 2 |
| $A_3(80)$ | 4 | 2 | 1 | 4 | 2 | 3 |

6.17.

| | $B_1(20)$ | $B_2(15)$ | $B_3(40)$ | $B_4(70)$ | $B_5(35)$ | $B_6(60)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $A_1(120)$ | 1 | 2 | 3 | 2 | 1 | 3 |
| $A_2(60)$ | 2 | 1 | 2 | 4 | 3 | 5 |
| $A_3(80)$ | 5 | 4 | 2 | 8 | 6 | 7 |

6.18.

| | $B_1(50)$ | $B_2(20)$ | $B_3(10)$ | $B_4(30)$ | $B_5(70)$ | $B_6(60)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $A_1(110)$ | 2 | 1 | 2 | 4 | 3 | 5 |
| $A_2(50)$ | 5 | 4 | 2 | 8 | 6 | 7 |
| $A_3(50)$ | 1 | 2 | 3 | 2 | 1 | 3 |

6.19.

| | $B_1(10)$ | $B_2(50)$ | $B_3(50)$ | $B_4(40)$ | $B_5(15)$ | $B_6(70)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $A_1(120)$ | 3 | 2 | 2 | 4 | 1 | 5 |
| $A_2(60)$ | 6 | 5 | 2 | 8 | 4 | 7 |
| $A_3(80)$ | 1 | 1 | 3 | 2 | 2 | 3 |

6.20.

| | $B_1(70)$ | $B_2(20)$ | $B_3(40)$ | $B_4(50)$ | $B_5(10)$ | $B_6(10)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $A_1(100)$ | 5 | 6 | 2 | 4 | 1 | 2 |
| $A_2(50)$ | 7 | 1 | 5 | 8 | 2 | 2 |
| $A_3(80)$ | 3 | 3 | 1 | 2 | 4 | 3 |

*Решение типового варианта*

**Пример 17.1.** Найти два неотрицательных решения следующей системы линейных уравнений и неравенств. Сделать проверку.

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - 3x_3 \ge 1 \\ 3x_1 + 4x_3 \ge -2 \\ 3x_1 + x_2 \le 4 \end{cases}.$$

*Решение*:

Умножим второе неравенство на (–1), получаем

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - 3x_3 \geq 1 \\ -3x_1 - 4x_3 \leq 2 \\ 3x_1 + x_2 \leq 4 \end{cases}.$$

В левую часть первого неравенства вводим дополнительную неотрицательную переменную $(-x_4)$, в левую часть второго неравенства вводим дополнительную неотрицательную переменную $(+x_5)$, в левую часть третьего неравенства вводим дополнительную неотрицательную переменную $(+x_6)$. К получившейся системе уравнений присоединяем условие неотрицательности для балансовых (дополнительных) переменных, и получаем:

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4 = 1 \\ -3x_1 - 4x_3 + x_5 = 2 \\ 3x_1 + x_2 + x_6 = 4 \end{cases};$$

$$x_4 \geq 0, \quad x_5 \geq 0, \quad x_6 \geq 0.$$

Эту систему записываем в виде модифицированной жордановой таблицы и находим какое-либо опорное (первое) решение.

Так как переменные $x_5$ и $x_6$ входят только в одно из уравнений, причем с коэффициентом $(+1)$, то эти переменные можно сразу отнести к базисным. Поэтому второе и третье уравнения запишутся в виде, разрешенном относительно $x_5$ и $x_6$. Строим таблицу

| | 1 | $-x_1$ | $-x_2$ | $-x_3$ | $-x_4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | $-1$ | $\boxed{2}$ | $-3$ | $-1$ |
| $x_5$ | 2 | $-3$ | 0 | $-4$ | 0 |
| $x_6$ | 4 | 3 | 1 | 0 | 0 |

.

В качестве разрешающего столбца выбираем любой из основных (кроме столбца (1)) столбцов таблицы, содержащий хотя бы один положительный элемент. Разрешающий элемент выбираем среди положительных чисел разрешающего столбца по наименьшему отношению свободных членов к этим числам.

Пусть за разрешающий возьмем столбец $(-x_2)$. Тогда разрешающую строку находим по минимальному отношению $\min\left\{\frac{1}{2};\ \frac{4}{1}\right\}=\frac{1}{2}$, значит, разрешающей будет первая строка. На пересечении разрешающих строки и столбца находим разрешающий элемент – число (2). По правилу ПОЗ (практическое занятие 1) получаем новую таблицу

| | 1 | $-x_1$ | $-x_3$ | $-x_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $x_2$ | $1/2$ | $-1/2$ | $-3/2$ | $-1/2$ |
| $x_5$ | 2 | $-3$ | $-4$ | 0 |
| $x_6$ | $7/2$ | $7/2$ | $3/2$ | $\boxed{1/2}$ |

.

Из этой таблицы находим первое неотрицательное решение исходной системы $\bar{x}_1=\left(0;\ 1/2;\ 0\right)$.

Найдем второе решение. Пусть за разрешающий столбец примем $(-x_4)$, разрешающим элементом в нем будет единственное положительное число $(1/2)$. Применяем ПОЗ и получаем следующую таблицу:

| | 1 | $-x_1$ | $-x_3$ | $-x_6$ |
|---|---|---|---|---|
| $x_2$ | 4 | 3 | 0 | 1 |
| $x_5$ | 2 | $-3$ | $-4$ | 0 |
| $x_4$ | 7 | 7 | 3 | 2 |

.

Второе неотрицательное решение исходной системы неравенств $\bar{x}_2=(0;\ 4;\ 0)$.

Если за базисные переменные взять другие $x_j$, то будут получены другие неотрицательные решения исходной системы.

Выполним проверку:

для решения $\bar{x}_1=\left(0;\ 1/2;\ 0\right)$:

$$\begin{cases} -0+2\cdot 1/2-3\cdot 0\ge 1 \\ 3\cdot 0+4\cdot 0\ge -2 \\ 3\cdot 0+1/2\le 4 \end{cases} \quad \text{(верно);}$$

для решения $\bar{x}_2=(0;\ 4;\ 0)$:

$$\begin{cases} -0+2\cdot 4-3\cdot 0\ge 1 \\ 3\cdot 0+4\cdot 0\ge -2 \\ 3\cdot 0+4\le 4 \end{cases} \quad \text{(верно)}$$

*Ответ*: $\bar{x}_1=\left(0;\ 1/2;\ 0\right)$, $\bar{x}_2=(0;\ 4;\ 0)$.

**Пример 17.2.** Решить графически следующую ЗЛП:

$$f = x_1 + x_2 \quad (\max),$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 1 \\ 2x_1 + x_2 \le 1 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$$

*Решение*:

В данном случае задача линейного программирования содержит две переменные.

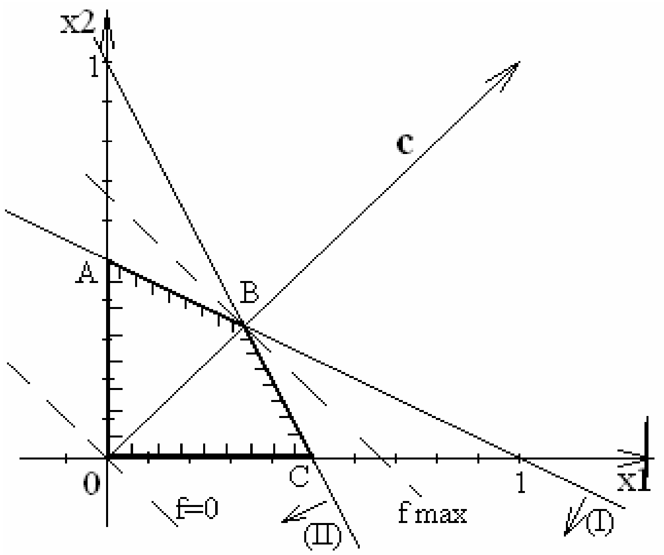
Для графического решения задачи линейного программирования в системе координат $x_1 0 x_2$ строим прямые

(I) $x_1 + 2x_2 = 1$, (II) $2x_1 + x_2 = 1$.

| $x_1$ | $x_2$ |
|---|---|
| 1 | 0 |
| 0 | $1/2$ |

| $x_1$ | $x_2$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| $1/2$ | 0 |

Прямые $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$ являются координатными осями.




Далее определяем полуплоскости, которые удовлетворяют исходной системе неравенств (координаты точки *O* (0, 0) подставляем в неравенства и выбираем ту область, в которой неравенства верны). В результате получаем область допустимых решений (выделенный четырехугольник *OABC*).

Строим вектор $\overline{grad\ f} = \bar{c} = (1;\ 1)$ и перпендикулярную к нему прямую нулевого уровня $f = 0$. Перемещая $f = 0$ параллельным переносом в направлении возрастания (функция *f* на максимум) вектора $\overline{grad\ f} = \bar{c}$, находим точку $B$, в которой целевая функция принимает наибольшее значение. Определяем координаты этой точки, решив систему уравнений $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \\ 2x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$, $\begin{cases} x_1 = 1/3 \\ x_2 = 1/3 \end{cases}$. Максимальное значение функции равно $f_{\max} = 1/3 + 1/3 = 2/3$

*Ответ*: $\bar{x}^* = \left(1/3;\ 1/3\right)$, $f_{\max} = 2/3$.

**Пример 17.3.** На предприятии имеется возможность выпускать 4 вида продукции $П_1$, $П_2$, $П_3$ и $П_4$. При ее изготовлении используются ресурсы $P_1$, $P_2$, и $P_3$. Размеры допустимых затрат ресурсов ограничены соответственно величинами 20, 37, 30. Расход ресурса $i$-того $\left(i = \overline{1,\ 3}\right)$ вида на единицу продукции $j$-того вида составляет $a_{ij}$ единиц. Цена единицы продукции $j$-того вида равна 11, 6, 9, 6 ден. ед. соответственно.

Требуется:

а) симплексным методом найти план выпуска продукции по видам с учетом имеющихся ограниченных ресурсов, который обеспечивал бы предприятию максимальный доход. Дать содержательный ответ.

б) сформулировать в экономических терминах двойственную задачу и составить ее математическую модель.

в) используя решение исходной задачи и соответствие между двойственными переменными, найти компоненты оптимального плана двойственной задачи – двойственные оценки $y_i^*$ $\left(i = \overline{1,3}\right)$.

$$\begin{array}{lll} a_{11} = 2 & a_{21} = 3 & a_{31} = 0 \\ a_{12} = 2 & a_{22} = 1 & a_{32} = 1 \\ a_{13} = 3 & a_{23} = 1 & a_{33} = 1 \\ a_{14} = 0 & a_{24} = 2 & a_{34} = 4 \end{array}$$

*Решение*:

а) пусть $x_1$ – объем выпускаемой продукции вида $П_1$; $x_2$ – объем выпускаемой продукции вида $П_2$; $x_3$ – объем продукции вида $П_3$ и $x_4$ – соответственно объем продукции вида $П_4$. Прибыль, которую получит предприятие при продаже всей продукции, составит $11x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 6x_4$ ден. ед. Естественно, предприятие стремится максимизировать эту прибыль, поэтому целевая функция принимает вид

$$f = 11x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 6x_4 \quad (\max)$$

На производство всех видов продукции будет затрачено: $2x_1+2x_2+3x_3$ единиц ресурсов $P_1$, $3x_1+x_2+x_3+2x_4$ единиц ресурсов $P_2$ и $x_2+x_3+4x_4$ единиц ресурса $P_3$.

Предприятие может использовать как все ресурсы в полном объеме, так и меньшее их количество, таким образом, система ограничений принимает вид

$$\begin{cases} 2x_1+2x_2+3x_3 \le 20 \\ 3x_1+x_2+x_3+2x_4 \le 37 \\ x_2+x_3+4x_4 \le 30 \end{cases}.$$

По смыслу задачи все переменные $x_j \ge 0$, $\left(j=\overline{1,\,4}\right)$. Построенная математическая модель задачи является задачей линейного программирования, и ее можно решить симплекс-методом.

Предварительно приводим задачу к канонической форме записи. Для этого в ограничения-неравенства вводим неотрицательные балансовые переменные $(+x_5)$, $(+x_6)$ и $(+x_7)$. Получаем

$$f=11x_1+6x_2+9x_3+6x_4 \quad (\max),$$

$$\begin{cases} 2x_1+2x_2+3x_3+x_5=20 \\ 3x_1+x_2+x_3+2x_4+x_6=37 \\ x_2+x_3+4x_4+x_7=30 \end{cases},$$

$$x_j \ge 0, \quad \left(j=\overline{1,\,7}\right).$$

Этой задаче соответствует следующая симплекс-таблица (сразу разрешенная относительно переменных $x_5$, $x_6$, $x_7$):

| | 1 | $-x_1$ | $-x_2$ | $-x_3$ | $-x_4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_5$ | 20 | $\boxed{2}$ | 2 | 3 | 0 |
| $x_6$ | 37 | 3 | 1 | 1 | 2 |
| $x_7$ | 30 | 0 | 1 | 1 | 4 |
| $f$ | 0 | $-11$ | $-6$ | $-9$ | $-6$ |

.

В качестве разрешающего столбца таблицы выбираем столбец $(-x_1)$, так как в $f$-строке этого столбца находится наибольший по модулю отрицательный элемент. По отношению $\min\left\{\frac{20}{2};\frac{37}{3}\right\}=\frac{20}{2}$ определяем, что разрешающей будет первая строка, значит, разрешающий элемент – число (2). Преобразовываем таблицу по правилу ПОЗ (практическое занятие 1) и получаем следующую симплекс-таблицу:

| | 1 | $-x_5$ | $-x_2$ | $-x_3$ | $-x_4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 10 | $1/2$ | 1 | $3/2$ | 0 |
| $x_6$ | 7 | $-3/2$ | $-2$ | $-7/2$ | $\boxed{2}$ |
| $x_7$ | 30 | 0 | 1 | 1 | 4 |
| $f$ | 110 | $11/2$ | 5 | $15/2$ | $-6$ |

.

Так как в $f$-строке имеется отрицательный элемент, то план неоптимален. Улучшаем его. Принимаем $(-x_4)$ за разрешающий столбец, разрешающая строка – вторая, число (2) – разрешающий элемент. Следующая симплекс-таблица имеет вид

| | 1 | $-x_5$ | $-x_2$ | $-x_3$ | $-x_6$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 10 | $1/2$ | 1 | $3/2$ | 0 |
| $x_4$ | $7/2$ | $-3/4$ | $-1$ | $-7/4$ | $1/2$ |
| $x_7$ | 16 | 3 | 5 | $\boxed{8}$ | $-2$ |
| $f$ | 131 | 1 | $-1$ | $-3$ | 3 |

.

В $f$-строке этой таблицы два отрицательных элемента. Из них выбираем наибольший по модулю. Столбец, содержащий этот элемент, является разрешающим. Число (8) будет разрешающим элементом.

Следующая симплекс-таблица

| | 1 | $-x_5$ | $-x_2$ | $-x_7$ | $-x_6$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 7 | | | | |
| $x_4$ | 7 | | | | |
| $x_3$ | 2 | | | | |
| $f$ | 137 | $17/8$ | $7/8$ | $3/8$ | $9/4$ |

.

В таблице в $f$-строке нет отрицательных элементов, значит построенный план оптимальный и единственный (нет и нулевых элементов).

$$\bar{x}^* = (7;\ 0;\ 2;\ 7; |\ 0;\ 0;\ 0).$$

По оптимальному плану продукцию вида $П_1$ следует выпускать в объеме 7 единиц, продукцию $П_2$ выпускать не следует, продукцию вида $П_3$ следует выпускать в объеме 2 единицы и продукцию $П_4$ следует выпускать в объеме 7 единиц. При таком плане выпуска продукции предприятие получит наибольшую прибыль, которая составит 137 ден. ед. т. к. $f_{\max} = 11 \cdot 7 + 6 \cdot 0 + 9 \cdot 2 + 6 \cdot 7 = 137$.

б) сформулируем в экономических терминах двойственную задачу и составим ее математическую модель.

Пусть на предприятии появилась возможность продать ресурсы некоторой организации. Необходимо установить цены на эти ресурсы. Обозначим их через $y_1$, $y_2$ и $y_3$.

Цены должны быть установлены исходя из следующих требований, отражающих несовпадающие интересы предприятия и организации:

1) покупающая организация стремится минимизировать общую стоимость ресурсов, т. е.

$$F = 20y_1 + 37y_2 + 30y_3 \quad (\min).$$

2) предприятие согласно продать ресурсы только по таким ценам, при которых оно получит за них выручку, не меньшую той, что могло бы получить, организовав собственное производство, т. е.

$$\begin{cases} 2y_1 + 3y_2 + 0 \cdot y_3 \geq 11 \\ 2y_1 + y_2 + y_3 \geq 6 \\ 3y_1 + y_2 + y_3 \geq 9 \\ 0 \cdot y_1 + 2y_2 + 4y_3 \geq 6 \end{cases}$$

$$y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0, \quad y_3 \geq 0.$$

в) установим соответствие между переменными прямой и двойственной задач

$$\begin{array}{c} \overbrace{x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4}^{СП} \; \overbrace{x_5 \quad x_6 \quad x_7}^{БП} \\ \updownarrow \quad\; \updownarrow \quad\; \updownarrow \quad\; \updownarrow \quad\; \updownarrow \quad\; \updownarrow \quad\; \updownarrow \\ \underbrace{y_4 \quad y_5 \quad y_6 \quad y_7}_{БП} \; \underbrace{y_1 \quad y_2 \quad y_3}_{СП} \end{array}$$

Используя решение прямой задачи и полученное соответствие между переменными, найдем оптимальный план двойственной задачи

| | | *БП* | $F$ | $y_1$ | $y_5$ | $y_3$ | $y_2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *СП* | *БП* | *СП* | 1 | $-x_5$ | $-x_2$ | $-x_7$ | $-x_6$ |
| $y_4$ | $x_1$ | | 7 | | | | |
| $y_7$ | $x_4$ | | 7 | | | | |
| $y_6$ | $x_3$ | | 2 | | | | |
| 1 | $f$ | | 137 | $17/8$ | $7/8$ | $3/8$ | $9/4$ |

Оптимальный план двойственной задачи

$$\overline{y}^*=\left(17/8;\ 9/4;\ 3/8;\middle|\ 0;\ 7/8;\ 0;\ 0\right),$$

$$F_{\min}=20\cdot 17/8+37\cdot 9/4+30\cdot 3/8=137 \text{ ден. ед.}$$

Ресурс первого вида должен стоить $17/8$ ден. ед., ресурс второго вида должен стоить $9/4$ ден. ед., ресурс третьего вида должен стоить $3/8$ ден. ед. При этом покупающая организация затратит минимальное количество денег на приобретение ресурсов, которое составит 137 ден. ед.

*Ответ*:

а) $\overline{x}^*=(7;\ 0;\ 2;\ 7;|\ 0;\ 0;\ 0)$, $f_{\max}=137$ ден. ед.

б) $F=20y_1+37y_2+30y_3 \quad (\min)$,

$$\begin{cases} 2y_1+3y_2+0\cdot y_3\ge 11 \\ 2y_1+y_2+y_3\ge 6 \\ 3y_1+y_2+y_3\ge 9 \\ 0\cdot y_1+2y_2+4y_3\ge 6 \end{cases},$$

$y_1\ge 0,\quad y_2\ge 0,\quad y_3\ge 0$.

в) $\overline{y}^*=\left(17/8;\ 9/4;\ 3/8;\middle|\ 0;\ 7/8;\ 0;\ 0\right)$, $F_{\min}=137$ ден. ед.

**Пример 17.4.** В пунктах $A_i$ $\left(i=\overline{1,\ 3}\right)$ производится однородная продукция в количествах $a_i$ единиц. Готовая продукция поставляется в пункты $B_j$ $\left(j=\overline{1,\ 4}\right)$, потребности которых составляют $b_j$ единиц. Стоимости $c_{ij}$ перевозки единицы продукции из пункта $A_i$ в пункт $B_j$ заданы матрицей $\left(c_{ij}\right)_{3\times 4}$.

Требуется:

а) методом потенциалов найти план перевозок продукции, при котором минимизируются суммарные затраты по ее изготовлению и доставке потребителям;

б) вычислить суммарные затраты $f_{\min}$;

в) установить пункты, в которых остается нераспределенная продукция, и указать ее объем.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $a_1 = 400$ | $b_1 = 350$ | $c_{11} = 2$ | $c_{21} = 6$ | $c_{31} = 6$ |
| $a_2 = 300$ | $b_2 = 250$ | $c_{12} = 6$ | $c_{22} = 2$ | $c_{32} = 10$ |
| $a_3 = 500$ | $b_3 = 150$ | $c_{13} = 4$ | $c_{23} = 7$ | $c_{33} = 7$ |
| | $b_4 = 250$ | $c_{14} = 7$ | $c_{24} = 1$ | $c_{34} = 5$ |

*Решение*:

а) обозначим через $x_{ij}$ количество единиц груза, предназначенного к отправке из пункта $A_i$ в пункт $B_j$.

Количество груза, который планируется к доставке в пункт $B_1$ из пунктов $A_1$, $A_2$, $A_3$, составит $x_{11} + x_{21} + x_{31} = b_1 = 350$

Аналогично для пунктов $B_2$, $B_3$, $B_4$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = b_2 = 250$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = b_3 = 150$$
$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = b_4 = 250$$

Общее количество груза, отправленное из пунктов $A_1$, $A_2$, $A_3$, выражается равенствами

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = a_1 = 400$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = a_2 = 300$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = a_3 = 500$$

Так как $\sum_i a_i > \sum_j b_j$ (1200 > 1000), то модель открытого типа. Введем фиктивного получателя $B_5$ с объемом загрузки 1200 – 1000 = 200 единиц продукции и тарифами, равными нулю.

Получаем транспортную задачу закрытого типа.

Находим начальный опорный план перевозок следующим образом. Вначале загружаем клетку (2, 2) в объеме 250 единиц, оставшиеся 50 единиц заносим в клетку (2, 4). Теперь загружаем клетку (1, 1) в объеме

350 единиц, оставшиеся 50 единиц заносим в клетку (1, 3), 200 единиц заносим в клетку (3, 4), 100 единиц заносим в клетку (3, 3) и 200 единиц в клетку (3, 5).

| | $B_1(350)$ | $B_2(250)$ | $B_3(150)$ | $B_4(250)$ | $B_5(200)$ | $u_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $A_1(400)$ | 2<br>350 | 6 | 4<br>50 | 7 | 0 | 0 |
| $A_2(300)$ | 6 | 2<br>250 | 7 | 1<br>50 | 0 | –1 |
| $A_3(500)$ | 6 | 10 | 7<br>100 | 5<br>200 | 0<br>200 | 3 |
| $v_j$ | 2 | 3 | 4 | 2 | –3 | |

Чтобы построенный план был невырожденный, должно быть занято $m + n - 1 = 3 + 5 - 1 = 7$ клеток. В нашем случае занято 7 клеток – план невырожденный.

По формуле $u_i + v_j = c_{ij}$ для занятых клеток находим потенциалы (полагая вначале $u_1 = 0$), получаем

$$\begin{array}{ll} u_1 = 0 & v_1 = 2 \\ u_2 = -1 & v_2 = 3 \\ u_3 = 3 & v_3 = 4 \\ & v_4 = 2 \\ & v_5 = -3 \end{array}$$

Теперь для свободных клеток вычисляем оценки $S_{ij}$ по формуле

$$S_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$$

$$\begin{array}{ll} S_{12} = 6 - (0 + 3) = 3; & S_{23} = 7 - (-1 + 4) = 4; \\ S_{14} = 7 - (0 + 2) = 5; & S_{25} = 0 - (-1 - 3) = 4; \\ S_{15} = 0 - (0 - 3) = 3; & S_{31} = 6 - (3 + 2) = 1; \\ S_{21} = 6 - (-1 + 2) = 5; & S_{32} = 10 - (3 + 3) = 4. \end{array}$$

Все оценки положительные, значит, опорный план является оптимальным.

Выписываем матрицу перевозок $X^*$ (без учета фиктивного получателя $B_5$)

$$X^* = \begin{pmatrix} 350 & 0 & 50 & 0 \\ 0 & 250 & 0 & 50 \\ 0 & 0 & 100 & 200 \end{pmatrix}.$$

По оптимальному плану:

– поставщик $A_1$ поставляет 350 единиц продукции потребителю $B_1$ и 50 единиц продукции потребителю $B_3$;

– поставщик $A_2$ поставляет 250 единиц продукции потребителю $B_2$ и 50 единиц продукции потребителю $B_4$;

– поставщик $A_3$ поставляет 100 единиц продукции потребителю $B_3$ и 200 единиц продукции потребителю $B_4$.

б) по оптимальному плану минимальные затраты составят

$$f_{\min} = 350 \cdot 2 + 50 \cdot 40 + 250 \cdot 2 + 50 \cdot 1 + 100 \cdot 7 + 200 \cdot 5 = 3150 \text{ ден. ед.}$$

в) у поставщика $A_3$ останется нереализованным 200 единиц продукции.

*Ответ*:

а) $X^* = \begin{pmatrix} 350 & 0 & 50 & 0 \\ 0 & 250 & 0 & 50 \\ 0 & 0 & 100 & 200 \end{pmatrix}$;

б) $f_{\min} = 3150$ ден. ед.

в) у поставщика $A_3$ останется нереализованным 200 единиц продукции.

## ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ

1. Линейная форма, ее градиент. Гиперплоскость.
2. Преобразование однократного замещения (ПОЗ) в линейных системах.
3. Переход от одной формы задачи линейного программирования (ЗЛП) к другой эквивалентной форме.
4. Правила отыскания опорного решения системы линейных уравнений (ЛУ).
5. Графический метод решения ЗЛП.
6. Метод искусственного базиса для нахождения начального опорного решения ЗЛП.
7. Критерий оптимальности опорного плана канонической формы ЗЛП на максимум.
8. Алгоритм симплекс-метода решения ЗЛП.
9. Экономические задачи, приводящие к понятию двойственной пары ЗЛП.
10. Принцип построения двойственной задачи для исходной ЗЛП.
11. Взаимно-однозначное соответствие между неизвестными в паре взаимно-двойственных задач. Объединенная жорданова таблица пары взаимно-двойственных задач.
12. Первая теорема двойственности и ее экономический смысл.
13. Вторая теорема двойственности и ее экономический смысл.
14. Третья теорема двойственности и ее экономический смысл.
15. Анализ решения ЗЛП на основе теорем двойственности.
16. Транспортная задача (ТЗ) по стоимости перевозок. Основная терминология.
17. Способы («северо-западного угла», «минимального элемента», способ Фогеля) нахождения начального опорного плана ТЗ.
18. Распределительный метод решения ТЗ.
19. Метод потенциалов решения ТЗ.
20. Открытая модель ТЗ.
21. Различные вариации ТЗ (суммарные расходы на перевозку и производство единицы продукции; ограничения на поставку груза от $i$-того поставщика к $j$-тому производителю; обязательное удовлетворение запроса $j$-того потребителя).
22. Задачи транспортного типа (ЗТТ).
23. Простейший вариант задачи о назначениях.
24. ТЗ в сетевой форме. Алгоритм метода потенциалов для решения ТЗ в сетевой форме.
25. Открытая модель ТЗ на сети.
26. ТЗ по критерию времени. Алгоритм решения ТЗ по критерию времени.

## ОРГАНИЗАЦИЯ РЕЙТИНГОВОГО КОНТРОЛЯ

Рейтинговый контроль при изучении раздела «Математическое программирование» курса высшей математики предполагает оценку в баллах следующих составных компонентов учебной работы студента:

- отношение к занятиям (посещаемость, наличие рабочих тетрадей (конспект лекций, тетради по практическим занятиям) и других источников;
- успешность изучения дисциплины;
- творческое отношение студента к применению теоретических сведений к решению конкретных задач практического содержания;
- участие в научно-технических конференциях (по приложениям математики) внутри ВУЗа и на республиканском уровне.

За каждый из указанных пунктов студенту выставляются баллы (см. табл. 1). Перед экзаменами (зачетами) студенту объявляется сумма баллов за семестр, что влияет на итоговую оценку (см. табл. 2).

*Таблица 1*

| Номер составной компоненты | Расшифровка | Баллы рейтинга |
|---|---|---|
| 1 | посещение 1 лекции | 1 |
| | посещение 1 практического или лабораторного занятия | 1 |
| | посещение коллоквиума | 2 |
| | наличие систематического конспекта теоретических сведений | 6 |
| | наличие систематически хорошо оформленной рабочей тетради по решению практических заданий | 8 |
| 2 | На коллоквиуме: | |
| | отличный ответ | 3 |
| | хороший ответ | 2 |
| | удовлетворительный ответ | 1 |
| | не удовлетворительный ответ | – 1 |
| | На контрольных точках: | |
| | отлично 8-10 | 3 |
| | хорошо 6-7 | 2 |
| | удовлетворительно 4-6 | 1 |
| | неудовлетворительно 3, 2, 1 | – 1 |
| 3 | На практических занятиях: | |
| | ответ по новому материалу 8-10 | 3 |
| | 6-7 | 2 |
| | 4-6 | 1 |
| | 3, 2, 1 | – 1 |
| | ответ по пройденному материалу 8-10 | 2 |
| | 6-7 | 1 |
| | 4-6 | 0 |
| | 3, 2, 1 | -2 |

*Окончание табл. 1*

| | | |
|---|---|---|
| | выполнение по личной инициативе решения текстовой задачи практического содержания ($k$ раз за семестр)<br>подготовка доклада к СНТК по приложениям материалов дисциплины к практическим задачам | $5k$<br>50 |
| 4 | выступление с докладом на СНТК внутри вуза | 50 |
| | подготовка и распечатка доклада для республиканского конкурса студенческих научных работ | 100 |
| | то же в случае занятия призового места | 200 |

*Таблица 2*

| Оценка на экзамене (или выставление зачета) | Сумма баллов рейтинга за семестр |
|---|---|
| 10 «автоматом» | не менее 189 |
| 9 «автоматом» или 10 через экзамен | не менее 89, $k$ не менее 2 |
| 8 «автоматом» или 9 через экзамен | не менее 80, $k$ не менее 1 |
| 7 «автоматом» или 8 через экзамен | не менее 70 |
| 6 «автоматом» или 7 через экзамен | не менее 68 |
| 5 «автоматом» или 6 через экзамен | не менее 66 |
| 4 «автоматом» или 5 через экзамен | не менее 62 |
| не удовлетворительно (или 4 через экзамен) | < 62 |

## СОКРАЩЕНИЯ ТЕРМИНОВ

$R$ – множество действительных чисел;

$R^n$ – линейное пространство размерности $n$ над $R$;

**О** – начало решения или доказательства;

$\otimes$ – конец решения или доказательства;

$\varnothing$ – без доказательства;

ПОЗ – преобразования однократного замещения;

ЗЛП – задача линейного программирования;

ОЗЛП, КФЗЛП, СФЗЛП – соответственно общая, каноническая, симметрическая форма задачи линейного программирования;

ТЗ – транспортная задача;

ЗТТ – задача транспортного типа.

## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ ТЕРМИНОВ



## ЛИТЕРАТУРА


1. Кузнецов, А.В. Высшая математика: математическое программирование / А.В. Кузнецов, В.А. Сакович, Н.И. Холод. – Минск: Выш. шк., 1994.

2. Кузнецов, А.В. Математическое программирование /А.В. Кузнецов, Н.И. Холод. – Минск: Выш. шк., 1984.

3. Руководство к решению задач по математическому программированию: учеб. пособие / А.В. Кузнецов, Н.И. Холод, Л.С. Костевич; под общ. ред. А.В. Кузнецова. – 2-е изд., перераб. и доп. – Минск: Выш. шк., 2001.

4. Сборник задач и упражнений по высшей математике: Мат. программирование: учеб. пособие / А.В. Кузнецов, В.А. Сакович, Н.И. Холод [и др.]; под общ. ред. А.В. Кузнецова, Р.А. Рутковского. – 2-е изд., перераб. и доп. – Минск: Выш. шк., 2002.

## СОДЕРЖАНИЕ

*Учебное издание*

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА:
МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Учебно-методический комплекс
для студентов экономических специальностей

Составители
ПАЛЬЧИК Эдуард Михайлович,
БАШУН Светлана Юрьевна

2-е издание, исправленное

Редактор *Ю.Г. Зеленко*

Подписано в печать 27.09.10. Формат 60x84 1/16. Бумага офсетная. Ризография.
Усл. печ. л. 13,69 Уч.-изд. л. 11,6. Тираж 165 экз. Заказ 1491.

Издатель и полиграфическое исполнение:
учреждение образования «Полоцкий государственный университет».

ЛИ № 02330/0548568 от 26.06.2009 ЛП № 02330/0494256 от 27.05.2009

Ул. Блохина, 29, 211440, г. Новополоцк.