Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Полоцкий государственный университет»

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Учебно-методический комплекс
для студентов технических специальностей

В двух частях

Часть 2

Составление и общая редакция
Н. В. Цывиса

2-е издание

Новополоцк
ПГУ
2009

УДК 517(075.8)
ББК 22.161(4Беи)я73
В93

Рекомендован к изданию учебно-методической комиссией
радиотехнического факультета

РЕЦЕНЗЕНТЫ:

канд. физ.-мат. наук, доцент УО «ВГТУ» В. С. ДЕНИСОВ;
доктор физ.-мат. наук, профессор Э. М. ПАЛЬЧИК;
канд. физ.-мат. наук, доцент И. Б. СОРОГОВЕЦ

Высшая математика : учеб.-метод. комплекс для студентов техн. спец.
В93 В 2 ч. Ч. 2 / сост. и общ. ред. Н. В. Цывиса. – 2 изд. – Новополоцк : ПГУ, 2009. – 344 с.
ISBN 978-985-418-913-0.

Изложены основы аналитической геометрии и линейной алгебры, введение в математический анализ и дифференциальное исчисление функций одной переменной, комплексные числа. Рассмотрены основные классы задач.

Первое издание вышло в 2005 году.

Предназначен для преподавателей и студентов технических специальностей высших учебных заведений.

УДК 517(075.8)
ББК 22.161(4Беи)я73

ISBN 978-985-418-913-0 (Ч. 2)
ISBN 978-985-418-911-6

СОДЕРЖАНИЕ

Введение 5

Модуль 5. Элементы аналитической геометрии в пространстве 11
§ 1. Геометрический смысл уравнений 11
§ 2. Уравнение плоскости в пространстве 22
§ 3. Прямая линия в пространстве 37
§ 4. Прямая и плоскость в пространстве 48
§ 5. Основные задачи и примеры на прямую и плоскость в пространстве 52
Темы курсовых работ и рефератов 79
Литература 80

Модуль 6. Предел последовательности 81
§ 1. Множества. Отображения 81
§ 2. Числовые функции одной переменной 106
§ 3. Предел последовательности 120
§ 4. Предел функции 174
§ 5. Непрерывность функции 225
§ 6. Примеры и упражнения 241
Темы курсовых работ 245
Литература 246

Модуль 7. Дифференцирование функции одной переменной ..247
§ 1. Производная функции 247
§ 2. Основные правила нахождения производной 261
§ 3. Дифференциал 274
§ 4. Основные теоремы для дифференцируемых функций ...285
§ 5. Правило Лопиталя 295
§ 6. Формула Тейлора 302
§ 7. Исследование функций с помощью производных 316
§ 8. Основные задачи 336
Темы рефератов и курсовых работ 342
Литература 343

ВВЕДЕНИЕ

Преподавание высшей математики в вузах имеет целью:

– формирование личности студентов, развитие их интеллекта и способностей к логическому и алгоритмическому мышлению;

– обучение основным математическим методам, необходимым для анализа и моделирования устройств, процессов и явлений при поиске оптимальных решений для осуществления научно-технического прогресса и выбора наилучших способов реализации этих решений, методов обработки и анализа результатов численных и натурных экспериментов.

Задачи преподавания высшей математики состоят в том, чтобы на примерах математических понятий и методов продемонстрировать студентам действие законов материалистической диалектики, сущность научного подхода, специфику математики и ее роль в осуществлении научно-технического прогресса. Необходимо научить студентов приемам исследования и решения математических формализованных задач, выработать у студентов умение анализировать полученные результаты, привить им навыки самостоятельного изучения литературы по математике и ее приложениям.

Математическое образование современного специалиста включает изучение общего курса математики и специальных математических курсов. Общий курс высшей математики является фундаментом математического образования специалиста, но уже в рамках этого курса должно проводиться ориентирование на приложение математических методов в профессиональной деятельности. Преподавание специальных разделов ориентировано главным образом на применение математических методов к решению прикладных задач. При этом студенты сначала знакомятся с постановкой типичной прикладной задачи, затем изучают общий курс математических задач, к которому относится эта задача, потом – математические методы решения задач данного класса и, наконец, изученные методы применяют для решения исходной задачи. Выбор специальных разделов математики, которые должны изучать студенты, осуществляется с учетом характера их будущей профессиональной деятельности и согласуется с выпускающими кафедрами. Все вопросы преподавания этих разделов специальными кафедрами должны быть согласованы с кафедрой математики.

В результате изучения курса высшей математики студент должен иметь представление:

– о месте математики в системе естественных наук;

– о математике как особом способе познания мира;

– о содержании основных разделов высшей математики, отличии прикладной математики от фундаментальной;

знать и уметь использовать:

– методы математического анализа, аналитической геометрии, линейной алгебры, теории функций комплексного переменного и операционного исчисления, теории поля;

– методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений;

владеть:

– методами дифференциального и интегрального исчисления;

– методами решения уравнений математической физики;

– аналитическими методами решения прикладных задач;

иметь навыки:

– аналитического и численного решения уравнений;

– качественного исследования, аналитического и численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений;

– самостоятельной смысловой постановки прикладных задач.

Программа определяет основное содержание тем и разделов курсов, подлежащих изучению, последовательность их изложения и распределения по семестрам, исходя из задач своевременного математического обеспечения общенаучных, общеинженерных и специальных дисциплин и сохранения логической стройности и завершенности самих математических курсов. При выборе цели – ознакомить студентов с максимальным числом математических понятий и методов или выработать у них твердые навыки исследования и решения определенного круга задач. При этом предполагается, что глубокое овладение основными понятиями и методами высшей математики позволит студентам освоить те дополнительные разделы, которые им понадобятся в будущем.

Программа составлена в соответствии с требованиями образовательных стандартов и рассчитана на объем 540 учебных часов. Распределение учебных часов по видам занятий при объеме 540 учебных часов: лекции – 188 часов, практические занятия – 204 часа.

Самостоятельная работа студентов и контроль за ней

Для освоения курса высшей математики самостоятельная работа студентов является определяющей. Она состоит из непрерывной аудиторной и внеаудиторной работы по выполнению текущих (в течение недели) заданий и различных форм циклической работы по выполнению индивидуальных домашних заданий, типовых расчетов по темам курса или курсовой работы.

Организация работы и контроля знаний студентов при изучении курса высшей математики проводится следующим образом:

1. Теоретическая часть курса высшей математики

1.1. Работа с курсом лекций.

1.2. Работа с теоретическими упражнениями и задачами творческого характера или повышенной сложности. (Перечень задач и упражнений к каждому разделу предлагается).

1.3. Разработка некоторых теоретических вопросов курса высшей математики на углубленном уровне (подготовка к участию в научных конференциях, сообщения на курсе, в группе).

1.4. Подготовка и участие в математических олимпиадах различных уровней.

Контроль знаний студентов проводится через коллоквиумы или письменные работы по теоретическим вопросам раздела (разделов) курса высшей математики с зачетом успешно выполненной работы по соответствующим разделам теоретической части курса высшей математики.

2. Практическая часть курса высшей математики

2.1. Выполнение индивидуальных домашних заданий (ИДЗ).

2.2. Выполнение текущих контрольных и самостоятельных работ, математических диктантов.

2.3. Разбор наиболее сложных и важных теоретических вопросов.

2.4. Выполнение и защита типовых расчетов (ТР) (теоретические вопросы, упражнения, задачи и примеры).

2.5. Работа по методу «Обучающая функция ошибки».

3. Формы отчета студентов

3.1. В каждом семестре предусматривается экзамен по курсу высшей математики.

3.2. Студенты, успешно выполнившие ИДЗ и ТР, имеющие по контрольным, самостоятельным работам и математическим диктантам средний балл не ниже 6, имеют право сдать досрочно экзамен.

3.3. При сдаче экзаменов по курсу высшей математики учитывается участие в олимпиадах, выполнение научно-исследовательских работ, участие в конференциях.

3.4. Студенты, не выполнившие график учебного плана, по решению кафедры к экзамену не допускаются.

4. Каждый модуль имеет следующую структуру

4.1. Теоретический материал.

4.2. Практикум.

4.3. Задачи и упражнения.

4.4. Темы рефератов и научных исследований.

4.5. Литература.

5. Содержание дисциплины на I семестр

1. Комплексные числа и действия над ними.
2. Матрицы и линейные операции над ними.
3. Определители матриц и их свойства. Основные методы вычисления определителя. Определитель произведения матриц.
4. Обратная матрица и ее построение методом присоединенной матрицы. Свойства обратных матриц.
5. Ранг матрицы и методы его нахождения. Свойства ранга матрицы.
6. Системы линейных уравнений, общие понятия. Матричный способ решения систем линейных уравнений. Формулы Крамера и метод Гаусса.
7. Произвольные системы линейных уравнений. Теорема Кронекера – Капелли. Однородные системы линейных уравнений. Структура общего решения. Неоднородные системы линейных уравнений, структура общего решения.

8. Собственные векторы и собственные значения матриц и их свойства. Характеристические уравнения и многочлен матрицы. Теорема Кэли – Гамильтона. Нахождение обратной матрицы.

9. Векторы и линейные операции над ними. Проекция вектора на ось и на вектор. Линейная зависимость векторов. Базис. Декартова система координат.

10. Скалярное произведение векторов, его свойства и механический смысл. Условие ортогональности двух векторов. Скалярное произведение в координатной форме.

11. Векторное произведение векторов, его свойства, геометрический и физический смысл. Векторное произведение в координатной форме. Условие коллинеарности векторов.

12. Смешанное произведение векторов, его геометрический и механический смысл. Условие компланарности трех векторов.

13. Кривая на плоскости и способы ее задания. Различные виды уравнения прямой на плоскости. Угол между прямыми. Расстояние от точки до прямой.

14. Понятия поверхности и кривой в пространстве., их параметрические уравнения. Плоскость в пространстве и различные формы ее задания. Угол между плоскостями. Расстояние от точки до плоскости.

15. Прямая в пространстве, ее каноническое и параметрическое уравнения. Общее уравнение прямой. Угол между прямыми, между прямой и плоскостью. Расстояние от точки до прямой. Расстояние между скрещивающимися прямыми.

16. Понятие кривой второго порядка. Окружность, эллипс, гипербола, парабола , их геометрические свойства и уравнения.

17. Элементы теории множеств и математической логики. Метод математической индукции. Бином Ньютона. Понятие функции. Обратная функция. Способы задания функции.

18. Понятие числовой последовательности и ее предела. Бесконечно малые и бесконечно большие числовые последовательности. Неопределенные выражения.

19. Монотонные последовательности и критерий их сходимости. Число "е".

20. Предел функции в точке. Различные типы пределов. Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Замечательные пределы.

21. Непрерывность функции в точке. Свойства функций, непрерывных в точке. Точки разрыва и их классификация.

22. Сравнение функций. Символы ”o” и ”O”. Эквивалентные функции.

23. Функции, непрерывные на отрезке, и их свойства. Теоремы Вейерштрасса и Коши.

24. Производная функции, ее геометрический и физический смысл. Основные правила дифференцирования. Производная сложной и обратной функции.

25. Производная функции, заданной неявно и параметрически. Логарифмическое дифференцирование.

26. Дифференциал функции, его геометрический смысл. Инвариантность формы дифференциала.

27. Производные высших порядков, формула Лейбница. Дифференциалы высших порядков.

28. Основные теоремы дифференциального исчисления: Ферма, Роля, Коши, Лагранжа.

29. Правило Лопиталя.

30. Формула Тейлора. Основные разложения по формуле Тейлора.

31. Исследование функции и ее график.

МОДУЛЬ 5. ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ В ПРОСТРАНСТВЕ

§ 1. Геометрический смысл уравнений.

§ 2. Уравнение плоскости в пространстве.

§ 3. Прямая линия в пространстве.

§ 4. Прямая и плоскость в пространстве.

§ 5. Основные задачи и примеры на прямую и плоскость в пространстве.

Темы курсовых работ и рефератов

Литература

§ 1. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ УРАВНЕНИЙ

1. Уравнение поверхности. Параметрическое уравнение поверхности.

2. Сферические поверхности. Цилиндрические поверхности. Конические поверхности. Поверхности вращения.

3. Уравнение линии в пространстве.

1.1. Уравнение поверхности

В аналитической геометрии любую поверхность рассматривают как геометрическое место точек, обладающим вполне определенным, общим для всех их свойством. Пусть x, y, z – координаты произвольной точки данной поверхности относительно некоторой прямоугольной системы координат, то через соотношения между этими координатами можно выразить свойство, общее всем точкам поверхности и только им.

Уравнение, выражающее свойство, общее всем точкам данной поверхности, называют уравнением поверхности, а координаты x, y, z, входящие в это уравнение – текущие координаты произвольной точки поверхности. Таким образом, можно свести изучение геометрических свойств поверхности к изучению аналитических свойств соответствующего ей уравнения. Итак, всякая поверхность, рассматриваемая как геометрическое место точек, определяется уравнением, связывающим координаты ее точек

$$F(x, y, z) = 0. \tag{5.1}$$

Обратно, всякое уравнение между переменными x, y. и z, вообще говоря, определяет поверхность как геометрическое место точек, координаты которых x, y и z удовлетворяют этому уравнению.

Рассмотренное выше приводит к постановке двух основных задач:

1. Дана поверхность как геометрическое место точек. Составить уравнение этой поверхности.

2. Дано уравнение, связывающее координаты x, y и z. Исследовать форму поверхности, определяемой этим уравнением.

Параметрическое уравнение поверхности

Для параметрического задания поверхности требуется задать координаты любой точки этой поверхности как функции двух переменных u и σ (параметры)

$$\begin{cases} x = \varphi(u,\sigma) \\ y = \psi(u,\sigma) \\ z = \theta(u,\sigma) \end{cases}. \tag{5.2}$$

Три уравнения (5.2) определяют в пространстве некоторую поверхность. Действительно, если хотя бы одна пара из трех уравнений (5.2) однозначно разрешима относительно переменных (параметров) u и σ. Так, например, если из последних двух уравнений системы (5.2) можно выразить u и σ через y и z, т. е.

$$\begin{aligned} u &= F(y,z) \\ \sigma &= \phi(y,z) \end{aligned} \tag{5.3}$$

то, подставляя (5.3) в первое уравнение (5.2) получим уравнение с тремя переменными $x - \varphi(F(y,z),\phi(y,z)) = 0$, определяющее некоторую поверхность.

Пример 1. Написать параметрическое уравнение сферы радиуса $r > 0$ с центром в начале координат.

Решение. Пусть M (x, y, z) – произвольная точка сферы. $N_0(x,y)$ – проекция точки M на плоскость O_{xy}, а M_1 и M_2 – проекции точки N на оси O_x и O_y соответственно, а проекция точки M на ось O_z – M_3. Величина угла, образованного осью O_z и OM (широта), а угла, образованного осью O_x и ON равна σ (долгота). Из прямоугольных треугольников OMN и ONM_1 получаем

$$\begin{cases} x = r\sin u \cdot \cos\sigma \\ y = r\sin u \cdot \sin\sigma \\ z = r\cos u \end{cases}, \tag{5.4}$$

где $0 \le u \le \pi$; $0 \le \sigma \le 2\pi$.

Для того, чтобы получить каноническое уравнение сферы $x^2+y^2+z^2=r^2$, достаточно исключить из уравнений (5.4) переменные (параметры) u и σ; для этого возводим в квадрат обе части каждого уравнения и, почленно сложив, получаем каноническое уравнение сферы радиуса r с центром в начале координат.

1.2. Сферические поверхности. Цилиндрические поверхности. Конические поверхности. Поверхности вращения

Сферические поверхности. Сферической поверхностью называется геометрическое место точек, равноудаленных от данной точки, называемой центром.

Если начало координат поместить в центр сферы, а $M(x, y, z)$ – любая точка сферы, R – радиус, тогда уравнение сферы имеет вид: $x^2+y^2+z^2=R^2$.

Цилиндрические поверхности. Пусть в пространстве задана декартова прямоугольная система координат O_{xyz}. Поверхность S называется цилиндрической поверхностью с образующей, параллельной оси O_z (или O_x, O_y), если для любой точки этой поверхности $M_0(x_0, y_0, z_0)$ прямая линия, проходящая через эту точку и параллельная оси O_z, целиком лежит на поверхности S. Любую прямую, целиком лежащую на цилиндрической поверхности S называют образующей этой поверхности. Докажем, что имеет место следующее утверждение: любое уравнение вида

$$F(x, y)=0, \qquad (5.5)$$

связывающее переменные x и y и не содержащее z, определяет цилиндрическую поверхность, образующая которой параллельно оси O_z.

Действительно, если $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – любая точка поверхности S, которая определяется уравнением (5.5), тогда справедливо равенство

$$F(x_0, y_0)=0. \qquad (5.6)$$

Докажем, что любая точка $M(x, y, z)$ прямой, проходящая через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и параллельная оси O_z, также лежит на поверхности S, т. е. имеет координаты, удовлетворяющие уравнению (5.5). Для любой точки M прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и параллельной оси O_z, ее абсцисса и ординаты равны соответственно x_0 и y_0, а аппликата z – принимает любые значения, т. е. $M(x_0, y_0, z)$. Но уравнение (5.5) – уравнение относительно 2-х переменных x и y и в силу равенства (5.6) координаты точки $M(x_0, y_0, z_0)$ удовлетворяют (5.5), тем самым доказано, что S – цилиндрическая поверхность с образующей параллельной оси O_z.

Отметим, что на координатной плоскости O_{xy} уравнение (5.5) определяет плоскую линию, которая называется направляющей рассматриваемой цилиндрической поверхности. В пространстве эта линия определяется двумя уравнениями:

$$\begin{cases} F(x, y) = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

первое из которых определяет рассматриваемую цилиндрическую поверхность, а второе – координатную плоскость O_{xy} ($z = 0$).

Например, уравнение $x^2 + z^2 = 1^2$, определяет круглый цилиндр с образующей, параллельной оси O_y, и с направляющей, окружностью единичного радиуса с центром в начале координат, лежащей в плоскости O_{xz}.

В пространстве эта линия определяется двумя уравнениями

$$\begin{cases} x^2 + z^2 = 1^2 \\ y = 0 \end{cases}$$

Если уравнения направляющей цилиндрической поверхности заданы в виде

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0 \\ F_2(x, y, z) = 0 \end{cases}, \tag{5.7}$$

то уравнения образующих этой поверхности будут

$$\frac{X - x}{m} = \frac{Y - y}{n} = \frac{Z - z}{p}, \tag{5.8}$$

где (x, y, z) – точка, принадлежащая направляющей (5.7);
(m, n, p) – направляющие коэффициенты образующих;
X, Y, Z – текущие координаты цилиндрической поверхности.

Исключая x, y, z из четырех уравнений (5.7) и (5.8), получим искомое уравнение цилиндрической поверхности.

Пример 2. Написать уравнение цилиндра, образующие которого параллельны прямой $\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-0}{3}$, направляющей является линия $\begin{cases} y^2 = 4x \\ z = 0 \end{cases}$.

Решение. Канонические уравнения образующих будут

$$\frac{X-x}{1}=\frac{Y-y}{2}=\frac{Z-z}{3}.$$

Исключаем x, y и z из последних четырех уравнений.

$$x = X - t; \qquad y = Y - 2t; \qquad z = Z - 3t.$$

Подставляя эти значения в данные уравнения направляющей, получим

$$\begin{cases} (Y-2t)^2 = 4(X-t) \\ Z - 3t = 0 \end{cases}$$

Откуда $(Y-\frac{2}{3}Z)^2 = 4(X-\frac{1}{3}Z)$ или

$$9Y^2 - 12YZ + 4Z^2 - 36X + 12Z = 0,$$

уравнение искомого цилиндра.

Пример 3. Написать уравнение цилиндра, образующей которого служит гипербола

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 25 \\ z = 0 \end{cases},$$

а образующие параллельны биссектрисе угла *Oyz.*

Решение. Определим направляющие коэффициенты биссектрисы угла O_{yz}. Эта прямая проходит через начало координат и образует с осями координат углы $\alpha = 90^0$, $\beta = \gamma = 45^0$; направляющие косинусы биссектрисы угла O_{yz} будут равны

$$\cos\alpha = 0, \ \cos\beta = \cos\gamma = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

А так как направляющие коэффициенты прямой пропорциональны косинусам, то имеет место соотношение

$$m : n : p = 0 : \frac{\sqrt{2}}{2} : \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 : 1 : 1,$$

т. е. направление образующих цилиндра определяется отношениями: $m : n : p = 0 : 1 : 1$, а, следовательно, уравнения образующих искомой цилиндрической поверхности имеют вид

$$\frac{X - x}{0} = \frac{Y - y}{1} = \frac{X - x}{1}.$$

Поступая далее как в примере 2, получим искомое уравнение цилиндра

$$x^2 - y^2 - z^2 + 2yz - 25 = 0.$$

Конические поверхности. Конической поверхностью называют поверхность, образованную движением прямой, проходящей через данную точку, называемой вершиной, и скользящей по данной кривой. Движущая прямая называется образующей, а кривая, по которой скользит образующая – направляющей конической поверхности.

Докажем, что имеет место следующее утверждение:

Уравнение вида

$$F(x, y, z) = 0, \tag{5.9}$$

где $F(x, y, z)$ – однородная функция степени n, определяет коническую поверхность.

Функция $F(x, y, z)$, определенная для любых значений аргументов называется однородной функцией (степени n), если для любого числа k справедливо равенство

$$F(kx, ky, kz) = k^n F(x, y, z).$$

Докажем, что имеет место приведенное выше утверждение. Пусть $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – любая отличная от начала координат точка поверхности S, уравнение которой имеет вид (5.9). Тогда имеет место равенство

$$F(x_0, y_0, z_0) = 0. \tag{5.10}$$

Для любой точки $M(x, y, z)$, лежащей на прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и начало координат O, координаты x, y и z этой точки удовлетворяют уравнению (5.9). А векторы $\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{OM_0}$ коллинеарны, как лежащие на одной прямой и $\overrightarrow{OM_0} \neq \overrightarrow{0M}$, тогда $\overrightarrow{OM} = k\overrightarrow{OM_0}$ или в координатной форме

$$x = kx_0, \qquad y = ky_0, \qquad z = kz_0. \tag{5.11}$$

Так как $F(x, y, z)$ — однородная функция порядка n, то, используя равенства (5.11), получим $F(x,y,z) = F(kx_0,ky_0,kz_0) = k^n F(x_0,y_0,z_0)$, откуда в силу равенства (5.10) будем иметь $F(x, y, z) = 0$, а это значит, что поверхность S, определяемая уравнением (5.7) с однородной функцией $F(x, y, z)$ является конической.

Так, если уравнение направляющей искомой конической поверхности заданы в виде

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0 \\ F_2(x, y, z) = 0 \end{cases}, \tag{5.12}$$

то уравнение образующих этой поверхности будут:

$$\frac{X - x_0}{x - x_0} = \frac{Y - y_0}{y - y_0} = \frac{Z - z_0}{z - z_0}, \tag{5.13}$$

где (x, y, z) – точка, принадлежащая направляющей (5.12),

(x_0, y_0, z_0)– точка – вершина конуса;

X, Y, Z – текущие координаты точек конической поверхности.

Исключая x, y, z из четырех уравнений (5.12) и (5.13), получим искомое уравнение конической поверхности.

Пример 4. Составить уравнение конуса с вершиной в начале координат и направляющей $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ z = 1 \end{cases}$.

Решение. Канонические уравнения образующих, проходящих через вершину (0, 0, 0) конуса и точку $M(x, y, z)$ направляющей, будут $\dfrac{X}{x} = \dfrac{Y}{y} = \dfrac{Z}{z}$.

Исключая x; y; z из четырех данных уравнений, получим

$$x = \frac{X}{Z}, \quad y = \frac{Y}{Z}.$$

Подставляя эти значения x и y в первое уравнение направляющей получим искомое уравнение конуса

$$\frac{Z^2}{2}+\frac{Y^2}{2}-\frac{Z^2}{1}=0.$$

Поверхности вращения. Поверхность, образованная вращением линии вокруг оси, называется поверхностью вращения.

Из определения поверхности вращения следует, что в сечении поверхности вращения плоскостями, перпендикулярными к оси вращения, будут получаться окружности с центром на оси вращения.

Получим уравнение поверхности вращения, образованной вращением некоторой линии, лежащей в координатной плоскости, вокруг оси координат.

Пусть данная линия L в координатной плоскости Oyz определяется уравнением

$$F(Y, Z) = 0. \tag{5.14}$$

Найти уравнение поверхности, полученной вращением этой линии вокруг оси Oz.

Пусть $M(x, y, z)$ – произвольная точка поверхности и проведем через нее плоскость, перпендикулярную к оси вращения.

Пусть M_1 и N точки пересечения построенной плоскости соответственно с данной линией L и осью вращения (ось Oz). Координаты z всех трех точек M, M_1 и N равны между собой. Тогда радиус NM окружности, полученной сечением плоскостью, перпендикулярной к оси вращения, как расстояние между точками N и M: он равен $\sqrt{x^2+y^2}$. Но так как точка M_1 лежит на окружности сечения и на линии L, то радиус NM равен модулю ординаты точки M_1. Следовательно, полагая в уравнении (5.14) $Y=\pm\sqrt{x^2+y^2}$; $Z=z$ (координаты точки M_1), получим искомое уравнение поверхности вращения

$$F(\pm\sqrt{x^2+y^2};z)=0.$$

Итак, чтобы написать уравнение поверхности, полученной вращением некоторой линии, лежащей в плоскости Oyz, вокруг оси Oz, в уравнении этой линии заменяем y на $\pm\sqrt{x^2+y^2}$, а z

остается неизменной, причем знак перед радикалом должен совпадать со знаком координаты y на данной кривой. Уравнение поверхностей, полученных вращением некоторой линии вокруг оси Ox и Oyz, получаем аналогичным образом как и для оси Oz.

Пример 5. Эллипс с полуосями 5 и 3 вращается вокруг своей большой оси, совпадающей с осью Oy, центр эллипса совпадает с началом координат. Написать уравнение поверхности вращения.

Решение. Каноническое уравнение эллипса с вершиной в начале координат, лежащего в плоскости yOz: $a = 5$, $b = 3$

$$\begin{cases} \dfrac{Y^2}{25} + \dfrac{Z^2}{9} = 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

Чтобы получить уравнение поверхности, образованной вращением эллипса, лежащего в плоскости Oyz вокруг оси Oy, в уравнении эллипса заменяем Z на $\pm\sqrt{x^2 + z^2}$.

И искомая поверхность вращения определяется уравнением вида

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{9} = 1 .$$

1.3. Уравнение линии в пространстве

Определение. За линию в пространстве принимают геометрическое место точек, принадлежащих одновременно двум поверхностям.

Так, если $F(x, y, z) = 0$ и $\phi(x, y, z) = 0$ – суть уравнения двух поверхностей, пересечением которых является линия L, тогда:

1) координаты любой точки, лежащей на линии L удовлетворяют каждому из уравнений $F(x, y, z) = 0$ и $\phi(x, y, z) = 0$.

2) каждому из уравнений $F(x, y, z) = 0$ и $\phi(x, y, z) = 0$ не удовлетворяют координаты ни одной точки, не находящиеся на линии L.

Следовательно, два уравнения, объединенные в систему

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ \phi(x, y, z) = 0 \end{cases} \qquad (5.15)$$

определяют в пространстве линию L, т. е. система (5.15) – уравнение линии в пространстве.

Пусть (5.15) задает линию в пространстве. Рассмотрим равенство вида

$$A \cdot F(x, y, z) + B \cdot \phi(x, y, z) = 0, \qquad (5.16)$$

где A и B – любые действительные числа, $A^2 + B^2 \neq 0$ (одновременно не равные нулю). Отметим, что если

$A \cdot F(x, y, z) + B \cdot \phi(x, y, z) \neq const$, то (5.16) – уравнение поверхности.

Так как координаты любой точки, принадлежащей линии (5.15), удовлетворяют уравнения $F(x, y, z) = 0$ и $\phi(x, y, z) = 0$ одновременно, то они будут удовлетворять и уравнению (5.16) при любых A и B. Следовательно, при различных значениях A и B уравнение (5.16) определяет различные поверхности, проходящие через линию (5.15), т. е. данную линию L можно представить двумя уравнениями системы (5.15) бесчисленным множеством способов: вместо данных двух поверхностей можно выбирать любую пару поверхностей, пересекающихся по той же линии L. С аналитической точки зрения это означает, что вместо системы (5.15) можно взять любую эквивалентную систему.

Например, ось Ox можно представить как линию пересечения плоскостей:

$$\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} y + z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}.$$

А уравнения сфер $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 5 \end{cases}$ определяет окружность $R = 1$, с центром в точке $O(0,0)$, лежащую в плоскости Oxy.

Ту же самую окружность можно задать следующими двумя уравнениями

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x^2 + y^2 + (z - \sqrt{R^2 - 1})^2 = R^2 \end{cases},$$

где $R > 1$.

Выше была рассмотрена линия в пространстве как пересечение двух поверхностей. Рассматривая линию в пространстве, опираясь на кинематическую точку зрения как путь, пройденный материальной точкой, непрерывно движущейся по определенному закону. Этот подход приводит к параметрическому представлении линии в пространстве, суть которого заключается в следующем: координаты x, y, z любой точки данной линии задаются как непрерывные функции переменной t (параметра) – обычно выбирается время.

При таком подходе имеем, что

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \theta(t) \end{cases} . \tag{5.17}$$

Уравнения (5.17) называют параметрическими уравнениями линии в пространстве, если при каждом значении t из некоторого промежутка (конечного или бесконечного) они определяют координаты точек данной линии и только таких точек.

Отметим, что параметрический способ задания в пространстве эквивалентен способу задания линии в пространстве как пересечение двух поверхностей.

Действительно, предполагая, что хотя бы одна (например $\theta(t)$ из (5.17) из функций (5.17) имеет обратную. Тогда из третьего уравнения (5.17) имеем, что $t = \theta^{-1}(z)$, и, подставляя t в два первых уравнения (5.17), получим уравнения двух поверхностей

$$x = \varphi\left[\theta^{-1}(z)\right]$$

$$y = \psi\left[\theta^{-1}(z)\right],$$

пересечение которых есть данная линия.

Так, уравнение окружности радиуса r в пространстве задается тремя уравнениями:

$$\begin{cases} x = r\cos t, \\ y = r\sin t, \;\; 0 \le t < 2\pi \\ z = 0. \end{cases}$$

Пример 6. Отрезок постоянной длины r вращается вокруг оси O_z, оставаясь все время перпендикулярным ей, и одновременно одним концом своим перемещается по оси Oz. Перемещение конца отрезка по Oz пропорционально углу поворота. Второй конец отрезка при этом движется по траектории, называемой винтовой линии. Составить ее уравнения.

Решение. Пусть в начальный момент времени отрезок длины r находится на оси Ox, а в некоторый момент времени t в положении NM. Обозначим через B проекцию точки M на плоскость Oxy, а A – проекция B на ось Ox.

Из ΔAOB имеем $\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \end{cases}$,

где t – угол поворота данного отрезка.

Из условия задачи следует, $z = bt$, где b – коэффициент пропорциональности (шаг винта).

Тогда уравнения $\begin{cases} x = r\cos t, \\ y = r\sin t, \\ z = bt. \end{cases}$ параметрические уравнения винтовой линии.

§2. УРАВНЕНИЕ ПЛОСКОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ

1. Нормальное уравнение плоскости в пространстве.
2. Общее уравнение плоскости в пространстве.
3. Параметрическое уравнение плоскости
4. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору.
5. Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки.
6. Уравнение плоскости в отрезках.
7. Угол между двумя плоскостями. Условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей.
8. Расстояние от точки до плоскости.
9. Взаимное расположение двух плоскостей в пространстве.
10. Взаимное расположение трех плоскостей в пространстве.

2.1. Нормальное уравнение плоскости в пространстве

Любой вектор $\overline{N}(A, B, C) \neq \overline{0}$, перпендикулярный данной плоскости называется *вектором нормали* данной плоскости.

Теорема 1. ***Плоскость в пространстве определяется уравнением первой степени относительно трех переменных.***

Доказательство. Пусть в прямоугольной системе координат (рис. 5.1) в пространстве задана плоскость L, $|OT| = p \geq 0$, (OT – длина перпендикуляра, опущенного из точки O на плоскость L) $\overline{N^0}(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, $\left|\overline{N^0}\right| = 1$, M (x, y, z) – произвольная точка плоскости L, $\overline{r}(x, y, z)$– радиус-вектор точки M.

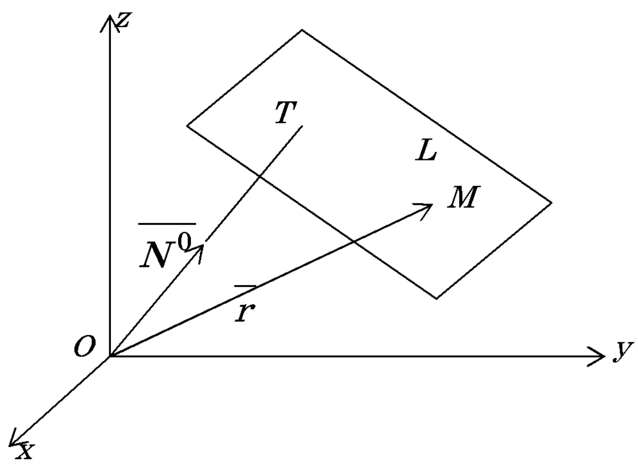


Рис. 5.1

При движении произвольной точки M по плоскости L ее радиус-вектор меняется так, что его проекция на $\overline{N^0}$ равна длине отрезка $|OT|$, т. е.

$$пр_{\overline{N^0}}\overline{r} = |OT| = p \tag{5.18}$$

Это условие имеет место только для точек плоскости L и нарушается, если точка M не лежит на плоскости L. Значит, равенство (5.18) выражает свойство, общее всем точкам плоскости и только им.

Из определения скалярного произведения векторов равенство (5.18) можно записать в виде

$$\overline{r} \cdot \overline{N^0} - p = 0 \tag{5.19}$$

Уравнение (5.19) называется уравнением плоскости в векторной форме.

Переходя к координатам в уравнение (5.19) получим

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0 \tag{5.20}$$

Уравнение (5.20) выражает собой условие, при котором точка $M\ (x,\ y,\ z)$ лежит на данной плоскости и называется нормальным уравнением в координатной форме. Полученное уравнение (5.20) есть уравнение первой степени относительно трех переменных $x,\ y,\ z$, а это значит, что всякая плоскость в пространстве может быть представлена уравнением первой степени относительно текущих координат.

Замечание 1. Полученное уравнение (5.19) и (5.20) остаются в силе и тогда, когда $p = 0$. В этом случае плоскость проходит через начало координат и вектор $\overrightarrow{N^0}$ – это любой из двух единичных векторов, перпендикулярных к плоскости и отличающихся один от другого направлением.

Замечание 2. Число p в уравнениях (5.19) и (5.20) означает расстояние от начала координат до плоскости L.

2.2. Общее уравнение плоскости в пространстве

Теорема 2. ***Всякое уравнение первой степени с тремя переменными определяет плоскость в пространстве.***

Доказательство. Пусть выбрано произвольное уравнение первой степени общего вида:

$$Ax + By + Cz + D = 0, \ |A| + |B| + |C| \neq 0 \qquad (5.21)$$

Рассматривая коэффициентыA, B, C, как проекции на оси координат Ox, Oy и Oz некоторого постоянного вектора $\overline{N}$, а x, y и z – проекции радиус-вектора $\overline{r}$ точки $M(x, y, z)$. Тогда уравнение (5.21) в векторной форме имеет вид

$$\overline{r} \cdot \overline{N} + D = 0 \qquad (5.22)$$

Покажем, что уравнение (5.22) можно привести к нормальному виду (уравнение (5.19) п. 2.1).

Возможны следующие случаи:

1.Пусть $D < 0$, то разделив уравнение (5.22) на $|\overline{N}|$ и, учитывая, что $\overline{N^0} = \dfrac{\overline{N}}{|\overline{N}|}$, а $p = \dfrac{D}{|\overline{N}|}$ будем иметь нормальное уравнение плоскости в векторной форме: $\overline{r} \cdot \overline{N^0} - p = 0$

2.Пусть $D > 0$, то разделив уравнение (5.22) на $(-|\overline{N}|)$ и обозначая положительное число $\dfrac{D}{|N|}$ через p, получим нормальное уравнение плоскости: $r \cdot (-\overline{N^0}) - p = 0$, где $(-\overline{N^0})$ – единичный вектор направлен от начала координат не к плоскости, а в обратную сторону.

3.Пусть $D = 0$, то, разделив уравнение (5.22) на $|\overline{N}|$ или на $(-|\overline{N}|)$ получим уравнение $\overline{r} \cdot \overline{N^0} = 0$ или $\overline{r} \cdot (-\overline{N^0}) = 0$ каждое из которых является нормальным уравнением плоскости, проходящей через начало координат. Следовательно, уравнение (5.22), а значит и исходное уравнение (5.21) определяют плоскость в пространстве. Что и требовалось доказать.

Уравнение $Ax + By + Cz + D = 0$ называется общим уравнением плоскости в пространстве.

Замечание 1. Вектор $\overline{N}(A, B, C)$ коллинеарен единичному вектору нормальному вектору $\overline{N^0}$ данной плоскости. Значит, вектор $\overline{N}(A, B, C)$ перпендикулярен к плоскости, а, следовательно, вектор $\overline{N}$ будет одним из нормальных векторов плоскости.

Замечание 2. В общем уравнении плоскости в пространстве свободный член D геометрического смысла не имеет, но если его разделить на $\left|\overline{N}\right|$, то получим расстояние от начала координат до плоскости.

Замечание 3. Нормальное уравнение плоскости в координатной форме

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$$

есть частный случай общего уравнения:

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

если в качестве нормального вектора $\overline{N}$ плоскости L выбран единичный вектор $\left|\overline{N^0}\right|$, направленный из начала координат перпендикулярно плоскости L.

Замечание 4. Для того, чтобы привести общее уравнение плоскости к нормальному виду, надо его разделить на длину вектора $\overline{N}(A, B, C)$, взяв ее со знаком, противоположным знаку D, т. е. умножить общее уравнение плоскости на нормирующий множитель

$$\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \tag{5.23}$$

причем знак множителя (5.23) следует взять противоположный знаку D (при $D = 0$ знак множителя (5.23) можно выбрать произвольно), тогда получим

$$\frac{(\pm A)\,x}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}+\frac{(\pm B)y}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}+\frac{(\pm D)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}-\frac{(\mp C)z}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=0, \quad (5.24)$$

где

$$\cos\alpha=\pm\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}};\ \cos\beta=\pm\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}};$$

$$\cos\gamma=\pm\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}};\ p=\pm\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Замечание 5. Частные случаи общего уравнения плоскости

$$Ax+By+Cz+D=0:$$

1. $D = 0$, тогда $Ax + By + Cz = 0$ – плоскость проходит через начало координат.

2. С $= 0$, тогда $Ax + By + D$ – плоскость параллельная оси O_z, т. к. нормальный вектор $\overline{N}(A,B,0)$ перпендикулярен оси O_z.

3. $B = 0$, тогда $Ax + Cz + D = 0$ – плоскость, параллельная оси O_y, т. к. вектор $N(A,0,C)$ перпендикулярен оси O_y.

4. $A = 0$, тогда $By + Cz + D = 0$ – плоскость, параллельная оси O_x, т. к. вектор $\overline{N}(0,B,C)$ перпендикулярен оси O_x.

5. $C = 0$ и $D = 0$, тогда $Ax + By = 0$ – плоскость проходит через ось O_z.

$B = 0$ и $D = 0$, тогда $Ax + Cz = 0$ – плоскость проходит через ось O_y.

$A = 0$ и $D = 0$, тогда $By + Cz = 0$ – плоскость проходит через ось O_x.

6. $B = 0$ и $C = 0$, тогда $Ax + D = 0$ – плоскость, параллельная координатной плоскости уO_z; действительно в этом случае нормальный вектор $\overline{N}(A,0,0)$ – перпендикулярен осям O_y и O_z, а сама плоскость параллельна им.

$A = 0$ и $C = 0$, тогда $By + D = 0$ – плоскость, параллельная координатной плоскости xO_z.

$A = 0$ *и* $B = 0$, тогда $Cz + D = 0$ – плоскость, параллельная координатной плоскости xO_y.

7. $B = C = D = 0$, тогда $Ax = 0$ или $x = 0$ – координатная плоскость yO_z.

$A = C = D = 0$, тогда $By = 0$ или $y = 0$ – координатная плоскость xO_y.

$A = B = D = 0$, тогда $Cz = 0$ или $z = 0$ – координатная плоскость yO_z.

2.3. Параметрическое уравнение плоскости в пространстве

Вектор $\bar{a}$ называется параллельным плоскости L, если он лежит на прямой l, параллельной L, или в плоскости L.

Пусть в пространстве задана точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и два неколлинеарных вектора $\bar{a}(a_1, a_2, a_3)$ и $\bar{b}(b_1, b_2, b_3)$, тогда

$$rang\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = 2 \qquad (5.25)$$

Написать уравнение плоскости L, проходящей через точку M_0 и параллельной векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

Пусть $M(x, y, z)$ – произвольная точка плоскости L, тогда векторы $\overrightarrow{M_0M}(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$, $\bar{a}$ и $\bar{b}$ компланарны. В силу того, что векторы не коллинеарны, то вектор $\overrightarrow{M_0M}$ единственным образом можно разложить по векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$, т. е. для любой точки M плоскости L существуют числа s и t такие, что имеет место равенство

$$\overrightarrow{M_0M} = s\bar{a} + t\bar{b} \qquad (5.26)$$

Обратно, всякая точка M, определяемая равенством (5.26) при произвольных значениях s и t, принадлежит плоскости L.

Равенство (5.26) в координатной форме имеет вид

$$\begin{cases} x - x_0 = sa_1 + tb_1 \\ y - y_0 = sa_2 + tb_2 \\ z - z_0 = sa_3 + tb_3 \end{cases} \text{или} \begin{cases} x = x_0 + sa_1 + tb_1 \\ y = y_0 + sa_2 + tb_2 \\ z = z_0 + sa_3 + tb_3 \end{cases} \qquad (5.27)$$

Уравнения (5.27) есть параметрические уравнения плоскости L.

2.4. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору

Пусть в прямоугольной системе координат в R^3 задана плоскость L, точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и вектор $\overline{N}(A,B,C)$ перпендикулярен плоскости L (рис. 5.2). Требуется написать уравнение плоскости L.

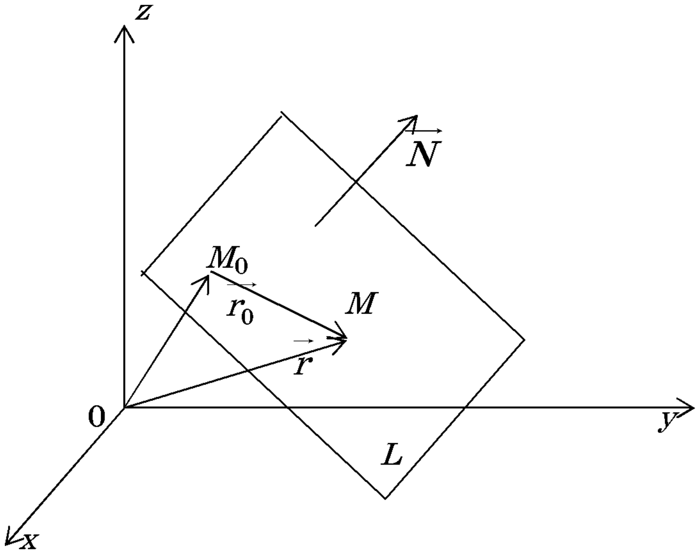


Рис. 5.2

На плоскости L возьмем произвольную точку $M\ (x,\ y,\ z)$, тогда $\overline{r}(x,y,z)$ – радиус-вектор точки M, $\overline{r_0}(x_0,y_0,z_0)$ – радиус-вектор точки $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$; а вектор $\overrightarrow{M_0M} = \overrightarrow{r - r_0}$ – вектор, лежащий в плоскости L, будет перпендикулярен нормальному вектору $\overline{N}$ плоскости L. Следовательно, скалярное произведение векторов $\overline{N}$ и $\overrightarrow{r - r_0}$ равно нулю:

$$\overline{N}(\overline{r} - \overline{r_0}) = 0 \tag{5.28}$$

Так как равенство (5.28) справедливо для всех точек плоскости L и нарушается, как только точка M окажется вне этой плоскости, то уравнение (5.28) есть векторное уравнение плоскости L. Подставляя в уравнение(5.28) координаты векторов $\overline{N}(A,B,C)$ и $\overrightarrow{M_0M} = \vec{r} - \vec{r}_0 = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ и записывая скалярное произведение в координатной форме, получим

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \tag{5.29}$$

Уравнение (5.29) – уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ перпендикулярно вектору $\overline{N}(A, B, C)$.

2.5. Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки

Пусть в прямоугольной системе координат в R^3 заданы три точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$, не лежащие на одной прямой (рис. 5.3). Написать уравнение плоскости L, проходящей через точки M_1, M_2, M_3.

Выберем на плоскости L произвольную точку $M\ (x,\ y,\ z)$. Тогда векторы $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ и $\overrightarrow{M_1M_3}$ лежат в одной плоскости L, а значит они компланарны.

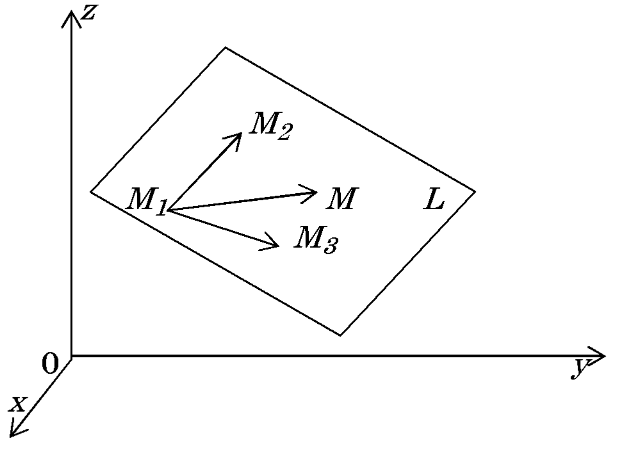


Рис. 5.3

И обратно, если векторы $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$ компланарны, то точка M принадлежит плоскости, определяемой точками M_1, M_2, M_3.

Следовательно, уравнение искомой плоскости L будет определять условие компланарности трех векторов $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$, а это справедливо тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно нулю:

$$\overline{M_1M} \cdot \overline{M_1M_2} \cdot \overline{M_1M_3} = 0$$

или в координатной форме:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (5.30)$$

Так как ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{pmatrix}$$

равен 2 (т.к. векторы $\overline{M_1M_2}$ и $\overrightarrow{M_1M_3}$ не коллинеарны), то уравнение (5.30) есть уравнение плоскости, проходящей через три данные точки.

Замечание. Если бы три данные точки M_1, M_2 и M_3 лежали на одной прямой, то векторы $\overrightarrow{M_1M_2}$ и $\overrightarrow{M_1M_3}$ были бы коллинеарными и, следовательно

$$rang\begin{pmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{pmatrix} = 1$$

Тогда уравнение (5.30) обращается в тождество при любых x, y, z, т.е. через каждую точку пространства проходит плоскость, в которой лежат и три данные точки.

2.6. Уравнение плоскости в отрезках

Пусть в прямоугольной системе координат в R^3 выбраны три точки A $(a,0,0)$, B $(0, b,0)$ и C $(0,0, c)$ – точки лежат на координатных осях, отсекая отрезки длиной a, b и c соответственно. Выбранные точки A, B и C не лежат на одной прямой, а, следовательно, уравнение плоскости, проходящей через три данные точки A, B и C (формула п. 2.4) будет иметь вид

$$\begin{vmatrix} x - a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0$$

Раскрывая определитель, получим $xbc + yac + zab = abc$ или

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \qquad (5.31)$$

Уравнение (5.31) называется уравнением плоскости в отрезках.

2.7. Угол между двумя плоскостями. Условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей

Пусть заданы две плоскости:

$$L_1\colon A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$L_2\colon A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

Угол между плоскостями L_1 и L_2 называется любой из двух смежных двугранных углов, образованных при пересечении данных плоскостей. Один из двугранных углов равен углу между нормальными векторами $\overline{N_1}(A_1, B_1, C_1)$ и $\overline{N_2}(A_2, B_2, C_2)$ плоскостей L_1 и L_2. Поэтому,

$$\cos\varphi = \cos(\overline{N_1}\widehat{\ }\overline{\mathrm{N}_2}) = \frac{\overline{N_1}\cdot\overline{N_2}}{|\overline{N_1}|\cdot|\overline{N_2}|}$$

или

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Если плоскость $L_1 \perp L_2$, то и $\overline{N_1} \perp \overline{N_2}$ (и наоборот), а значит $\overline{N_1}\cdot\overline{N_2} = 0$, т. е. $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$.

Это равенство есть условие перпендикулярности двух плоскостей L_1 и L_2.

Если плоскости L_1 и L_2 параллельны, то параллельны и вектора $\overline{N_1}$ и $\overline{N_2}$ (и наоборот), а это значит, что координаты векторов нормали $\overline{N_1}$ и $\overline{N_2}$ плоскостей L_1 и L_2 пропорциональны:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

А это есть условие параллельности двух плоскостей L_1 и L_2.

Задача 1. Составить уравнение плоскости L, проходящей через точку $P(1;2;3)$ параллельно плоскости $2x - y + 3z - 1 = 0$.

Решение. Пусть точка $M(x, y, z) \in L$ (искомой плоскости), тогда вектор $\overline{PM}$ лежит в плоскости L. Вектор нормали $\overline{N}$ (2; −1; 3) плоскости $2x - y + 3z - 1 = 0$ будет перпендикулярен искомой плоскости L, а, следовательно, вектор $\overline{N}$ перпендикулярен любому вектору искомой плоскости L, а значит вектора $\overline{N}$ и $\overline{PM}$ перпендикулярны, т. е. имеет место равенство

$$\overline{N} \cdot \overline{PM} = 0$$

Последнее равенство имеет место только для точек плоскости L, а это значит, данное равенство определяет уравнение плоскости L в векторной форме.

Переходя к координатам в полученном уравнении, будем иметь

$$2(x-1) - 1(y-2) + 3(z-3) = 0$$

или

$$2x - y + 3z - 9 = 0.$$

Ответ: искомая плоскость – L: $2x - y + 3z - 9 = 0$.

Задача 2. Составить уравнение плоскости L, проходящей через точки $P\,(1;1;1)$ и $Q\,(0;1;\ -1)$ перпендикулярно к плоскости L_1: $x + y + z = 0$.

Решение. Пусть $M\,(x,\ y,\ z)$ произвольная точка на плоскости L, тогда векторы $\overline{PM}$ и $\overline{PQ}$ принадлежат плоскости L, а вектор $\overline{N}$ (1; 1; 1) – нормальный вектор плоскости L_1, параллельный искомой плоскости L. Следовательно, векторы $\overline{PM}$, $\overline{PQ}$ и $\overline{N}$ – компланарные, т. е. справедливо равенство

$$\overline{PM} \cdot \overline{PQ} \cdot \overline{N} = 0,$$

смешанное произведение векторов равно нулю.

Последнее равенство имеет место только для точек плоскости L, а это значит, данное равенство определяет уравнение плоскости L в векторной форме. Переходя к координатам в полученном уравнении, будем иметь:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Раскрывая определитель, получим уравнение плоскости L: $2x - y - z = 0$.

Ответ: искомая плоскость – L: $2x - y - z = 0$.

2.8. Расстояние от точки до плоскости

Пусть в пространстве задана точка $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ и плоскость L: $Ax + By + Cz + D = 0$ (рис. 5.4). Требуется найти расстояние d от точки M_0 до плоскости L.

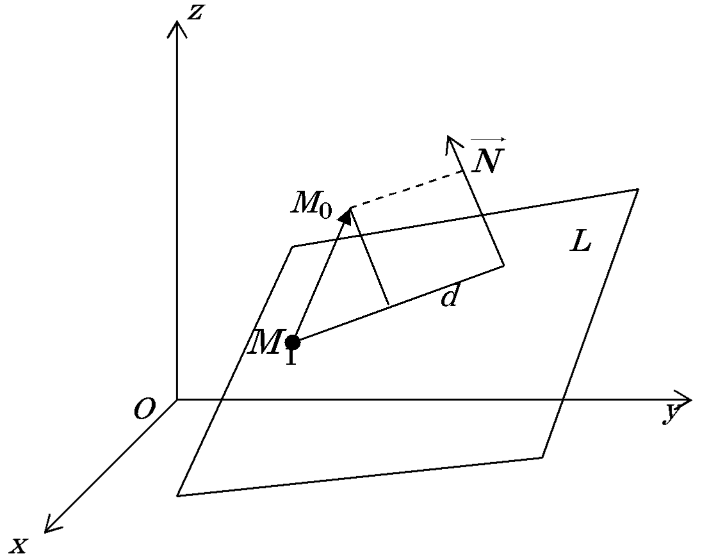


Рис. 5.4

Расстояние от точки M_0 до плоскости L равно модулю проекции вектора $\overrightarrow{M_1M_0}$. $M_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$ – произвольная точка плоскости L – на нормальный вектор $\overline{N}(A, B, C)$ или $\overline{N}^0 = \dfrac{\overline{N}}{|\overline{N}|}$ плоскости L, то есть

$$d = \left| пр_{\overline{N}} \overline{M_1M_0} \right| = \left| пр_{\overline{N^0}} \overline{M_1M_0} \right| = \left| \frac{\overline{M_1M_0} \cdot \overline{N}}{|\overline{N}|} \right| =$$

$$= \frac{|A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) + C(z_0 - z_1)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} =$$

$$= \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 - (Ax_1 + By_1 + Cz_1)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

т. к. $M_1(x_1, y_1, z_1) \in L$, то $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$.

Поэтому $d = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ – расстояние от точки $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ до плоскости L: $Ax + By + Cz + D = 0$.

Замечание. Если плоскость L задана нормальным уравнением в координатной форме:

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0,$$

то расстояние от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости L определяем по формуле

$$d = |x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta + z_0\cos\gamma - p|.$$

2.9. Взаимное расположение двух плоскостей в пространстве

Пусть две плоскости L_1 и L_2 заданы общими уравнениями:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \tag{5.32}$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \tag{5.33}$$

Для решения задачи о взаимном расположении двух плоскостей рассмотрим матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix}.$$

Пусть rang $A = r_1$, а rang $B = r_2$, тогда $r_1 \le r_2$.

Возможен один из следующих случаев:

1. $r_1 = 2$, тогда $r_2 = 2$ и система линейных уравнений (5.32) и (5.33) имеет бесконечное множество решений (rang A = rang B = $= 2 < 3$ – число неизвестных системы (5.32), (5.33) x, y, z), тогда плоскости L_1 и L_2 пересекаются по прямой.

2. $r_1 = 1$, $r_2 = 2$, тогда система линейных уравнений (5.32) и (5.33) не имеет решений (rang $A \neq$ rang B), в этом случае имеем

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \lambda \neq \frac{D_1}{D_2},$$

то есть плоскости L_1 и L_2 параллельны.

3. $r_1 = r_2 = 1$, в этом случае система линейных уравнений (5.32) и (5.33) имеет бесконечное множество решений (rang A = =rang $B = 1 < 3$ – число неизвестных системы (5.32) и (5.33) и в этом случае

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2} = \lambda ,$$

уравнения (5.32) и (5.33) совпадают, т. е. они определяют уравнение одной и той же плоскости, значит плоскости L_1 и L_2 совпадают.

Рассмотренные **условия: 1, 2, 3** – взаимного расположения плоскостей L_1 и L_2 являются необходимыми. Достаточность этих условий для каждого из трех случаев доказать можно методом от противного: например, пусть плоскости L_1 и L_2, определяемые уравнениями (5.32) и (5.33) параллельны, тогда $r_1 = 1$, $r_2 = 2$, ибо в противном случае уравнения (5.32) и (5.33) определяют две пересекающиеся плоскости L_1 и L_2 или являются уравнениями одной и той же плоскости, но это противоречит условию параллельности плоскостей L_1 и L_2.

2.10. Взаимное расположение трех плоскостей в пространстве

Пусть три плоскости L_1, L_2 и L_3 заданы общими уравнениями:

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0 \\ A_3x + B_3Y + C_3z + D_3 &= 0 \end{aligned} \tag{5.34}$$

Для решения задачи о взаимном расположении трех плоскостей исследуем систему линейных уравнений (5.34).

Пусть матрицы коэффициентов системы (5.34)

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix}$$

причем rang $A = r_1$ и rang $B = r_2$. Тогда $r_1 \le r_2$.

Возможны следующие случаи:

1. $r_1 = 3$, тогда и $r_2 = 3$. Система (5.34) имеет единственное решение (rang A = rang B = 3 – число неизвестных системы (5.34)), а плоскости L_1, L_2 и L_3 имеют единственную общую точку.

2. $r_1 = 2$, $r_2 = 3$. Система (5.34) не имеет решений (rang A $\neq$ rang B) и, следовательно, плоскости L_1, L_2 и L_3 не имеют общих точек. Но в этом случае возможны варианты.

2.1. В матрице A не существуют двух строк, элементы которых соответственно пропорциональны. Значит, каждые две из трех плоскостей L_1, L_2, L_3 пересекаются по прямой и все три прямые параллельны.

2.2. В матрице A две строки имеют пропорциональные элементы. Так как $r_1 = 2$, то одна из плоскостей L_1, L_2, L_3 пересекает две другие, которые параллельны.

3. $r_1 = r_2 = 2$, (система (5.34) имеет бесконечное множество решений, $\text{rang } A = \text{rang } B = 2 < 3$) в матрице A существуют две строки, соответствующие элементы которых не пропорциональны, и следовательно, две из данных плоскостей пересекаются по прямой l, которая принадлежит третьей плоскости. Итак, все три плоскости L_1, L_2, L_3 проходят через прямую l. В этом случае возможны варианты:

3.1. В матрице B существуют две строки, соответствующие элементы которых пропорциональны. Следовательно, два из уравнений системы (5.34) определяют одну и ту же плоскость, которую третья плоскость пересекает по прямой.

3.2. В матрице B не существуют две строки, соответствующие элементы которых пропорциональны. Это значит, что все плоскости: L_1, L_2, L_3 – различны.

4. $r_1 = 1$, $r_2 = 2$, тогда система (5.34) не имеет решений ($\text{rang } A \neq \text{rang } B$). В этом случае имеем:

4.1. В матрице B существуют две строки, соответствующие элементы которых пропорциональны. Значит, два уравнения (5.34) являются уравнениями одной и той же плоскости, которая параллельна третьей плоскости.

4.2. В матрице B не существует двух строк, соответствующие элементы которых пропорциональны. Это значит, что любые две из плоскостей L_1, L_2, L_3 параллельны.

5. $r_1 = r_2 = 1$, система (5.34) имеет бесконечное множество решений ($\text{rang } A = \text{rang } B = 1 < 3$ – число неизвестных), тогда все три уравнения системы (5.34) являются уравнениями одной и той же плоскости.

Так как при $r_1 = 1$, $r_2 < 3$, то случай $r_1 = 1$, $r_2 = 3$ не может иметь места.

Достаточность полученных условий для каждого из пяти рассмотренных случаев доказывается методом от противного (см. п. 2.9).

§3. ПРЯМАЯ ЛИНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

1. Общие уравнения прямой линии в пространстве.
2. Уравнение прямой линии в проекциях.
3. Уравнение прямой, проходящей через заданную точку параллельно заданному вектору. Параметрические уравнения прямой. Канонические уравнения прямой.
4. Уравнение прямой в пространстве, проходящей через две заданные точки.
5. Приведение общих уравнений прямой в пространстве к каноническому виду.
6. Угол между двумя прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности прямых в пространстве.
7. Взаимное расположение двух прямых в пространстве.
8. Расстояние от точки до прямой в пространстве.
9. Расстояние между двумя прямыми в пространстве.

3.1. Общее уравнение прямой линии в пространстве

Каждая линия в пространстве есть пересечение двух поверхностей и определяется заданием двух уравнений вида

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ \varphi(x, y, z) = 0 \end{cases}.$$

Прямая линия в пространстве есть пересечение двух плоскостей и определяется системой двух уравнений первой степени вида

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{cases} \qquad (5.35)$$

Плоскости, определяемые системой линейных уравнений (5.35) пересекаются по прямой l, а, следовательно, определяют прямую в пространстве, когда нормальные векторы $N_1(A_1, B_1, C_1)$ и $\overrightarrow{N_2}(A_2, B_2, C_2)$ данных плоскостей некомпланарны.

Система двух линейных уравнений вида (5.35) определяет прямую линию в пространстве тогда и только тогда, когда координаты векторов $\overrightarrow{N_1}$ и $\overrightarrow{N_2}$ не пропорциональны, т. е. когда

$$rang\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = 2$$

Координаты любой точки прямой l удовлетворяют каждому из уравнений системы (5.35), и обратно, значения x, y, z, удовлетворяющие каждому из уравнений (5.35), определяют точку, принадлежащую прямой l. Таким образом, система линейных уравнений определяет прямую линию в пространстве.

3.2. Уравнения прямой линии в проекциях

Пусть прямая l задана общим уравнением

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}, \tag{5.36}$$

при этом

$$rang\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = 2$$

Умножая первое уравнение (5.36) на A_2, а второе на $(-A_1)$ и сложив почленно получим уравнение, не содержащее x:

$$y = nz + b \tag{5.37}$$

где

$$n = \frac{\begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ C_1 & C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} B_1 & B_2 \\ A_1 & A_2 \end{vmatrix}}; \; b = \frac{\begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ D_1 & D_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} B_1 & B_2 \\ A_1 & A_2 \end{vmatrix}}$$

Так как уравнение (5.37) является следствием уравнений (5.36), то координаты любой точки, удовлетворяющие уравнениям (5.36), удовлетворяют и уравнению (5.37), т. е. любая точка прямой (5.36) лежит и на плоскости (5.37).

Уравнение (5.37) определяет плоскость, параллельную оси O_x. Плоскость (5.37) проектирует прямую l на плоскость yOz (т. е. $x = 0$).

Исключая из уравнений (5.36) y и z получим уравнения плоскостей:

$$x = mz + a \tag{5.38}$$

$$y = kx + l \tag{5.39}$$

проектирующих прямую l на плоскость xO_z $(y = 0)$ и yOz $(z = 0)$.

Тогда проекции прямой l на координатные плоскости xOy, yOz, yOz имеют вид

$$\begin{cases} y = kx + l \\ z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathrm{y} = \mathrm{nz} + \mathrm{b} \\ \mathrm{x} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = mz + a \\ y = 0 \end{cases}$$

Система уравнений любых двух проектирующих плоскостей (5.37) – (5.39), например

$$\begin{cases} x = mz + a \\ y = nz + b \end{cases} \qquad (5.40)$$

определяют прямую l. Уравнения вида (5.40) называются уравнением прямой l в проекциях.

3.3. Уравнение прямой, проходящей через заданную точку параллельно заданному вектору. Векторное уравнение прямой. Параметрические уравнения прямой. Канонические уравнения прямой

Вектор $\vec{S}(m, n, p) \neq \vec{0}$, лежащий на прямой l или параллельный ей называется направляющим вектором данной прямой l.

Пусть в пространстве $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и вектор $\overline{S}(m, n, p)$, отличный от нулевого (рис. 5.5). Требуется написать уравнение прямой l в пространстве, проходящей через данную точку M_0, параллельно заданному вектору $\overline{S}$.

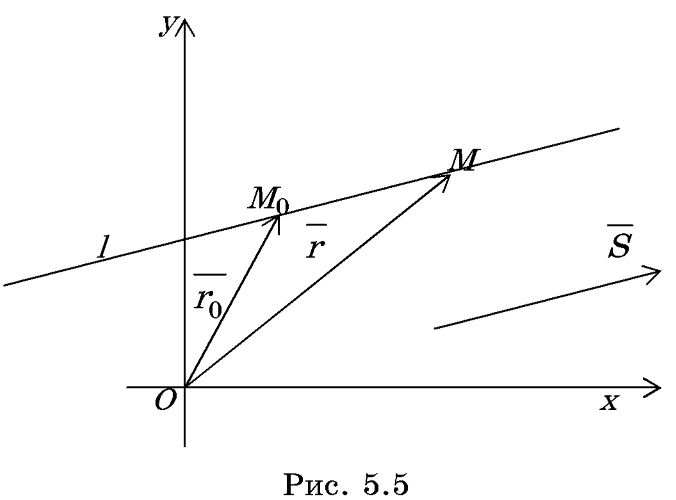


Рис. 5.5

На прямой l возьмем произвольную точку $M(x, y, z)$, тогда $\overline{r_0} = \overline{0M_0}(x_0, y_0, z_0)$; $\overline{r} = \overline{0M}(x, y, z)$; $\overline{M_0M} = t \cdot \overline{S}$, t – параметр.

Из треугольника ΔOM_0M имеем равенство $\overline{0M} = \overline{0M_0} + \overline{M_0M}$ или

$$\overline{r} = \overline{r_0} + t\overline{S} \tag{5.41}$$

Уравнение (5.41) называется векторно-параметрическим уравнением прямой в прямой.

Переходя от векторного уравнения прямой (5.41) к равносильным ему координатным уравнениям, получим

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt. \end{cases} \tag{5.42}$$

Уравнения (5.42) называются параметрическими уравнениями прямой в пространстве.

Замечание 1. В физике по формулам (5.42) находят координаты точки $M(x, y, z)$, равномерно движущейся со скоростью $\overline{S}(m, n, p)$ через t секунд, после ее выхода из точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

Исключая из уравнений (5.42) параметр t (решая каждое из этих уравнений относительно t) получим

$$\frac{x - x_0}{m} = t; \qquad \frac{y - y_0}{n} = t; \qquad \frac{z - z_0}{p} = t.$$

Приравнивая левые части этих равенств, получим

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} \tag{5.43}$$

Уравнения (5.43) называются каноническими уравнениями прямой в пространстве.

Замечание 2. Для того, чтобы написать уравнение прямой l в пространстве, необходимо иметь точку M_0, лежащую на l и направляющий вектор $\overline{S}(m, n, p)$.

Замечание 3. Из равенства (5.41) всегда можно составить пару линейно-независимых уравнений, являющихся проектирующимися плоскостями, которые в пересечении определяют прямую в пространстве.

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} \quad \text{и} \quad \frac{x - x_0}{m} = \frac{z - z_0}{p},$$

или

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n} \quad \text{и} \quad \frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p},$$

или

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{z-z_0}{p} \quad \text{и} \quad \frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$$

это три разные пары проектирующих плоскостей определяют одну и ту же прямую.

3.4. Уравнение прямой в пространстве, проходящей через две заданные точки

Пусть в пространстве заданы две точки $M_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$ и $M_2(x_2,\ y_2,\ z_2)$. Требуется написать уравнение прямой l в пространстве, проходящей через точки M_1 и M_2 (рис.5.6).

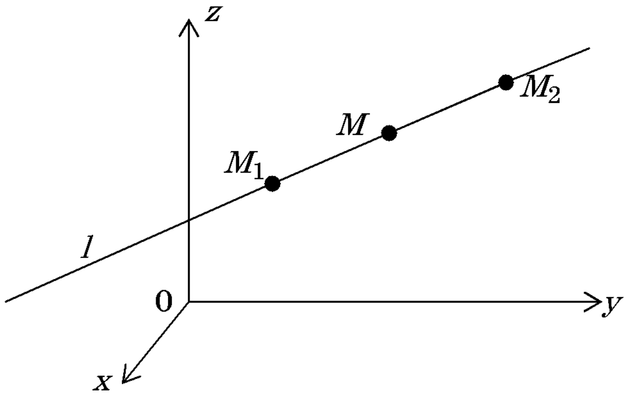


Рис. 5.6

На прямой l возьмем произвольную точку $M\,(x,\ y,\ z)$, тогда за направляющий вектор прямой можно выбрать вектор $\overline{M_1M_2}(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$, а за точку, лежащую на прямой l, любую из точек M_1, M_2. Тогда канонические уравнения искомой прямой имеют вид

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1} \tag{5.44}$$

или

$$\frac{x-x_2}{x_2-x_1}=\frac{y-y_2}{y_2-y_1}=\frac{z-z_2}{z_2-z_1} \tag{5.45}$$

Уравнение вида (5.44) или (5.45) есть уравнения прямой линии в пространстве, проходящей через две заданные точки.

3.5. Приведение общих уравнений прямой в пространстве к каноническому виду

Для того, чтобы привести общие уравнения прямой

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \qquad (5.46)$$

к каноническому виду

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

нужно определить координаты любой точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$, лежащей на прямой и координаты ненулевого направляющего вектора $\overline{S}(m, n, p)$ прямой.

1. Для определения координат какой-либо точки M_0, лежащей на прямой, достаточно одну из искомых координат зафиксировать (задать произвольное числовое значение), а затем, решая систему уравнений (5.46) с двумя неизвестными, найти соответственные значения двух других координат. Отметим, что, фиксируя одну из переменных в системе (5.46), получаем систему двух уравнений с двумя неизвестными, которая должна быть совместной и более того иметь единственное решение. Если же полученная система оказалась несовместной, то либо фиксируют другую переменную, либо меняют числовое значение фиксированной переменной. Таким образом, получим точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, принадлежащую прямой l.

2. Так как прямая l есть результат пересечения плоскостей из (5.46), то она перпендикулярна каждому из нормальных векторов этих плоскостей $\overline{N_1}(A_1, B_1, C_1)$, $\overline{\mathrm{N}_2}(A_2, B_2, C_2)$. Поэтому направляющий вектор $\overline{S}$ прямой l, перпендикулярен векторам $\overline{N_1}$ и $\overline{N_2}$, а значит $\overline{S} = \overrightarrow{N_1 \cdot N_2}$ – направляющий вектор прямой l.

Пример 7. Написать каноническое и параметрическое уравнения прямой

$$\begin{cases} 3x + 2y + 4z - 11 = 0 \\ 2x + y - 3z - 1 = 0 \end{cases}$$

Решение. Полагая $z = 0$, из системы уравнений

$$\begin{cases} 3x + 2y - 11 = 0 \\ 2x + y - 1 = 0 \end{cases}$$

находим $x = -9$; $y = 19$. Тогда $M_0\ (-9;\ 19;\ 0)$ – точка, лежащая на прямой.

Направляющий вектор прямой $\overline{S}$

$$\overline{S} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -10\overline{i} + 17\overline{j} - \overline{k}$$

Тогда канонические уравнения прямой имеют вид

$$\frac{x+9}{-10} = \frac{y-19}{17} = \frac{z}{-1},$$

а параметрические уравнения прямой будут иметь вид

$$\begin{cases} x = -9 - 10t, \\ y = 19 + 17t, \\ z = 0 - t. \end{cases}$$

Эту задачу можно решить и другим способом.

Решим систему:

$$\begin{cases} 3x + 2y + 4z - 11 = 0 \\ 2x + y - 3z - 1 = 0 \end{cases}$$

относительно x и y, т. е. получим уравнение искомой прямой в проекциях

$$\begin{cases} 3x + 2y = -4z + 11 \\ 2x + y = 3z + 1 \end{cases}$$

Решим полученную систему методом Крамера.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 4 = -1,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -4z + 11 & 2 \\ 3z + 1 & 1 \end{vmatrix} = -4z + 11 - 6z - 2 = -10z + 9,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & -4z+11 \\ 2 & 3z+1 \end{vmatrix} = 9z + 3 + 8z - 22 = 17z - 19,$$

тогда

$$\begin{cases} x = 10z - 9 \\ y = -17z + 19 \end{cases}$$

Последние равенства определяют уравнение прямой в проекциях. Запишем последнюю систему в виде

$$\begin{cases} z = \dfrac{x+9}{10} \\ z = \dfrac{y-19}{-17} \end{cases}$$

Так как левые части обоих равенств равны, то имеет место уравнение

$$\frac{x+9}{10} = \frac{y-19}{-17} = \frac{z}{1}$$

или умножив знаменатели на (-1), будем иметь те же уравнения, что и в случае, полученном выше.

3.6. Угол между двумя прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности прямых в пространстве

За угол между двумя прямыми в пространстве принимают угол между направляющими векторами этих прямых.

Пусть две прямые заданы каноническими уравнениями

$$\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1} \tag{5.47}$$

и

$$\frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2} \tag{5.48}$$

тогда

$$\cos\varphi = \frac{\overline{S_1} \cdot \overline{S_2}}{\left|\overline{S_1}\right| \cdot \left|\overline{S_2}\right|},$$

где $\overline{S_1}(m_1, n_1, p_1)$ и $\overline{S_2}(m_2, n_2, p_2)$ – направляющие векторы прямых (5.47) и (5.48).

Прямые (5.47) и (5.48) параллельны тогда и только тогда, когда их направляющие векторы $\overline{S_1}$ и $\overline{S_2}$ коллинеарны. Следовательно, необходимое и достаточное условие параллельности прямых имеет вид

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

Прямые (5.47) и (5.48) перпендикулярны, если их направляющие векторы $\overline{S_1}$ и $\overline{S_2}$ перпендикулярны, т. е. $\overline{S}_1\overline{S_2} = \overline{0}$. Следовательно, необходимое и достаточное условие перпендикулярности прямых имеет вид

$$m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0$$

3.7. Взаимное расположение двух прямых в пространстве

Пусть в пространстве даны две прямые l_1 и l_2 каноническими уравнениями:

$$l_1: \quad \frac{\text{x-x}_1}{\text{m}_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1} \tag{5.49}$$

$$l_2: \quad \frac{\text{x-x}_2}{\text{m}_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2} \tag{5.50}$$

Для исследования взаимного расположения прямых l_1 и l_2 рассмотрим матрицы из координат векторов:

$\overline{S_1}(m_1, n_1, p_1)$, $\overline{\text{S}_2}(m_2, n_2, p_2)$, $\overline{\text{M}_1 M_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, а именно,

$$A = \begin{pmatrix} m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{pmatrix}$$

1. Пусть rang $A = r_1$; rang $B = r_2$. Возможны следующие случаи: $r_2 = 3$. Тогда в этом случае

$$\Delta = \begin{vmatrix} m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{vmatrix} \neq 0$$

и векторы $\overline{S_1}$, $\overline{S_2}$, $\overline{M_1M_2}$ не компланарны, следовательно, прямые l_1 и l_2 скрещивающиеся.

2. $r_2 = 2$, $r_1 = 2$. В этом случае $\Delta = 0$ и векторы $\overline{S_1}$, $\overline{S_2}$, $\overline{M_1M_2}$ компланарны, а, следовательно, прямые l_1 и l_2 принадлежат одной плоскости. Но так как $r_1 = 2$, то векторы $\overline{S_1}$ и $\overline{S_2}$ не компланарны, поэтому прямые l_1 и l_2 пересекаются.

3. $r_2 = 2$, $r_1 = 1$. Эти равенства показывают, что прямые l_1 и l_2 параллельны.

4. $r_2 = 1$, $r_1 = 1$. В этом случае векторы $\overline{S_1}$, $\overline{S_2}$, $\overline{M_1M_2}$ коллинеарны, а уравнение (5.49) и (5.50) определяют одну прямую.

Отметим, что достаточность рассмотренных условий для каждого из рассмотренных четырех случаев доказывается методом от противного.

Из рассмотренного выше следует, что равенство

$$\begin{vmatrix} m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

или векторной форме

$$\overline{S_1} \cdot \overline{S_2} \cdot \overline{M_1M_2} = 0$$

является необходимым и достаточным условием принадлежности двух прямых l_1 и l_2 одной плоскости.

3.8. Расстояние от точки до прямой в пространстве

Пусть дана прямая l (рис. 5.7):

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

и точка $M_1(x_1, y_1, z_1)$. За расстояние от точки до прямой принимают длину перпендикуляра, опущенного из точки на прямую.

Искомое расстояние d есть высота параллелограмма, построенного на векторах $\overline{S}(m, n, p)$ и $\overline{M_0M_1}(x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$.

Площадь параллелограмма с одной стороны равна

$$S = d \cdot \left|\overline{S}\right|, \qquad (5.51)$$

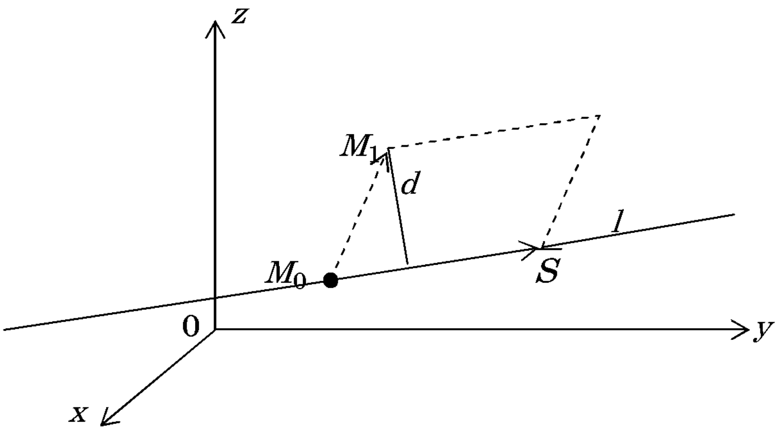


Рис. 5.7

а с другой стороны площадь параллелограмма равна

$$S = \left|\overline{S} \times \overline{M_0M_1}\right|. \qquad (5.52)$$

Из равенства (5.51) и (5.52) имеем

$$d = \frac{\left|\overline{S} \times \overline{M_0M_1}\right|}{\left|\overline{S}\right|}. \qquad (5.53)$$

Формула (5.53) определяет расстояние от точки до прямой.

3.9. Расстояние между двумя прямыми в пространстве

За расстояние между двумя прямыми принимают длину общего перпендикуляра к прямым, концы которого лежат на этих прямых.

Пусть даны две прямые:

$$l_1: \quad \frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1},$$

$$l_2: \quad \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2},$$

где $\overline{S}_1(m_1, n_1, p_1)$, $\overline{S}_2(m_2, n_2, p_2)$ и $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ – направляющие векторы и точки, определяемые уравнениями прямых l_1 и l_2. Начало векторов $\overline{S}_1$ и $\overline{S_2}$ поместим в точку M_1, а на векторах $\overline{S_1}, \overline{S_2}, \overline{M_1M_2}$ построим параллелепипед. Тогда искомое расстояние между прямыми l_1 и l_2 будет равно расстоянию между плоскостями граней параллелепипеда, которым принадлежат прямые l_1 и l_2, а, следовательно, может быть вычислено, как высота построенного параллелепипеда.

Объем параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{S_1}, \overline{S_2}, \overline{M_1M_2}$ равен модулю смешанного произведения данных векторов:

$$V = \left|\overline{S_1} \cdot \overline{S_2} \cdot \overline{M_1M_2}\right| \tag{5.54}$$

С другой стороны объем этого параллелепипеда

$$V = h \cdot \left|\overline{S_1} \times \overline{S_2}\right| \tag{5.55}$$

Из равенств (5.54) и (5.55) имеем

$$h = \frac{\left|\overline{S_1} \cdot \overline{S_2} \cdot \overline{M_1M_2}\right|}{\left|\overline{S_1} \times \overline{S_2}\right|} \tag{5.56}$$

Формула (5.56) определяет расстояние между двумя прямыми в пространстве.

§ 4. ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ

1. Нахождение общих точек прямой и плоскости.
2. Угол между прямой и плоскостью. Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости.

4.1. Нахождение общих точек прямой и плоскости

Для нахождения общих точек (если они существуют) прямой

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} \tag{5.57}$$

и плоскости

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{5.58}$$

уравнения (5.57) и (5.58) решают совместно, относительно неизвестных *x, y, z.*

Запишем уравнение (5.57) в параметрическом виде

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt. \end{cases} \tag{5.59}$$

и подставив в уравнение (5.58) значения x, y, z из уравнений (5.59), после преобразования получим

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D + t(Am + Bn + Cp) = 0 \qquad (5.60)$$

Возможны следующие случаи:

а) $Am + Bn + Cp \neq 0$, тогда из (5.57) находим единственное значение t

$$t = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Am + Bn + Cp}$$

Подставляя найденное значение t в уравнения (5.59), получим единственную точку пересечения прямой (5.57) и плоскости (5.58).

б) $Am + Bn + Cp = 0$, но $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$, тогда уравнение (5.60) не имеет решения. В этом случае прямая (5.57) параллельна плоскости (5.58), т. к. $Am + Bn + Cp = 0$, а точка – (x_0, y_0, z_0), через которую проходит прямая (5.57), лежит вне плоскости (5.58), т. к. $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$. Значит, прямая (5.57) не имеет общих точек с плоскостью (5.58).

Справедливо и обратное утверждение, если прямая (5.57) параллельна плоскости (5.58), т. е. не имеет с ней общих точек, тогда

$$Am + Bn + Cp = 0 \text{ и } Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$$

в) $Am + Bn + Cp = 0$ и $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$, тогда уравнение (5.60) имеет бесконечное множество решений $(t \in R)$. В этом случае, в силу равенства $Am + Bn + Cp = 0$, прямая (5.57) параллельна плоскости (5.58), а в силу равенства $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$, плоскость проходит через точку (x_0, y_0, z_0), следовательно, вся прямая (5.57) лежит в плоскости (5.58). Справедливо и обратное, если прямая (5.57) лежит в плоскости (5.58), то $Am + Bn + Cp = 0$ и $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$, т. к. любая точка прямой (5.58) лежит в плоскости, и вектор $\vec{S}(m, n, p)$ параллелен плоскости (5.58).

Замечание. Одновременное выполнение равенств

$$\begin{cases} Am + Bn + Cp = 0 \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \end{cases}$$

является необходимым и достаточным условием принадлежности прямой плоскости.

4.2. Угол между прямой и плоскостью. Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости

За угол φ между прямой и плоскостью принимают любой из двух смежных углов, образованных прямой и ее проекцией на плоскость.

Пусть в пространстве даны плоскость (рис. 5.8)

$$L: \quad Ax + By + Cz + D = 0$$

и прямая

$$l: \quad \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

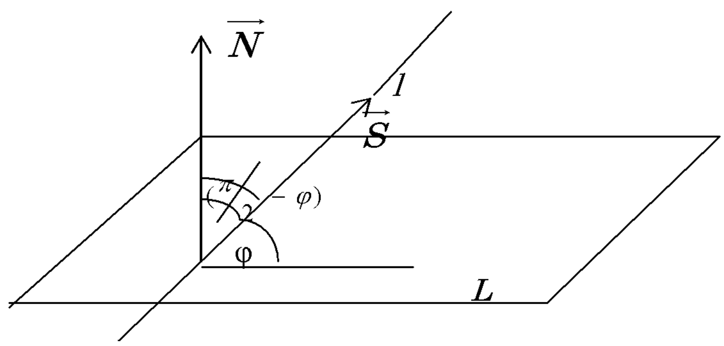


Рис. 5.8

В силу того, что синусы смежных углов равны, поэтому будем искать острый угол $0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin\varphi \text{ и } \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \frac{\vec{N} \cdot \vec{S}}{|N| \cdot |S|}$$

поэтому

$$\sin\varphi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}$$

Если прямая l параллельна плоскости L, то векторы $\vec{S}$ и $\vec{N}$ будут перпендикулярны, а значит $\vec{S} \cdot \vec{N} = 0$, или

$$Am + Bn + Cp = 0 \qquad (5.61)$$

Обратно, если справедливо условие (5.61), то прямая параллельна плоскости или принадлежит ей.

Условие (5.61) – необходимое и достаточное условие параллельности прямой l и плоскости L.

Если прямая l перпендикулярна плоскости L, то векторы $\overrightarrow{S}$ и $\overrightarrow{N}$ коллинеарны и, значит

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p} \tag{5.62}$$

Условие (5.62) является также достаточным условием перпендикулярности прямой и плоскости.

Пример 8. Найти проекцию точки $P(3;\ 2;\ -1)$ на плоскость $x - 5y + 4z - 31 = 0$.

Решение. Проекция точки P на плоскость есть основания перпендикуляра, опущенного из точки P на данную плоскость. Уравнение этого перпендикуляра

$$\begin{cases} x = 3 + t, \\ y = 2 - 5t, \\ z = -1 + 4t. \end{cases}$$

Точка пересечения полученной прямой и данной плоскости ($t = 1$) имеет координаты $M(4;\ -3;\ 3)$.

Пример 9. Найти проекцию точки $P(5;\ -6;\ 7)$ на прямую

$$\frac{x-7}{-2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-4}{1}.$$

Решение. Искомая проекция – это точка пересечения данной прямой и плоскости, проведенной через точку P перпендикулярно этой прямой. Уравнение этой плоскости – это уравнение плоскости, проходящей через точку P $(5;\ -6;\ 7)$ и перпендикулярно вектору $\overline{N}$ $(-2;\ 3;\ 1)$, т. е. имеет вид $2x - 3y - z - 21 = 0$.

Находим точку пересечения данной прямой и полученной плоскости ($t = 1$) и получим точку $M(9;\ -2;\ 3)$.

Пример 10. Найти уравнение проекции прямой

$$l: \quad \frac{x-2}{6} = \frac{y+1}{-5} = \frac{z-5}{4}$$

на плоскость

$$L: \quad x - 3y + 2z - 7 = 0.$$

Решение. Проекция прямой l на плоскость L есть линия пересечения плоскости L и плоскости, проходящей через данную прямую l перпендикулярно данной плоскости L.

Уравнение плоскости, проходящей через прямую l перпендикулярно плоскости L имеет вид

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-5 \\ 6 & -5 & 4 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

или

$$2x - 8y - 13z + 53 = 0.$$

Тогда уравнение искомой проекции определяется уравнением

$$\begin{cases} x - 3y + 2z - 7 = 0, \\ 2x - 8y - 13z + 53 = 0. \end{cases}$$

§ 5. ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ И ПРИМЕРЫ НА ПРЯМУЮ И ПЛОСКОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ

1. Уравнение биссектральных плоскостей двугранного угла.
2. Условие пересечения трех плоскостей в одной точке.
3. Расположение двух точек A и B относительно двугранных углов, образованных данными плоскостями.
4. Необходимое и достаточное условия, при которых данная плоскость пересекает данный отрезок AB.
5. Уравнение прямой, проходящей через данную точку и перпендикулярной данной плоскости.
6. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку и параллельной заданной плоскости.
7. Уравнение плоскости P, проходящей через данную точку и перпендикулярной заданной прямой .
8. Уравнение плоскости, проходящей через данную прямую l и точку , не лежащую на этой прямой.
9. Уравнение плоскости, проходящей через данную прямую параллельно другой данной прямой.
10. Уравнение плоскости, проходящей через заданную прямую l перпендикулярно плоскости l .
11. Уравнение плоскости P, проходящей через две параллельные прямые l_1 и l_1.
12. Уравнение плоскости, проходящей через две пересекающиеся прямые l_1 и l_1.

13. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку параллельно прямым l_1 и l_1.

14. Условие, при котором две прямые l_1 и l_1 лежат в одной плоскости.

15. Уравнение перпендикуляра, опущенного из заданной точки M_0 на данную прямую l.

16. Расстояние от данной точки M_0 до данной прямой l.

17. Уравнение общего перпендикуляра к двум скрещивающимся прямым l_1 и l_2.

18. Кратчайшее расстояние между двумя скрещивающимися прямыми l_1 и l_2.

19. Примеры и упражнения.

5.1. Уравнение биссектральных плоскостей двугранного угла

Пусть уравнение двух плоскостей заданы общими уравнениями:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

Запишем уравнения данных плоскостей в нормальном виде:

$$x\cos\alpha_1 + y\cos\beta_1 + z\cos\gamma_1 - p_1 = 0,$$

$$x\cos\alpha_2 + y\cos\beta_1 + z\cos\gamma_1 - p_2 = 0.$$

Левые части уравнений – это расстояния (отклонения) точки $M(x, y, z)$ от каждой из данных плоскостей. Тогда на одной из биссектральных плоскостей (соответствующей тому двугранному углу, в котором находится начало координат) эти расстояния (отклонения) равны, как по модулю, так и по знаку, а на другой биссектральной плоскости расстояния (отклонения) равны по модулю, но противоположны по знаку. Следовательно, уравнения искомых биссектральных плоскостей имеют вид:

$$(x\cos\alpha_1 + y\cos\beta_1 + z\cos\gamma_1 - p_1) + (x\cos\alpha_2 + y\cos\beta_2 + z\cos\gamma_2 - p_2) = 0$$

и

$$(x\cos\alpha_1 + y\cos\beta_1 + z\cos\gamma_1 - p_1) - (x\cos\alpha_2 + y\cos\beta_2 + z\cos\gamma_2 - p_2) = 0.$$

5.2. Условие пересечения трех плоскостей в одной точке

Три плоскости, заданные общими уравнениями

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \\ A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0. \end{cases} \tag{5.63}$$

пересекаются в одной точке, тогда и только тогда, когда отличен от нуля определитель

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}.$$

Действительно, в этом и только в этом случае, система (5.63) трех линейных уравнений с тремя неизвестными имеет единственное решение.

5.3. Расположение двух точек *A* и *B* относительно двугранных углов, образованных данными плоскостями

Пусть заданы две пересекающиеся плоскости общими уравнениями

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

и две точки A и B. Определить, лежат ли две данные точки A и B, в одном, смежных или вертикальных углах, образованных двумя данными плоскостями.

Данные плоскости записываем в нормальном виде и находим отклонения $d_A^{(1)}$ и $d_A^{(2)}$ точки A и отклонения $d_B^{(1)}$ и $d_B^{(2)}$ точки B от данных плоскостей. Рассматривая знаки четырех отклонений: $d_A^{(1)}$, $d_A^{(2)}$, $d_B^{(1)}$, $d_B^{(2)}$, получаем: по одну или по разные стороны от каждой из плоскостей лежит каждая из точек A и B. Итак, если точки A и B лежат на одну сторону от первой плоскости и по одну сторону от второй плоскости, то эти точки лежат в одном углу, образованном данными плоскостями; если точки A и B лежат по одну сторону от одной плоскости и по разные стороны от другой плоскости, то точки A и B лежат в смежных углах.

В случае, когда точки A и B лежат по разные стороны и от одной и другой плоскости, то эти точки лежат в вертикальных углах.

5.4. Необходимое и достаточное условия, при которых данная плоскость пересекает данный отрезок

Пусть $[AB]$ – данный отрезок. Данная плоскость пересекает отрезок $[AB]$ тогда и только тогда, когда точки A и B лежат по разные стороны от плоскости, т. е. необходимо и достаточно, чтобы отклонения d_A и d_B имели разные знаки. Поэтому, записав уравнение плоскости в нормальном виде и подставляя в левую часть последнего уравнения координаты точек A и $B,$ находим отклонения d_A и d_B точек A и B от данной плоскости. По знакам d_A и d_B устанавливаем, пересекает ли данная плоскость отрезок $[AB]$.

5.5. Уравнение прямой, проходящей через данную точку и перпендикулярной данной плоскости

Пусть даны точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и плоскость – $Ax + By + Cz + d = 0$. Выбирая в качестве направляющего вектора искомой прямой вектор нормали данной плоскости $\overline{N}(A, B, C)$, получим уравнение искомой прямой в виде $\dfrac{x - x_0}{A} = \dfrac{y - y_0}{B} = \dfrac{z - z_0}{C}$.

5.6. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку и параллельной заданной плоскости

Пусть даны точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и плоскость – $Ax + By + Cz + d = 0$. Вектор нормали искомой плоскости P – $\overline{N} = (A, B, C)$, а $M(x, y, z)$ – произвольная точка плоскости P.

Вектор $\overrightarrow{MM_0} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ лежит в плоскости P, а, следовательно, вектора $\overrightarrow{N}$ и $\overrightarrow{MM_0}$ перпендикулярны. Тогда уравнение искомой плоскости P в векторной форме имеет вид $\overrightarrow{MM_0} \cdot \overrightarrow{N} = 0$ или в координатной форме

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

5.7. Уравнение плоскости P, проходящей через данную точку и перпендикулярной заданной прямой

Пусть даны точка $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ и прямая – $\dfrac{x - x_1}{m} = \dfrac{y - y_1}{n} = \dfrac{z - z_1}{p}$. В качестве вектора нормали искомой плоскости P выбираем направляющий вектор $\vec{q}(l, m, n)$ заданной прямой. Пусть $M(x, y, z)$ – произвольная точка плоскости P, а вектора перпендикулярны друг другу: $\overrightarrow{MM_0} \perp \vec{q}$, тогда уравнение плоскости P в векторной форме имеет вид $\overrightarrow{MM_0} \cdot \vec{q} = 0$, или в координатной форме

$$m(x - x_0) + n(y - y_0) + p(z - z_0) = 0.$$

5.8. Уравнение плоскости, проходящей через данную прямую l и через точку, не лежащую на этой прямой

Пусть l – прямая $\dfrac{x - x_1}{m} = \dfrac{y - y_1}{n} = \dfrac{z - z_1}{p}$; P – искомая плоскость; $M(x, y, z)$ – произвольная точка плоскости P; $M_1(x_1, y_1, z_1)$ – точка, лежащая на прямой l; $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – точка, лежащая в плоскости P. (рис. 5.9)

Тогда три вектора $\overrightarrow{M_0M}$, $\overrightarrow{M_0M_1}$ и $\vec{S}$ лежат в одной плоскости P, то есть они коллинеарны, а, следовательно, уравнение искомой плоскости P в векторной форме имеет вид (смешанное произведение векторов $\overrightarrow{M_0M}$, $\overrightarrow{M_0M_1}$ и $\vec{S}$ равно нулю) $: \overrightarrow{M_0M} \cdot \overrightarrow{M_0M_1} \cdot \vec{S} = 0$ или в координатной форме:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ m & n & p \end{vmatrix} = 0.$$

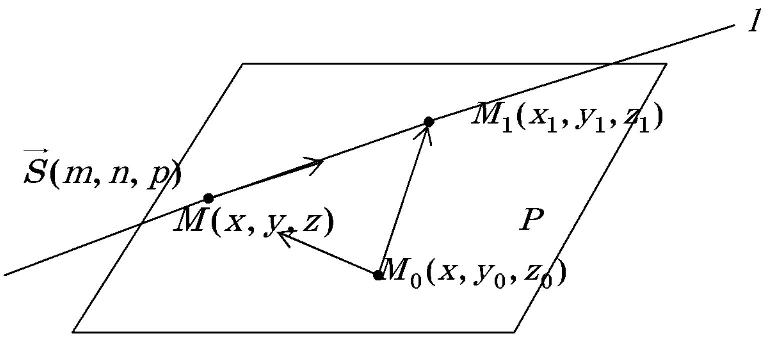


Рис. 5.9

5.9. Уравнение плоскости, проходящей через данную прямую l_1, и параллельной другой данной прямой l_2

Пусть l_1 – прямая $\dfrac{x-x_1}{m_1}=\dfrac{y-y_1}{n_1}=\dfrac{z-z_1}{p_1}$; l_2 – прямая $\dfrac{x-x_2}{m_2}=\dfrac{y-y_2}{n_2}=\dfrac{z-z_2}{p_2}$; P – искомая плоскость; $M(x,y,z)$ – произвольная точка плоскости P; $M_1(x_1,y_1,z_1)$ – точка прямой l_1 лежит в плоскости P; направляющий вектор $\overrightarrow{S_1}(m_1,n_1,p_1)$ прямой l_1 лежит в плоскости P, а направляющий вектор $\overrightarrow{S_2}(m_2,n_2,p_2)$ прямой (l_2) параллелен плоскости P (рис. 5.10).

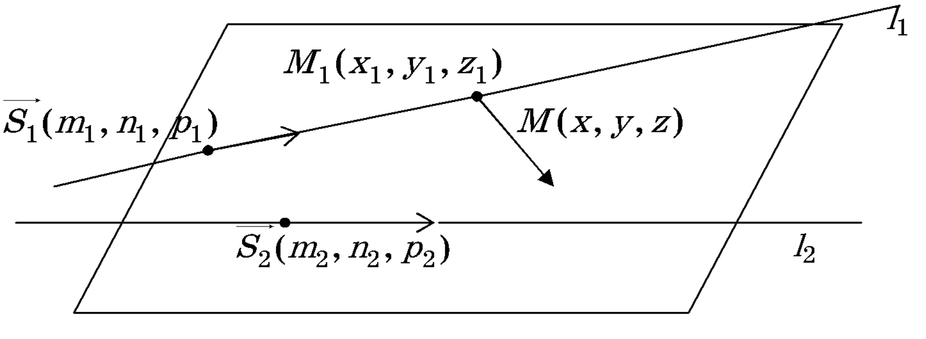


Рис. 5.10

Тогда три вектора $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{S_1}$ и $\overrightarrow{S_2}$ компланарны, а, следовательно, уравнение искомой плоскости P в векторной форме имеет вид (смешенное произведение векторов $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{S_1}$ и $\overrightarrow{S_2}$ равно нулю) $\overrightarrow{M_1M}\cdot\overrightarrow{S_1}\cdot\overrightarrow{S_2}=0$ или в координатной форме

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0$$

5.10. Уравнение плоскости, проходящей через заданную прямую l_1, и перпендикулярной плоскости l

Пусть P – искомая плоскость; l_1 – прямая $\dfrac{x - x_1}{m_1} = \dfrac{y - y_1}{n_1} = \dfrac{z - z_1}{p_1}$; l – плоскость $Ax + By + Cz + D = 0$; $M(x, y, z)$ – произвольная точка плоскости P; $M_1(x_1, y_1, z_1)$ – точка прямой l_1 лежит в плоскости P; направляющий вектор $\overrightarrow{S_1}$ прямой l_1 лежит в плоскости P; а вектор нормали $\overrightarrow{N}(A, B, C)$ плоскости l параллелен плоскости P (рис. 5.11).

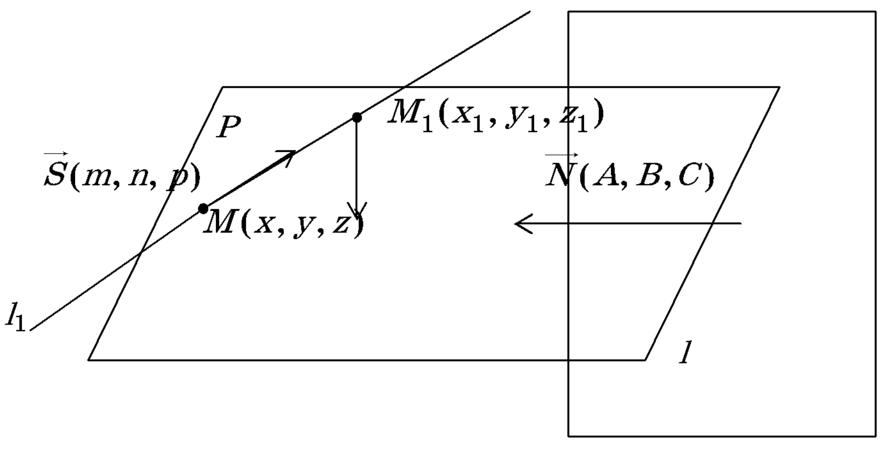


Рис. 5.11

Тогда три вектора $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{S_1}$ и $\overrightarrow{N}$ компланарны, а, следовательно, уравнение искомой плоскости P, в векторной форме, имеет вид (смешенное произведение векторов $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{S_1}$ и $\overrightarrow{N}$ равно нулю) $\overrightarrow{M_1M} \cdot \overrightarrow{S_1} \cdot \overrightarrow{N} = 0$ или в координатной форме:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ m & n & p \\ A & B & C \end{vmatrix} = 0 .$$

5.11. Уравнение плоскости *P*, проходящей через две параллельные прямые l_1 и l_1

Пусть P – искомая плоскость; l_1 и l_2 – две параллельные прямые; l_1 – прямая $\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$; l_1 – прямая $\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$; $M(x, y, z)$ – произвольная точка плоскости P; $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ – точки прямых l_1 и l_2, лежат в плоскости P; а вектор $\overrightarrow{S_1}$ (или $\overrightarrow{S_2}$) – направляющий вектор прямой l_1 (или l_2) лежит в плоскости P (рис. 5.12).

Тогда три вектора: $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ и $\overrightarrow{S_1}$ – компланарны, а, следовательно, уравнение искомой плоскости P в векторной форме имеет вид $\overrightarrow{M_1M}\cdot\overrightarrow{M_1M_2}\cdot\overrightarrow{S_1}=0$

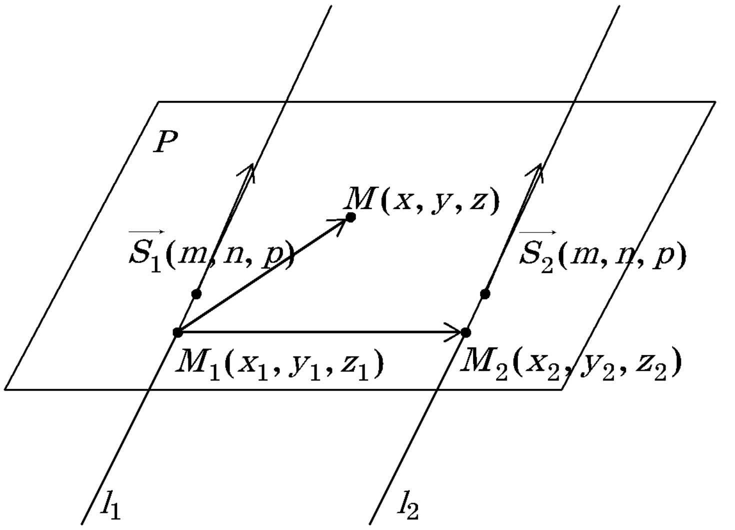


Рис. 5.12

или в координатной форме

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ m & n & p \end{vmatrix}=0$$

5.12. Уравнение плоскости, проходящей через две пересекающиеся прямые l_1 и l_1

Пусть P – искомая плоскость; l_1 и l_2 – две пересекающиеся прямые; l_1 – прямая $\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$; l_2 – прямая $\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$; $M(x,y,z)$ – произвольная точка плоскости P, $M_1(x_1,y_1,z_1)$ точка прямой l_1 лежит в плоскости P, а направляющие вектора $\overrightarrow{S_1}$ и $\overrightarrow{S_2}$ прямых l_1 и l_2 лежат в плоскости P (рис. 5.13).

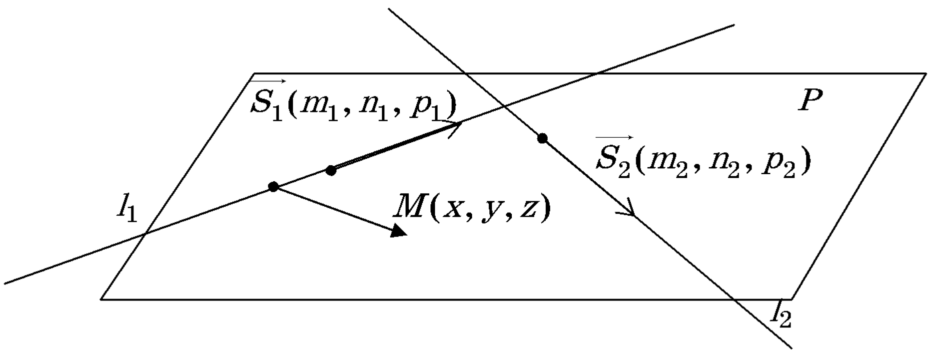


Рис. 5.13

Тогда три вектора: $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{S_1}$, $\overrightarrow{S_2}$ – компланарны и, следовательно, уравнение искомой плоскости P в векторной форме имеет вид:

$$\overrightarrow{M_1M}\cdot\overrightarrow{S_1}\cdot\overrightarrow{S_2}=0$$

или в координатной форме

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}=0$$

5.13 Уравнение плоскости, проходящей через данную точку, и параллельной прямым l_1, l_2

Пусть даны точка $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$; l_1 – прямая $\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$; l_2 – прямая $\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$; P –

искомая плоскость; $M(x, y, z)$ – произвольная точка плоскости P; $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – данная точка лежащая в плоскости P; а направляющие векторы $\overrightarrow{S_1}$ и $\overrightarrow{S_2}$, прямых l_1 и l_1, параллельны плоскости P (рис. 5.14).

Тогда три вектора: $\overrightarrow{M_0M}$, $\overrightarrow{S_1}$ и $\overrightarrow{S_2}$ – компланарны, а, следовательно, уравнение искомой плоскости P в векторной форме имеет вид $\overrightarrow{M_0M} \cdot \overrightarrow{S_1} \cdot \overrightarrow{S_2} = 0$ или в координатной форме

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0.$$

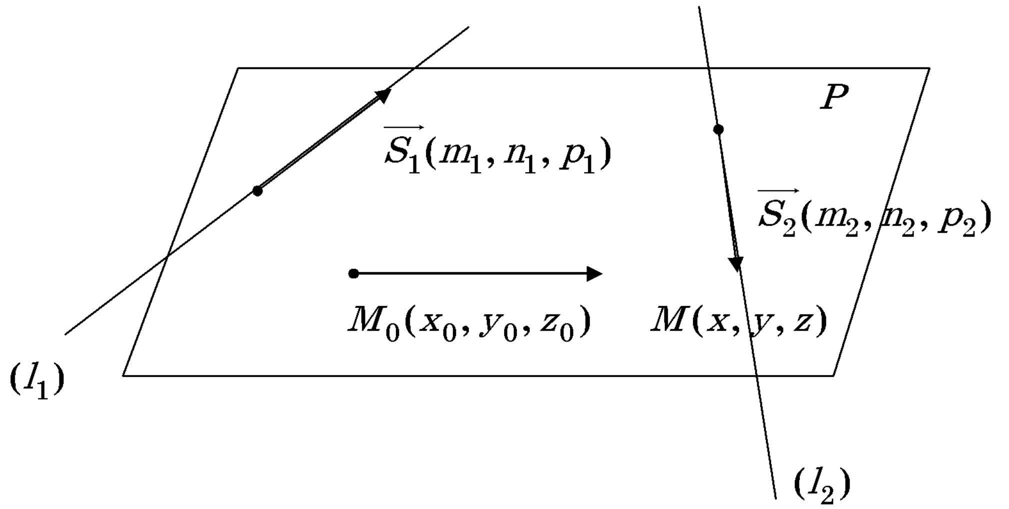


Рис. 5.14

5.14. Условие, при котором две прямые l_1 и l_2 лежат в одной плоскости

Пусть P – искомая плоскость, l_1 – прямая $\dfrac{x - x_1}{m_1} = \dfrac{y - y_1}{n_1} = \dfrac{z - z_1}{p_1}$; l_1 – прямая $\dfrac{x - x_2}{m_2} = \dfrac{y - y_2}{n_2} = \dfrac{z - z_2}{p_2}$; $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ – точки прямых l_1 и l_1, направляющие векторы $\overrightarrow{S_1}$ и $\overrightarrow{S_2}$ прямых l_1 и l_1 лежат в плоскости P (рис. 5.15).

Тогда три вектора: $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{S_1}$ и $\overrightarrow{S_2}$ – компланарны, а, значит условие, при котором две прямые l_1 и l_2 лежат в плоскости P

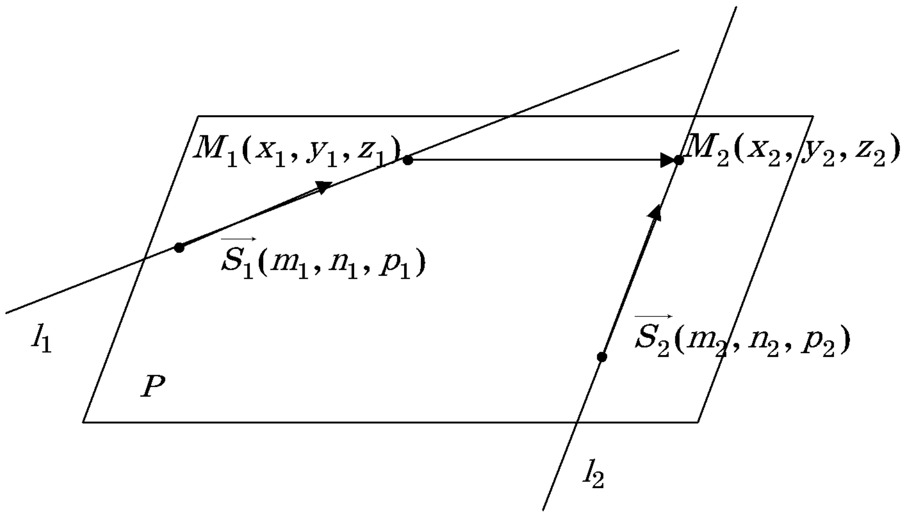


Рис. 5.15

в векторной форме имеет вид $\overrightarrow{M_1M_2} \cdot \overrightarrow{S_1} \cdot \overrightarrow{S_2} = 0$ или в координатной форме

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0\,.$$

5.15. Уравнение перпендикуляра, опущенного из заданной точки M_0 на данную прямую l

Уравнение искомого перпендикуляра (прямой перпендикулярной данной прямой l) – линия пересечения двух плоскостей (общее уравнение прямой в пространстве):

1) плоскости, проходящей через точку M_0 и прямую l (см. п. 5.8);

2) плоскости, проходящей через точку M_0 и перпендикулярной к прямой l (см. п. 5.7).

5.16. Расстояние от данной точки M_0 до данной прямой l

В п. 5.15 получено уравнение перпендикуляра l_1, проходящего через точку M_0 на прямую l. Решая систему уравнений, определяющих прямые l и l_1, находим точку M_1 – основание перпендикуляра, опущенного из точки M_0 на прямую l. Тогда искомое расстояние – длина отрезка $|M_0M_1|$.

5.17. Уравнение общего перпендикуляра к двум скрещивающимся прямым l_1 и l_2

Напишем уравнение плоскости P, параллельную прямой l_2 проходящей через прямую l_1, (см. п. 5.9). Напишем уравнение плоскостей L_1 и L_2, перпендикулярных плоскости P и проходящих через прямые l_1 и l_2 соответственно (см. п. 5.10). Тогда искомый перпендикуляр – линия пересечения плоскостей L_1 и L_2.

5.18. Кратчайшее расстояние между двумя скрещивающимися прямыми l_1 и l_2

Напишем уравнение плоскости P_1, проходящей через прямую l_1, параллельную прямой l_2 (см. п. 9), а затем находим расстояние от любой точки прямой l_2 до плоскости P_1.

Пример 11. Найти проекцию точки P (3; 2; −1) на плоскость $x - 5y + 4z - 31 = 0$.

Решение. Проекция точки P на плоскость есть основания перпендикуляра, опущенного из точки P на данную плоскость. Уравнение этого перпендикуляра

$$\begin{cases} x = 3 + t, \\ y = 2 - 5t, \\ z = -1 + 4t. \end{cases}$$

Точка пересечения полученной прямой и данной плоскости ($t = 1$) имеет координаты $M(4; -3; 3)$.

Пример 12. Найти проекцию точки $P(5; -6; 7)$ на прямую

$$\frac{x-7}{-2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-4}{1}.$$

Решение. Искомая проекция – это точка пересечения данной прямой и плоскости, проведенной через точку P перпендикулярно этой прямой. Уравнение этой плоскости – это уравнение плоскости, проходящей через точку P (5; −6; 7) и перпендикулярной вектору $\overline{N}$ (−2; 3; 1), т.е. имеет вид $2x - 3y - z - 21 = 0$.

Находим точку пересечения данной прямой и полученной плоскости $(t=-1)$ и получим точку $M(9;\ -2;\ 3)$.

Пример 13. Найти уравнение проекции прямой
$l:\dfrac{x-2}{6}=\dfrac{y+1}{-5}=\dfrac{z-5}{4}$ на плоскость $L: x-3y-2z-7=0$.

Решение. Проекция прямой l на плоскость L – есть линия пересечения плоскости L и плоскости, проходящей через данную прямую l, перпендикулярно данной плоскости L. Уравнение плоскости, проходящей через прямую l перпендикулярно плоскости L имеет вид

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-5 \\ 6 & -5 & 4 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

или

$$2x-8y-13z+53=0.$$

Тогда уравнение искомой проекции определяется уравнением

$$\begin{cases} x-3y+2z-7=0 \\ 2x-8y-13z+53=0 \end{cases}$$

Пример 14. Дан куб с ребром, равным 1, рис. 5.16. Найти кратчайшее расстояние между диагональю куба и не пересекающей ее диагональю грани.

Решение. Пусть начало координат $O(0;\ 0;\ 0)$ совпадает с одной из вершин (B) куба, а оси координат направлены по ребрам куба BA; BC и BB_1. Кратчайшее расстояние между диагональю куба и не пересекающей ее диагональю грани – это расстояние между скрещивающимися прямыми B_1D и AC. Координаты вершин куба в данном случае будут: $B(0;0;0)$, $B_1(0;0;1)$, $A(1;0;0)$, $A_1(1;0;1)$, $C(0;1;0)$, $C_1(0;1;1)$, $D(1;1;0)$, $D_1(1;1;1)$.

Записываем уравнение прямых AC и B_1D как прямые, проходящие через две точки.

Уравнения AC: $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{0}$,

уравнения B_1D: $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$.

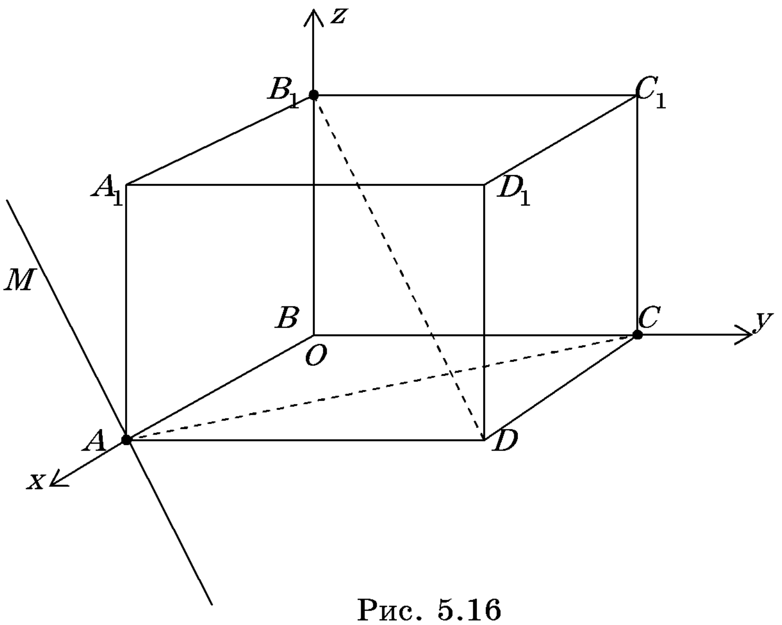


Рис. 5.16

Через точку, лежащую на прямой AC (например A) проведем прямую, параллельную B_1D – это прямая AM, уравнение которой имеет вид

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1}.$$

Затем через прямые AC и AM проведем плоскость, параллельную прямой B_1D. Уравнение этой плоскости имеет вид

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

или

$$x + y + 2z - 1 = 0.$$

Затем, выбирая любую точку на прямой B_1D (например $B_1(0;0;1)$) и находим расстояние до полученной плоскости $x + y + 2z - 1 = 0$ по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \text{ т.е. } d = \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

Итак, кратчайшее расстояние между прямыми, скрещивающимися прямыми B_1D и AC равно $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$.

5.19. Примеры и упражнения

1. Найти геометрическое место точек, находящихся на расстоянии четырёх единиц от плоскости (yz) и на расстоянии трех единиц от точки $A(5;2;-1)$.
2. Написать уравнение плоскости, зная, что точки $A(4;0;-3)$ и $B(1;-5;2)$ симметричны относительно этой плоскости. Определить траекторию точки, движущейся в плоскости (xz) так, что её радиус-вектор равен расстоянию от точки $A(5;-3;1)$.
3. Найти геометрическое место точек, равноудаленных от данной точки и данной плоскости.
4. Найти геометрическое место точек, сумма расстояний которых от двух данных точек $P(c;0;0)$ и $Q(-c;0;0)$ есть величина постоянная, равная $2a$.
5. Стержень перемешается в пространстве так, что три его постоянные точки A, B и C скользят по трем координатным плоскостям. Чем ограничено движение четвертой точки M, произвольно выбранной на стержне?
6. Исследовать поверхность предыдущей задачи, рассмотрев её сечения плоскостями, параллельными координатным плоскостям.
7. Составить уравнение поверхности, описанной стержнем, скользящим по трём рёбрам куба, из которых никакие два не лежат на одной плоскости. Ребро куба равно a.
8. Подвижная точка, имевшая начальное положение $M_0(5;-1;2)$, перемещается параллельно оси y. Найти точку её встречи с плоскостью $x-2y-3z+7=0$.
9. Доказать, что всякое уравнение первой степени $Ax+By+Cz+D=0$ представляет плоскость, основываясь на том, что если координаты двух точек какой-нибудь прямой удовлетворяют этому уравнению, то и координаты любой другой точки этой же прямой удовлетворяют ему.
10. Указать особенности в расположении следующих плоскостей:

    1) $3x-5z+1=0$; 2) $9y-2=0$; 3) $x+y-5=0$;

    4) $2x+3y-7z=0$; 5) $8y-3z=0$;

    относительно осей координат.

11. Написать уравнение плоскости:

1) параллельной плоскости (xz) и проходящей через точку $(2;-5;3)$;

2) проходящей через ось z и через точку $(-3;1;-2)$;

3) параллельной оси x и проходящей через две точки $(4;0;-2)$ и $(5;1;7)$.

12. Через точку $P(7;-5;1)$ провести плоскость, которая отсекала бы на осях координат положительные и равные между собою отрезки.

13. Три грани тетраэдра, расположенного во втором октанте, совпадают с координатными плоскостями. Написать уравнение четвертой грани, зная длину ребер, ее ограничивающих: $AB = 6$; $BC = \sqrt{29}$; $CA = 5$.

14. Вычислить расстояние плоскости $15x - 10y + 6z - 190 = 0$ от начала координат.

15. Определить направляющие косинусы прямой, перпендикулярной к плоскости $2x - y + 2z + 9 = 0$.

16. Найти плоскость, зная, что точка $P(3;-6;2)$ служит основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на эту плоскость.

17. Положение зеркала определяется уравнением $2x - 6y + 3z - 42 = 0$. С какой точкой должно совпадать её зеркальное изображение точки $A(3;-7;5)$?

18. Через точку $M(-5;16;12)$ проведены две плоскости: одна из них содержит ось x, другая – ось y. Вычислить угол между этими двумя плоскостями.

19. Составить уравнение плоскости:

1) проходящей через точку $(-2;7;3)$ параллельно плоскости $x - 4y + 5z - 1 = 0$;

2) проходящей через начало координат и перпендикулярной к двум плоскостям:
$2x - y + 5z + 3 = 0$ и $x + 3y - z - 7 = 0$;

3) проходящей через точки $L(0;0;1)$ и $N(3;0;0)$ и образующей угол $\pi/3$ с плоскостью (xy).

20. Составить уравнение плоскости, зная её расстояние от трех точек $A(6;1;-1)$, $B(0;5;4)$ и $C(5;2;0)$, а именно: $d_1 = 1$; $d_2 = 3$; $d_3 = 0$.

21. Проверить, можно ли провести плоскость через следующие четыре точки:

1) $(3;1;0)$, $(0;7;2)$, $(-1;0;-5)$ и $(4;1;5)$;

2) $(1;-1;1)$, $(0;2;4)$, $(1;3;3)$ и $(4;0;-3)$.

22. Найти точку пересечения следующих трех плоскостей:

1) $5x+8y-z-7=0$, $x+2y+3z-1=0$, $2x-3y+2z-9=0$;

2) $x-4y-2z+3=0$, $3x+y+z-5=0$, $-3x+12y+6z-7=0$;

3) $2x-y+5z-4=0$, $5x+2y-13z+23=0$, $3x-z+5=0$.

23. Проверить, имеют ли общую точку следующие четыре плоскости:

1) $5x-z+3=0$, $2x-y-4z+5=0$, $3y+2z-1=0$, $3x+4y+5z-3=0$;

2) $5x+2y-6=0$, $x+y-3z=0$, $2x-3y+z+8=0$, $3x+2z-1=0$;

24. Через линию пересечения плоскостей $4x-y+3z-1=0$ и $x+5y-z+2=0$ провести плоскость:

1) проходящую через начало координат;

2) проходящую через точку $(1;1;1)$;

3) параллельную оси y;

4) перпендикулярную плоскости $2x-y+5z-3=0$.

25. Написать уравнение плоскости, $5x-y+3z-2=0$ и пересекающей её по прямой, лежащей в плоскости xy.

26. Указать особенности в расположении следующих прямых:

1) $\begin{cases} Ax+By+Cz=0, \\ A_1x+B_1y+C_1z=0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} Ax+D=0, \\ B_1y+D_1=0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} Ax+By+Cz+D=0, \\ B_1y+D_1=0; \end{cases}$

4) $\begin{cases} By+Cz+D=0, \\ B_1y+C_1z+D_1=0; \end{cases}$

5) $\begin{cases} Ax+Cz=0, \\ A_1x+C_1z=0; \end{cases}$

6) $\begin{cases} 3x+2z=0, \\ 5x-1=0; \end{cases}$

7) $\begin{cases} 5x+y-3z-7=0, \\ 2x+y-3z-7=0. \end{cases}$

27. Какому условию должны удовлетворять коэффициенты в уравнениях прямой:

$$\begin{cases} Ax+By+Cz+D=0, \\ A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \end{cases}$$

для того, чтобы прямая:

а) была параллельна оси x; г) была параллельна плоскости yz;

б) пересекла ось y; д) лежала в плоскости xz;

в) совпала с осью z; е) проходила через начало координат?

28. Написать уравнения плоскостей, проектирующих прямую:

$$\begin{cases} 5x + 8y - 3z + 9 = 0, \\ 2x - 4y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

на три координатные плоскости.

29. Какими уравнениями изобразятся проекции прямой:

$$\begin{cases} 3x + 2y - z + 5 = 0, \\ x - y - z + 1 = 0 \end{cases}$$

на три координатные плоскости?

30. Определить следы прямой (следами называются точки пересечения прямой с координатными плоскостями):

$$\begin{cases} 6x + 2y - z - 9 = 0, \\ 3x + 2y + 2z - 12 = 0 \end{cases}$$

и построить эту прямую.

31. Составить уравнения проекции прямой:

$$\begin{cases} x - 2y + 2z - 5 = 0, \\ 3x + y - z + 2 = 0 \end{cases}$$

на плоскость $2x + 3y + z - 6 = 0$.

32. Составить уравнения прямой, которая проходит через точку $A(1;-5;3)$ и образует с осями координат углы, соответственно равные $60°$, $45°$ и $120°$.

33. Привести к каноническому виду уравнения прямой

$$\begin{cases} 2x - 3y - 3z - 9 = 0, \\ x - 2y + z + 3 = 0. \end{cases}$$

34. Вычислить направляющие косинусы прямой

$$\begin{cases} 5x - 6y + 2z + 21 = 0, \\ x - z + 3 = 0. \end{cases}$$

35. Через точку $(2;-5;3)$ провести прямую:

1) параллельную оси z;

2) параллельную прямой $\dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y-2}{-6} = \dfrac{z+3}{9}$;

3) параллельную прямой $\begin{cases} 2x - y + 3z - 1 = 0, \\ 5x + 4y - z - 7 = 0. \end{cases}$

4) в плоскости (xz) найти прямую, проходящую через начало координат и перпендикулярную к прямой $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-5}{1}$.

36. Проверить, пересекаются ли следующие прямые:

1) $\frac{x-1}{2}=\frac{y-7}{1}=\frac{z-5}{4}$ и $\frac{x-6}{3}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{1}$;

2) $\begin{cases}4x+z-1=0,\\ x-2y+3=0\end{cases}$ и $\begin{cases}3x+y-z+4=0,\\ y+2z-8=0.\end{cases}$

37. Написать уравнения перпендикуляра, опущенного из точки $A(2;3;1)$ на прямую $\frac{x+1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-2}{3}$.

38. Через точку $A(4;0;-1)$ провести прямую так, чтобы она пересекала две данные прямые: $\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{3}=\frac{z+1}{-2}$ и $\frac{x}{5}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{2}$.

39. Из всех прямых, пересекающих две прямые:

$$\frac{x+3}{2}=\frac{y-5}{3}=\frac{z}{1} \text{ и } \frac{x-10}{5}=\frac{y+7}{4}=\frac{z}{1},$$

найти ту, которая была бы параллельна прямой $\frac{x+2}{8}=\frac{y-1}{7}=\frac{z-3}{1}$.

40. Составить уравнения общего перпендикуляра двух прямых:

$$\frac{x-7}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-9}{-1} \text{ и } \frac{x-3}{-7}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{3}.$$

41. Найти точку пересечения:

1) прямой $\frac{x+1}{2}=\frac{y-3}{4}=\frac{z}{3}$ и плоскости $3x-3y+2z-5=0$;

2) прямой $\frac{x-13}{8}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-4}{3}$ и плоскости $x+2y-4z+1=0$;

3) прямой $\frac{x-7}{5}=\frac{y-4}{1}=\frac{z-5}{4}$ и плоскости $3x-y+2z-5=0$.

42. Составить уравнения прямой, проходящей через точки пересечения плоскости $2x + y - 3z + 1 = 0$ с прямыми

$$\frac{x-3}{1} = \frac{y-5}{-5} = \frac{z+1}{2} \quad \text{и} \quad \frac{x-5}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z+4}{-6}.$$

43. При каких значениях коэффициентов A и B плоскость $Ax + By + 6z - 7 = 0$ перпендикулярна к прямой

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y+5}{-4} = \frac{z+1}{3}?$$

44. Через начало координат провести плоскость, перпендикулярную прямой $\frac{x+2}{4} = \frac{y-3}{5} = \frac{z-1}{-2}$.

45. Проверить, лежит ли прямая:

1) $\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z+2}{5}$ на плоскости $4x + 3y - z + 3 = 0$;

2) $\frac{x-1}{4} = \frac{y}{7} = \frac{z-2}{3}$ на плоскости $5x - 8y - 2z - 1 = 0$;

3) $\frac{x+2}{3} = \frac{y-5}{4} = \frac{z}{1}$ на плоскости $3x - 2y - z + 15 = 0$.

46. Через прямую $\frac{x-2}{5} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{2}$ провести плоскость, перпендикулярную плоскости $x + 4y - 3z + 7 = 0$.

47. Найти проекцию прямой $\frac{x}{4} = \frac{y-4}{3} = \frac{z+1}{-2}$ на плоскость $x - y + 3z + 8 = 0$.

48. Пересекаются ли прямые

$$\frac{x-3}{5} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{4} \quad \text{и} \quad \frac{x-8}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-6}{-2}?$$

Написать уравнение плоскостей проходящей через них.

49. Провести плоскость через перпендикуляры, опущенные из точки $(-3; 2; 5)$ на плоскости $4x + y - 3z + 13 = 0$ и $x - 2y + z - 11 = 0$.

50. Написать уравнение плоскости, проходящей через две параллельные прямые: $\frac{x}{7} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-1}{5}$ и $\frac{x-1}{7} = \frac{y-3}{3} = \frac{z+2}{5}$.

51. Написать уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y+4}{1} = \frac{z-2}{-3}$$

и параллельно прямой $\frac{x+5}{4} = \frac{y-2}{7} = \frac{z-1}{2}$.

52. Через прямую $\dfrac{x+5}{3}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z}{4}$ провести плоскость, параллельную плоскости $x+y-z+15=0$.

53. Можно ли через прямую $\dfrac{x-7}{4}=\dfrac{y-5}{3}=\dfrac{z-1}{6}$ провести плоскость параллельно плоскости $2x+y-7z+1=0$?

54. Через точку $P(1;0;7)$ параллельно плоскости $3x-y+2z-15=0$ провести прямую так, чтобы она пересекала прямую $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z}{2}$.

55. Найти расстояние точки $P(7;9;7)$ от прямой $\dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z}{2}$.

56. Найти точку, симметричную с точкой $P(4;3;10)$ относительно прямой $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{4}=\dfrac{z-3}{5}$.

57. Найти расстояние между двумя параллельными прямыми: $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+1}{4}=\dfrac{z}{2}$ и $\dfrac{x-7}{3}=\dfrac{y-1}{4}=\dfrac{z-3}{2}$.

58. Найти кратчайшее расстояние между двумя непересекающимися прямыми: $\dfrac{x-9}{4}=\dfrac{y+2}{-3}=\dfrac{z}{1}$ и $\dfrac{x}{-2}=\dfrac{y+7}{9}=\dfrac{z-2}{2}$.

59. Дан куб, ребро которого равно единице. Вычислить расстояние между вершиной куба и его диагональю, не проходящей через эту вершину.

60. Проверить, что плоскость, перпендикулярна диагонали куба, проходящая через её середину, пересекает куб по правильному шестиугольнику.

61. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(3;4;-5)$ параллельно двум векторам:
$a_1=\{3;1;-1\}$ и $a_2=(1,\,-1,\,-2)$.

62. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(2;-1;3)$ и $M_2(3;1;2)$ параллельно вектору $a=\{3;-1;4\}$.

63. Определить, при каких значениях l и m следующие пары уравнений будут определять параллельные плоскости:
1) $2x+ly+3z-5=0$, $mx-6y-6z+2=0$;
2) $3x-y+lz-9=0$, $2x+my+2z-3=0$;

3) $mx+3y-2z-1=0$, $2x-5y-lz=0$.

64. Определить, при каком значении l следующие пары уравнений будут определять перпендикулярные плоскости:

1) $3x-5y+lz-3=0$, $x+3y+2z+5=0$;

2) $5x+y-3z-3=0$, $2x+ly-3z+1=0$,

3) $7x-2y-z=0$, $lx+y-3z-1=0$.

65. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M_1(3;-2;-7)$ параллельно плоскости $2x-3z+5=0$.

66. Составить уравнение плоскости, которая проходит через начало координат перпендикулярно к двум плоскостям: $2x-y+3z-1=0$, $x+2y+z=0$.

67. Составить уравнение плоскости, которая проходит через две точки $M_1(1;-1;-2)$ и $M_2(3;1;1)$ перпендикулярно плоскости $x-2y+3z-5=0$.

68. Установить, что три плоскости: $x-2y+z-7=0$, $2x+y-z+2=0$, $x-3y+2z-11=0$ – имеют одну общую точку, и вычислить ее координаты.

69. Доказать, что три плоскости: $7x+4y+7z+1=0$, $2x-y-z+2=0$, $x+2y+3z-1=0$ – проходят через одну прямую.

70. Доказать, что три плоскости: $2x-y+3z-5=0$, $3x+y+2z-1=0$, $4x+3y+z+2=0$ – пересекаются по трем параллельным прямым.

71. Определить, при каких значениях a и b плоскости: $2x-y-3z-1=0$, $x+2y-z+b=0$, $x+ay-6z+10=0$:

1) имеют одну общую точку;

2) проходят через одну прямую;

3) пересекаются по трем различным параллельным прямым.

72. Составить уравнение плоскости, которая проходит:

1) через ось O_x и точку $M_1(4;-1;2)$;

2) через ось O_y и точку $M_2(1;4;-3)$;

3) через ось O_z и точку $M_3(3;-4;7)$.

73. Определить, какие из следующих уравнений плоскостей являются нормальными:

1) $\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}y-\frac{2}{3}z-5=0$;

7) $\frac{5}{13}y-\frac{12}{13}z-1=0$;

2) $\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}y-\frac{1}{3}z-3=0$;

8) $\frac{4}{5}x-\frac{3}{5}y+3=0$;

3) $\frac{6}{7}x-\frac{3}{7}y+\frac{2}{7}z+5=0$;

4) $-\frac{6}{7}x+\frac{3}{7}y-\frac{2}{7}z-5=0$;

5) $\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y-3=0$;

6) $-\frac{5}{13}y+\frac{12}{13}z+1=0$;

9) $x-1=0$;

10) $y+2=0$;

11) $-y-2=0$;

12) $z-5=0$.

74. Две грани куба лежат на плоскостях $2x-2y+z-1=0$, $2x-2y+z+5=0$. Вычислить объем этого куба.

75. Составить уравнение плоскости, делящей пополам тот двугранный угол между двумя плоскостями: $2x-14y+6z-1=0$, $3x+5y-5z+3=0$, в котором лежит начало координат.

76. Составить уравнение плоскости, делящей пополам тот двугранный угол между двумя плоскостями: $2x-y+2z-3=0$, $3x+2y-6z-1=0$, в котором лежит точка $M(1;\ 2;\ -3)$.

77. Составить уравнение плоскости, которая делит пополам тупой двугранный угол, образованный двумя плоскостями: $3x-4y-z+5=0$, $4x-3y+z+5=0$.

78. Найти соотношения, которым должны удовлетворять коэффициенты уравнений прямой

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$$

для того, чтобы эта прямая была параллельна: 1) оси O_x; 2) оси O_y; 3) оси O_z.

79. Найти соотношения, которым должны удовлетворять коэффициенты уравнений прямой

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$$

для того, чтобы эта прямая:

а) пересекала ось: 1) абсцисс; 2) ординат; 3) аппликат;

б) совпадала с осью: 1) абсцисс; 5) ординат; 6) аппликат.

80. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую пересечения плоскостей $3x-2y+z-3=0$, $x-2z=0$ перпендикулярно плоскости $x-2y+z+5=0$.

81. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$\begin{cases} 5x - y - 2z - 3 = 0, \\ 3x - 2y - 5z + 2 = 0 \end{cases}$$

перпендикулярно плоскости $x + 19y - 7z - 11 = 0$.

82. Составить уравнения плоскостей, проектирующих прямую $\begin{cases} 2x - y + 2z - 3 = 0, \\ x + 2y - z - 1 = 0 \end{cases}$ на координатные плоскости.

83. Составить уравнения проекций прямой $\begin{cases} x + 2y - 3z - 5 = 0, \\ 2x - y + z + 2 = 0 \end{cases}$ на координатные плоскости.

84. Составить уравнение плоскости, проектирующей прямую $\begin{cases} 3x + 2y - z - 1 = 0, \\ 2x - 3y + 2z - 2 = 0 \end{cases}$ на плоскость $x + 2y + 3z - 5 = 0$.

85. Даны вершины треугольника: $A(3;\ 6;\ -7)$, $B(-5;\ 2;\ 3)$ и $C(4;\ -7;\ -2)$. Составить параметрические уравнения его медианы, проведенной из вершины C.

86. Дана прямая $\begin{cases} 2x - 5y + z - 3 = 0, \\ x + 2y - z + 2 = 0. \end{cases}$ Вычислить проекции на оси координат какого-нибудь ее направляющего вектора a. Найти общее выражение проекций на оси координат произвольного направляющего вектора этой прямой.

87. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_1(2; 3; -5)$ параллельно прямой

$$\begin{cases} 3x - y + 2z - 7 = 0, \\ x + 3y - 2z + 3 = 0. \end{cases}$$

88. Составить параметрические уравнения следующих прямых:

1) $\begin{cases} 2x + 3y - z - 4 = 0, \\ 3x - 5y + 2z + 1 = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + 2y - z - 6 = 0, \\ 2x - y + z + 1 = 0. \end{cases}$

89. Доказать, что прямые, заданные параметрическими уравнениями $x = 2t - 3$, $y = 3t - 2$, $z = -4t + 6$ и $x = t + 5$, $y = -4t - 1$, $z = t - 4$, пересекаются.

90. Даны прямые $\dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y}{-3} = \dfrac{z-1}{4}$, $\dfrac{x-3}{l} = \dfrac{y-1}{4} = \dfrac{z-7}{2}$;. При каком значении l они пересекаются?

91. Доказать, что условие, при котором две прямые $\frac{x-a_1}{l_1}=\frac{y-b_1}{m_1}=\frac{z-c_1}{n_1}$ и $\frac{x-a_2}{l_2}=\frac{y-b_2}{m_2}=\frac{z-c_2}{n_2}$ лежат в одной плоскости, может быть представлено в следующем виде:

$$\begin{vmatrix} a_2-a_1 & b_2-b_1 & c_2-c_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=0.$$

92. Составить уравнения прямой, которая проходит через точку $M_1(-4;-5;3)$ и пересекает две прямые

$$\frac{x+1}{3}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z-2}{-1},\qquad \frac{\text{x-2}}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-1}{-5}.$$

93. Даны уравнения движения точки $M(x;\ y;\ z)$: $x = 3 - 4t$, $y = 5 + 3t$, $z = -2 + 12t$.
Определить ее скорость – v.

94. Доказать, что прямая $\begin{cases}5x-3y+2z-5=0,\\ 2x-y-z-1=0\end{cases}$ лежит в плоскости $4x - 3y + 7z - 7 = 0$.

95. Найти точку пересечения прямой и плоскости:

$$\frac{x+3-5}{3}=\frac{y-2}{-1}=z+1,\qquad x-2y+z-15=0.$$

96. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(2;-4;-1)$ и середину отрезка прямой

$$\begin{cases}3x+4y+5z-26=0,\\ 3x-3y-2z-5=0,\end{cases}$$

заключенного между плоскостями $5x + 3y - 4z + 11 = 0$ и $5x + 3y - 4z - 41 = 0$.

97. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(2;-3;-5)$ перпендикулярно плоскости $6x - 3y - 5z + 2 = 0$.

98. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(1;-1;-1)$ перпендикулярно прямой

$$\frac{x+3}{2}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z+2}{4}.$$

99. При каких значениях A и D прямая $x = 3 + 4t$, $y = 1 - 4t$, $z = -3 + t$ лежит в плоскости $Ax + 2y - 4z + D = 0$?

100. Найти проекцию точки $P(2;\ -1;\ 3)$ на прямую $x = 3t$, $y = 5t - 7$, $z = 2t + 2$.

101. Найти точку Q, симметричную точке $P(4;\ 1;\ 6)$ относительно прямой $\begin{cases} x - y - 4z + 12 = 0, \\ 2x + y - 2z + 3 = 0. \end{cases}$

102. Найти точку Q, симметричную точке $P(2;\ -5;\ 7)$ относительно прямой, проходящей через точки $M_1(5;4;6)$ и $M_2(-2;-17;-8)$.

103. Найти проекцию точки $P(5;\ 2;\ -1)$ на плоскость $2x - y + 3z + 23 = 0$.

104. Найти точку Q, симметричную точке $P(1;\ 3;\ -4)$ относительно плоскости $3x + y - 2z = 0$.

105. На плоскости O_{xy} найти такую точку P, сумма расстояний которой до точек $A(-1;\ 2;\ 5)$ и $B(11;\ -16;\ 10)$ была бы наименьшей.

106. На плоскости O_{xy} найти такую точку P, разность расстояний которой до точек $M_1(3;2;-5)$ и $M_2(8;-4;-13)$ была бы наибольшей.

107. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(1;2;-3)$ параллельно прямым

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-7}{3}, \qquad \frac{x+5}{3} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+3}{-1}.$$

108. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $x = 2t + 1$, $y = -3t + 2$, $z = 2t - 3$ и точку $M_1(2;-2;1)$.

109. Доказать, что прямые

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-5}{4}, \qquad x = 3t + 7, \quad y = 2t + 2, \quad z = -2t + 1$$

лежат в одной плоскости, и составить уравнение этой плоскости.

110. Составить уравнение плоскости, проходящей через две параллельные прямые:

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{-2}, \qquad \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+3}{-2}.$$

111. Найти проекцию точки $C(3;\ -4;\ -2)$ на плоскость, проходящую через параллельные прямые

$$\frac{x-5}{13} = \frac{y-6}{1} = \frac{z+3}{-4}, \qquad \frac{x-2}{13} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+3}{-4}.$$

112. Найти точку Q, симметричную точке $P(3;\ -4;\ -6)$ относительно плоскости, проходящей через $M_1(-6;1;-5)$, $M_2(7;-2;-1)$ и $M_3(10;-7;1)$.

113. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $x = 3t + 1$, $y = 2t + 3$, $z = -t - 2$ параллельно прямой

$$\begin{cases} 2x - y + z - 3 = 0, \\ x + 2y - z - 5 = 0. \end{cases}$$

114. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{-3} = \dfrac{z-2}{2}$ перпендикулярно к плоскости $3x + 2y - z - 5 = 0$.

115. Составить каноническое уравнение прямой, которая проходит через точку $M_0(3; -2; -4)$ параллельно плоскости $3x - 2y - 3z - 7 = 0$ и пересекает прямую $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+4}{-2} = \dfrac{z-1}{2}$.

116. Составить параметрические уравнения прямой, которая проходит параллельно плоскостям $3x + 12y - 3z - 5 = 0$, $3x - 4y + 9z + 7 = 0$ и пересекает прямые $\dfrac{x+5}{2} = \dfrac{y-3}{-4} = \dfrac{z+1}{3}$, $\dfrac{x-3}{-2} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z-2}{4}$.

117. Вычислить кратчайшее расстояние между двумя прямыми в каждом из следующих случаев:

1) $\dfrac{x+7}{3} = \dfrac{y+4}{4} = \dfrac{z+3}{-2}$; $\dfrac{x-21}{6} = \dfrac{y+5}{-4} = \dfrac{z-2}{-1}$;

2) $x = 2t - 4$, $y = -t + 4$, $z = -2t - 1$; $x = 4t - 5$; $y = -3t + 5$; $z = -5t + 5$;

3) $\dfrac{x+5}{3} = \dfrac{y+5}{2} = \dfrac{z-1}{-2}$; $x = 6t + 9$, $y = -2t$, $z = -t + 2$.

ТЕМЫ КУРСОВЫХ РАБОТ И РЕФЕРАТОВ

1. Векторные уравнения линий и плоскостей в пространстве.
2. Параметрические уравнения линий в пространстве. Параметрические уравнения поверхности.
3. Тор, катеноид, геликоид, псевдосфера.
4. Семейство поверхностей. Огибающая.
5. Понятия о квадратичных формах поверхности.
6. Геодезические линии.
7. Геометрические инварианты. Скалярные инварианты тетраэдра. Полные системы инвариантов тетраэдра.
8. Инварианты гексаэдра с треугольными гранями.
9. Винтовая линия.

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров П.С. Лекции по аналитической геометрии. – М.: Наука, 1968.
2. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М.: Наука, 1980.
3. Бурдун А.А., Мурашко Е.А., Феденко А.С. Сборник задач по алгебре и геометрии. – Мн.: Изд-во БГУ, 1979.
4. Виноградов И.М. Аналитическая геометрия. – М.: Наука, 1986.
5. Воднев В.Т. Сборник задач и упражнений по дифференциальной геометрии. – Мн.: Выш. шк., 1970.
6. Гурский Е.И., Ершова В.В. Основы линейной алгебры и аналитической геометрии. – Мн.: Выш. шк., 1965.
7. Гусак А.А. Справочное пособие к решению задач. Аналитическая геометрия и линейная алгебра. – Мн.: Выш. шк., 2001.
8. Гусак А.А., Гусак Г.М. Линии и поверхности. – Мн.: Выш. шк., 1985.
9. Дадаян А.А., Дударенко В.А. Алгебра и геометрия. – Мн.: Выш. шк., 1989.
10. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия. – М.: Наука, 1971.
11. Клетенник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. – М.: Гостехиздат, 1954.
12. Лапшов Г.Ф. Элементы векторного исчисления. – М.: Наука, 1975.
13. Мальцев А.И. Основы линейной алгебры. – М.: Наука, 1975.
14. Новиков С.П., Фоменко А.Т. Элементы дифференциальной геометрии и топологии. – М.: Наука, 1987.
15. Понтрягин Л.С. Метод координат. – М.: Наука, 1977.
16. Постников М.М. Аналитическая геометрия. – М.: Наука, 1986.
17. Привалов И.И. Аналитическая геометрия. – М.: Гостехиздат, 1952.
18. Тышкевич Р.И., Феденко А.С. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. – Мн.: Выш. шк., 1976.
19. Цубербиллер О.А. Задачник по аналитической геометрии. – М.: Гостехиздат, 1957.

МОДУЛЬ 6.
ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

§ 1. Множества. Отображения.
§ 2. Числовые функции одной переменной.
§ 3. Предел последовательности.
§ 4. Предел функции.
§ 5. Непрерывность функции.
§ 6. Примеры и упражнения.
Темы курсовых работ.
Литература.

§ 1. МНОЖЕСТВА. ОТОБРАЖЕНИЯ

1. Элементы теории множеств и математической логики.
2. Точные грани числовых множеств.
3. Метод математической индукции. Суммирование. Бином Ньютона. Пропорции.
4. Неравенства.

1.1. Элементы теории множеств и математической логики

Множества

Понятие *множества* считается первоначальным, неопределенным. Под множеством будем понимать совокупность элементов (объектов), характеризуемых некоторым общим признаком. При этом элементы данной совокупности можно отличить друг от друга и от элементов, не входящих в эту совокупность. В математике часто вместо термина «множество» употребляют «класс», «семейство», «совокупность», «система». Предметы или объекты, из которых состоит множество, называют элементами множества. Множества и их элементы обозначают обычно буквами латинского алфавита: множества – прописными $A, B, C, \ldots$, а их элементы – строчными $a, b, c, \ldots$. Если элемент a принадлежит множеству A, то пишут $a \in A$; если a не принадлежит множеству A, пишут $a \notin A$.

Множества задаются или перечислением его элементов, или указанием их характеристических свойств.

Множество, состоящее из одного элемента называют одноэлементными и обозначают $\{a\}$. Множество, не содержащее ни одного элемента, называют пустым и обозначают ϕ.

Все множества делятся на конечные и бесконечные. Множества, состоящие из конечного числа элементов, называются конечными. Множества, не являющееся конечными, называются бесконечными.

Логические символы

Многие математические понятия при изложении курса математического анализа удобно записывать в виде выражений, содержащих логические символы. Так, символ $\forall$, называемый квантором общности, используется вместо слов: «для любого», «для каждого», «для всех», «каково бы ни было». Заметим, что $\forall$ – перевернутая первая буква английского слова All (все). Символ $\exists$ – квантор существования – вместо слов «существует», «найдется», «имеется». $\exists$ – перевернутая первая буква английского слова Exists (существует). Кроме этого, используют следующие знаки:

1. $\Rightarrow$ – знак следствия (импликации). Запись $A \Rightarrow B$ означает, что A влечет B или B следует из A. Другими словами: B – необходимое условие (признак) A, A – достаточное условие (признак) B.

2. $\Leftrightarrow$ – знак равносильности (эквивалентности). Запись $A \Leftrightarrow B$ означает, что B следует из A и A следует из B. Другими словами: A равносильно B; A необходимо и достаточно для B; A тогда и только тогда, когда B.

3. $\vee$ – знак дизъюнкции, заменяет союз «или»; запись $A \vee B$ означает, что имеет место хотя бы одно из высказываний A, B;

4. $\wedge$ – знак конъюнкции, заменяет союз «и».

5. $\neg$ – знак отрицания: запись $\neg A$ означает «не A» (отрицание высказывания A).

Отношения между множествами

Множества A и B называются равными, если каждый элемент множества A является элементом множества B и, наоборот, каждый элемент множества B является элементом множества A.

Равенство множеств A и B обозначают $A = B$.

Равные множества состоят из одних и тех же элементов. Равенство множеств обладает следующими свойствами:

1. $A = A$ (рефлексивность);
2. $A = B,\ B = C \Rightarrow A = C$ (транзитивность);
3. $A = B \Rightarrow B = A$ (симметричность).

Множество A $(A \neq \emptyset)$ называется подмножеством множества B $(B \neq \emptyset)$, если каждый элемент множества A является элементом множества В, и записывают $A \in B$.

Понятие подмножества определяет между двумя множествами отношение включения. Отметим, например, для чисел имеет место отношение $N \in Z \in Q \in R$.

Заметим, что отношения включения или равенства определены не для всех множеств. Например, множества рациональных и иррациональных чисел не равны между собой, и более того, ни одно из них не является подмножеством другого.

Операции над множествами

1. Пересечением множеств A и B называется множество $A \cap B$, состоящее из всех элементов, принадлежащих как A, так и B, то есть общая часть множеств A и B:

$$A \cap B = \left\{x \middle| x \in A \quad \text{и} \quad \text{x} \in \text{B}\right\}.$$

2. Так как пересечение $A \cap B$ состоит из элементов общих для A и B, то $A \cap B = B \cap A$; если $A \subset B$, то $A \cap B = A$.

3. Объединением множеств A и B называется множество $A \cup B$, состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из двух данных множеств:

$$A \cup B = \left\{x \middle| x \in A \text{ или } \text{x} \in \text{B}\right\},$$

$$A \cup B = B \cup A.$$

4. Разность множеств A и B называется множество $A \backslash B$, состоящее из тех элементов множества A, которые не принадлежат B

$$A \setminus B = \left\{x \middle| x \in A, x \notin B\right\}.$$

Если E – некоторое основное множество. Дополнение множества $A \subset E$ называется множество $\overline{A}$, состоящее из всех элементов $y \in E$, не принадлежащих A. Таким образом, все те элементы, которые не принадлежат множеству A, образуют его дополнение $\overline{A}$, то есть $A \cap \overline{A} = \emptyset$.

Рассмотренные операции с геометрической точки зрения изображают с помощью диаграмм Эйлера – Венна (рис. 6.1).

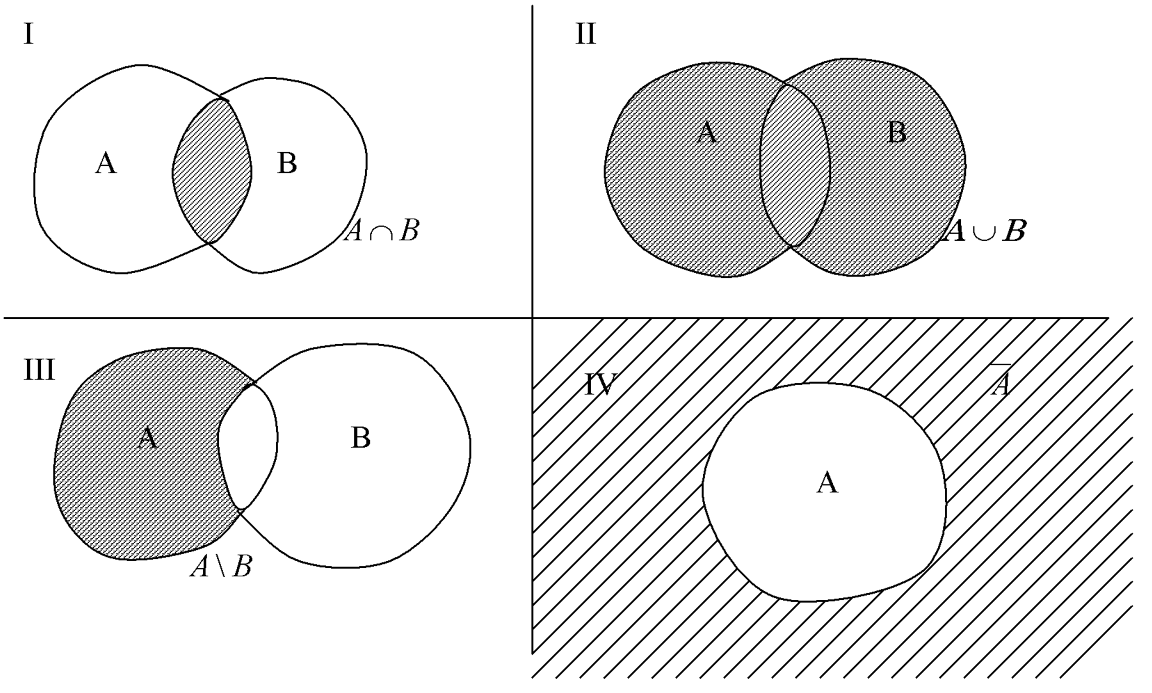


Рис. 6.1

Заштрихованные области изображают: I – пересечение A и B, II – объединение A и B, III – разность A и B, IV – дополнение $\overline{A}$ множеств.

Операции над множествами удовлетворяют следующим правилам (соотношениям):

1. $A \cup A = A$;
2. $A \cap A = A$;
3. $A \cup B = B \cup A$;
4. $A \cap B = B \cap A$;
5. $A \cup \phi = A$;
6. $A \cap \phi = \phi$;
7. $\overline{\overline{A}} = A$;
8. $A \cap \overline{A} = \phi$;
9. $A \cup \overline{A} = E$;
10. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;
11. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$;
12. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
13. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;

14. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$;

15. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Формулы 14 и 15 – законы де Моргана, или законы логического дополнения.

1.2. Точные грани числовых множеств

Верхняя и нижняя грани числового множества

Множество X действительных чисел $(X \in R)$ называется ограниченным сверху, если существует действительное число M такое, что все элементы множества X не превосходят M, то есть

$$\exists M \in R; \ \ \forall x \in R \Rightarrow x \leq M . \tag{6.1}$$

Всякое действительное число M, обладающее свойством (6.1)называют верхней гранью числового множества X.

Множество X действительных чисел $(X \in R)$ называется ограниченным снизу, если существует действительное число m такое, что все элементы множества X не меньше m, то есть

$$\exists m \in R \ \ \forall x \in R \Rightarrow x \geq m . \tag{6.2}$$

Всякое действительное число m, обладающее свойством (6.2) называют нижней гранью числового множества X.

Если числовое множество X ограничено как сверху, так и снизу, его называют ограниченным, то есть X – ограниченное множество тогда и только тогда, когда

$$\exists M \in R, \exists m \in R \ \ \forall x \in X \Rightarrow m \leq x \leq M .$$

Наименьшая из всех верхних граней ограниченного сверху множества X называется точной верхней гранью этого множества и обозначается символом $M = \sup x$ (читается «супремум»). Наибольшая из всех нижних граней ограниченного снизу множества X называется точной нижней гранью этого множества и обозначается символом $m = \inf x$ (читается «инфимум»).

Определение точной верхней (нижней) грани можно сформулировать и по-другому, а именно:

Число M (число m) называется точной верхней (нижней) гранью ограниченного сверху (снизу) множества X, если выполнены следующие два требования:

1) каждый элемент x множества X удовлетворяет неравенству $x \leq M (x \geq m)$;

2) каково бы ни было действительное число x', меньшее M (больше m), найдется хотя бы один элемент x множества X, удовлетворяющий неравенству $x > x'(x < x')$.

В этом определении требование (6.1) означает, что число M (число m) является одной из верхних (нижних) граней, а требование (6.2) говорит о том, что эта грань является наименьшей (наибольшей) и уменьшена (увеличена) быть не может.

Замечание 1. Из определения точной верхней (нижней) грани следует, что если у числового множества X существует точная верхняя (нижняя) грань $M(m)$, то она единственная.

Замечание 2. Число $M = \sup x$ ($m = \inf x$) может как принадлежать, так и не принадлежать множеству X. Например, если X – множество чисел x таких, что $2 \le x < 3$, то $\sup x = 3 \notin$ X; $\inf x = 2 \in$ X.

Существование у любого ограниченного сверху (снизу) множества точной верхней (точной нижней) грани не является очевидным и требует доказательства.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. (о существовании точной верхней (нижней) грани).

Если непустое множество действительных чисел X ограничено сверху (снизу), то существует sup x (inf x).

1.3. Метод математической индукции. Суммирование. Бином Ньютона. Пропорции

При решении различных задач математического анализа нам потребуется:

1. Метод математической индукции и его применение для доказательства тождеств и неравенств.
2. Суммирование.
3. Бином Ньютона.

1.3.1. Метод математической индукции

Доказательства посредством применения математической индукции основаны на принципе полной индукции, являющемся одной из аксиом в теории натуральных чисел. Общая формулировка этой аксиомы такова.

Если некоторое предложение А верно для n = 1 и если из предположения о том, что оно верно для натурального n = k (k > 1) следует, что А верно и для n = k + 1, то предложение А верно для любого натурального числа.

Применение метода математической индукции для доказательства заданного утверждения сводится к следующему:

1. Проверка того, что доказываемый факт имеет место при $n = 1$ или при любом другом фиксированном натуральном числе.

Эту часть доказательства называют базисом индукции.

2. Предположение, что заданное утверждение верно при некотором $n = k$ $(k > 1)$ (предположение индукции).

3. Доказательство того, что это утверждение справедливо при $n = k + 1$ (индуктивный шаг).

4. Заключение, что доказываемое утверждение верно на основании принципа полной индукции для любого натурального k.

Пример 1. Доказать, что для всякого натурального числа n

$$1 - 2^3 + 3^2 - 4^2 + \ldots + (-1)^{n-1} n^2 = (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2}.$$

Решение.

1. Для $n = 1$ равенство имеет место $1 = 1$.

2. Предположим, что равенство имеет место при $n = k$,

$$1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots + (-1)^{k-1} k^2 = (-1)^{k-1} \frac{k(k+1)}{2}.$$

3. Докажем, что из этого предположения следует справедливость равенства для $n = k + 1$, то есть что

$$1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots + (-1)^{k-1} \cdot k^2 + (-1)^k (k+1)^2 = (-1)^k \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Действительно:

$$1 - 2^2 + 3^2 + \ldots + (-1)^{k-1} \cdot k^2 + (-1)^k (k+1)^2 =$$

$$= (-1)^{k-1} \frac{k(k+1)}{2} + (-1)^k (k+1)^2 = (-1)^k \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Таким образом, доказана истинность предположения при $n = k + 1$, и поэтому искомая формула справедлива при любом $n \in N$.

Пример 2. Доказать формулу Муавра

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha,$$

где n – натуральное число.

Решение.

1. При $n = 1$ формула справедлива.

2. Предположим, что она справедлива при $n = k$, и покажем, что она имеет место и при $n = k + 1$.

3. Действительно, имеем

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^{k+1} = (\cos\alpha + i\sin\alpha)^k \cdot (\cos\alpha + i\sin\alpha) =$$
$$(\cos k\alpha + i\sin k\alpha)(\cos\alpha + i\sin\alpha) = (\cos k\alpha \cdot \cos\alpha - \sin k\alpha \cdot \sin\alpha) +$$
$$+i(\sin k\alpha \cdot \cos\alpha + \cos k\alpha \cdot \sin\alpha) = \cos(k+1)\alpha + i\sin(k+1)\alpha .$$

Формула доказана.

Пример 3. Если $x \ge -1$, то $\forall n \in N$ выполняется неравенство Бернулли

$$(1+x)^n \ge 1 + nx . \qquad (6.3)$$

Решение.

1. При $n = 1$ неравенство (6.3) верно, так как $1 + x \ge 1 + x$.
2. Пусть неравенство (6.3) верно при $n = k$, то есть

$$(1+x)^k \ge 1 + kx . \qquad (6.4)$$

3. Докажем, что неравенство (6.3) верно и при $n = k + 1$, то есть

$$(1+x)^{k+1} \ge 1 + (k+1)x . \qquad (6.5)$$

Так как имеет место неравенство (6.4), то есть $(1+x)^k \ge 1 + kx$, то оно верно и при умножении обеих частей на $1 + x$, где $1 + x \ge 0$, то есть $(1+x)^{n+1} \ge (1+nx)(1+x)$.

Действительно,
$(1+nx)(1+x) = 1 + (n+1)x + nx^2 \ge 1 + (n+1)x$, так как $nx^2 \ge 0$, а поэтому $(1+x)^{n+1} \ge 1 + (n+1)x$.

Таким образом, при $x \ge -1$ справедливо неравенство (6.5), а поэтому неравенство (6.3) является верным при любом $n \in N$.

1.3.2. Суммирование

Если $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – заданные числа, то их сумму обозначают символом $\sum_{k=1}^{n} a_k$, то есть $\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$,

число k – индекс суммирования.

Сумма не зависит от того, какой буквой обозначен индекс суммирования, а операция суммирования обладает свойствами:

1. *Аддитивность операции суммирования.*

Имеет место равенство $\sum\limits_{m=k}^{n}(x_m + y_m) = \sum\limits_{m=k}^{n} x_m + \sum\limits_{m=k}^{n} y_m$.

2. *Однородность операции суммирования.*

Если c – *const*, то имеет место равенство

$\sum\limits_{m=k}^{n} c \cdot x_m = c\sum\limits_{m=k}^{n} x_m$, то есть постоянный множитель можно выносить за знак суммы.

3. *Если все слагаемые данной суммы постоянны и равны c, то сумма равна произведению этого числа c на число индексов, участвующих в суммировании* $\sum\limits_{m=k}^{n} c = c(n-k+1)$.

4. *Замена индекса суммирования.* Имеет место равенство $\sum\limits_{i=m}^{n} x_{i-p} = \left|k = i - p\right| = \sum\limits_{k=m-p}^{n-p} x_k$.

5. *Об обращении порядка суммирования.* Для любых $m \le n$ имеет место равенство $\sum\limits_{m=k}^{n} x_m = \sum\limits_{m=k}^{n} x_{n+k-m}$.

Так, если $\{a_n\}$– арифметическая прогрессия с разностью d, то сумма S_n первых членов прогрессии определяется по формуле

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} n.$$

Пример 4.

Дана последовательность $a_1 = 1,\ a_2 = 11,\ \ldots,\ a_n = \underbrace{11\ldots1}_{n}$.

Найти сумму $S_n = 1 + 11 + 111 + \ldots + \underbrace{11\ldots1}_{n}$.

Решение.

Так как $a_1 = \dfrac{10-1}{9},\quad \mathrm{a}_2 = \dfrac{10^2-1}{9},\quad \ldots,\ \mathrm{a}_\mathrm{n} = \dfrac{10^n-1}{9}$.

Тогда

$$S_n = \frac{1}{9}\left[(10-1) + (10^2-1) + \ldots + (10^n-1)\right] =$$

$$= \frac{1}{9}\left[10 + 10^2 + \ldots + 10^n - n\right] = \frac{1}{9}\left[\frac{10^{n+1}-10}{9} - n\right].$$

Если $\{b_n\}$ – геометрическая прогрессия со знаменателем $q \neq 1$, то сумма S_n первых n членов прогрессии определяется по формуле

$$S_n = \frac{b_1 - b_n q}{1-q} = b_1 \frac{1-q^n}{1-q}.$$

1.3.2.1. Задачу о нахождении суммы

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k ,$$

где $\{a_n\}$ – заданная числовая последовательность, рассматривают как задачу о представлении S_n в виде функции от n, удобной для вычислений. Так, если существует последовательность $\{b_k\}$ такая, что для всех $k \in N$ справедливо равенство $a_k = b_{k+1} - b_k$, то

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} (b_{k+1} - b_k) = b_{n+1} - b_1 .$$

Пример 5. Найти сумму $S_n = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n!$

Решение. Каждый член данной суммы представлен в виде $k \cdot k! = \left[(k+1) - 1\right]k! = (k+1)! - k!$

Тогда $S_n = (2! - 1!) + (3! - 2!) + \ldots + ((n+1)! - n!) = (n+1)! - 1$

Итак $S_n = (n+1)! - 1$.

Пример 6.

Найти сумму $S_n = \dfrac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dfrac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \ldots + \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

Решение. Представим каждое слагаемое $\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)}$ в виде алгебраической суммы трех дробей

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k+1} + \frac{C}{k+2} =$$

$$= \frac{A(k^2 + 3k + 2) + B(k^2 + 2k) + C(k^2 + k)}{k(k+1)(k+2)}.$$

Из равенства этих дробей следует равенство их числителей, то есть $1 = k^2(A + B + C) + k(3A + 2B + C) + 2A$, которое порождает систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными относительно *A, B, C,* которая имеет вид $\begin{cases} A+B+C=0 \\ 3A+2B+C=0 \\ 2A=1 \end{cases}.$

Решая эту систему, находим $A=\frac{1}{2}; B=-1; C=\frac{1}{2}$.

Тогда получаем тождество

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{k}-\frac{2}{k+1}+\frac{1}{k+2}\right],$$

справедливое для любого $k \in N$.

Полагая, последовательно в последнем тождестве $k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n$ находим

$$2\cdot S_n=\left(\frac{1}{1}-\frac{2}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{4}+\frac{1}{5}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{2}{n}+\frac{1}{n+1}\right)+$$

$$+\left(\frac{1}{n}-\frac{2}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}=\frac{n(n+3)}{2(n+1)(n+2)}.$$

Тогда $S_n=\dfrac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$

Пример 7. Найти формулу для S_n, если $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n} k^3$.

Решение.

Рассмотрим тождество $4x^3+6x^2+4x+1=(x+1)^4-x^4$. Полагая в тождестве $x=1, x=2, \ldots x=n$ и сложив почленно n равенств, находим $4\sum\limits_{k=1}^{n} k^3+6\sum\limits_{k=1}^{n} k^2+4\sum\limits_{k=1}^{n} k+n=(n+1)^4-1$.

Так как $S_1=\sum\limits_{k=1}^{n} k=\dfrac{(n+1)n}{2}$; $S_2=\sum\limits_{k=1}^{n} k^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{2}$, где S_1 находим как сумму членов арифметической прогрессии, а для нахождения S_2 воспользуемся тождеством $(n+1)^3-n^3=3n^2+3n+1$ и идеей решения исходного примера. Тогда $4S_3+6S_2+4S_1+n=(n+4)^2-1$. Откуда $S_3=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$ или $S_3=(S_1)^2$.

Пример 8. Найти сумму S_n, $S_n = \sum_{k=1}^{n} \sin kx \cdot \sin(k+1)x$.

Решение. Каждое из произведений правой части в S_n представим в виде разности

$$a_k = \sin kx \cdot \sin(k+1)x = \frac{1}{2}\left[\cos x - \cos(2k+1)x\right].$$

Тогда

$$\begin{aligned} 2 \cdot S_n &= (\cos x - \cos 3x) + (\cos x - \cos 5x) + \ldots + \\ &+(\cos x - \cos(2n+1)x) = n \cdot \cos x - S_{2n+1} \end{aligned},$$

где

$$S_{2n+1} = \cos 3x + \cos 5x + \cos 7x + \ldots + \cos(2n+1)x \qquad (6.6)$$

есть сумма косинусов, аргументы которых составляют арифметическую прогрессию с разностью $d = 2x$. Для нахождения S_{2n+1} умножим обе части равенства (6.6) на $2\sin x$ и используем формулу $2\sin\alpha \cdot \sin\beta = \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)$.

Получим

$$\begin{aligned} 2S_{2n+1} \cdot \sin x &= (\sin 4x - \sin 2x) + (\sin 6x - \sin 4x) + \ldots + \\ &+(\sin 2(n+1)x - \sin 2nx) = \sin(2n+1)x - \sin x \end{aligned}.$$

Отсюда при $\sin x \neq 0$ находим $S_{2n+1} = \dfrac{\sin 2(n+1)x - \sin 2x}{2\sin x}$

и, следовательно

$$S_n = \frac{n\cos x}{2} - \frac{\sin 2(n+1)x - \sin 2x}{4\sin x} = \frac{(n+1)\sin 2x - \sin 2(n+1)x}{4\sin x}.$$

Итак $S_n = \dfrac{(n+1)\sin 2x - \sin 2(n+1)x}{4\sin x}$.

Если $\sin x = 0$, то есть $x = \pi k$, то $S_n = 0$.

1.3.2.2. Рассмотрим вопрос о вычислении сумм вида

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = f(1) + f(2) + \ldots + f(n) \qquad (6.7)$$

где $f(k)$ – известная функция целочисленного аргумента, определенная на отрезке $[1;n]$ натурального ряда. Если удалось найти функцию $F(k)$, определенную на отрезке $\left[1; n+1\right]$ натурального ряда, такую, что при всех k, $1 \le k \le n$ справедливо равенство

$$f(k) = F(k+1) - F(k) \qquad (6.8)$$

Тогда, полагая в равенстве (6.8) последовательно $k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$, получим:

$f(1) = F(2) - F(1)$;
$f(2) = F(3) - F(2)$;
$f(n-1) = F(n) - F(n-1)$;
$f(n) = F(n+1) - F(n)$.

Складывая эти равенства, приходим к следующей формуле

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = F(n+1) - F(1) \qquad (6.9)$$

Таким образом, если функция $F(k)$ найдена, то сумма (6.7) находится по формуле (6.9).

Пример 9. Вычислить сумму членов геометрической прогрессии.

Решение. Здесь $f(k) = q^k$, и в силу того, что имеет место равенство $q^{k+1} - q^k = q^k(q-1)$, получим $q^k = \dfrac{q^{k+1}}{q-1} - \dfrac{q^k}{q-1}$.

Следовательно, функцию $F(k)$ можно определить следующим образом $F(k) = \dfrac{q^k}{q-1}$.

Тогда $\sum\limits_{k=1}^{n} q^k = \dfrac{q^{k+1}}{q-1} - \dfrac{q}{q-1} = \dfrac{q(q^n-1)}{q-1}$.

Пример 10. Вычислить сумму $\sum\limits_{k=1}^{n} \sin kx \ \ (x \ne 2\pi n)$.

Решение. Так как справедливо равенство

$$2\sin kx \cdot \sin\frac{x}{2} = \cos(k - \frac{1}{2})x - \cos(k + \frac{1}{2})x,$$

тогда $\sin kx = \dfrac{\cos(k-0,5)x - \cos(k+0,5)x}{2\sin 0,5x}$, то есть

$$\sin kx = F(k+1) - F(k),$$

где $F(k) = -\dfrac{\cos(k-0,5)x}{2\sin 0,5x}$.

Тогда на основании формулы (6.7) после несложных преобразований получим $\sum_{k=1}^{n}\sin kx=\dfrac{\sin 0,5(n+1)x\cdot\sin 0,5nx}{2\sin 0,5x}$.

Замечание 1. Формула (6.9) дает эффективный способ вычисления суммы (6.7). Главное в этом способе вычисления – нахождение функции $F(k)$. Но построение функции $F(k)$– это задача не из легких, а в ряде случаев неразрешимая.

Замечание 2. Формула (6.9) для конечных сумм является аналогом известной формулы (формула Ньютона – Лейбница) интегрального исчисления. Но так как существуют функции, от которых неопределенные интегралы не берутся, то не всегда существует и искомая функция $F(k)$.

1.3.2.3. Преобразование Абеля и суммирование

Пусть заданы две конечные последовательности чисел

$$u_1,\ u_2,\ \dots,\ u_n \text{ и } \sigma_1,\ \sigma_2,\ \dots,\ \sigma_n \tag{6.10}$$

Требуется вычислить сумму $\sum_{k=1}^{n}u_k\cdot\sigma_k$.

Здесь полезным бывает следующее преобразование, предложенное замечательным норвежским математиком Абелем, суть которого состоит в следующем.

Пусть V_k – сумма первых k членов последовательности (6.10), то есть

$$V_k=\sum_{i=1}^{k}\sigma_i=\sigma_1+\sigma_2+\ldots+\sigma_k,$$

при $k=1$ имеем $\sigma_1=V_1$;

при $k>1$ имеем $\sigma_k=V_k-V_{k-1}$.

Следовательно

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}u_k\cdot\sigma_k&=u_1\sigma_1+u_2\sigma_2+\ldots+u_n\sigma_n=u_1V_1+u_2(V_2-V_1)+\ldots+\\&+u_n(V_n-V_{n-1})=(u_1-u_2)V_1+(u_2-u_3)V_2+\ldots+(u_{n-1}-u_n)V_{n-1}+u_n\cdot V_n\end{aligned}.$$

Тогда

$$\sum_{k=1}^{n}u_k\cdot\sigma_k=u_n\cdot V_n-\sum_{k=1}^{n-1}(u_{k+1}-u_k)V_k \tag{6.11}$$

Рассмотрим примеры нахождения сумм, используя преобразование Абеля.

Пример 11. Пусть S – искомая сумма, то есть $S = \sum_{k=1}^{n} k^2$.

Выражение k^2, стоящее под знаком суммы, представим в виде произведения $k \cdot k$ и применим к S преобразование Абеля, полагая $u_k = \sigma_k = k$.

Так как $u_{k+1} - u_k = 1$; $V_k = 1 + 2 + 3 + \ldots + k = \dfrac{k(k+1)}{2}$, то

$$S = \frac{n^2(n+1)}{2} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k(k+1)}{2} = \frac{n^2(n+1)}{2} - \frac{1}{2}\sum_{k}^{n-1} k^2 - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} k.$$

В силу того, что справедливы равенства:

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 - n^2 = S - n^2,$$

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n-1)}{2},$$

получим, что $S = \dfrac{n^2(n+1)}{2} - \dfrac{S}{2} + \dfrac{n^2}{2} - \dfrac{n(n-1)}{n}$.

Решая полученное уравнение относительно S, получим

$$S = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Пример 12. Вычислить сумму $\sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^k$.

Решение. Полагая $u_k = k$; $\sigma_k = 2^k$, имеем $u_{k+1} - u_k = 1$, $V_k = 2^{k+1} - 2$ и, используя формулу **(6.11)**, получим

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^k = n(2^{n+1} - 2) - \sum_{k=1}^{n-1} (2^{k+1} - 2).$$

Откуда, после элементарных преобразований, находим

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^k = (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2.$$

Замечание. Формула **(6.11)** для конечных сумм является аналогом формулы интегрирования по частям в интегральном исчислении.

1.3.3. Бином Ньютона

Теорема 2. ***Для любых чисел a и b и при любом*** $n \in N$ ***справедлива формула бинома Ньютона***

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} \cdot b + \ldots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n = \\ = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} \cdot b^k \tag{6.12}$$

$$(a-b)^n = C_n^0 a^n - C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} a b^{n-1} + (-1)^n C_n^n b^n =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k C_n^k a^{n-k} b^k.$$

Доказательство. Воспользуемся методом математической индукции.

1. При $n = 1$ имеем $a + b = c_1^0 a + c_1^1 b = a + b$, то есть формула (6.12) верна.
2. Предположим, что формула (6.12) верна при n.
3. Докажем, что (6.12) справедлива при $(n + 1)$, то есть

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k a^{n+1-k} b^k. \tag{6.13}$$

Умножая обе части равенства (6.12) на $(a + b)$ получаем

$$(a+b)^{n+1} = A_n + B_n,$$

где $A_n = a^{n+1} + \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k a^{n+1-k} b^k$;

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^{k+1} = b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} C_n^{k-1} a^{n+1-k} b^k.$$

Следовательно,

$$(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} (C_n^k + C_n^{k-1}) a^{n+1-k} b^k + b^{n+1}. \tag{6.14}$$

Сравнивая правые части формул (6.13) и (6.14) имеем, что для доказательства равенства (6.14) достаточно доказать, что

$$C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k.$$

Действительно,

$$\frac{n!}{(n-k)!\,k!} + \frac{n!}{(k-1)!(n+1-k)!} = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}.$$

А, значит, справедлива формула (6.12) при любом $n \in N$.

Замечание 1. Полагая в равенстве (6.12) $a = 1$, $b = t > 0$ в разложении (6.12) все члены правой части строго положительны. Поскольку $n \geq 2$, в разложении, по меньшей мере, имеется три первых его члена, значит, $(1+t)^n \geq 1 + nt + \frac{n(n-1)}{2}t^2$ и

$(1+t)^n > 1 + nt$.

Замечание 2. Если в (6.12) $a = 1$, $b = x > 0$, то слагаемые в правой части равенства (6.12) положительны и поэтому

$$(1+x)^n > C_n^k x^k, \quad x > 0 \text{ или } (1+x)^n > \frac{n^2}{4}x^2.$$

Свойства разложения бинома Ньютона

Итак, для каждого натурального n и любых a и b справедлив бином Ньютона:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^{n-0} b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + \ldots + C_n^m a^{n-m} b^m + \ldots + C_n^n a^{n-n} b^n. \quad (6.15)$$

Для равенства (6.15) имеют место следующие свойства:

1. Число всех членов разложения (правая часть) на единицу больше показателя степени бинома, то есть равно $(n + 1)$.

2. Сумма показателей степеней a и b каждого члена разложения равна показателю степени бинома, то есть $(n - m) = n$.

3. Общий член разложения, обозначают его T_{m+1}, имеет вид

$$T_{m+1} = C_n^m a^{n-m} b^m,$$

где $m = 0, 1, 2, \ldots, n$;

T – это член разложения; а индекс $(m + 1)$ показывает порядковый номер, считая слева направо, в разложении бинома.

Целесообразность представления порядкового номера члена разложения в виде $(m + 1)$ вытекает из того, что при изменении m от 0 до n получаются все члены разложения, при этом в $(m + 1)$ члене разложения число m – степень второго слагаемого бинома $(a + b)$, а по *свойству 2* разложения, число $(n - m)$ – степень первого слагаемого a бинома $(a + b)$.

Так 1-й член T_1 получаем, если $m = 0$:

$$T_1 = T_{0+1} = C_n^0 a^{n-0} b^0 = a^n,$$

2-й член T_2 получаем, если $m = 1$:

$$T_2 = T_{1+1} = C_n^1 a^{n-1} b^1 = n \cdot a^{n-1} b,$$

... ...

k-тый член T_k получаем, если $m = k - 1$,

$$T_k = T_{(k-1)+1} = C_n^{k-1} a^{n-(k-1)} b^{k-1} = C_n^{k-1} a^{n-(k-1)} b^{k-1}.$$

4. Биноминальные коэффициенты членов разложения, равностоящих от концов разложения, равны между собой, так как справедливо правило симметрии, то есть для любого $m = 0, 1, ..., n.$

$$C_n^m = C_n^{n-m}.$$

Так как имеет место

$$C_n^0 = C_n^n = 1; \quad C_n^{n\text{-}1} = C_n^1 = n; \quad C_n^{n\text{-}2} = C_n^2 = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2},$$

то бином Ньютона можно записать следующим образом:

$$(a+b)^n = a^n + n \cdot a^{n-1} b + \frac{n(n-2)}{2} a^{n-2} b^2 + \ldots + n \cdot a \cdot b^{n-1} + b^n.$$

5. Каждый биноминальный коэффициент C_n^m разложения, начиная со 2-го, равен предыдущему биноминальному коэффициенту C_n^{m-1}, умноженному на множитель $\frac{n-(m-1)}{m}$, то есть справедливо равенство

$$C_n^m = C_n^{m-1} \frac{n-(m-1)}{m},$$

где $m = 1, 2, 3, ..., n.$

Действительно,

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{n!(n-(m-1))!}{(m-1)!(n-m)!(n-(m-1))! \cdot m} =$$

$$= \frac{n!}{(m-1)!(n-(m-1))!} \cdot \frac{n-(m-1)}{m} == C_n^{m-1} \cdot \frac{n-(m-1)}{m}.$$

6. а) Если показатель степени бинома $n = 2l$ – число четное, то число членов разложения на единицу больше и равно $(2l + 1)$, при этом биномиальные коэффициенты первых $(l + 1)$ членов разложения возрастают, то есть $C_{2l}^0 < C_{2l}^1 < C_{2l}^2 < \ldots < C_{2l}^{l-1} < C_{2l}^l$, и, согласно правилу симметрии, биномиальные коэффициенты последних $(l + 1)$ членов разложения убывают, то есть

$$C_{2l}^{l} > C_{2l}^{l+1} > C_{2l}^{l+2} > \ldots > C_{2l}^{2l-1} > C_{2l}^{2l}.$$

Значит, если $n = 2l$, то разложение имеет один наибольший биномиальный коэффициент C_{2l}^{l}.

б) Если показатель степени бинома $n = 2p + 1$ (число не четное), то число членов разложения на единицу больше и равно $(2p + 2)$, при этом биномиальные коэффициенты первых $(p + 1)$ членов разложения возрастают, то есть $C_{2p+1}^{0} < C_{2p+1}^{1} < C_{2p+1}^{2} < \ldots < C_{2p+1}^{p-1} < C_{2p+1}^{p}$ и, согласно правилу симметрии, биномиальные коэффициенты последних $(p + 1)$ членов разложения убывают:

$$C_{2p+1}^{p+1} > C_{2p+1}^{p+2} > C_{2p+1}^{p+3} > \ldots > C_{2p+1}^{2p} > C_{2p+1}^{2p+1}.$$

Значит, если $n = 2p + 1$, то разложение имеет два наибольших биномиальных коэффициента, а именно: C_{2p+1}^{p} и C_{2p+1}^{p+1}, которые равны между собой, так как $C_{2p+1}^{p} = C_{2p+1}^{p+1}$.

Отметим, что если:

– k – любое целое, такое, что $0 \le k < \frac{n+1}{2}$, то имеет место неравенство $C_n^k > C_n^{k-1}$;

– для любого целого k, такого, что $\frac{n+1}{2} < k \le n$, справедливо неравенство $C_n^k < C_n^{k-1}$.

Доказательство этих неравенств проводится, используя равенство (*свойство 5*).

7. Сумма биномиальных коэффициентов всех членов разложения равна 2^n, то есть $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n$.

Для доказательства этого равенства полагаем в формуле (6.15) $a = 1$ и $b = 1$.

8. Сумма биномиальных коэффициентов членов разложения, стоящих на нечетных местах, равна сумме биномиальных коэффициентов членов разложения, стоящих на четных местах, и равна 2^{n-1}, то есть

$$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \ldots C_n^7 + \ldots = 2^{n-1}.$$

Доказательство этого свойства получаем из формулы (6.15), полагая $a = 1$ и $b = 1$ и учитывая *свойство 7*.

9. Для биномиальных коэффициентов разложения имеет место равенство $C_n^0 - C_n^1 + \ldots + (-1)^n C_n^n = 0$.

Доказательство этого равенства получаем из формулы (6.15), полагая $a = 1$ и $b = 1$.

Замечание 1. Если n – натуральное число, больше единицы, и $a > 1$, то

$$a^n > 1 + n(a - 1) \qquad (6.16)$$

Доказательство. Полагая, $a = 1 + t$, где $t > 0$, то по формуле бинома Ньютона будем иметь $(1+t)^n = 1 + nt + \ldots$, а так как написанные члены положительные, то

$$(1+t)^n > 1 + nt,$$

которое равносильно неравенству (6.16).

Полагая в неравенстве (6.16) $a = b^{\frac{1}{n}}$ $(b > 1)$, получим

$$b^{\frac{1}{n}} - 1 < \frac{b-1}{n}$$

Замечание 2. Для любых a и b справедливы формулы:

1. $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$.

2. $(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2 = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 + 2a_1 \cdot a_2 + \ldots + 2a_{n-1}a_n$.

3. $(x + a_1)(x + a_2)(x + a_3)\ldots(x + a_n) = x^n + (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)x^{n-1} +$

$+(a_1a_2 + a_1a_3 + \ldots + a_{n-1}a_n)x^{n-2} + \ldots + a_1a_2 \cdot a_n$.

4. Если n – любое натуральное число, то

$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$.

5. Если n – четное положительное число, то

$a^n - b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} - b^{n-1})$.

6. Если n – нечетное положительное число, то

$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \ldots - ab^{n-2} + b^{n-1})$.

Отметим также:

$$a^4 + a^2b^2 + b^4 = (a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2),$$

$$a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2 = (a^2 + \sqrt{2}ab + b^2)(a^2 - \sqrt{2}ab + b^2).$$

Пропорции. Из $a:b = c:d$ или $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ следует

$\dfrac{ma + nb}{pa + qb} = \dfrac{mc + nd}{pc + qd}$ (производные пропорции).

В частности, $\dfrac{a \pm b}{b} = \dfrac{c \pm d}{d}$; $\dfrac{a - b}{a + b} = \dfrac{c - d}{c + d}$.

1.4. Неравенства

1.4.1. Неравенство Бернулли

Если число $x \geq -1$, то

$$(1 + x)^m \geq 1 + mx \tag{6.17}$$

Доказательство. Применим метод математической индукции. Если $m = 1$, тогда (6.17) верно, так как

$$(1 + x)^1 = 1 + x \geq 1 + x.$$

Предположим, что неравенство (6.17) верно при $m = k$, то есть

$$(1 + x)^k \geq 1 + xk \tag{6.18}$$

Докажем, что (6.17) верно при $m = k + 1$.
Действительно, умножив неравенство (6.19) на $1 + x > 0$ получим

$$(1 + x)^{k+1} \geq (1 + kx)(1 + x) = 1 + (k + 1)x + kx^2 \geq 1 + (k + 1)x.$$

Значит, неравенство (6.17) справедливо и для $m = k + 1$, а следовательно, по методу математической индукции имеем, что справедливо неравенство (6.17).

1.4.2. Неравенство Коши

Если $a \geq 0$ и $b \geq 0$, то

$$\frac{a + b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

Доказательство. Составим разность $\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}$ и выясним ее знак. Имеем $\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\frac{a-2\sqrt{ab}+b}{2}=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}\geq 0$, при $a\geq 0$ и $b\geq 0$.

Значит $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$. Знак равенства имеет место лишь при $a=b$.

1.4.3. Доказать, что если $a\geq 0, b\geq 0, c\geq 0, d\geq 0$, то

$$\frac{a+b+c+d}{4}\geq\sqrt[4]{abcd}.$$

Доказательство. В силу неравенства Коши

$$\frac{\frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{2}}{2}\geq\sqrt{\frac{a+b}{2}\cdot\frac{c+d}{2}},$$

но так как, $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$ и $\frac{c+d}{2}\geq\sqrt{cd}$, тогда

$$\sqrt{\frac{a+b}{2}\cdot\frac{c+d}{2}}\geq\sqrt{\sqrt{ab}\cdot\sqrt{cd}}=\sqrt[4]{abcd}.$$

Значит $\frac{a+b+c+d}{4}\geq\sqrt[4]{abcd}$.

Отметим, проанализировав доказательство, что знак равенства в исходном неравенстве имеет место тогда и только тогда, когда

$a=b$, $c = d$ и $\frac{a+b}{2}=\frac{c+d}{2}$, то есть когда $a=b=c=d$.

1.4.4. Доказать, что для любого положительного числа $b < 1$ и любого натурального числа $n > 1$ верно неравенство

$$b^n<\frac{1}{n(1-b)}$$

Доказательство. По условию $0 < b < 1$, поэтому $\frac{1}{b}>1$. И в силу неравенства Бернулли имеем

$$\left(\frac{1}{b}\right)^n>1+n\left(\frac{1}{b}-1\right)$$

или

$$\frac{1}{b^n} > 1 + n\left(\frac{1}{b} - 1\right) > n\left(\frac{1}{b} - 1\right) = n \cdot \frac{1}{b}(1 - b) > n(1 - b).$$

В неравенстве $\frac{1}{b^n} > n(1 - b)$ обе части его положительны, поэтому имеет место неравенство

$$b^n < \frac{1}{n(1 - b)}.$$

1.4.5. Доказать, что для любых положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ справедливо неравенство

$$1 < \frac{a_1}{a_1 + a_2} + \frac{a_2}{a_2 + a_3} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{a_{n-1} + a_n} + \frac{a_n}{a_n + a_1} < n - 1.$$

Доказательство. Пусть

$$S = \frac{a_1}{a_1 + a_2} + \frac{a_2}{a_2 + a_3} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{a_{n-1} + a_n} + \frac{a_n}{a_n + a_1}.$$

Тогда $S > \frac{a_1}{a_1 + a_2} + \frac{a_2}{a_2 + a_3} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{a_{n-1} + a_n} + \frac{a_n}{a_n + a_1} = 1,$

то есть $S > 1$.

С другой стороны имеем:

$$S = \frac{(a_1 + a_2) - a_2}{a_1 + a_2} + \frac{(a_2 + a_3) - a_3}{a_2 + a_3} + \ldots + \frac{(a_n + a_1) - a_1}{a_n + a_1} =$$

$$= n - \left[\frac{a_2}{a_1 + a_2} + \frac{a_3}{a_2 + a_3} + \ldots + \frac{a_n}{a_{n-1} + a_n} + \frac{a_1}{a_n + a_1}\right] = n - S_1.$$

Но выражение

$$S_1 > \frac{a_2}{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n} + \frac{a_3}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n} + \ldots + \frac{a_n}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n} +$$

$$+ \frac{a_1}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n} = 1.$$

Тогда $S < n - 1$, а следовательно доказано данное неравенство.

Замечание. Полагая $a_n = x^{n-1}$ $\mathrm{n} \geq 1$, $\mathrm{x} > 0$, то есть

$a_1 = 1,\ \ a_2 = x,\ \ a_3 = x^2,\ \ldots,\ a_n = x^{n-1}$, получим

$$\frac{a_1}{a_1+a_2}+\frac{a_2}{a_2+a_3}+\ldots+\frac{a_{n-1}}{a_{n-1}+a_n}+\frac{a_n}{a_n+a_1}=\frac{1}{1+x}+\frac{x}{x+x^2}+\ldots+$$

$$\frac{x^{n-1}}{x^{n-2}+x^{n-1}}+\frac{x^{n-1}}{x^{n-1}+1}=\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+x}+\ldots+\frac{1}{1+x}+\frac{x^{n-1}}{x^{n-1}+1}=$$

$$=\frac{n-1}{1+x}+\frac{x^{n-1}}{x^{n-1}+1},$$

то есть

$$S(x)=\frac{n-1}{1+x}+\frac{x^{n-1}}{x^{n-1}+1} \text{ и } \lim_{x\to 0} S_n(x)=n-1, \text{ а } \lim_{x\to+\infty} S_n(x)=1.$$

Следовательно, при $a_n = x^{n-1}$, $x > 0$, $n > 1$ данные неравенства являются точными.

1.4.6. Доказать, что $\forall n \in N$ справедливо неравенство

$$(a+b)^n \le 2^{n-1}(a^n+b^n), \tag{6.19}$$

где $a \ge 0$, $b \ge 0$.

Доказательство (проведем методом математической индукции).

1. Пусть $n = 1$, тогда требуемое неравенство (6.19) верно. Пусть $n = 2$, тогда неравенство имеет вид

$$(a+b)^2 \le 2(a^2+b^2). \tag{6.20}$$

Справедливость (6.20) следует из неравенства Коши-Буняковского

$$(x_1y_1+x_2y_2)^2 \le (x_1^2+x_2^2)(y_1^2+y_2^2)$$

$$(a+b)^2=(1\cdot a+1\cdot b)^2 \le (1^2+1^2)(a^2+b^2)=2(a^2+b^2)$$

или с помощью элементарных преобразований (6.20), приводя его к виду $(a-b)^2 \ge 0$, которое справедливо для любых a и b.

2. Пусть (6.19) верно для $\forall n = K$ (индуктивный шаг), то есть

$$(a+b)^K \le 2^{K-1}(a^K+b^K)$$

3. Докажем, что (6.19) справедливо при $n = k$ $(k \ge 3)$. Для этого рассмотрим два случая:

3.1. Пусть k – четное. Так как $\frac{k}{2} < k$, то в силу неравенства Коши-Буняковского и индуктивного шага

$$\left(a^{\frac{k}{2}} + b^{\frac{k}{2}}\right)^2 \leq (1^2 + 1^2)(a^k + b^k) = 2(a^k + b^k)$$

имеем

$$(a+b)^k = \left((a+b)^{\frac{k}{2}}\right)^2 \leq \left(2^{\frac{k}{2}-1}\left(a^{\frac{k}{2}} + b^{\frac{k}{2}}\right)\right)^2 \leq 2^{k-1}(a^k + b^k).$$

3.2. Пусть k – нечетное. Так как $\frac{k+1}{2} < k$, то, используя индуктивный шаг, и согласно неравенству Коши-Буняковского, имеет место

$$\left(a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{k}{2}} + b^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{k}{2}}\right)^2 \leq (a+b)(a^k + b^k), \text{ то}$$

$$(a+b)^{k+1} = \left((a+b)^{\frac{k+1}{2}}\right)^2 \leq \left(2^{\frac{k+1}{2}-1}\left(a^{\frac{k+1}{2}} + b^{\frac{k+1}{2}}\right)\right)^2 =$$

$$= \left(2^{\frac{k-1}{2}}\left(a^{\frac{k-1}{2}} + b^{\frac{k-1}{2}}\right)\right)^2 = 2^{k-1}\left(a^{\frac{1}{2}}a^{\frac{k}{2}} + b^{\frac{1}{2}}b^{\frac{k}{2}}\right)^2 \leq 2^{k-1}(a+b)(a^k + b^k).$$

Таким образом, установлена справедливость (6.19) при $n = k$ $(k \geq 3)$, а это значит, что неравенство (6.19) справедливо для любого натурального числа.

Замечание. Неравенство (6.19) обращается в равенство тогда и только тогда, когда $a = b$ или $n = 1$.

1.4.7. Доказать, что последовательность $\{x_n\}$, обладающая свойством $x_{n+1} = 3x_n - 2x_{n-1}$ и $x_0 = 0,\ x_1 = 1$, имеет вид $x_n = 2^n - 1$.

Решение. Доказательство этого утверждения, проведем методом математической индукции. Действительно.

1. $x_0 = 2^0 - 1 = 0, \quad x_1 = 2^1 - 1 = 1$, то есть формула $x_n = 2^n - 1$ в этом случае справедлива.

2. Предположим, что $x_{k-1} = 2^{k-1} - 1$ и $x_k = 2^k - 1$. Докажем, что $x_{k+1} = 2^{k+1} - 1$. Действительно,

$$x_{k+1} = 3x_k - 2x_{k-1} = 3 \cdot 2^k - 3 \cdot 2(2^{k-1} - 1) = 2^{k+1} - 1.$$

По индукции следует, что $x_n = 2^2 - 1$ при любом $n \in N$.

Замечание. В примере (п. 1.4.7) рассмотрена разновидность метода математической индукции. Здесь, в п. 2, воспользовались справедливостью утверждения не только для $n = k - 1$, но и для $n = k$, поэтому и в п. 1 проведена проверка утверждения для $n = 0$ и $n = 1$.

§ 2. ЧИСЛОВЫЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

1. Понятие числовой функции. Способы задания.
2. Основные характеристики функции.
3. Обратная функция.
4. Сложная функция. Неявные функции. Функции заданы параметрически и в полярных координатах.
5. Классификация функций.

2.1. Понятие числовой функции. Способы задания

Пусть X – числовое множество $x \in R$. Если каждому $x \in X$ поставлено в соответствие по некоторому правилу (закону) число y, то говорят, что на множестве X определена числовая функция.

Правило (закон), устанавливающее соответствие, обозначают символом f и пишут

$$y = f(x), \quad x \in X \tag{6.21}$$

при этом множество X называют областью функции и обозначают $D(f)$, то есть $X = D(f)$.

В записи (6.21) x называют аргументом или независимой переменной, а y – зависимой переменной. Числа $x \in D(f)$ – значения аргумента. Число y_0, соответствующее значению $x_0 \in D(f)$, называют значением функции в точке x_0 или при $x = x_0$, и обозначают $f(x_0)$. Совокупность всех значений, которые принимает функция на множестве $D(f)$ называют множеством значений функции и обозначают $E(f)$. Обратим внимание на то, что если $y_0 \in E(f)$, то существует, по крайней мере, одно число $x_0 \in D(f)$ такое, что $f(x_0) = y_0$.

Функцию можно обозначать символами f, φ, F, который определяет правило (закон) соответствия. Под словом «функция» часто понимают зависимую переменную y, значения которой определяются значениями независимой переменной x и правилом f, или даже само правило. Термин «функция» имеет синонимы: отображение, преобразование, морфизм. Так, например, говорят, что функция f отображает множество $X = D(f)$ на множество $Y = E(f)$, и называют множество Y образом множества X при отображении f. Если $E(f) \subset E_1$, то говорят, что функция f отображает X в E_1.

Способы задания функций:

1. Аналитический – с помощью формул.
2. Табличный.
3. Графический.
4. Словесный или описательный.
5. Программный – функция задается с помощью задания программы на одном из машинных языков.

График функции

Графиком функции $y = f(x)$, $x \in D(f)$ в прямоугольной системе координат O_{xy} называют множество всех точек плоскости с координатами $(x; f(x))$. Для каждого $x_0 \in D(f)$ прямая $x = x_0$, параллельная оси O_y, пересекает график функции $y = f(x)$, $x \in D(f)$, в одной точке $M_0(x_0, y_0)$, где $y_0 = f(x_0)$. Значение $x = a$ – нуль функции, если $f(a) = 0$. Если $x = a$ – нуль функции f, то график функции $y = f(x)$ пересекает ось O_x при $x = a$, то есть в точке $M(a; 0)$.

Равенство функции. Операции над функциями

Функции f и g называют равными (совпадающими), если они имеют одну и ту же область определения X и для каждого $x \in X \quad f(x) = g(x)$.

Естественным образом вводятся для функций арифметические операции. Если f и g определены на одном и том же множестве X, то для любой точки $x \in X$ функции значения которых равны $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)} (g(x) \neq 0)$ называют соответственно суммой, разностью, произведением и частным функций f и g.

2.2. Основные характеристики функции

1. Область определения функции $y = f(x)$ – это все x, при которых $f(x)$ существует (имеет смысл).

2. Область значения функции $y = f(x)$ – это все a, при которых уравнение $f(x) = a$ имеет решение.

Пример 1. Найти область значений (множество значений) функций

1. $y = \frac{1}{2 - \cos 3x}$;
2. $y = \frac{x}{1 + x^2}$;
3. $y = x \cdot \sin x$;
4. $y = (x - 2)^2 + 4$.

Решение.

1. Решая данное уравнение относительно x (точнее $\cos 3x$) получим

$$\cos 3x = \frac{2y - 1}{y} \Leftrightarrow \left| \frac{2y - 1}{y} \right| \leq 1 \Leftrightarrow y \in \left[\frac{1}{3};\ 1 \right].$$

2. Решая уравнение относительно x получим

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4y^2}}{2y}.$$

Тогда область значений функции y определим, решая неравенство $1 - 4y^2 \geq 0$, то есть $y \in \left[-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2} \right]$.

3. $E(y) = [0;\ +\infty)$.

4. $E(y) = [4;\ +\infty)$.

3. Нули функции и знак функции на множестве

Значения $x \in D(f)$, при которых $f(x) = 0$, называются нулями функции. В интервалах, на которых график $f(x)$ лежит выше (ниже) оси O_x, $f(x)$ – положительна (отрицательна); в нуле функции график имеет общую точку с осью O_x.

4. Четность и нечетность функции

Числовая функция называется четной (нечетной), если:

1) $D(f)$ симметрична относительно 0, то есть, если $x \in D(f)$, то и $-x \in D(f)$;

2) для любого $x \in D(f)$, $f(-x) = f(x)$ $(f(-x) = -f(x))$.

Из определения имеем, что ось O_y – ось симметрии графика любой четной функции, а начало координат – центр симметрии графика нечетной функции.

5. Периодичность функции

Число $T \neq 0$ называют периодом $f\ (x)$, если для любого $x \in D(f)$ $x + T$ и $x - T$ также принадлежат $D\ (f)$ и справедливо равенство

$$f(x - T) = f(x) = f(x + T).$$

Если T – период функции f, то и каждое число вида nT, $n \in Z$, $n \neq 0$ также период функции.

Пример 2. Найти период функции

1. $y = 3\sin 4x$;

2. $y = 2\sin\left(3x + \dfrac{\pi}{4}\right)$;

3. $y = |\cos x|$;

4. $y = \sin^4 x + \cos^4 x$;

5. $y = \cos x^2$;

6. $y = \cos\sqrt{x}$;

7. $y = 2x - \sin x$;

8. $D(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x - \text{рационально} \\ 0, \text{ если } x - \text{иррационально.} \end{cases}$

Решение.

1. Самостоятельно.
2. Самостоятельно.
3. Так как $y = |\cos x| = \sqrt{\cos^2 x} = \sqrt{0,5(1 + \cos 2x)}$, то период $T = \pi$.
4. $$y = \sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x =$$ $$= 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x = 1 - \frac{1}{4}(1 - \cos 4x) = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}\sin(4x + \frac{\pi}{2}),$$

тогда период $T = \dfrac{2\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$.

5. Пусть $T \neq 0$ период, тогда имеем $\cos(x+T)^2 = \cos x^2$,

откуда $\left[\begin{array}{l} x^2 + 2Tx + T^2 + x^2 = 2\pi k, \\ x^2 + 2Tx + T^2 - x^2 = 2\pi k. \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} 2x^2 + 2Tx + T^2 = 2\pi k, \\ 2Tx + T^2 = 2\pi k. \end{array}\right.$,

а это невозможно ни при каких $k \in Z$, так как слева квадратичная и линейная функции непрерывны, а k принимает целочисленные значения.

6. Не имеет периода.

7. Не имеет периода.

8. Так как сумма двух рациональных чисел есть число рациональное, а сумма рационального и иррационального чисел есть число иррациональное, то

$$D(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x - \text{рационально } ((x+T) - \text{рациональное число}), \\ 0, \text{ если } x - \text{иррационально } ((x+T) - \text{иррациональное число}), \end{cases}$$

то есть имеем $D(x+T) = D(x)$ для любого T, то есть периодом является любое число.

6. Монотонные функции

Функция $y = f(x)$ называется возрастающей (убывающей) на множестве x, если большему значению аргумента из этого множества соответствует большее (меньшее) значение функции.

Возрастающие и убывающие на множестве x функции называются монотонными на этом множестве.

При исследовании функций на возрастание и убывание полезно иметь ввиду следующие утверждения:

1. Сумма двух возрастающих функций – возрастающая функция.
2. Сумма двух убывающих функций – убывающая функция.
3. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ возрастают и положительны на некотором промежутке, то их сумма $(f(x) + g(x))$ возрастает и положительна на этом промежутке.
4. Если функция $y = f(x)$ возрастает, то функция $y = -f(x)$ убывает, и обратно.
5. Если функция $y = f(x)$ возрастает, то функция $y = \dfrac{1}{f(x)}$ убывает и обратно.
6. Если функция $x = f(t)$ возрастает на $[\alpha;\ \beta]$, а $y = F(x)$ возрастает на $[f(\alpha);\ f(\beta)]$, то функция $y = F(f(t))$ возрастает на $[\alpha;\ \beta]$.

7. Если функция $x = f(t)$ убывает на $[\alpha;\ \beta]$, а $y = F(x)$ убывает на $[f(\alpha);\ f(\beta)]$, то $y = F[f(t)]$ возрастает на $[\alpha;\ \beta]$.

8. Если функция $x = f(t)$ возрастает на $[\alpha;\ \beta]$, а функция $y = F[f(t)]$ убывает на $[f(\alpha);\ f(\beta)]$, то функция $y = F[f(t)]$ убывает на $[\alpha;\ \beta]$.

9. Если функция $y = f(x)$ убывает на $[\alpha;\ \beta]$, а функция $y = F(x)$ возрастает на $[f(\alpha);\ f(\beta)]$, то функция $y = F[f(t)]$ убывает на $[\alpha;\ \beta]$.

Ограниченные функции

Функция $y = f(x)$:

1) ограничена сверху на множестве $X \Leftrightarrow \exists M \in R;\ \ \forall x \in x \Rightarrow f(x) \le M$;

2) ограничена снизу на $X \Leftrightarrow \exists M \in R;\ \forall x \in x \Rightarrow f(x) \ge M$;

3) ограничена на $x \Leftrightarrow \exists M > 0;\ \forall x \in X \Rightarrow |f(x)| \le M$.

2.3. Обратная функция

Пусть задана числовая функция $y = f(x)$, $x \in D(f)$. Тогда каждому числу $x_0 \in D(f)$ соответствует единственное число $y_0 = f(x_0) \in E(f)$.

В ряде случаев приходится по заданному значению функции y_0 находить соответствующее значение аргумента, то есть решить относительно x уравнение

$$f(x) = y_0. \tag{6.22}$$

Уравнение (6.22) может иметь не одно, а несколько решений и даже бесконечно много решений. Решения уравнения (6.22) – это абсциссы всех точек, в которых прямая $y = y_0$ пересекает график функции $y = f(x)$.

Например, если $f(x) = x^2$, то уравнение $x = y_0$, $y_0 > 0$ имеет два решения $x_0 = \pm\sqrt{y_0}$.

Если $f(x) = \sin x$, то уравнение $\sin x = y_0$, $|y_0| \le 1$ имеет бесконечное множество решений $x = (-1)^n \arcsin y_0 + \pi n$, $n \in Z$.

Если $f(x) = 2x + 3$; $D(f) = R$; $f(x) = x^3$; $D(f) = R$ в этих случаях уравнение (6.22) имеет единственное решение, то есть однозначно разрешимы.

Так, если $f(x)$ такая, что каждое значение $y_0 \in E(f)$ она принимает только при одном значении $x_0 \in D(f)$, то эту функцию называют обратимой. Для таких функций уравнение $f(x) = y$ можно однозначно разрешить при любом $y \in E(f)$ относительно x, то есть каждому $y \in E(f)$ соответствует единственное значение $x \in D(f)$. Это соответствие определяет функцию, которую называют обратной к функции f и обозначают символом f^{-1}.

Заметим, что прямая $y = y_0$, для каждого $y_0 \in D(f)$ пересекает график обратимой функции $y = f(x)$ в единственной точке (x_0, y_0), где $f(x_0) = y_0$.

Обозначая, как обычно, аргумент обратной функции буквой x, ее значения – буквой y, обратную для f функцию записывают в виде

$$y = f^{-1}(x), \quad x \in D(f^{-1}).$$

Отметим следующие свойства, которые показывают, как связаны данная функция f и обратная к ней f^{-1}.

1. Если f^{-1} обратная к f, то f – функция, обратная к f^{-1}; при этом $D(f^{-1}) = E(f)$, $E(f^{-1}) = D(f)$, то есть область определения функции f^{-1} совпадает с множеством значений функции f и наоборот.

2. Для любого $x \in D(f)$ справедливо равенство $f^{-1}(f(x)) = x$ и для любого $x \in E(f)$ справедливо равенство $f(f^{-1}(x)) = x$.

3. График функции $y = f^{-1}(x)$ симметричен графику функции $y = f(x)$ относительно прямой $y = x$.

4. Если нечетная функция обратима, то обратная к ней функция также является нечетной.

5. Если f – строго возрастающая (строго убывающая) функция, то она обратима, причем обратная к ней f^{-1} также строго возрастающая (строго убывающая).

Отметим, что монотонность функции является лишь достаточным условием ее обратимости, то есть существуют немонотонные обратимые функции.

Сформулируем общее правило нахождения обратной функции для взаимно однозначной функции $y = f(x)$:

1) решая уравнение $y = f(x)$ относительно x, находим $x = f^{-1}(y)$;

2) меняя обозначения переменой x на y, а y на x, получаем функцию $y = f^{-1}(x)$, обратную к данной.

Пример 3. Найти функции, обратные к данным:

1. $y = 3x + 4$;
2. $y = \sqrt{x}$;
3. $y = 2x - x^2$, $x \geq 1$;
4. $y = \dfrac{2x}{1 - x^2}$, $x \leq -1$;
5. $y = \sin^3 x$, $-\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$;
6. $y = \arccos x^2$, $0 \leq x \leq 1$.

Решение.

1. Функция $y = 3x + 4$ определена и возрастает на всей числовой оси. Следовательно, обратная функция существует и возрастает. Решая уравнение относительно x, получим $x = \dfrac{y - 4}{3}$.

Тогда искомая функция – $y = \dfrac{x - 4}{3}$.

2. В данном случае $x \geq 0$ и $y \geq 0$, тогда $x = y^2$, а следовательно $y = x^2$, $0 \leq x < +\infty$.

3. $y = 1 + \sqrt{1 - x}$, $x \geq 1$.

4. $y = \dfrac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x}$, $-1 \leq x < 0$.

5. $y = \arcsin \sqrt[3]{x}$, $-1 \leq x \leq 1$.

6. $y = \sqrt{\cos x}$, $0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$.

2.4. Сложная функция. Неявные функции. Функции заданы параметрически и в полярных координатах

Пусть на некотором множестве D определена числовая функция $u = \varphi(x)$ и $E(u)$ – множество значений функций u.

А на множестве $E(u)$ задана функция $y = f(u)$ $(D(f) \subset E(u))$. Тогда функция φ переводит элементы x в элементы u, а функция f переводит элементы u в элементы y:

$$x \xrightarrow{\varphi} u \xrightarrow{f} y \Leftrightarrow y = f(\varphi(x)) \Leftrightarrow (f \circ \varphi).$$

В этом случае имеем, что y сложная функция аргумента x (или функция от функции $y = f(\varphi(x))$; или композиция (суперпозиция) функций f и φ и обозначаемая $f \circ \varphi$). Функция $u = \varphi(x)$ называется промежуточным аргументом, где x – независимая переменная.

Если задана сложная функция $y = f(\varphi(x)$, то ее можно записать в виде цепочки равенств (разбить на отдельные звенья):

$$y = f(u) \qquad u = \varphi(x).$$

Если $y = f(\varphi(\psi(x)))$, то ее можно записать в виде цепочки равенств $y = f(t)$, $t = \varphi(u)$, $u = \psi(x)$ или

$$y = f(\varphi(\psi(x))) \Leftrightarrow (f \circ \varphi \circ \psi); \ x \xrightarrow{\psi} u \xrightarrow{\varphi} t \xrightarrow{f} y.$$

Сложная функция отражает не характер функциональной зависимости, а лишь способ ее задания: может случиться, что одна и та же функция может быть задана как с помощью суперпозиций каких-либо функций, так и без их помощи. Так, сложная функция $z = 2^y, y = \log_2(1 + \sin^2 x)$, заданная с помощью суперпозиций показательной и логарифмической функций, может быть задана и без суперпозиции $z = 1 + \sin^2 x$.

Пример 4. Пусть $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$. Найти $f(f(x))$, $f(f(f(x)))$.

Решение.

$$f(f(x)) = \frac{1}{1 - f(x)} = \frac{1}{1 - \dfrac{1}{x-1}} = \frac{1-x}{x}; x \neq 0; x \neq 1;$$

$$f(f(f(x))) = \frac{1}{1 - f(f(x))} = \frac{1}{1 - \dfrac{1-x}{x}} = x; x \neq 0; x \neq 1.$$

Пример 5. Дано

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ при } |x| \leq 1, \\ 1, \text{ при } |x| > 1. \end{cases} \qquad \varphi(x) = \begin{cases} x^2 - 2, \text{ при } |x| \leq 2, \\ -1, \text{ при } |x| > 2. \end{cases}$$

Решение. При значениях x, для которых $|\varphi\ (x)| \le 1$, $f(\varphi\ (x)) = 0$; при остальных значениях $f(\varphi\ (x)) = 1$. По условию $\varphi\ (x) = -1$ при $|x| > 2$ и, следовательно, при $|x| > 2$ – $f(\varphi\ (x)) = 0$.

Определим на отрезке $|x| \le 2$ те значения x, при которых $|\varphi\ (x)| \le 1$, то есть $|x^2 - 2| \le 1$. Имеем $-1 < x^2 - 2 < 1$, откуда $1 \le |x| \le \sqrt{3}$. Значит на отрезках $1 \le x \le \sqrt{3}$ и $-\sqrt{3} \le x \le -1$ имеем $(\varphi\ (x)) \le 1$ и $f(\varphi\ (x)) = 0$. В промежутках $\sqrt{3} < x < 1$ и $-2 \le x < -\sqrt{3}$ – $|\varphi\ (x)| > 1$ и $f(\varphi\ (x)) = 1$.

Тогда имеем

$$f(\varphi\ (x)) = \begin{cases} 0, \text{ при } |x| > 2;\ 1 \le x \le \sqrt{3};\ -\sqrt{3} \le x \le -1, \\ 1, \text{ при } \sqrt{3} < x \le 2;\ -2 \le x < -\sqrt{3}. \end{cases}$$

Пример 6. Дано

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ при } |\mathrm{x}| \le 1, \\ 0, \text{ при } |\mathrm{x}| > 1. \end{cases} \qquad \varphi\ (\mathrm{x}) = \begin{cases} 2 - x^2, \text{ при } |x| \le 2, \\ 2, \text{ при } |\mathrm{x}| > 2. \end{cases}$$

Определить функции:

1. $y = f(f(x))$;
2. $y = f(\varphi\ (x))$;
3. $y = \varphi\ (f(x))$;
4. $y = \varphi\ (\varphi\ (x))$.

Ответы:

1. $f(f(x)) = 1$;
2. $f(\varphi\ (x)) = \begin{cases} 1,\ 1 \le x \le \sqrt{3}, \\ 0, \text{ в противном случае;} \end{cases}$
3. $\varphi\ (f(x)) = \begin{cases} 1,\ |\mathrm{x}| \le 1, \\ 2,\ |\mathrm{x}| > 1; \end{cases}$
4. $\varphi\ (\varphi\ (x)) = \begin{cases} 2 - (2 - x^2)^2,\ |\mathrm{x}| \le 2, \\ -2,\ |\mathrm{x}| > 2. \end{cases}$

Неявные функции

Пусть дано уравнение вида

$$F(x, y) = 0, \tag{6.23}$$

то есть задана функция $F\ (x;\ y)$ двух действительных переменных x и y и рассматриваются только пары $(x;\ y)$ (если они существуют), для которых выполняется условие (6.23). Пусть существует некоторое множество X, что для каждого $x_0 \in X$ существует, по крайней мере, одно число y, удовлетворяющее уравнению $F(x_0, y) = 0$. Обозначим одно из таких y через y_0 и поставим в соответствие числу $x_0 \in X$, и тем самым получим функцию f, определенную на множестве X такую, что

$$F(x_0, f(x_0)) = 0 \text{ для всех } x_0 \in X.$$

В этом случае говорят, что функция f задана неявно уравнением (6.23). Отметим, что уравнение (6.23) задает, вообще говоря, не одну, а некоторое множество функций.

Функции, задаваемые уравнениями вида (6.23) называются функциями, заданными неявно, или неявными функциями, *в отличии от функций, задаваемых формулой, разрешимой относительно переменой y, то есть формулой вида y = f (x).*

Термин «неявная функция» отражает не характер функциональной зависимости, а лишь способ ее задания. Одна и та же функция может быть задана как явно, так и неявно. Например, функции

$$y_1 = \sqrt{4 - x^2} \text{ и } y_2 = -\sqrt{4 - x^2}$$

могут быть заданы также неявным образом с помощью уравнения $x^2 + y^2 - 4 = 0$ в том смысле, что они входят в совокупность функций, задаваемых этим уравнением.

Параметрическое задание функции

Пусть $x = \varphi\ (t)$, $\mathrm{y} = \psi\ (\mathrm{t})$ – две функции одной переменой t. Если $x = \varphi\ (t)$ монотонна на множестве T, то существует обратная к ней функция $t = \varphi^{-1}(x)$ и, следовательно, функция $y = \psi\ (t)$, $t = \varphi^{-1}(x)$ является сложной функцией, переводящей элемент x в y через промежуточную переменную t

$$\begin{cases} x = \varphi\ (t), & \mathrm{t} = \varphi^{-1}(x) \\ y = \psi\ (t), & t \in T \end{cases} \Leftrightarrow y = \psi\ (\varphi^{-1}(x)) = f(x),$$

при этом переменную t называют параметром.

В таких случаях говорят, что сложная функция $y = F(x) \Leftrightarrow y = \psi(t), t = \varphi^{-1}(x)$ задана параметрически и пишут

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in T. \tag{6.24}$$

Параметр t может иметь различный смысл, определяемый характером функциональной зависимости. От параметрического способа задания (6.24) функции в ряде случаев можно перейти к явному заданию функции $y = f(x)$, исключив параметр t.

Всякую функцию, заданную явно $y = f(x)$, можно задать параметрически:

$$y = f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} x = t, \\ y = f(t), \end{cases} \quad t \in T.$$

Например $\begin{cases} x = 4t + 1, \\ y = \dfrac{1}{t^2}, \end{cases}$ $t \in (0; \infty)$, тогда, исключив из первого уравнения $t = \dfrac{x-1}{4}$ и подставив его во второе уравнение, получим явное задание функции $y = \dfrac{9}{(x-1)^2}$.

А функцию $y = \dfrac{1}{x}$, $D(f) = (0; \infty)$ можно задать параметрически

$$\begin{cases} x = t, \\ y = \dfrac{1}{t}, \end{cases} \quad t \in (0; \infty) \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = e^t, \\ y = e^{-t}, \end{cases} \quad t \in R,$$

то есть одну и ту же функцию можно параметрически задать различными аналитическими выражениями (формулами).

В тех случаях, когда связь между x и y сложна, в то время, как функции $x(t)$ и $y(t)$, определяющие функциональную зависимость y от x через параметр t, оказываются простыми – применение параметрического способа задания дает преимущество.

Параметрическое задание некоторых линий на плоскости

1. Прямая

$$y = kx + b \Leftrightarrow \begin{cases} x = t, \\ y = kt + b, \end{cases} \quad t \in R.$$

2. Окружность с центром в начале координат и радиусом R

$$x^2 + y^2 = R^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = R\cos t, \\ y = R\sin t, \end{cases} \quad 0 \le t < 2\pi .$$

Параметр t – угол между положительным направлением оси Ox и радиус-вектором $\overrightarrow{OM}$ текущей точки $M(x;\ y)$.

3. Эллипс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \end{cases} \quad 0 \le t < 2\pi.$$

4. Парабола

$$y^2 = 2px \Leftrightarrow \begin{cases} x = t, \\ y^2 = 2pt, \end{cases} \quad t \in [0; \infty).$$

Так, для $y = x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = t, \\ y = t^2, \end{cases} \quad t \in R.$

5. Гипербола

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a\ \mathrm{ch}\,t, \\ y = b\ \mathrm{sh}\,t, \end{cases} \quad t \in R.$$

Справедливость параметрического задания гиперболы следует из $\mathrm{ch}^2 t - \mathrm{sh}^2 t = 1$ гиперболических функций.

Полярная система координат

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases} \tag{6.25}$$

$$x^2 + y^2 = r^2; \quad \mathrm{tg}\varphi = \frac{y}{x}, \tag{6.26}$$

$$0 \le \varphi < 2\pi .$$

Формулы (6.25) и (6.26) выражают полярные координаты точки через декартовы координаты (рис. 6.2).

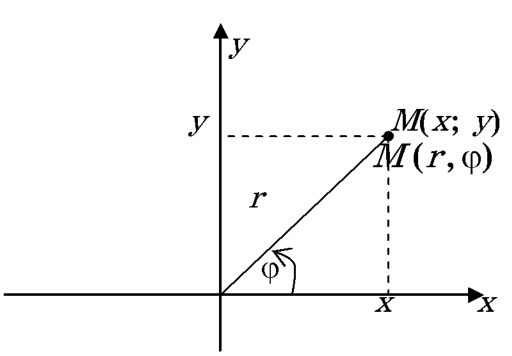


Рис. 6.2

Уравнения некоторых линий в полярной системе координат

1. Прямая линия

Прямая линия, проходящая через полюс:

$$y = kx \Leftrightarrow \operatorname{tg}\varphi = k$$

$$(x = r\cos\varphi,\quad y = r\ \sin\varphi \Rightarrow \operatorname{tg}\varphi = k)..$$

2. Прямая линия, не проходящая через полюс:

$$Ax + By + C = 0 \Leftrightarrow r = \frac{P}{\cos(\varphi - \alpha)},$$

где P – расстояние от прямой до полюса;

α – угол наклона нормального вектора прямой $\bar{n}(AB)$.

3. Окружность

3.1. Окружность с центром в начале координат и радиусом R:

$$x^2 + y^2 = R^2 \Leftrightarrow r = R,$$

3.2. Окружность с центром в точке $(a;\ 0)$ радиуса R:

$$(x - a)^2 + y^2 = R^2 \Leftrightarrow r = 2a\sin\varphi.$$

4. Линии второго порядка (эллипс, гипербола, парабола).

Уравнение эллипса, гиперболы и параболы в полярной системе координат имеет вид

$$r = \frac{P}{1 - \varepsilon\cos\varphi}, \tag{6.27}$$

где P – параметр, ε – эксцентриситет.

При $\varepsilon < 1$ уравнение (6.27) определяет эллипс,

$\varepsilon > 1$ уравнение (6.27) определяет гиперболу,

$\varepsilon = 1$ уравнение (6.27) определяет параболу.

2.5. Классификация функций

Функции: степенная $y = x^n$, показательная $y = a^x$ $(a > 0)$, логарифмическая $y = \log_a^x x$, тригонометрические $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ и обратные тригонометрические $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$ *и* $y = \operatorname{arcctg} x$, постоянные $y = c$ называются основными элементарными функциями.

Всякая функция, которая может быть явным образом задана с помощью формулы, содержащей лишь конечное число арифметических операций и суперпозиций основных элементарных функций, называется просто элементарной функцией.

Элементарные функции делят на следующие классы:

1. *Многочлены степени n* (целая рациональная функция)

$$y = P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k .$$

2. *Рациональные функции* (рациональные дроби). К этому классу функций относятся функции, которые могут быть заданы в виде

$$y = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ – многочлены.

3. *Алгебраические функции.* Алгебраической функцией называется функция, которая может быть задана с помощью суперпозиций рациональных функций, степенных функций с рациональными показателями и четырех арифметических действий. Отметим, что класс многочленов содержится в классе рациональных функций, а класс рациональных функций содержится в классе алгебраических функций.

4. *Трансцендентные функции.* Элементарные функции, не являющиеся алгебраическими, называются трансцендентными элементарными функциями. К трансцендентным функциям относятся все основные элементарные функции, кроме степенной функции с рациональными показателями, а также гиперболические и обратные гиперболические функции.

§ 3. ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

1. Числовая последовательность. Способы задания числовой последовательности. Определение предела числовой последовательности.

2. Теоремы о пределах.

3. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности. Арифметические операции над сходящимися последовательностями. Неопределенные выражения.

4. Предел монотонной последовательности. Число *e*.

5. Подпоследовательности. Частичные пределы. Принцип вложенных отрезков. Существование частичного предела у ограниченной последовательности.

6. Фундаментальная последовательность. Критерий Коши сходимости последовательности.

7. Теорема Штольца.

3.1. Числовая последовательность. Способы задания числовой последовательности. Определение предела числовой последовательности

Если каждому натуральному числу n поставлено в соответствие по некоторому закону вещественное число x_n, то говорят, что задана числовая последовательность $\{x_n\}$ (или обозначают (x_n)). При этом x_n называют общим членом или элементом этой последовательности, где n – его номер.

Числовая последовательность – функция, определенная на множестве натуральных чисел, то есть область определения – это множество натуральных чисел N, а множество значений этой функции составляет множество чисел x_n, где $n \in N$, которое называют множеством значений последовательности. Множество значений последовательности может быть как конечным, так и бесконечным, в то время как множество ее элементов x_n всегда является бесконечным. Так, множество значений числовой последовательности $\left\{(-1)^{2n}\right\}$ состоит из одного числа 1, а последовательности $\left\{(-1)^{n}\right\}$ – из двух чисел: – 1 и 1, а множества значений последовательностей: $\{n\}$, $\left\{\frac{1}{\mathrm{n}}\right\}$, $\sin n$ – бесконечны.

Числовые последовательности могут быть заданы:

1. Аналитически, то есть с помощью формулы, позволяющей вычислить любой член последовательности по его номеру, то есть задают формулу общего члена. Например, формула $x_n = 2n + 1$ задает последовательность:

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ \ldots,\ \ldots,\ 2n + 1,\ \ldots.$$

2. Рекуррентный способ, то есть числовая последовательность задается рекуррентной формулой, позволяющей найти члены последовательности по известным предыдущим. При таком способе задания указывают:

а) первый член последовательности x_1 (или несколько членов последовательности: x_1, x_2, x_3);

б) правило (формулу), связывающее x_n член последовательности с соседними (например, с $(n-1)$-м и $(n+1)$-м членами), то есть $x_1 = a$, $x_n = f(x_{n-1})$, $n \geq 2$.

При таком способе задания числовой последовательности для определения n-ного члена последовательности приходится найти сначала все $(n-1)$-е члены данной последовательности.

Например, рекуррентной формулой:

$$x_1 = 1,\ x_2 = 1,\ x_n = x_{n-1} + x_{n-2}, \qquad n \geq 3$$

задается последовательность Фибоначчи.

3. Числовую последовательность $\{x_n\}$ задают:

а) точками x_n, где $n \in N$ на числовой оси;

б) точками с координатами (n, x_n), где $n \in N$ на плоскости.

4. Числовая последовательность $\{x_n\}$ задается описанием ее членов или словесно.

Например, числовая последовательность $\{x_n\}$ задается следующим образом: x_n – простое число с номером n, то есть $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 5$, $x_4 = 7$, $x_5 = 11$, $x_7 = 13$, ...

Пусть заданы числовые последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, тогда арифметические операции над ними вводятся следующим образом:

– суммой этих последовательностей называется последовательность $\{x_n + y_n\}$;

– разностью – последовательность $\{x_n - y_n\}$;

– произведением – последовательность $\{x_n \cdot y_n\}$;

– частным – последовательность $\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$.

Замечание1. При определении частного $\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$ нужно требовать, чтобы все элементы y_n последовательности $\{y_n\}$ были отличны от нуля. Однако, если в последовательности $\{y_n\}$ обращается в нуль лишь конечное число элементов, то частное $\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$ можно определить с того номера, начиная с которого все элементы $y_n \neq 0$.

Последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной сверху (снизу), если существует число M (число m), такое что каждый элемент x_n последовательности $\{x_n\}$ удовлетворяет неравенству $x_n \le M (x_n \ge m)$. При этом число M (число m) называется верхней гранью (нижней гранью) последовательности $\{x_n\}$, а неравенство $x_n \le M (x_n \ge m)$ называется условием ограниченности последовательности сверху (снизу). Отметим, что любая ограниченная сверху (снизу) последовательность имеет бесчисленное множество верхних (нижних) граней.

Последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной, если она ограничена сверху и снизу, то есть существуют числа m и M такие, что любой элемент x_n данной последовательности удовлетворяет неравенству $m \le x_n \le M$.

Если последовательность $\{x_n\}$ ограничена и M и m – ее верхняя и нижняя грани, то все элементы x_n этой последовательности удовлетворяют неравенству

$$|x_n| \le A = \max(|M|, |m|).$$

Последовательность $\{x_n\}$ называется неограниченной, если для любого положительного числа A найдется элемент x_n этой последовательности, удовлетворяющий неравенству

$$|x_n| > A.$$

Таким образом, последовательность является ограниченной, если множество ее значений ограничено. *С геометрической точки зрения, ограниченность последовательности означает, что все члены последовательности содержатся в некоторой окрестности точки нуль.*

Рассмотрим несколько примеров:

1. Последовательность $\{x_n\}$, где $x_n = n^2 + 1$, неограниченна.

2. Последовательность $\{x_n\}$, где $x_n = \dfrac{1}{n}$, ограничена; верхней гранью $\{x_n\}$ является любое число $M \ge 1$, а нижней гранью – любое число $m \le 0$.

3. Последовательность $\{x_n\}$, где $x_n = -n^2$, является ограниченной сверху ($M \geq 0$) и не ограничена снизу.

Последовательность $\{x_n\}$ называется возрастающей (не убывающей), если для любого n выполняется неравенство $x_{n+1} > x_n (x_{n+1} \geq x_n)$. А последовательность $\{x_n\}$ называется убывающей (не возрастающей), если для любого n выполняется неравенство $x_{n+1} < x_n (x_{n+1} \leq x_n)$.

Последовательности возрастающие (неубывающие), убывающие (невозрастающие) называются монотонными последовательностями.

Замечание 2. В определении монотонности последовательности $\{x_n\}$ вместо «для любого $n \in N$ выполняется неравенство» может быть «начиная с некоторого $n \in N$ выполняется неравенство».

Например, последовательности: $\{x_n\}$, где $x_n = n^2$ и $\{y_n\}$, где $y_n = \frac{1}{n}$ – являются монотонными, а последовательность $\{z_n\}$, где $z_1 = 1$, $z_2 = 100$, $z_3 = -1$, $z_n = 2n$, для $n \geq 4$ – монотонно возрастающая, начиная с номера $n = 4$; а последовательность $(-1)^n$ не является монотонной.

Последовательность $\{x_n\}$, где $x_n = c$ – постоянная; для $\forall n \in N$ ее называют постоянной или стационарной.

Предел числовой последовательности

Число a называется пределом числовой последовательности $\{x_n\}$, если для любого положительного числа E существует натуральное число N_E, такое что для всех натуральных чисел $n \geq N_E$ выполняется равенство

$$|x_n - a| \leq E. \tag{6.28}$$

В этом случае пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ или $x_n \to a$ и говорят, что числовая последовательность $\{x_n\}$ имеет предел, равный числу a (или стремится к a).

Определение предела числовой последовательности $\{x_n\}$ с помощью логических символов можно записать в виде

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall E > 0 \ \exists N_E \in N \ \forall n \geq N_E \Rightarrow |x_n - a| < E. \tag{6.29}$$

Последовательность, у которой существует предел, называется сходящейся. Говорят, что числовая последовательность $\{x_n\}$ сходится к числу a (записывают $x_n \to a$, при $n \to \infty$) если

$$\exists a \in R \quad \forall E > 0 \quad \exists N_E \in N \quad \forall n \geq N_E \Rightarrow |x_n - a| < E\,. \; (6.30)$$

Последовательность, не являющаяся сходящейся, называют расходящейся; другими словами, последовательность называют расходящейся, если никакое число не является ее пределом.

Отметим, что если $x_n = a, \quad \forall n \in N, \quad a - \text{const}$, тогда

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} a = a\,.$$

Замечание 1. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, то и $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = a$ и обратно.

Это следует из того, что если

$$|x_n - a| < E \quad \forall n > N_E\,,$$

$$\text{то } |x_{n+1} - a| < E \quad \forall n > N_E - 1 \text{ и обратно.}$$

Замечание 2. Отметим, что неравенство (6.28) эквивалентно двум неравенствам

$$-E < x_n - a < E \text{ или } a - E < x_n < a + E\,,$$

а это значит, что точка x_n находится в E-окрестности точки a:

$$x_n \in (a - E; \quad a + E)\,.$$

Тогда определение предела числовой последовательности можно дать следующим образом: *число (точка) a – предел числовой последовательности $\{x_n\}$, каково бы ни было число E > 0, $\exists$ натуральное число N_E, такое что все члены числовой последовательности x_n, $n \geq N_E$ попадут в E-окрестности точки a:*

$$x_n \in (a - E; a + E) \qquad n \geq N_E$$

Заметим, какова бы ни была окрестность (c; d) точки a, существует такое $E > 0$, что интервал $(a - E;\ a + E) \in (c;\ d)$, то есть ($a - E$; $a + E$) содержится в (c; d).

Поэтому, то, что $x_n \to a$ можно определить следующим образом: какую бы окрестность (c; d) точки a не выбрать, все члены последовательности x_n, начиная с некоторого n, должны попасть в эту окрестность, то есть $\exists$ натуральное число N_E, что $x_n \in (c;\ d) \quad (n \geq N_E)$. Отметим, что если вне интервала (c; d)

находятся члены последовательности x_n, то их конечное число и оно равно N_E.

С другой стороны, если известно, что вне интервала $(c;\ d)$ находится только конечное число элементов x_{n1}, x_{n2}, ..., x_{nk}, то если $m = \max\{n_1, n_2, \dots, n_k\}$, тогда члены последовательности x_m для $n > m$ попадут в интервал $(c;\ d)$. Поэтому понятие предела можно определить следующим образом: числовая последовательность $\{x_n\}$ имеет пределом число a, если вне любой окрестности точки a находится конечное число (в том числе и ни одного) членов последовательности x_n.

Пример 1. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^{n+1}$ не существует

Решение.

I способ. Допустим, последовательность $\{x_n\}$ имеет предел, равный числу a. Рассмотрим окрестность точки a: $(a-\frac{1}{4};\ a+\frac{1}{4})$, длина которой равна $\frac{1}{2}$. В эту окрестность не могут попадать одновременно точки 1 и -1, так как расстояние между этими точками равно 2 $(2 > \frac{1}{2})$. Пусть для определенности, 1 не принадлежит выбранной окрестности, но так как $x_n = 1$, при $n = 1, 3, 5, 7, \dots$, то есть вне окрестности $(a-\frac{1}{2};\ a+\frac{1}{2})$ точки a находится бесконечное число членов последовательности x_n. Таким образом, число a не может быть пределом последовательности $x_n = (-1)^n$, а так как эта точка произвольна, то искомая последовательность не имеет предела.

II способ. Предположим противное, то есть что, последовательность $\{x_n\}$, $x_n = (-1)^{n+1}$ имеет предел, равный a. Тогда, $\forall E > 0$ (пусть $E = \frac{1}{2}$) $\exists N_E$, такое, что $|x_n - a| < \frac{1}{2}$ для всех $n > N_E$.

Но так как $x_n = \pm 1$, то должны выполняться неравенства

$$|1-a| < \frac{1}{2} \text{ или } |-1-a| < \frac{1}{2},$$

из которых следует

$$2 = |(1-a)+(a+1)| \le |1-a| + |a+1| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1, \text{ то есть } 2 < 1.$$

Полученное противоречие и доказывает, что последовательность не имеет предела.

Замечание 3. В некоторых случаях говорят, что предел последовательности $\{x_n\}$ равен бесконечности. Это имеет место, тогда когда x_n неограниченно возрастает по модулю при $n \to \infty$, или более точно: если для всякого сколь угодно большого числа $M > 0$ существует такой номер N, начиная с которого все члены последовательности $\{x_n\}$ обладают в каждом из случаев следующим свойством:

а) $|x_n| > M$;

б) $x > M$;

в) $-x_n > M$,

то говорят, что предел последовательности $\{x_n\}$ равен:

а) бесконечности;

б) плюс бесконечности;

в) минус бесконечности

и пишут

а) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

Отметим, если предел последовательности равен бесконечности, то это значит, что предел последовательности не существует (бесконечность не является числом).

Геометрический смысл определения предела последовательности

Из определения предела последовательности (6.29) имеем, что $a - E < x_n < a + E$, для $n \geq N_E$, поэтому, с геометрической точки зрения число a – предел числовой последовательности $\{x_n\}$, если в любую E окрестность числа a попадают все x_n за исключением конечного числа N_E элементов x_n (рис. 6.3).

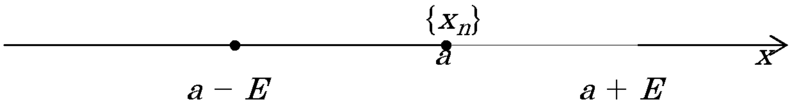


Рис. 6.3

Отметим, что чем меньше E, тем больше число N_E, но в любом случае в E окрестности точки a находится бесконечное число членов последовательности, а вне ее «быть может» лишь конечное их число.

Рассмотрим ряд примеров на доказательство и вычисление пределов, используя определение.

Пример 2. Найти предел последовательности $\{x_n\}$, если

а) $x_n = \dfrac{n-1}{n}$;

б) $x_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}$.

Решение.

а) Покажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$. Так как $x_n = 1 - \dfrac{1}{n}$, то $|x_n - 1| = \dfrac{1}{n}$. Выберем произвольное число $E > 0$, тогда неравенство $|x_n - 1| < E$ будет выполняться, если будет выполняться, если $\dfrac{1}{n} < E$, то есть при $n > \dfrac{1}{E}$. Выберем в качестве N_E, некоторое натуральное число, удовлетворяющее условию $N_E > \dfrac{1}{E}$, например $N_E = \left[\dfrac{1}{E}\right] + 1$. Тогда для всех $n \geq N_E = \left[\dfrac{1}{E}\right] + 1$ будет справедливо неравенство

$$x_n - 1 = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N_E} < E.$$

По определению предела это значит, что

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 1, \text{ то есть } \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} = 1.$$

б) Умножив и разделив x_n на сопряженное выражение, получим

$$x_n = \frac{\left(\sqrt{n+2}\right)^2 - \left(\sqrt{n+1}\right)^2}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}},$$

откуда имеем, что $|x_n| < \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$. Неравенство $\dfrac{1}{2\sqrt{n}} < E$ будет выполняться, если $\sqrt{n} > \dfrac{1}{2E}$, то есть при $n > \dfrac{1}{4E^2}$. Пусть $N_E = \left[\dfrac{1}{4E^2}\right] + 1$, тогда для всех $n \geq N_E$ выполняется неравенство

$$|x_n| < \frac{1}{2\sqrt{n}} \leq \frac{1}{2\sqrt{N_E}} < E .$$

Это означает, что $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}) = 0$.

Пример 3. Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+3}{5n^2-1} = \frac{3}{5}.$$

Установить с какого номера n выполняется неравенство

$$\left|x_n - \frac{3}{5}\right| \leq 0,02$$

Решение. Найдем абсолютную величину разности

$$\left|x_n - \frac{3}{5}\right|; \quad \left|\frac{3n^2+3}{5n^2-1} - \frac{3}{5}\right| = \frac{18}{5(5n^2-1)}.$$

Пусть задано произвольное $E > 0$. Выберем натуральное число n так, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{18}{5(5n^2-1)} < E .$$

Решая последнее неравенство, получим

$$n^2 > \frac{18}{25E} + \frac{1}{5}; \quad n > \frac{1}{5}\sqrt{\frac{18+5E}{E}} .$$

Положив $N_E = \left[\dfrac{1}{5}\sqrt{\dfrac{18+5E}{E}}\right]$, получаем, что при $n > N_E$

$$\left|x_n - \frac{3}{5}\right| < E ,$$

что и требовалось доказать.

Если $E = 0,02$, тогда

$$N_E = \left[\frac{1}{5}\sqrt{\frac{18+5E}{E}}\right] = \left[\frac{1}{5}\sqrt{209}\right] = 6$$

и все члены последовательности, начиная с 7-го, попадают в интервал (3,5 – 0,02; 3,5 + 0,02).

Пример 4. Доказать:

1) число 1 не является пределом числовой последовательности, общий член которой

$$x_n = \frac{n^2 - 3}{3n^2 - 10};$$

2) последовательность с общим членом

$$x_n = \begin{cases} \dfrac{1}{2n}, & n = 2m - 1, \\ \dfrac{n}{n+1}, & n = 2m, \end{cases} \quad \text{не имеет предела.}$$

Решение.

1) Оценим снизу абсолютную величину разности $|x_n - 1|$:

$$|x_n - 1| = \left|\frac{n^2 - 3}{3n^2 - 10} - 1\right| = \left|\frac{2n^2 - 7}{3n^2 - 10}\right|.$$

Абсолютная величина разности $|x_n - 1|$ при $n \geq 1$ больше постоянного числа $\frac{1}{3}$; значит, существует такое $E > 0$, например $E = \frac{1}{3}$, что для любого $n \geq 1$ справедливо неравенство

$$\left|\frac{n^2 - 3}{3n^2 - 10} - 1\right| > \frac{1}{3},$$

которое доказывает, что число 1 не является пределом данной последовательности.

2) Отметим, что члены последовательности x_n с нечетными номерами ($n = 2m - 1$) собираются в окрестности точки 0, а x_n ($n = 2m$) с четными номерами – в окрестности точки 1. Значит, любая окрестность точки 0, а также любая окрестность точки 1 содержат бесконечное множество точек x_n.

Пусть a – произвольное число, тогда $\exists E > 0$, чтобы E-окрестность точки a не содержала по крайней мере некоторую окрестность одной из точек 0 или 1. Тогда вне этой E-окрестности будет находиться бесконечное множество членов последовательности x_n, а следовательно, нельзя утверждать, что все члены последовательности x_n, быть может за исключением конечного числа, находятся в E-окрестности числа a. А это значит, по определению предела, a не является пределом данной последовательности, но число a – произвольное, а, следовательно, никакое число не является пределом этой последовательности.

Пример 5. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ не существует для

$$x_n = 1 + (-1)^n \cdot 2 .$$

Решение. Допустим, что существует $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, тогда по определению предела последовательности

$$\forall E > 0 \quad \exists \mathrm{N_E} \in N \quad \forall n \geq N_E \Rightarrow |x_n - a| < E .$$

Так как $x_n = 1 + (-1)^n \cdot 2 = \begin{cases} 3, & \text{если} \quad n = 2k \\ -1, & \text{если} \quad n = 2k-1 \end{cases}$, тогда

$$|x_n - a| = \begin{cases} |3-a|, & \text{если} \quad n = 2k \\ |-1-a|, & \text{если} \quad n = 2k-1 \end{cases}$$

Выбирая $E = \dfrac{1}{2}$, по определению предела имеем, что

$$\exists N_E \quad \forall n > N_E \quad |3-a| < E \text{ и } |-1-a| < E ,$$

$$4 = |3 - a - (-1-a)| \leq |3-a| + |-1-a| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 .$$

Полученное противоречие $4 < 1$ показывает, что последовательность $\{x_n\}$ не имеет предела, то есть расходится.

Пример 6. Доказать, что имеет место равенство

$$\lim_{n\to\infty} a^{(n)} = a , \tag{6.31}$$

где $a > 0$ и $a = a_0, a_1\ a_2\ a_3$ ... – разложение числа a в бесконечную десятичную дробь, $a^{(n)} = a_0, a_1 \ldots a_n$ его n-ная срезка.

Решение. Для решения данной задачи оценим $\left|a - a^{(n)}\right|$. Так как

$$\left|a - a^{(n)}\right| = |a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots - a_0, a_1 a_2 \ldots a_n| = \underbrace{0,00\ldots0}_{n}\ \mathrm{a_{n+1} a_{n+2} a_{n+3}}\ \ldots < 10^{-n}$$

Тогда $\forall E > 0\ \ \exists N_E \in N$, что $10^{-n} < E \quad \forall n \geq N_E$.

А, следовательно, справедливо неравенство

$$\left|a - a^{(n)}\right| < E \qquad \forall n \geq N_E,$$

а это значит, что имеет место (6.31).

Замечание 1. В рассмотренном примере срезки a^n (n = 1, 2, ...) – рациональные числа. Тогда из равенства (6.31) следует, что любое действительное число является пределом последовательности рациональных чисел, то есть любое действительное число можно приблизить рациональным числом с любой наперед заданной степенью точности.

Это свойство означает, что множество Q рациональных чисел всюду плотно в множестве R всех действительных чисел.

Пример 7. Доказать что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$, если $x_n = \sqrt[n]{a}$, где а > 1.

Решение.

I способ. Используя неравенство (6.30) получим $\left|x_n - 1\right| = \sqrt[n]{a} - 1 < \dfrac{a-1}{n} < E$, как только $n > N_E = \left[\dfrac{a-1}{E}\right]$.

А это значит, что $x_n \to 1$.

II способ. Неравенство $\left|x_n - 1\right| = a^{\frac{1}{n}} - 1 < E$ равносильно неравенству $\dfrac{1}{n} < \log a(1+E)$ или $n > \dfrac{1}{\log a(1+E)}$, и оно справедливо при $n > N_E = \left[\dfrac{1}{\log a(1+E)}\right]$.

А это значит, что $x_n \to 1$.

Замечание 2. При решении примера 7 в соответствии с выбранным способом рассуждения мы пришли к различным выражениям для нахождения N_E.

Например, при a = 10 и E = 0,01 получаем N_E = 900 – по I способу и N_E = 231 по II способу.

Второй способ дает нам наименьшее из возможных значений N_E при E = 0,01, так как $10^{\frac{1}{231}} = 1,0100173...$ отличается от числа 1 больше чем на E = 0,01.

А если a = 11 и E = 0,001 получаем N_E = 10000 – по I способу и N_E = 2399 – по II способу.

Второй способ дает наименьшее из возможных значений N_E при $E = 0{,}001$, так как $11^{\frac{1}{2399}} = 1{,}001000039...$ отличается от числа 1 больше, чем на $E = 0{,}001$.

Так же будет и в общем случае. В этом случае не рассматривался вопрос о нахождении именно наименьшего возможного значения N_E, при доказательстве того, что данное число предел последовательности. Здесь должно быть гарантировано выполнение неравенства $|x_n - a| < E$, начиная с некоторого номера N_E (N_E – конечное число) независимо от его величины.

3.2. Теоремы о пределах

3.2.1. Единственность предела последовательности

Теорема 3. ***Если числовая последовательность*** $\{x_n\}$ ***имеет предел, то он единственный.***

Доказательство (от противного). Пусть, последовательность $\{x_n\}$ имеет два различных предела a и b, причем $a < b$ для определенности. Выбирая $E > 0$, например $E = \dfrac{b-a}{4}$, так, чтобы E-окрестности точек a и b не пересекались (не имели общих точек). Так как $x_n \to a$, то в E-окрестности точки a находятся все члены последовательности $\{x_n\}$, за исключением конечного их числа, но тогда E-окрестность точки b может содержать лишь конечное число членов последовательности. Но это противоречит тому, что b-предел последовательности (любая окрестность точки b, должна содержать все x_n, за исключением лишь конечного числа).

Полученное противоречие показывает, что последовательность не может иметь два различных предела.

3.2.2. Ограниченность сходящей последовательности

Теорема 4. ***Если числовая последовательность*** $\{x_n\}$ ***сходится (имеет предел), то она ограничена.***

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, тогда $\forall E > 0 \quad \exists N_E \in N$, такое, что $\forall n > N_E \quad |x_n - a| < E$.

Из неравенства $\left|x_n - a\right| < E$ следует, что

$$a - E < x_n < a + E, \text{ для } n > N_E.$$

Полагая $M = \max(\left|a - E\right|, \left|a + E\right|, \left|x_1\right|, \left|x_2\right| \dots \left|x_{N_E}\right|)$, тогда для любого $n \in N$ имеет место неравенство

$$\left|x_n\right| \le M,$$

то есть последовательность $\{x_n\}$ ограничена.

Замечание. Ограниченность числовой последовательности является необходимым условием сходимости последовательности, но не достаточным. Например, последовательность $\left\{(-1)^n\right\}$ ограничена, но не является сходящейся.

3.2.3. О сохранении знака предела числовой последовательности

Теорема 5. ***Если*** $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ $(a \ne 0)$***, то начиная с некоторого номера, x_n сохраняет знак a.***

Доказательство. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, тогда $\forall E > 0$ $\exists N_E \in N$, $n \ge N_E$ $\left|x_n - a\right| < E$. Из неравенства $\left|x_n - a\right| < E$ следует, что

$$a - E < x_n < a + E, \text{ для } n > N_E. \tag{6.32}$$

Полагая в (6.32) $E = \dfrac{|a|}{2}$, будем иметь

$$a - \frac{|a|}{2} < x_n < a + \frac{|a|}{2}, \text{ для } n > N_E. \tag{6.33}$$

Тогда, если $a > 0$, то из (6.33) имеем

$$0 < \frac{a}{2} < x_n < \frac{3}{2}a, \text{ для } n > N_E. \tag{6.34}$$

Если $a < 0$, то из (6.33) имеем

$$\frac{3}{2}a < x_n < \frac{a}{2} < 0, \text{ для } n > N_E. \tag{6.35}$$

Неравенства (6.34) и (6.35) показывают, что, начиная с некоторого номера, x_n сохраняет знак a.

Теорема 6. ***Если*** $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ ***и*** $a > p$ ($a < S$)***, то все*** x_n***, начиная с некоторого номера, будут больше*** p ***(меньше*** S***).***

Доказательство. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, то $\forall E > 0$, $\exists N_E \in N$, $n \ge N_E$ справедливо $|x_n - a| < E$. Из последнего неравенства имеем

$$a - E < x_n < a + E.$$

Выбирая положительное число $E < a - p$ ($S - a$) будем иметь

$$p < x_n < 2a - p \text{ для } n \ge N_E;$$

$$2a - S < x_n < S \text{ для } n \ge N_E,$$

а это означает, что для $n \ge N_E$

$$x_n > p \qquad (x_n < S).$$

3.2.4. Предельный переход в равенстве и неравенстве

Теорема 7. ***Если две числовые последовательности*** $\{x_n\}$ ***и*** $\{y_n\}$ ***таковы, что*** $\forall n \in N \quad x_n = y_n$***, причем каждая из них имеет конечный предел:***

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \qquad \lim_{n\to\infty} y_n = b,$$

то равны и эти пределы: $a = b$***.***

Замечание. Эта теорема применяется в форме предельного перехода в равенстве: если числовые последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ таковы, что из равенства $x_n = y_n \quad \forall n \in N$, следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

Теорема 8. ***Если две числовые последовательности*** $\{x_n\}$ ***и*** $\{y_n\}$ ***таковы, что*** $\forall n \in N \quad x_n \ge y_n$***, причем каждая из них имеет конечный предел:***

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \qquad \lim_{n\to\infty} y_n = b,$$

то и $a \ge b$***.***

Доказательство (от противного). Предположим, что $a < b$.

Тогда существует число c, такое, что $a < c < b$. А, следовательно, с одной стороны, $\exists N_1 \in N$, что для $n > N_1$ будет $x_n < c$, а с другой стороны $\exists N_2 \in N$, что для $n > N_2$ будет $y_n > c$.

Пусть $N = \max(N_1, N_2)$, тогда для $n > N$ будут одновременно выполняться оба неравенства: $x_n < r$; $\quad y_n < r$.

Откуда имеем $x_n < y_n$, но это противоречит предположению теоремы $x_n \geq y_n \quad \forall n$.

Замечание 1. Эта теорема устанавливает допустимость предельного перехода в неравенстве: из того, что $x_n \geq y_n$ следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \geq \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

Другими словами: предельный переход сохраняет знак нестрого неравенства.

Знак строго неравенства, вообще говоря, предельный переход не сохраняет. Если $x_n = 1 + \dfrac{2}{n}$, $\quad y_n = 1 + \dfrac{1}{n}$, тогда $x_n > y_n \quad \forall n \in N$, но $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 1$.

Следствие. Если элементы x_n, сходящейся последовательности $\{x_n\}$ принадлежат $[a;\ b]$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c \in [a; b]$.

Замечание 2. Если числа a и b конечные числа, то, если $x_n \in (a; b)$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c \in [a; b]$, то есть неравенства в пределе сохраняются или обращаются в равенство. Например: $x_n = (1 + \dfrac{1}{n}) \in (1; 2)$, но $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1 \in [1; 2]$.

Теорема 9. ***Если числовые последовательности*** $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ ***таковы, что***

$$x_n \leq y_n \leq z_n \qquad \forall n \geq N_0 \tag{6.36}$$

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$,

то числовая последовательность $\{y_n\}$ ***сходится и*** $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

Доказательство. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$, то $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N_1 \in N$, и $N_2 \in N$ такие, что

$$a - \varepsilon < x_n \quad (n > N_1) \qquad y_n < a + \varepsilon \quad (n > N_2).$$

Отсюда и из условия (6.36) следует, что при всех $n \geq \max(N_1, N_2)$ справедливо $a - \varepsilon < x_n \leq y_n \leq z_n < a + \varepsilon$ или $|y_n - a| < \varepsilon$, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

Замечание 1. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, то $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = |a|$.

Доказательство этого замечания следует из неравенства

$$\big|\, |x_n| - |a| \,\big| \leq |x_n - a|.$$

Замечание2. Теоремы 4, 5 и 6 имеют место и в случае бесконечных пределов.

Рассмотрим несколько примеров, связанных с доказанными теоремами.

Пример 8. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Решение. Пусть $\sqrt[n]{n} = 1 + a_n$ $(a_n > 0)$, возводя в n-ную степень, получим:

$$n = (1 + a_n) = 1 + n \cdot a_n + \frac{n(n-1)}{2!} a_n^2 + \ldots + a_n^n. \qquad (6.37)$$

Из этого равенства имеем, при любом $n > 1$ справедливо неравенство:

$$n > 1 + \frac{n(n-1)}{2} a_n^2, \qquad (6.38)$$

так как все члены, стоящие в правой части равенства (6.37) неотрицательны. Из неравенства (6.38) получаем:

$$n - 1 > \frac{n(n-1)}{2} a_n^2 \text{ или } 1 > \frac{n}{2} a_n^2.$$

Откуда следует

$$\frac{2}{n} > a_n^2 \text{ или } \sqrt{\frac{2}{n}} > a_n > 0.$$

Откуда, по теореме о сжатой переменной имеем, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, а, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Приведем и другое решение этой задачи.

Пример 9. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Решение. Для решения данной задачи установим следующие неравенства. Так, если $a > 1$, то его можно представить $a = 1 + t$, где $t > 0$ и по формуле бинома Ньютона имеем

$$a^n = (1+t)^n = 1 + nt + \frac{n(n-1)}{2!}t^2 + \ldots \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \ldots > \frac{(n-1)n}{2}t^2 .$$

При $n > 2$, $n - 1 > \frac{n}{2}$, а значит $a^n = (1+t)^n > \frac{n^2}{4}t^2$.

Если $a = \sqrt[n]{n} > 1$, тогда $t = \sqrt[n]{n} - 1$, а, следовательно, последовательное неравенство запишем в виде:

$$n > \frac{n^2}{4}t^2 \text{ или } \frac{n}{4} > (\sqrt[n]{n} - 1)^2 > 0 .$$

Извлекая квадратный корень, будем иметь $0 < \sqrt[n]{n} - 1 < \frac{2}{\sqrt{n}}$.

В силу теоремы о сжатой переменной:

$$\left(\lim_{n\to\infty} 0 = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{n}} = 0 \right)$$

получим, что $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[n]{n} - 1) = 0$. А, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} \left[(1 + (\sqrt[n]{n} - 1)) \right] = 1 .$$

3.3. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности. Арифметические операции над сходящимися последовательностями. Неопределенные выражения

3.3.1. Бесконечно малые последовательности

Последовательность $\{x_n\}$ называется бесконечно малой последовательностью или просто бесконечно малой, если

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0 .$$

А это означает: $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N_\varepsilon \in N$, такой, что

$$\forall n \ge N_\varepsilon \qquad |x_n - 0| = |x_n| < \varepsilon .$$

Таким образом, последовательность называется бесконечно малой, если она, начиная с некоторого номера, становится и остается по абсолютной величине, меньшей сколь угодно малого, наперед заданного числа $\varepsilon > 0$.

Теорема 10 (о связи между числовой последовательностью и ее пределом). ***Для того, чтобы числовая последовательность $\{x_n\}$ имела своим пределом число а, необходимо и достаточно, чтобы последовательность $\{a_n\} = \{x_n - a\}$ была бесконечно малой.***

Доказательство (необходимость). $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - a) = \lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n = 0$, то есть последовательность $\{\alpha_n\}$ бесконечно мала.

Действительно, если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, то это значит, по определению предела, что

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N\varepsilon \quad n \geq N\varepsilon \Rightarrow |x_n - a| = |\alpha_n| < \varepsilon,$$

то есть последовательность $\{\alpha_n\}$ – бесконечно малая последовательность.

Доказательство (достаточность). Бесконечно малая последовательность $\{\alpha_n\} = \{x_n - a\}$, показать, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Действительно, если последовательность $\{\alpha_n\}$ бесконечно малая, то есть $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n = 0$, тогда

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \quad n \geq N_\varepsilon \Rightarrow |\ \alpha_n\ | = |x_n - a| < \varepsilon,$$

а это значит, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Итак, если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, то имеет место представление:

$$x_n = a + \alpha_n, \tag{6.39}$$

где α_n – бесконечно малая.

Верно и, обратное, если последовательность допускает представлении вида (6.39), то она имеет пределом a.

Пример 10. Доказать, что последовательности:

1. $\{x_n\}$, где $x_n = \dfrac{1}{2n}$;

2. $\{y_n\}$, где $y_n = \dfrac{3+(-1)^n}{n}$;

3. $\{z_n\}$, где $z_n = \dfrac{1+(-1)^n}{n}$.

являются бесконечно малыми.

Решение.

1. Действительно, так как $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, то $\{x_n\}$ – бесконечно малая, так как $|x_n| = \dfrac{1}{2n} < \varepsilon$, как только $n > N_\varepsilon$, где $N_\varepsilon = \left[\dfrac{1}{2\varepsilon}\right]$.

В данном примере $x_n \to 0$, оставаясь все время больше своего предела.

2. Действительно, последовательность $x_n \to 0$ является бесконечно малой, так как $|y_n| \le \dfrac{4}{n} < \varepsilon$, то есть как только $n > N_\varepsilon$, где $N_\varepsilon = \left[\dfrac{4}{\varepsilon}\right]$.

В данном примере $y_n \to 0$, поочередно то приближается к своему пределу, то удаляется от него.

3. Действительно, последовательность $z_n \to 0$, является бесконечно малой, так как $|z_n| \le \dfrac{2}{n} < \varepsilon$, как только $n > N_\varepsilon$, где $N_\varepsilon = \left[\dfrac{2}{\varepsilon}\right]$.

В данном примере $z_n \to 0$, но при всех $n = 2k+1$ x_n принимает значение, равное своему пределу.

Пример 11. С помощью теоремы о связи между числовой последовательностью и ее пределом (необходимое и достаточное условие сходимости последовательности) доказать сходимость и найти предел последовательности x_n, где $x_n = \dfrac{3n}{1-n}$.

Решение. Из теоремы 10 следует, что

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow x_n = a + \alpha_n.$$

где $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, то есть $\{\alpha_n\}$ – бесконечно малая последовательность.

Представим $x_n = \dfrac{3n}{1-n}$ в виде суммы числа a и некоторой последовательности $\{\alpha_n\}$ и докажем, что $\{\alpha_n\}$ – бесконечно малая последовательность. Тогда по необходимому и достаточному условию сходимости (теорема 10, достаточность) последовательность $\{x_n\}$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$:

$$x_n = \frac{3n}{1-n} = \frac{-3(1-n)+3}{1-n} = -3 + \frac{3}{1-n},$$

где $a = -3$; $\alpha_n = \dfrac{3}{1-n}$.

Докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3}{1-n} = 0$.

Действительно,

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \in N \quad \forall n > N_\varepsilon \Rightarrow \left|\frac{3}{1-n}\right| < \varepsilon \Rightarrow \frac{3}{n-1} < \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n - 1 > \frac{3}{\varepsilon} \Rightarrow n > \frac{3}{\varepsilon} + 1 \Rightarrow \exists N_\varepsilon = \left[\frac{3}{\varepsilon} + 1\right].$$

Итак,

$$\forall\varepsilon > 0 \quad N_\varepsilon = \left[\frac{3}{\varepsilon} + 1\right] \quad \forall n > N_\varepsilon \Rightarrow \left|\frac{3}{1-n}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{3}{1-n} = 0 \Rightarrow \{x_n\}$$

сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -3$.

Рассмотрим следующие две теоремы о бесконечно малых последовательностях.

Теорема 11. ***Сумма любого конечного числа бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.***

Доказательство (для случая трех бесконечно малых a_n, b_n, c_n). Зададимся произвольным числом $\varepsilon > 0$. Тогда по определению бесконечно малой $\{a_n\}$, для любого числа $\dfrac{\varepsilon}{3} > 0$ $\exists N_\varepsilon^{(1)}$, что для всех $n \geq N_\varepsilon^{(1)}$ будем иметь $|a_n| < \dfrac{\varepsilon}{3}$.

Точно так же для бесконечно малых последовательностей $\{b_n\}$ и $\{c_n\}$ имеем:

– для любого числа $\frac{\varepsilon}{3} > 0$, $\exists N_{\varepsilon}^{(2)}$, что для всех $n > N_{\varepsilon}^{(2)}$ будем иметь $|b_n| < \frac{\varepsilon}{3}$;

– для любого числа $\frac{\varepsilon}{3} > 0$, $\exists N_{\varepsilon}^{(3)}$, что для всех $n > N_{\varepsilon}^{(3)}$ будем иметь $|c_n| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Если взять натуральное число $N = \max N_{\varepsilon}^{(1)}; N_{\varepsilon}^{(2)}; N_{\varepsilon}^{(3)}$, то при $n > N$ одновременно выполняются три эти неравенства, так что

$$|a_n + b_n + c_n| \le |a_n| + |b_n| + |c_n| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Таким образом, последовательность $\{a_n + b_n + c_n\}$ является бесконечно малой последовательностью.

Теорема 12. ***Произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную является бесконечно малой последовательностью, то есть если*** $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ ***и*** $|y_n| \le M \quad n \in N$***, то***

$$\lim_{n\to\infty} x_n y_n = 0.$$

Доказательство. Действительно, задавая любое число $\varepsilon > 0$, найдем натуральное число N_{ε}, такое, чтобы

$$|x_n| < \frac{\varepsilon}{M}, \quad \forall n > N_{\varepsilon}.$$

Тогда $|x_n \cdot y_n - 0| = |x_n| \cdot |y_n| \le \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon \quad \forall n > N_{\varepsilon}$,

а это значит, что последовательность $\{x_n y_n\}$ бесконечно малая.

Замечание. Любая не равная нулю постоянная последовательность не является бесконечно малой последовательностью. Из всех постоянных последовательностей бесконечно малой последовательностью является только одна последовательность – последовательность, состоящая из нулей. Если о числовой последовательности $\{x_n\}$ известно, что она постоянна и

$$\forall \varepsilon > 0 \quad |x_n| < \varepsilon \quad \forall n \in N, \text{ то } x_n = 0, \ \forall n.$$

3.3.2. Бесконечно большие последовательности

Последовательность $\{x_n\}$ называется бесконечно большой, если $\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \in N$, что для всех $n \ge N_\varepsilon$ выполняется неравенство $|x_n| > \varepsilon$. В этом случае говорят, что последовательность имеет бесконечный предел и записывают $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

Итак

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \quad \forall n \ge N_\varepsilon \Rightarrow |x_n| > \varepsilon .$$

С геометрической точки зрения определение бесконечно большой последовательности означает следующее: если последовательность $\{x_n\}$ имеет бесконечный предел, то в любой ε-окрестности ∞ находятся все члены последовательности, за исключением «быть может» конечного числа членов.

За ε-окрестность ∞ принимают множество

$$E = \{x \in R; |x| > \varepsilon\}.$$

Множество $E_1 = \{x \in R; x < -\varepsilon\}$ и $E_2 = \{x \in R; x > \varepsilon\}$, где $\varepsilon > 0$ называют ε – окрестностями $-\infty$ и $+\infty$.

Тогда $E = E_1 \cup E_2$.

Введем понятие бесконечных пределов, равных $-\infty$ и $+\infty$, которые обозначают $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ и определяются следующим образом

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \quad \forall n \ge N_\varepsilon \Rightarrow x_n < -\varepsilon ,$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \quad \forall n \ge N_\varepsilon \Rightarrow x_n > \varepsilon .$$

Отметим, что имеет место следующая теорема.

Теорема 13 (свойства бесконечно большой последовательности).

1. Если последовательность $\{x_n\}$ ограничена, последовательность $\{y_n\}$ бесконечно большая, тогда последовательность $\{x_n + y_n\}$ бесконечно большая, а последовательность $\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$ бесконечно малая.

2. Если $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ бесконечно большие последовательности, то $\{x_n y_n\}$ и $\{x_n + y_n\}$ бесконечно большая последовательность.

3. Если последовательность $\{x_n\}$ бесконечно большая, то она неограничена.

4. Если последовательность $\{y_n\}$, не равная нулю, бесконечно малая, а последовательность $\{x_n\}$ такая, что $|x_n| > a > 0$, тогда $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ бесконечно большая последовательность.

Доказательство (докажем четвертое свойство). Из условия теоремы 13 имеем, что $|x_n| > a > 0$ (a – некоторое число) $n \in N$, и для $\varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \in N$ такое, что

$$|y_n| < \varepsilon \qquad (n > N_\varepsilon).$$

Тогда $\left|\frac{x_n}{y_n}\right| > \frac{a}{\varepsilon} = M > 0 \qquad (n > N_\varepsilon)$.

Выбрав произвольное положительное число M и, выбирая по нему $\varepsilon > 0$, так что $M = \frac{a}{\varepsilon}$, а затем по ε выбираем (находим) N_ε, чтобы имело место неравенство $|y_n| < \varepsilon, \quad n > N_\varepsilon$, тогда

$$\left|\frac{x_n}{y_n}\right| > M \qquad (n > N_\varepsilon).$$

А это означает, что последовательность $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ бесконечно большая.

Пример 12. Доказать по определению предела, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{3n^2 - 2} = \infty.$$

Решение. По определению предела имеем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{3n^2 - 2} = \infty = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_2 \in N \quad \forall n > N_\varepsilon \Rightarrow \left|\frac{n^3}{3n^2 - 2}\right| > \varepsilon.$$

Заменим последовательность $\left\{\frac{n^3}{3n^2-2}\right\}$ новой последовательностью, каждый член которой меньше соответствующего члена данной последовательности и докажем, что эта последовательность бесконечно большая:

так как имеет место $\left|\frac{n^3}{3n^2-2}\right| > \left|\frac{n^3}{3n^2}\right| = \frac{n}{3}$,

то, выбирая $\frac{n}{3} > \varepsilon \Rightarrow n > 3\varepsilon \Rightarrow \exists N_\varepsilon = [3\varepsilon]$, получим:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon = [3\varepsilon] \quad \forall n > N_\varepsilon \Rightarrow \frac{n}{3} > \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{n^3}{3n^2}\right| > \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{n^3}{3n^2-2}\right| > \varepsilon,$$

а это значит $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3}{3n^2-2} = \infty$.

Пример 13. Доказать, пользуясь определением бесконечно большой последовательности, равенство

$$\lim_{n\to\infty} 3^{\sqrt[3]{n}} = +\infty.$$

Решение. По определению бесконечно большой последовательности требуется показать, что

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \in N \quad \forall n > N_\varepsilon \Rightarrow 3^{\sqrt[3]{n}} > \varepsilon.$$

Решая неравенство относительно n, получим

$$3^{\sqrt[3]{n}} > \varepsilon \Leftrightarrow \log_3 3^{\sqrt[3]{n}} > \log_3 \varepsilon \Leftrightarrow \sqrt[3]{n} > \log_3 \varepsilon \Leftrightarrow n > \log_3^3 \varepsilon.$$

Считаем, что $N_\varepsilon = \left[\log_3^3 \varepsilon\right]$, если $\log_3 \varepsilon \geq 1$ и $N_\varepsilon = 0$, если $\log_3^3 \varepsilon < 1$. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_\varepsilon \in N \ \forall n > N_\varepsilon \Rightarrow n > \log_3^3 \varepsilon \Rightarrow 3^{\sqrt[3]{n}} > \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} 3^{\sqrt[3]{n}} = +\infty.$$

Замечание 1. Если последовательность $\{x_n\}$ не ограничена, то она не обязательно бесконечно большая. Например, последовательность

$$\left\{n^{(-1)^{n+1}}\right\} = \left\{1, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{4}, 5 \ldots\right\}$$

не ограничена, но она не является бесконечно большой, так как данная последовательность содержит сколь угодно малые члены с каким угодно большим номером (четным).

Замечание 2 (связь между бесконечно большими и бесконечно малыми последовательностями).

1. Если последовательность $\{x_n\}$ является бесконечно большой, то последовательность $\{y_n\} = \left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}$ будет бесконечно малой.

Так как $\{x_n\}$ бесконечно большая последовательность, то

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \boldsymbol{N}_\varepsilon \in \boldsymbol{N}, \quad n > \boldsymbol{N}_\varepsilon \quad |x_n| > \frac{1}{\varepsilon},$$

тогда для тех же значений ($n > \boldsymbol{N}_\varepsilon$) будет справедливо

$$|y_n| < \varepsilon,$$

то есть $\{y_n\}$ – бесконечно малая последовательность.

2. Таким же образом доказывается и обратное утверждение: если последовательность $\{y_n\}$ $(y_n \neq 0)$ бесконечно малая, то последовательность $\{x_n\} = \left\{\dfrac{1}{y_n}\right\}$ бесконечно большая.

3.3.3. Арифметические операции над сходящимися последовательностями

В этом пункте будут доказаны теоремы, которые во многих случаях делают ненужным обращение всякий раз к определению понятия предела, а следовательно, нахождение по заданному $\varepsilon > 0$, $\boldsymbol{N}_\varepsilon \in \boldsymbol{N}$ и так далее – а, следовательно, значительно облегчается вычисление пределов.

Теорема 14. ***Если*** $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$***, то:***

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = a \pm b$***;***

2. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = a \cdot b$***;***

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{a}{b}$ ***при условии, что*** $y_n \neq 0$ $(n \in N)$ ***и*** $b \neq 0$***.***

Доказательство.

1. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, тогда $x_n = a + \alpha_n$ и $y_n = b + \beta_n$, где $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ – бесконечно малые последовательности. Зная, что $x_n + y_n = a + b + \alpha_n + \beta_n$, где $\{\alpha_n + \beta_n\}$ – бесконечно малая последовательность, тогда $x_n + y_n \to a + b$, то есть

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = a + b = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n.$$

2. Из равенства $x_n y_n = ab + a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n \cdot \beta_n$ и в силу того, что $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ – бесконечно малые последовательности, и $\{a\beta_n\}$, $\{b\alpha_n\}$, $\{\alpha_n \cdot \beta_n\}$ – также являются бесконечно малыми, а значит $\{a \cdot \beta_n + b \cdot \alpha_n + \alpha_n \cdot \beta_n\}$ – бесконечно малая последовательность. Поэтому $x_n y_n \to ab$, то есть

$$\lim_{n\to\infty} x_n y_n = a \cdot b = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n.$$

3. Покажем, что последовательность $\left\{\dfrac{x_n}{y_n} - \dfrac{a}{b}\right\}$ – бесконечно малая. Действительно, имеем

$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{a + \alpha_n}{b + \beta_n} - \frac{a}{b} = \frac{(a + \alpha_n)b - (b + \beta_n)a}{b y_n} = (\alpha_n - \frac{a}{b}\beta_n)\frac{1}{y_n}.$$

Так как $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ – бесконечно малые последовательности, то последовательность $\left\{\alpha_n - \dfrac{a}{b}\beta_n\right\}$ также бесконечно малая.

Из условия теоремы 14 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ $(b \neq 0)$ и $(y_n \neq 0)$ для $\forall n \in \boldsymbol{N}$, а, следовательно, последовательность $\left\{\dfrac{1}{y_n}\right\}$ будет ограниченной (теорема 4). Отсюда имеем, что последовательность $\dfrac{1}{y_n} \cdot (\alpha_n - \dfrac{a}{b}\beta_n)$ – бесконечно малая последовательность – как произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную последовательность. Следовательно, $\left\{\dfrac{x_n}{y_n} - \dfrac{a}{b}\right\}$ – бесконечно малая последовательность, а поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{a}{b}$.

3.3.4. Неопределенные выражения

Выше были рассмотрены выражения вида

$$x_n \pm y_n, \quad x_n \cdot y_n, \quad \frac{x_n}{y_n}$$

в предположении, что последовательности имеют конечные пределы, установлены пределы каждого из этих выражений (теорема 6).

Не были рассмотрены различные случаи, когда пределы последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ бесконечны (будем записывать $x_n \to \infty$, $y_n \to \infty$) или $x_n \to 0$ и $y_n \to 0$. Из этих случаев остановимся на четырех, которые имеют интересные особенности и важные значения.

1. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$ $(y_n \neq 0)$, то есть $x_n \to 0$ и $y_n \to 0$ одновременно. Рассмотрим последовательность $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ и установим предел отношения. Этот предел, в зависимости от изменения x_n и y_n, может иметь различные значения или даже не существует. Рассмотрим следующие примеры, которые поясняют это (во всех случаях $n \to \infty$).

1.1. $x_n = \frac{2}{n^2} \to 0$; $y_n = \frac{1}{n} \to 0$, тогда $\frac{x_n}{y_n} = \frac{2}{n} \to 0$.

1.2. $x_n = \frac{2}{n} \to 0$; $y_n = \frac{1}{n^2}$, тогда $\frac{x_n}{y_n} = 2n \to \infty$.

1.3. $x_n = \frac{2}{n} \to 0$; $y_n = \frac{1}{n} \to 0$, тогда $\frac{x_n}{y_n} = 2 \to 2$.

1.4. $x_n = \frac{(-1)^n}{n} \to 0$; $y_n = \frac{1}{n} \to 0$, тогда $\frac{x_n}{y_n} = (-1)^n$ – не имеет предела.

Таким образом, для нахождения предела последовательности $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ недостаточно знать, что $x_n \to 0$ и $y_n \to 0$: необходимо знать последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ и непосредственно исследовать отношение $\frac{x_n}{y_n}$. В этом случае говорят, что выражение $\frac{x_n}{y_n}$ при $x_n \to 0$ и $y_n \to 0$ есть неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$.

2. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$, то есть $x_n \to \infty$ и $y_n \to \infty$.

Тогда, не зная самих $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ нельзя установить общее утверждение о поведении $\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$. Рассмотрим следующие примеры, которые поясняют это:

2.1. $x_n = n \to \infty$; $y_n = n^2 \to \infty$, тогда $\dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{1}{n} \to 0$.

2.2. $x_n = n^2 \to \infty$; $y_n = n \to \infty$, тогда $\dfrac{x_n}{y_n} = n \to \infty$.

2.3. $x_n = \dfrac{n^2}{2} \to \infty$; $y_n = n^2 \to \infty$, тогда $\dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{1}{2} \to \dfrac{1}{2}$.

2.4. $x_n = ((-1)^{n+1} + 2)n^2 \to \infty$; $y_n = n^2 \to \infty$, тогда $\dfrac{x_n}{y_n} = 2 + (-1)^{n+1}$ – не имеет предела.

И в этом случае имеем, что выражение $\dfrac{x_n}{y_n}$ представляет неопределенность вида $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$.

3. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ а $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$, то, исследуя поведение произведения $x_n y_n$, мы приходим к тем же особенностям, как и в случаях 1 и 2. Это подтверждают следующие примеры:

3.1. $x_n = \dfrac{1}{n^2} \to 0$; $y_n = n \to \infty$, тогда $x_n y_n = \dfrac{1}{n} \to 0$.

3.2. $x_n = \dfrac{1}{n^2} \to 0$; $y_n = n^3 \to \infty$, тогда $x_n y_n = n \to \infty$.

3.3. $x_n = \dfrac{1}{n^2} \to 0$; $y_n = 2n^2 \to \infty$, тогда $x_n y_n = 2 \to 2$.

3.4. $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n} \to 0$; $y_n = n \to \infty$, тогда $x_n y_n = (-1)^n$ – не имеет предела.

И в этом случае, при $x_n \to 0$ и $y_n \to \infty$, говорят, что выражение $x_n \cdot y_n$ является неопределенностью вида $(0 \cdot \infty)$.

4. В случае, когда x_n и y_n стремятся к бесконечности разных знаков: именно в этом случае о сумме $x_n + y_n$ ничего определенного сказать нельзя, не зная поведения x_n и y_n. Различные возможности приведены в следующих примерах: если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, а $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = -\infty$, тогда

4.1. $x_n = n + \frac{1}{n} \to \infty$; $y_n = -n \to -\infty$, тогда $x_n + y_n = \frac{1}{n} \to 0$.

4.2. $x_n = 2n \to \infty$; $y_n = -n \to -\infty$, тогда $x_n + y_n = n \to \infty$.

4.3. $x_n = n + 2 \to \infty$; $y_n = -n \to -\infty$, тогда $x_n + y_n = 2 \to 2$.

4.4. $x_n = n + (-1)^n \to \infty$; $y_n = -n \to -\infty$, тогда $x_n + y_n = (-1)^n$ – не имеет предела.

В этом случае говорят, что выражение $x_n + y_n$ представляет неопределенность вида $(\infty - \infty)$.

Итак, определить пределы арифметических выражений $x_n \pm y_n$, $\frac{x_n}{y_n}$, $x_n \cdot y_n$ по пределам последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ не всегда возможно. В рассмотренных выше четырех случаях этого заведомо сделать нельзя, поэтому приходится учитывать вид $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ и проводить непосредственное исследование соответствующего отношения. Такое исследование называют раскрытием неопределенности соответствующего вида. Раскрыть неопределенность – это значит найти предел (если он существует) соответствующего выражения, или доказать, что предел не существует.

3.4. Предел монотонной последовательности. Число e

В п. 3.1 введены понятия монотонной последовательности, а в п. 1.2 даны определения точных граней числовых множеств. В этом параграфе нам потребуется понятие точной верхней и нижней грани последовательности. Точную верхнюю (нижнюю) грань множества значений последовательности $\{x_n\}$ называют точной верхней (нижней) гранью последовательности и обозначают $\sup\{x_n\}$ ($\inf\{x_n\}$). Введем понятия точной верхней и нижней граней для последовательности $\{x_n\}$.

Точная верхняя грань:

$$(a=\sup\{x_n\}) \Leftrightarrow (\forall n \in N \Rightarrow x_n \le a) \text{ и } (\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N_\varepsilon \ \ \ x_{N\varepsilon} > a-\varepsilon),$$

то есть, число a – точная верхняя грань последовательности $\{x_n\}$, если выполняются условия:

1) все члены последовательности $\{x_n\}$ не превосходят a, то есть

$$\forall n \in N \Rightarrow x_n \le a;$$

2) для любого $\varepsilon > 0$, найдется член последовательности, больший $(a-\varepsilon)$, то есть

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N_\varepsilon \quad x_{N\varepsilon} > a-\varepsilon.$$

Точная нижняя грань:

$$(b=\inf\{x_n\}) \Leftrightarrow (\forall n \in N \Rightarrow x_n \ge b) \text{ и } (\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N_\varepsilon \ \ \ x_{N\varepsilon} < b+\varepsilon),$$

то есть число b – точная нижняя грань последовательности $\{x_n\}$, если выполняются условия:

1) все члены последовательности $\{x_n\}$ не меньше b, то есть

$$\forall n \in N \Rightarrow x_n \ge b;$$

2) для любого $\varepsilon > 0$, найдется член последовательности, меньший чем $b+\varepsilon$, то есть $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N_\varepsilon \ \ x_{N\varepsilon} < b+\varepsilon$.

В этом пункте рассматривается важнейшая теорема, которая устанавливает фундаментальнейшее утверждение (наличие конечного предела у ограниченной монотонной последовательности), которое стало одним из поводов к построению арифметической теории иррациональных чисел, и отвечает свойству непрерывности множества действительных чисел. Нахождение пределов последовательности, приближенные вычисления и оценки погрешности, доказательство различных теорем при теоретических исследованиях – поле приложения данной теоремы.

Признак сходимости монотонной последовательности

Теорема 15. ***Если последовательность $\{x_n\}$ является возрастающей (убывающей) и ограниченной сверху (снизу), то существует***

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a = \sup\{x_n\}, \quad \lim_{n\to\infty} x_n = b = \inf\{x_n\}.$$

Доказательство. Доказательство теоремы проведем для случая ограниченной сверху и возрастающей последовательности. Пусть последовательность $\{x_n\}$ ограничена сверху, то есть множество чисел: x_1, x_2, ..., x_n – ограничено сверху, а, следовательно, существует точная верхняя грань последовательности $\{x_n\}$, определяемая условиями:

1. все члены последовательности не превосходят a, то есть

$$\forall n \in N \quad x_n \le a \tag{6.40}$$

2. $$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N_\varepsilon \quad x_{N\varepsilon} > a - \beta\varepsilon$$

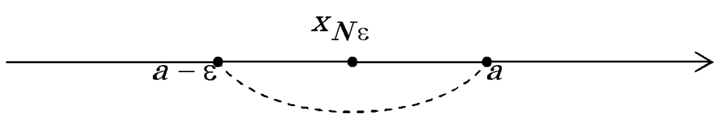


Рис. 6.4

Так как $\{x_n\}$ – возрастающая последовательность, то

$$\forall n \ge N_\varepsilon, \quad x_{N\varepsilon} \le x_n . \tag{6.41}$$

Из (6.40) и (6.41) следует, что $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N_\varepsilon; \;\; \forall n \ge N_\varepsilon$ справедливо $a - \varepsilon < x_{N\varepsilon} \le x_n \le a$, то есть в левосторонней окрестности точки a находятся все члены последовательности $\{x_n\}$, за исключением конечного члена N_ε (рис. 6.4). Это значит, согласно определению предела, что

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a = \sup\{x_n\}.$$

Замечание 1. Доказанная теорема остается справедливой для последовательности, ограниченной сверху (снизу) и возрастающей (убывающей), начиная с некоторого номера.

Замечание 2. Доказанная теорема является теоремой существования: теорема устанавливает факт существования предела, но не дает правила нахождения предела последовательности. Но если удается доказать существование предела последовательности, тогда и находится, как правило, путь его вычисления, суть которого состоит в следующем: сначала устанавливается существование предела (ограниченность и монотонность последовательности), а затем находится его числовое значение из уравнения, которое получаем из рекуррентной формулы путем замены в ней x_n и x_{n+1} (или x_{n+k}) искомым значением из предела последовательности $\{x_n\}$ (так как доказано, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$ существует).

В теоретических исследованиях доказательство существования предела один из важнейших вопросов при решении ряда математических проблем.

Замечание 3. Условие ограниченности монотонной последовательности является необходимым и достаточным условием ее сходимости.

Действительно, если монотонная последовательность ограничена, то она сходится (теорему 15); если же монотонная последовательность сходится, то в силу теоремы 4 п. 3.2 она ограничена.

Замечание 4. Сходящаяся последовательность может и не быть монотонной. Последовательность $\{x_n\}$, где $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ имеет пределом число нуль, не является монотонной последовательностью.

Замечание 5. Теорема 15 остается справедливой для последовательности, ограниченной сверху (снизу) и возрастающей (убывающей), начиная с некоторого номера.

Пример 14. Доказать, что последовательность $\{x_n\}$, где $x_1 = \sqrt{2}$, $x_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}}$, $x_n = \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}}_{n-\text{корней}}$ сходится, и найти ее предел.

Решение. Отметим, что при $n \geq 2$ справедливо равенство

$$x_n = \sqrt{2 + x_{n-1}}\,, \tag{6.42}$$

откуда по методу математической индукции имеем

$$x_1 = \sqrt{2} > 0\,,$$

предположим, что $x_{n-1} > 0$ и покажем, что $x_n > 0$, то есть все члены данной числовой последовательности положительны.

Действительно, если $x_{n-1} > 0$, то по формуле (6.42) имеем, что $x_n > 0 \ \ \forall n$.

Покажем, что $\{x_n\}$ – ограниченная сверху последовательность. Действительно, так как $x_1 < 2$, и, предположив, что

$x_{n-1} < 2$ из равенства (6.42) получим, что $x_n < 2$, то есть имеем $\forall n \in N$, $x_n < 2$, а это значит, что последовательность $\{x_n\}$ ограничена сверху.

Докажем (методом математической индукции), что данная последовательность $\{x_n\}$ – возрастающая. Заметим, что $x_1 = \sqrt{2}$, а $x_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}} > \sqrt{2} = x_1$, то есть справедливо неравенство $x_2 > x_1$.

Предположим, что $x_n > x_{n-1}$ и докажем, что $x_{n+1} > x_n$. Из равенства (6.42) следует, что

$$x_{n+1}^2 = 2 + x_n, \tag{6.43}$$

$$x_n^2 = 2 + x_{n-1}. \tag{6.44}$$

Вычитая из (6.43) (6.44) получим равенство:

$$(x_{n+1} - x_n)(x_{n+1} + x_n) = x_n - x_{n-1}. \tag{6.45}$$

Так как $x_n - x_{n-1} > 0$, $x_{n+1} + x_n > 0$ (все $x_n > 0$), то из равенства (6.45) получаем $x_{n+1} > x_n$. Таким образом, при любом $n \in N$ справедливо неравенство $x_n \le x_{n+1}$, то есть $\{x_n\}$ – возрастающая последовательность.

Тогда по теореме 15 имеем, что существует предел

$$\lim x_n = a,$$

где а > 0 (так как $\forall n$, $x_n > 0$).

Переходя к пределу в равенстве $x_{n+1}^2 = 2 + x_n$ получим квадратное уравнение относительно a, $a^2 - a - 2 = 0$, решая которое, получим $a = 2$ и $a = -1$ (не подходит, так как $a > 0$).

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$.

Замечание 6. Этот содержательный пример по сути принадлежит Я. Бернулли, который рассматривал его при рассмотрении задачи о вычислении выражения вида

$\sqrt{c+\sqrt{c+\sqrt{c+\sqrt{c+}}}}$ и так далее до бесконечности.

Эту последовательность задают следующей рекуррентной формулой

$$x_1 = \sqrt{c}, \quad x_n = \sqrt{c + x_{n-1}}, \quad n \ge 2 \text{ и } \lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1+\sqrt{1+4c}}{2}$$

Замечание 7. Доказанная теорема 15 дает многообразные и важные приложения в различных разделах как математики. Так, например, рассмотрим последовательность $\{x_n\}$, заданную следующей рекуррентной формулой

$$x_1 = 1; \quad x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n}) \text{ для } n \geq 1$$

(в качестве x_1 можно выбрать любое положительное число).

Используя теорему 15 устанавливаем, что последовательность имеет предел, который равен $\sqrt{a}$, то есть, используя рассмотренную последовательность $\{x_n\}$ для вычисления квадратного корня из положительного числа. Рассмотренная рекуррентная формула определяет алгоритм вычисления $\sqrt{a}$. Так, для любого $a > 1$ при определенном выборе первого приближения x_1 уже четвертое приближение x_4 дает число $\sqrt{a}$ с ошибкой, не превосходящей 10^{-10}.

Пример 15. Доказать, что последовательность $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ является возрастающей.

Решение. Рассмотрим $(n + 1)$ положительных чисел $1;\ 1 + \frac{1}{n};\ 1 + \frac{1}{n};\ \ldots;\ 1 + \frac{1}{n}$ и применим к ним неравенство Коши, получим:

$$\frac{1 + n(1 + \frac{1}{n})}{n + 1} > \sqrt[n+1]{(1 + \frac{1}{n})^n}, \text{ то есть } (1 + \frac{1}{n+1}) > \sqrt[n+1]{(1 + \frac{1}{n})^n} \text{ или}$$

$(1 + \frac{1}{n})^{n+1} > (1 + \frac{1}{n})^n$, то есть $x_{n+1} > x_n \quad \forall n \in N$, значит, последовательность $\{x_n\}$ возрастает.

Пример 16. Доказать, что для последовательности $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ справедливо $2 < x_n < 3 \quad \forall n \in N$.

Решение.

1. Используя формулу бинома Ньютона, получаем

$$x_n = (1 + \frac{1}{n})^n = 1 + C_n^1 \cdot \frac{1}{n} + C_n^2 \cdot \frac{1}{n} + \ldots + C_n^k \cdot \frac{1}{n^k} + \ldots + \frac{1}{n^n}.$$

Так как $\forall k \in N \quad \frac{1}{k!} \le \frac{1}{2^{k-1}}$ (доказать это неравенство можно методом математической индукции) и используя формулу для суммы геометрической прогрессии со знаменателем $\frac{1}{2}$, получаем

$$x_n < 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3.$$

Следовательно, последовательность $\{x_n\}$ ограничена, то есть

$$(1 + \frac{1}{n})^n < 3.$$

2. В силу неравенства Бернулли имеем

$(1 + \frac{1}{n})^{n+1} > (1 + \frac{1}{n})^n \ge 1 + \frac{n}{n} = 2$ следовательно, имеем

$$2 < (1 + \frac{1}{n})^n < 3.$$

Число е

Рассмотрим последовательность $\{x_n\}$, где $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ и докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = e$.

Доказательство существования предела последовательности (6.40) проводим на основании теоремы о сходимости монотонной последовательности, то есть нужно установить, что последовательность $\{x_n\}$ монотонно возрастает и ограничена сверху.

1. Рассмотрим две последовательности

$$x_n = (1 + \frac{1}{n})^n, \tag{6.46}$$

$$y_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}.$$

Отметим, что

$$y_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1} = (1 + \frac{1}{n})^n \cdot (1 + \frac{1}{n}) = x_n \cdot (1 + \frac{1}{n}).$$

Откуда следует, что

$$x_n < y_n \quad \forall n \in N, \text{ так как } 1 + \frac{1}{n} > 1.$$

2. Докажем, что последовательность $\{x_n\}$ возрастает для $n > 1$.

Для этого находим $\dfrac{x_n}{x_{n-1}}$, зная

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \frac{(n+1)^n}{n^n}$$ и

$$x_{n-1} = \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} = \frac{n^n}{(n-1)^n}\cdot\left(\frac{n-1}{n}\right),$$ получим

$$\frac{x_n}{x_{n-1}} = \frac{(n+1)^n(n-1)^n}{n^n\cdot n^n}\cdot\frac{n}{n-1} = \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n\cdot\frac{n}{n-1}. \qquad (6.47)$$

Из формулы для суммы n членов геометрической прогрессии, первый член которой 1, а знаменатель q $(0 < q < 1)$ имеем, что

$$1+q+q^2+\ldots+q^n = \frac{q^n-1}{q-1} < n \qquad (6.48)$$

Откуда, полагая в (6.48) $q = 1-\dfrac{1}{n^2}$ получим

$$\frac{\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n-1}{1-\frac{1}{n^2}-1} < n$$ или, после преобразований:

$$\frac{\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n}{\frac{n-1}{n}} > 1. \qquad (6.49)$$

Тогда из (6.47) в силу (6.49) имеем, что последовательность $\{x_n\}$ монотонно возрастает, так как $x_n > x_{n-1}$.

3. Докажем, что последовательность $\{y_n\}$ убывающая для $n > 1$.

Для этого находим $\dfrac{y_{n-1}}{y_n}$, зная $y_{n-1} = \left(1+\dfrac{1}{n-1}\right)^n = \left(\dfrac{n}{n-1}\right)^n$

и $y_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)n+1 = \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n\cdot\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$, получим

$$\frac{y_{n-1}}{y_n}=\frac{n^n\cdot n^n}{(n^2-1)^n}\cdot\frac{n}{n+1}=\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n\frac{n}{n+1}=\frac{\left(1+\dfrac{1}{n^2-1}\right)}{\dfrac{n+1}{n}}.$$

Из формулы для суммы n членов геометрической прогрессии, первый член которой равен 1, а знаменатель q ($q > 1$) имеем, что

$$1+q+q^2+\ldots+q^n=\frac{q^n-1}{q-1}>n \tag{6.50}$$

Откуда, полагая в (6.50) $q=1+\dfrac{1}{n^2}$ получим $\dfrac{\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^n-1}{1+\dfrac{1}{n^2}-1}>n$

или, после преобразований $\dfrac{\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^n}{\dfrac{n+1}{n}}>1$.

Так как $\left(1+\dfrac{1}{n^2-1}\right)^n>\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^n$, для $n > 1$, то есть последовательность $\{y_n\}$ убывающая.

4. Таким образом, последовательность (6.46) возрастает и ограничена сверху – значит, она имеет конечный предел, и по предложению Эйлера, его обозначают буквой e.

Итак $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e$.

Число e является иррациональным, оно служит основанием натуральных логарифмов и играет исключительно важную роль в математике и различных приложениях.

Отметим, что иррациональное число e получено было как предел рациональной числовой последовательности.

Справедливо, приближенное равенство

$$e = 2{,}1718281828459045.$$

3.5. Подпоследовательности. Принцип вложенных отрезков. Существование частичного предела у ограниченной последовательности

3.5.1. Подпоследовательности

Пусть $\{x_n\}$ *некоторая последовательность. Рассмотрим строго возрастающую последовательность* $\{n_k\}$ *натуральных чисел, то есть такую, что*

$$n_1 < n_2 < n_3 < \ldots < n_k < \ldots.$$

Тогда последовательность $\{y_k\}$*, где* $y_k = x_{nk}$ *при* $k \in N$*, называется подпоследовательностью последовательности* $\{x_n\}$ *и обозначается* $\{x_{nk}\}$*.*

Например, последовательность четных натуральных чисел 2, 4, 6, 8, 10 ..., взятых в порядке возрастания, является подпоследовательностью натуральных чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ..., а подпоследовательность 4, 6, 8, 2, 12, 10, 14 ... не является подпоследовательность последовательности натуральных чисел.

Отметим, что сама последовательность $\{x_n\}$ может рассматриваться как подпоследовательность последовательности $\{x_n\}$.

По определению последовательности, подпоследовательность – $\{x_{nk}\}$ образована из членов исходной последовательности $\{x_n\}$, при этом порядок следования членов в последовательности такой же, как и в данной последовательности $\{x_n\}$. В записи $\{x_{nk}\}$ число k означает порядковый номер члена последовательности x_{n1}, x_{n2}, x_{n3}, ..., а n_k – номер этого члена в исходной последовательности. Так как $n_k \ge k$, откуда следует, что при $k \to \infty$, то и $n_k \to \infty$.

Если для подпоследовательности $\{x_{nk}\}$ *последовательности* $\{x_n\}$ *существует конечный или бесконечный* $\lim\limits_{n\to\infty} x_{nk} = a$*, то* a *называется частичным пределом последовательности* $\{x_n\}$*.*

Пример 17. Найти частичные пределы последовательности $\{x_n\}$, если:

1. $x_n = (-1)^n$.
2. $x_n = (1 + (-1)^n)n^2$.

Решение.

1. При $n=2m$ получим подпоследовательность $(-1)^{2m}$ последовательности $(-1)^n$, которая сходится к 1. При $n=2m-1$ получим подпоследовательность $(-1)^{2m-1}$ последовательности $(-1)^n$, которая сходится к (-1), то есть данная последовательность имеет два частичных предела: 1 и (-1).

2. При $n = 2m$, $\lim\limits_{n\to\infty}(1+(-1)^{2m})4m^2 = +\infty$,

а при $n = 2m - 1$, $\lim\limits_{n\to\infty}(1+(-1)^{2m-1})\cdot(2m-1)^2 = 0$, то есть данная последовательность имеет два частичных предела: $+\infty$ и 0.

Теорема 16 (свойство подпоследовательностей сходящейся последовательности). ***Если*** $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, ***то есть последовательность*** $\{x_n\}$ ***сходится к числу a, то и любая подпоследовательность этой последовательности сходится и имеет своим пределом число a.***

Доказательство. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, тогда

$$\forall\varepsilon>0 \qquad \exists N_\varepsilon \qquad n\ge N_\varepsilon \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon .$$

Пусть $\{x_{nk}\}$ некоторая подпоследовательность последовательности $\{x_n\}$. Так как $k_{N\varepsilon}\ge N_\varepsilon$, то, начиная с номера $k_{N\varepsilon}$ элементы подпоследовательности $\{x_{nk}\}$ последовательности $\{x_n\}$ удовлетворяют неравенству $|x_{nk}-a|<\varepsilon$. А это значит, что подпоследовательность $\{x_{nk}\}$ сходится и имеет пределом число a.

Замечание 1. Справедливо и обратное утверждение: если все подпоследовательности данной последовательности $\{x_n\}$ сходятся, то пределы всех этих подпоследовательностей равны одному и тому же числу a; и более того $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Действительно, в силу того, что последовательность $\{x_n\}$ является также подпоследовательностью, то она сходится и имеет пределом некоторое число a. А, значит, и любая другая подпоследовательность также сходится и имеет тот же предел a.

Замечание 2. Подпоследовательности бесконечно больших последовательностей обладают таким же свойством, то есть каждая подпоследовательность бесконечно большой последовательности – бесконечно большая.

Замечание 3. Покажем, что из любой сходящейся последовательности можно выделить монотонную сходящуюся подпоследовательность.

Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ (то есть последовательность сходится и имеет пределом число a), то в любой ε-окрестности точки a находятся все x_n, быть может, за исключением конечного числа.

Следовательно, имеет место, по крайней мере, один из следующих трех случаев:

1) последовательность $\{x_n\}$ содержит бесконечно много элементов, равных a;

2) в любой ε-окрестности точки имеется бесконечно много элементов последовательности $\{x_n\}$ таких, что $x_n < a$, то есть в левосторонней ε-окрестности точки a $(a - \varepsilon,\ a)$ находится бесконечно много элементов последовательности $\{x_n\}$;

3) в любой ε-окрестности точки a находится бесконечно много элементов последовательности $\{x_n\}$, удовлетворяющих неравенству $x_n > a$, то есть в правосторонней ε-окрестности точки a: $(a;\ a + \varepsilon)$.

Отметим, что если бы ни один из этих случаев не имел места, то в некоторой ε-окрестности точки находилось бы лишь конечное число элементов последовательности, то есть, точка a – не предел последовательности $\{x_n\}$ по предположению.

Построим для каждого из трех случаев монотонную сходящуюся подпоследовательность.

1) в этом случае сходящейся монотонной последовательностью будет последовательность равных a элементов;

Второй и третий случаи рассматриваются аналогично (различие состоит лишь в левосторонней или правосторонней окрестностях точки a), поэтому ограничимся рассмотрением второго случая.

2) в этом случае имеем, что в любом интервале $(a - \varepsilon;\ a)$ содержится бесконечно много элементов последовательности $\{x_n\}$.

Пусть x_{k1} – один из элементов последовательности $\{x_n\}$ такой, что $x_{k1} < a$, то есть $x_{k1} \in (a - \varepsilon;\ a)$. Затем из бесконечного множества элементов последовательности $\{x_n\}$, находящихся в интервале (x_{k1}; a) выбираем элемент x_{k2}, где $k_2 > k_1$. Затем из бесконечного множества элементов последовательности $\{x_n\}$, находящихся в интервале (x_{k_2}; a) выбираем элемент x_{k_3}, для которого $k_3 > k_2$. Продолжая этот процесс неограниченно, получим монотонно возрастающую подпоследовательность $\{x_{nk}\}$ последовательности $\{x_n\}$, которая, в силу теоремы 16 сходится к a.

3.5.2. Принцип вложенных отрезков

Последовательность отрезков Δ_1, Δ_2, ..., Δ_n, где отрезок $\Delta_n = [a_n; b_n]$, называется стягивающейся, если:

1) каждый последующий отрезок принадлежит предыдущему, то есть

$$\forall n \in N \Rightarrow \Delta_{n+1} \subset \Delta_n \tag{6.51}$$

или $a_1 \le a_2 \le a_3 \le \ldots \le a_{n+1} \le \ldots \le b_{k+1} \le b_n \le \ldots \le b_2 \le b_1$;

2) длина n-ного отрезка Δ_n стремится к нулю при $n \to \infty$, т.е.

$$\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0 \tag{6.52}$$

Теорема 17 (Кантора) (принцип вложенных отрезков). ***Если последовательность отрезков является стягивающейся, то существует единственная точка, принадлежащая всем отрезкам этой последовательности.***

Доказательство. Так как, последовательность отрезков является стягивающейся, тогда $a_1 \le a_2 \le \ldots \le b_m$ при любом заданном натуральном m. А это значит, что последовательность чисел a_n не убывает и ограничена сверху числом b_m при любом $m \in N$, и по теореме 15 (п. 3.4) существует число c, такое, что

$$\lim_{n\to\infty} a_n = c\,, \tag{6.53}$$

при этом справедливы неравенства

$$a_n \le c \le b_m\,, \tag{6.54}$$

в которых натуральные числа m и n произвольные, тогда, в частности (n = 1, 2, ...) $a_n \le c \le b_n$.

Следовательно, $c \in \Delta_n, \quad \forall n \in N$. А это значит, что существует точка c, принадлежащая всем отрезкам Δ_n.

Покажем, что найденная точка c – единственная. Предположим, что существует другая точка $c_1 \in \Delta_n \quad \forall n \in N$. Тогда из (6.54) имеем $a_n \le c, \quad c_1 \le b_n$, а значит

$$b_n - a_n \ge |c - c_1| \qquad \forall n \in N,$$

но это противоречит (6.52) из определения стягивающихся отрезков. Отметим, в силу (6.53), что

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\left[(b_n - a_n) + a_n\right] = c.$$

Замечание. Если последовательность отрезков является стягивающей, то есть выполняются условия (6.51) и (6.52), то последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ являются сходящимися, причем

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = c, \text{ где } c = \sup\{a_n\} = \inf\{b_n\}.$$

3.5.3. Существование частичного предела у ограниченной последовательности

Теорема 18 (Больцано-Вейерштрасса). ***Из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.***

Доказательство. Так как последовательность $\{x_n\}$ ограничена, тогда все члены последовательности $\{x_n\}$ принадлежат некоторому отрезку $[a;b]$, то есть

$$\exists a, b \quad \forall n \in N \Rightarrow x_n \in [a;b] = \Delta$$

Разделим отрезок $[a;b]$ пополам, тогда хотя бы в одной половине будет содержаться бесконечное множество элементов последовательности $\{x_n\}$, так как в противном случае, и во всем отрезке $[a;b]$ элементов $\{x_n\}$ было бы конечное число, что невозможно. Если обе половины содержат бесконечное множество элементов последовательности $\{x_n\}$, то выбирают один из них (например, правый).

Пусть $[a_1; b_1]$ – выбранный отрезок, содержащий бесконечное множество элементов последовательности $\{x_n\}$, обозначим его через Δ_1, длина которого равна

$$b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}.$$

Разделив отрезок Δ_1 пополам, и выбирая из двух полученных отрезков указанным выше способом отрезок $\Delta_2 = [a_2; b_2]$, содержащий бесконечное множество элементов последовательности $\{x_n\}$ длина которого $b_2 - a_2 = \dfrac{b-a}{2^2}$.

Продолжая эти рассуждения, получим последовательность $\{\Delta_n\}$, где $\Delta_n = [a_n - b_n]$, отрезков таких, что

1. $\Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \ldots \supset \Delta_n \supset \Delta_{n+1} \supset \ldots$;
2. $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n} \to 0$ при $n \to \infty$.

Значит, $\{\Delta_n\}$ – стягивающая последовательность отрезков, и, по теореме Кантора (принцип вложенных отрезков) 17, существует единственная точка c, принадлежащая всем отрезкам, то есть

$$\exists\, c \quad \forall k \in N \Rightarrow c \in \Delta_k.$$

Покажем, что существует подпоследовательность $\{x_{nk}\}$ последовательности $\{x_n\}$ такая, что

$$\lim_{k\to\infty} x_{nk} = c.$$

Построение этой последовательности проведем индуктивно следующим образом:

– в качестве x_{n1} выберем любой (например, первый) из элементов $\{x_n\}$ последовательности, принадлежащих отрезку $[a_1; b_1]$.

– в качестве x_{n2} выберем любой (например, первый) из элементов $\{x_n\}$ последовательности, следующих за x_{n1} и принадлежащих отрезку $[a_2; b_2]$ и т. д.

– в качестве x_{nk} выбираем любой (например, первый) из элементов $\{x_n\}$ последовательности, следующих за ранее выбранными x_{n1}, x_{n2}, ..., $x_{nk\text{-}1}$ и принадлежащих отрезку $[a_k; b_k]$.

Возможность такого выбора, производимого последовательно, обуславливается тем, что каждый из отрезков $[a_k; b_k]$ содержит бесконечное множество элементов последовательности $\{x_n\}$. Так как $a_k \le x_{nk} \le b_k$ и $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = \lim\limits_{k\to\infty} b_k = c$, тогда в силу теоремы 15 (п. 3.4) имеем, что

$$\lim_{k\to\infty} x_{nk} = c.$$

Замечание 1. Теорему Больцано-Вейерштрасса можно сформулировать следующим образом: любая ограниченная последовательность имеет хотя бы один частичный предел.

Замечание 2. Из любой ограниченной последовательности можно выделить монотонную последовательность.

Замечание 3. Если последовательность $\{x_n\}$ ограничена, элементы которой принадлежат $[a; b]$, тогда $\lim\limits_{k\to\infty} x_{nk} = c = c \in [a; b]$, где $\{x_{nk}\}$ – любая подпоследовательность последовательности $\{x_n\}$.

Замечание 4. Существуют случаи, когда из неограниченной последовательности можно выделить сходящуюся последовательность. Например, последовательность

$$1,\ \frac{1}{2^2},\ 2,\ \frac{1}{2^3},\ 3,\ \frac{1}{2^3},\ \ldots,\ n,\ \frac{1}{2^n},\ \ldots$$

неограниченная, но подпоследовательность

$$\frac{1}{2^2},\ \frac{1}{2^3},\ \frac{1}{2^4},\ \ldots,\ \frac{1}{2^n}\ \ldots,$$

выделенная из исходной последовательности, является сходящейся.

Подчеркнем еще раз, что не из каждой неограниченной последовательности можно выделить сходящую подпоследовательность. Так, например, любая подпоследовательность неограниченной последовательности $\{2n+1\}$ расходится. Поэтому теорема Больцано-Вейерштрасса, вообще говоря, не имеет места для неограниченных последовательностей.

Аналогом теоремы 18 для неограниченных последовательностей является следующее утверждение.

Теорема 19. ***Из любой неограниченной последовательности можно выделить бесконечно большую подпоследовательность.***

Доказательство. Если $\{x_n\}$ – неограниченная последовательность, тогда найдутся элемент x_{k_1} последовательности, удовлетворяющей условию $|x_{k_1}| > 1$, элемент x_{k_2} последовательности $\{x_n\}$, удовлетворяющий условиям $|x_{k_2}| > 2,\ \ k_2 > k_1$. Аналогично, продолжая построение подпоследовательности, получим элемент x_{k_n} последовательности, удовлетворяющий условиям $|x_{k_n}| > n,\ \ k_n > k_{n-1}$.

Тогда подпоследовательность $x_{k_1}, x_{k_2}, x_{k_3}, \ldots, x_{k_n}$, построенная выше, является бесконечно большой.

Замечание. Теорему 19 можно сформулировать следующим образом: *любая неограниченная последовательность имеет частичный предел, равный* ∞.

3.6. Фундаментальная последовательность. Критерий Коши сходимости последовательности

3.6.1. Фундаментальная последовательность

Решая вопрос о сходимости последовательности $\{x_n\}$ по определению, приходится оценивать разность $|x_n - a|$ (a – предполагаемый предел), но число a требуется предугадать, исследуя последовательность $\{x_n\}$. Естественно, возникает вопрос можно ли указать критерий сходимости последовательности по величине и поведению ее элементов.

Последовательность $\{x_n\}$ называют фундаментальной, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $n_\varepsilon \in N$, такое что для $\forall n \ge n_\varepsilon$ и $m \ge n_\varepsilon$ справедливо неравенство $|x_n - x_m| < \varepsilon$.

Или в другом виде последовательность $\{x_n\}$ является фундаментальной, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists n_\varepsilon \in N\ \ \forall n \ge n_\varepsilon \text{ и } \forall_m \ge n_\varepsilon \Rightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon \qquad (6.55)$$

или

$$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists n_\varepsilon \in N\ \ \forall n \ge n_\varepsilon \text{ и } \forall p \in N \Rightarrow |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon. \qquad (6.56)$$

Из определения фундаментальной последовательности следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такой элемент x_N фундаментальной последовательности, в ε-окрестности которого находятся все элементы последовательности, начиная с номера N. Другими словами, вне интервала $(x_N - \varepsilon,\ \ x_N + \varepsilon)$ находится не более чем конечное число элементов последовательности.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 20. ***Фундаментальная последовательность является ограниченной.***

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$, тогда из определения фундаментальной последовательности имеем, что $\exists n_\varepsilon \in N$, такой, что для всех $n \geq n_\varepsilon$ и для всех $m \geq n_\varepsilon$, справедливо неравенство $\left|x_n - x_m\right| < \varepsilon$, и в частности, $\left|x_n - x_{n\varepsilon}\right| < \varepsilon$.

Так как $\left|x_n\right| = \left|(x_n - x_{n\varepsilon}) + x_{n\varepsilon}\right| \leq \left|x_{n\varepsilon}\right| + \left|x_n - x_{n\varepsilon}\right| < \left|x_{n\varepsilon}\right| + \varepsilon$ для всех $n \geq n_\varepsilon$, то для всех $n \in N$ справедливо неравенство $\left|x_n\right| < C$, где $C = \max(\left|x_1\right|, \left|x_2\right| \ldots \left|x_{n\varepsilon - 1}\right|, \left|x_{n\varepsilon}\right| + \varepsilon)$.

А это значит, что последовательность $\{x_n\}$ ограниченная.

Замечание. Произведение двух фундаментальных последовательностей есть фундаментальная последовательность.

3.6.2. Необходимое и достаточное условие сходимости последовательности.

Теорема 21 (критерий Коши). ***Для того чтобы последовательность $\{x_n\}$ имела конечный предел (сходилась), необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.***

Доказательство (необходимость). Пусть $\{x_n\}$ сходится (имеет конечный предел) к a, доказать, что $\{x_n\}$ – фундаментальная последовательность.

Так как $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$, то по определению предела имеем

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N_\varepsilon \in N \ \ \forall p \geq N_\varepsilon \Rightarrow \left|x_p - a\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Полагая в (6.56) сначала $p = n$, а затем $p = m$, и используя неравенство для модуля разности, получим

$$\left|x_n - x_m\right| = \left|(x_n - a) - (x_m - a)\right| \leq \left|x_n - a\right| + \left|x_m - a\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Значит, для любого $n \geq N_\varepsilon$ и для любого $m \geq N_\varepsilon$, справедливо неравенство $|x_n - x_m| < \varepsilon$, то есть имеет место (6.55) при $n_\varepsilon = N_\varepsilon$, а это значит, что $\{x_n\}$ – фундаментальная последовательность.

Доказательство (достаточность). Пусть $\{x_n\}$ – фундаментальная последовательность, докажем, что она сходится (имеет конечный предел).

Так как $\{x_n\}$ – фундаментальная последовательность, тогда по определению имеем

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists n_\varepsilon \in N \ \ \forall n \geq n_\varepsilon \text{ и } \forall m > n_\varepsilon \Rightarrow |x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (6.57)$$

Так как фундаментальная последовательность $\{x_n\}$ является ограниченной (теорема 20), то по теореме Больцано-Вейерштрасса из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x_{nk}\}$, имеющую пределом число a, то есть

$$\lim_{k\to\infty} x_{nk} = a. \quad (6.58)$$

Докажем, что число, a – предел исходной последовательности $\{x_n\}$. По определению предела (6.58) имеем

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists k_\varepsilon \in N \ \ \forall k \geq k_\varepsilon \Rightarrow |x_{nk} - a| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (6.59)$$

Выбирая $N_\varepsilon = \max(n_\varepsilon, n_{k\varepsilon})$, зафиксируем в (6.58) номер $n_k \geq N_\varepsilon$ (такой номер существует, так как $n_k \to \infty$ при $k \to \infty$). Тогда при $m = n_k$ и при всех $n \geq N_\varepsilon$ из (6.57) имеем, что справедливо неравенство

$$|x_n - x_{nk}| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (6.60)$$

Тогда из (6.59) и (6.60) имеем, что при всех $n \geq N_\varepsilon$ справедливо неравенство

$$|x_n - a| = |(x_n - x_{nk}) + (x_{nk} - a)| \leq |x_n - x_{nk}| + |x_{nk} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

то есть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, а это значит, что фундаментальная последовательность имеет конечный предел, то есть сходится.

3.7. Теорема Штольца

Для исследования сходимости частного $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ во многих случаях полезно следующее утверждение.

Теорема Штольца 22. ***Если $\{y_n\}$ – возрастающая бесконечно большая последовательность, а последовательность***

$$\left\{\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}\right\} \tag{6.61}$$

сходится и имеет предел а. Тогда последовательность $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ сходится и имеет предел а. Таким образом,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = a.$$

Доказательство. Так как по условию теоремы последовательность (6.61) сходится и имеет пределом число a, тогда последовательность $\{\alpha_n\}$, где

$$\alpha_n = \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} - a \tag{6.62}$$

бесконечно малая, то есть $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n = 0$.

Пусть N – любое фиксированное число (номер) и $n > N$, из (6.62) имеем

$$x_{N+1} - x_N = a(y_{N+1} - y_N) + \alpha_{N+1}(y_{N+1} - y_N),$$
$$x_{N+2} - x_{N+1} = a(y_{N+2} - y_{N+1}) + \alpha_{N+2}(y_{N+2} - y_{N+1}),$$
$$\dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots,$$
$$x_{n-1} - x_{n-2} = a(y_{n-1} - y_{n-2}) + \alpha_{n-1}(y_{n-1} - y_{n-2}),$$
$$x_n - x_{n-1} = a(y_n - y_{n-1}) + \alpha_n(y_n - y_{n-1}).$$

Складывая эти равенства, получим

$$\begin{gathered} x_n - x_N = ay_n - ay_N + \alpha_{N+1}(y_{N+1} - y_N) + \alpha_{N+2}\times \\ \times(y_{N+2} - y_{N+1}) + \dots + \alpha_{n-1}(y_{n-1} - y_{n-2}) + \alpha_n(y_n - y_{n-1}) \end{gathered}. \tag{6.63}$$

В силу того, что $\{y_n\}$ – возрастающая и бесконечно большая последовательность, то, начиная с некоторого номера, все $y_n > 0$, считаем, что при $n \ge N$ $\quad y_n > 0$.
Тогда из равенства (6.63) имеем

$$\frac{x_n}{y_n} - a = \frac{x_N - ay_N}{y_n} +$$
$$+\frac{\alpha_{N+1}(y_{N+1} - y_N) + \alpha_{N+2}(y_{N+2} - y_{N+1}) + \ldots + \alpha_n(y_n - y_{n-1})}{y_n}.$$

Так как последовательность $\{y_n\}$ возрастающая, то разность $y_{k+1} - y_k > 0$ для $k = N, N+1, \ldots, n-1$.

Тогда из последнего равенства имеем

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - a\right| \le \left|\frac{x_N - ay_N}{y_n}\right| +$$
$$+\frac{|\alpha_{N+1}|(y_{N+1} - y_N) + |\alpha_{N+2}|(y_{N+2} - y_{N+1}) + \ldots + |\alpha_n|(y_n - y_{n-1})}{y_n} \qquad (6.64)$$

Докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = a$. Для этого достаточно доказать, что $\forall\varepsilon > 0$ $\exists$номер N, что при $n \ge N$ справедливо неравенство

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - a\right| < \varepsilon.$$

Так как $\{\alpha_n\}$ бесконечно малая последовательность, то по заданному $\varepsilon > 0$ выберем номер N так, чтобы при $n \ge N$ выполняется неравенство $|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Выбирая номер N такой, чтобы при $n \ge N$ выполнялось неравенство

$$\left|\frac{x_N - ay_N}{y_n}\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Этот выбор номера N возможен, так как число $x_N - ay_N$ фиксировано, а последовательность $\{y_n\}$ бесконечно большая, поэтому последовательность $\left\{\frac{x_N - ay_N}{y_n}\right\}$ бесконечно малая.

Пусть $n \geq N$, тогда из неравенства (6.64) имеем

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - a\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{(y_{N+1} - y_N) + (y_{N+2} - y_{N+1}) + \ldots + (y_n - y_{n-1})}{y_n}$$

или $\left|\frac{x_n}{y_n} - a\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{y_n - y_N}{y_n}$.

Так как $n \geq N$ $y_n - y_N \leq y_n$ и $y_n > 0$, то $\frac{y_n - y_N}{y_n} \leq 1$, поэтому при $n \geq N$ из последнего неравенства следует $\left|\frac{x_n}{y_n} - a\right| < \varepsilon$.

Что и требовалось доказать.

Замечание 1. Если $\{y_n\}$ – возрастающая бесконечно большая последовательность, а последовательность $\left\{\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}\right\}$ также бесконечно большая и стремиться к бесконечности определенного знака, то $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ – бесконечно большая.

Действительно, пусть $\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = A_n$. Последовательность $\{A_n\}$ бесконечно большая. При $n \geq N$ имеем

$$x_{N+1} - x_N = A_{N+1}(y_{N+1} - y_N),$$
$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots,$$
$$x_n - x_{n-1} = A_n(y_n - y_{n-1}).$$

Складывая полученные равенства, найдем

$$x_n - x_N = A_{N+1}(y_{N+1} - y_N) + \ldots + A_n(y_n - y_{n-1}).$$

Откуда $\frac{x_n}{y_n} = \frac{A_{N+1}(y_{N+1} - y_N) + \ldots + A_n(y_n - y_{n-1})}{y_n} + \frac{x_N}{y_n}$.

Из этого соотношения имеем

$$\left|\frac{x_n}{y_n}\right| \geq \left|\frac{A_{N+1}(y_{N+1} - y_N) + \ldots + A_n(y_n - y_{n-1})}{y_n}\right| - \left|\frac{x_N}{y_n}\right|. \qquad (6.65)$$

Для определенности считаем, что при $n \geq N$ элементы $\{y_n\}$ и $\{A_n\}$ положительны. Если $\varepsilon > 0$, то существует номер N, такой, что при $n \ge N$ справедливо неравенство $A_n > 4\varepsilon$, и при $n \ge N$

$$\left|\frac{x_N}{y_n}\right| < \varepsilon \qquad \frac{y_N}{y_n} < \frac{1}{2}.$$

Существование такого N возможно, так как последовательности $\{A_n\}$ и $\{y_n\}$ бесконечно большие и их члены, начиная с некоторого номера, положительны. Тогда из неравенства (6.65) следует

$$\left|\frac{x_n}{y_n}\right| > 4A\,\frac{(y_{N+1} - y_N) + \ldots + (y_n - y_{n-1})}{y_n} - \left|\frac{x_N}{y_n}\right|$$

или

$$\left|\frac{x_n}{y_n}\right| > 4A\left(1 - \frac{y_N}{y_n}\right) - A > 2A - A = A.$$

Значит $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ – бесконечно большая последовательность.

Пример 18. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, где $a_n = \dfrac{1^5 + 2^5 + \ldots + n^5}{n^6}$.

Решение. Пусть $x_n = 1^5 + 2^5 + \ldots + n^5$, а $y_n = n^6$, тогда $a_n = \dfrac{x_n}{y_n}$. И по теореме Штольца исследуем сходимость последовательности $\left\{\dfrac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}\right\}$.

$$\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \frac{n^5}{n^6 - (n-1)^6} = \frac{n^5}{(n^3 - (n-1)^3)(n^3 + (n-1)^3)} =$$

$$= \frac{n^5}{\left[n^2 + n(n-1) + (n-1)^2\right] \times \left[(2n-1)(n^2 - n(n-1) + (n-1)^2\right]} =$$

$$= \frac{n^5}{n^2\left(3 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right)\cdot n\left(2 - \frac{1}{n}\right)\cdot n^2\left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)} =$$

$$= \frac{1}{\left(3 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right)\left(2 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)}.$$

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \dfrac{1}{6}$.

Следовательно, по теореме Штольца имеем $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{1}{6}$.

Замечание 2. Используя теорему Штольца устанавливаем, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^m + 2^m + \ldots + n^m}{n^{m+1}} = \frac{1}{m+1}.$$

Пример 19. (это предложение доказано Коши). Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, то есть последовательность $\{a_n\}$ сходится, но последовательность $\left\{\dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\right\}$ – среднее арифметическое элементов последовательности $\{a_n\}$, сходится к тому же пределу a, что и последовательность $\{x_n\}$.

Решение. Пусть $x_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, а $y_n = n$.

Тогда $\dfrac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \dfrac{a_n}{n-(n-1)} = a_n$.

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Пример 20. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^n}{n}$.

Решение. Пусть $3^n = x_n$, а $y_n = n$ и, рассматривая последовательность $\left\{\dfrac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}\right\}$, находим

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n - 3^{n-1}}{n-(n-1)} = \lim_{n\to\infty} 3^n \left(1 - \frac{1}{3}\right) = +\infty.$$

Тогда в силу замечания 1 к теореме Штольца имеем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{n} = +\infty.$$

Замечание 3. Используя замечание 1 к теореме Штольца устанавливаем, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n} = +\infty, \text{ если } a > 1 \text{ и } \lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n} = 0, \text{ если } 0 < a < 1.$$

§4. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

1. Понятие предела функции в точке.
2. Определение предела функции в точке.
3. Различные типы пределов функции в точке.
4. Бесконечно большая функция. Бесконечно малые функции.
5. Свойства пределов функции в точке. Теоремы о пределах.
6. Замечательные пределы.
7. Основные методы вычисления пределов.
8. Эквивалентные бесконечно малые функции. Сравнение бесконечно малых функций.

4.1. Понятие предела функции в точке

Важнейшую роль в курсе математического анализа играет понятие предела функции в точке, связанное с поведением данной функции в окрестности этой точки.

Пусть x_0 – некоторая точка числовой оси, δ-окрестностью точки x_0 называется интервал длины 2δ с центром в точке x_0, то есть множество

$$\forall_{\delta}(x_0) = \left\{x : \left|x - x_0\right| < \delta\right\} = \left\{x : x_0 - \delta < x < x_0 + \delta\right\}.$$

Если из этого интервала удалить точку x_0, то получим множество, которое называют проколотой (выколотой) δ-окрестностью точки x_0 и обозначают $U_{\delta}\ (x_0)$, то есть множество

$$U_{\delta}(x_0) = \left\{x : \left|x - x_0\right| < \delta,\ \ x \neq a\right\} = \left\{x : 0 < \left|x - x_0\right| < \delta\right\}.$$

Прежде чем давать определение предела функции в точке рассмотрим следующие примеры.

Пример 1. Исследовать поведение функции

$$f\ (x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

в окрестности точки $x_0 = 2$.

Решение. Функция $f\,(x)$ определена при всех $x \in R$, кроме $x_0 = 2$, при этом $f\,(x) = x + 2$, при $x \neq 2$. График данной функции – это прямая $f(x) = x + 2$, при $x \neq 2$, а при $x = 2$ $f(x)$ не определена, изображен на рис. 6.5.

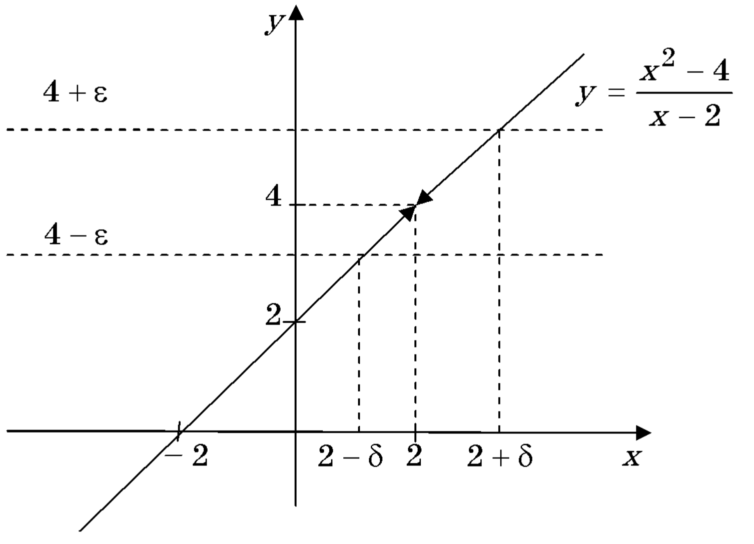


Рис. 6.5

Из графика функции (рис. 6.5) имеем, что значения функции близки к 4, если значения x близки к 2 $(x \neq 2)$. Дадим этому утверждению точный смысл.

Пусть задано любое число $\varepsilon > 0$ и требуется найти число $\delta > 0$ такое, что для всех x, принадлежащих проколотой δ-окрестности точки $x = 2$ значения функции $f(x)$ отличается от числа 4 по абсолютной величине меньше, чем на ε.

Другими словами, нужно найти число $\delta > 0$ такое, что для всех $x \in U_\delta(x_0)$ соответствующие точки графика функции $y = f(x)$ лежали в горизонтальной полосе, ограниченной прямыми $y = 4 - \varepsilon$ и $y = 4 + \varepsilon$, то есть выполнялось условие $f(x) \in U_\varepsilon(4)$.

В этом случае имеем, что функция $f(x)$ стремится к 4 при x, стремящемся к 2, а число 4 называют пределом $f(x)$ при $x \to 2$ и пишут

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 2.$$

Пример 2. Исследуем поведение функции

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x, & \text{если } x < 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \\ 1\text{-}x^2, & \text{если } x > 0 \end{cases}$$

в окрестности точки $x = 0$.

Решение. Из графика данной функции (рис. 6.6) имеем, что для любого $\varepsilon > 0$ можно найти (существует) $\delta > 0$ такое, что для всех $x \in U_\delta(0)$ выполняется условие $f(x) \in U_\varepsilon(1)$.

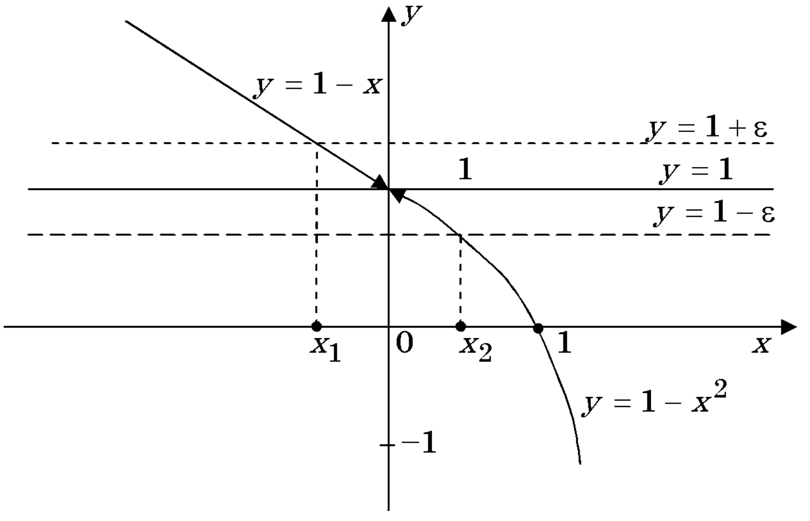


Рис. 6.6

Действительно, прямые $y = 1 + \varepsilon$ и $y = 1 - \varepsilon$ пересекают график функции $y = f(x)$ в точках, абсциссы которых равны $x_1 = -\varepsilon$; $x_2 = \sqrt{\varepsilon}$. Пусть $\delta = \min(|x_1|, x_2) = \min(\varepsilon, \sqrt{\varepsilon})$. Тогда если $|x| < \delta$ $(x \neq 0)$, то $|f(x) - 1| < \varepsilon$, то есть для всех $x \in U_\varepsilon(0)$ выполняется условие $f(x) \in U_\varepsilon(1)$. В этом случае имеем

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 1.$$

Отметим, что в первом примере функция не определена в точке $x = 2$, а во втором – функция определена в точке $x = 0$, но значение функции в точке $x = 0$ не совпадает с ее пределом при $x \to 0$.

4.2. Определение предела функции в точке

В этом пункте будут рассмотрены два определения предела функции в точке и доказана их эквивалентность.

Определение 1 (предела функции в точке по Коши $(\varepsilon - \delta)$). *Число A называется пределом функции f (x) в точке x = a, если эта функция определена в некоторой окрестности точки x = a, за исключением, быть может, самой точки a, и для любого* $\varepsilon > 0$

существует число $\delta > 0$ *такое, что для всех x, удовлетворяющих условию* $|x - a| < \delta$ $(x \neq a)$, *выполняется неравенство*

$$|f(x) - A| \leq \varepsilon.$$

В этом случае пишут $f(x) \to A$ *при* $x \to a$ *или*

$$\lim_{x \to a} f(x) = A.$$

Используя логические символы определения предела функции по Коши можно записать так

$$\left(\lim_{x \to a} f(x) = A\right) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0 \quad \forall x \quad |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon,$$

или, используя понятие окрестности, в виде

$$\left(\lim_{x \to a} f(x) = A\right) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) \quad \forall x \in U_\delta(a) \Rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(A).$$

Таким образом, число A есть предел функции в точке a, если для любой ε-окрестности точки A, можно найти такую проколотую δ-окрестность точки a, что для всех x, принадлежащих этой δ-окрестности, соответствующие значения функции содержатся в ε-окрестности числа A.

С геометрической точки зрения число A предел $f(x)$ при $x \to a$ означает следующее: какую бы горизонтальную ε-полосу вдоль прямой $y = A$ ни взять, всегда найдется вертикальная δ-полоса с осью симметрии $x = a$ такая, что все точки графика функции $y = f(x)$, расположенные в вертикальной δ-полосе, кроме, быть может, точки, лежащей на прямой $x = a$, обязательно попадут в выбранную горизонтальную ε-полосу.

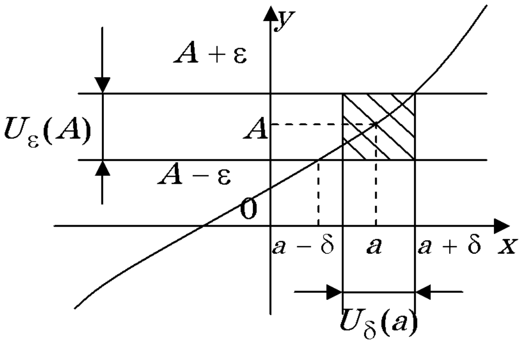


Рис. 6.7

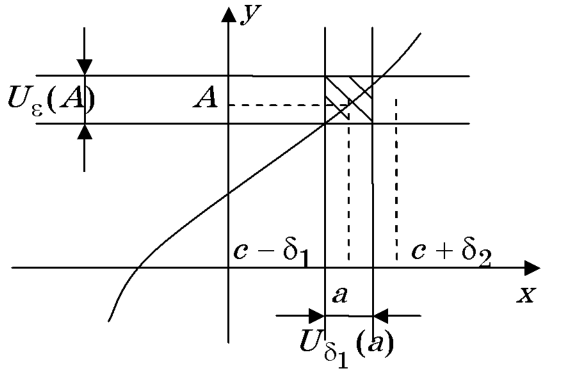


Рис. 6.8

Отметим, что величина $\delta = \delta\ (\varepsilon)$ существенно зависит от выбора ε.

Пример 3. Доказать, что $\lim\limits_{x\to 2}(4x-1)=7$.

Решение. Выбираем произвольное $\varepsilon > 0$ и найдем $\delta\ (\varepsilon) > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x-2| < \delta$, выполняется неравенство $|(4x-1)-7| < \varepsilon$, то есть $|x-2| \le \frac{\varepsilon}{4}$.

Выбирая $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$, получим, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x-2| \le \delta$, $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$, справедливо неравенство $|(4x-1)-7| < \varepsilon$. Значит,

$$\lim_{x\to 2}(4x-1)=7.$$

Пример 4. Доказать, что $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{12}} \sin 2x = \frac{1}{2}$.

Решение. Имеем $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\delta\ (\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2}$, что $\forall x$, $\left|x-\frac{\pi}{12}\right| \le \frac{\varepsilon}{2}$,

$$\left|\sin 2x - \frac{1}{2}\right| = \left|\sin 2x - \sin\frac{\pi}{6}\right| =$$

что

$$= 2\left|\sin\frac{2x-\frac{\pi}{6}}{2}\right|\cdot\left|\cos\frac{2x+\frac{\pi}{6}}{2}\right| \le 2\cdot\left|\sin\frac{2x-\frac{\pi}{6}}{2}\right| \le 2\cdot\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Значит $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{12}} \sin 2x = \frac{1}{2}$.

С геометрической точки зрения $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{12}} \sin 2x = \frac{1}{2}$ (рис. 6.9).

Определение 2 (предела функции в точке по Гейне, через числовые последовательности). *Число A называется пределом функции f (x) в точке a, если эта функция определена в некоторой проколотой окрестности точки a* ($\exists\delta > 0\quad \overset{\circ}{U}_\delta(a) \subset D(f)$) *и для любой последовательности* $\{x_n\}$, *сходящейся к a, такой, что*

$\forall n \in N \quad x_n \subset U_\delta(a)$, соответствующая последовательность значений функций $\{f\ (x_n)\}$ сходится к одному и тому же числу A.

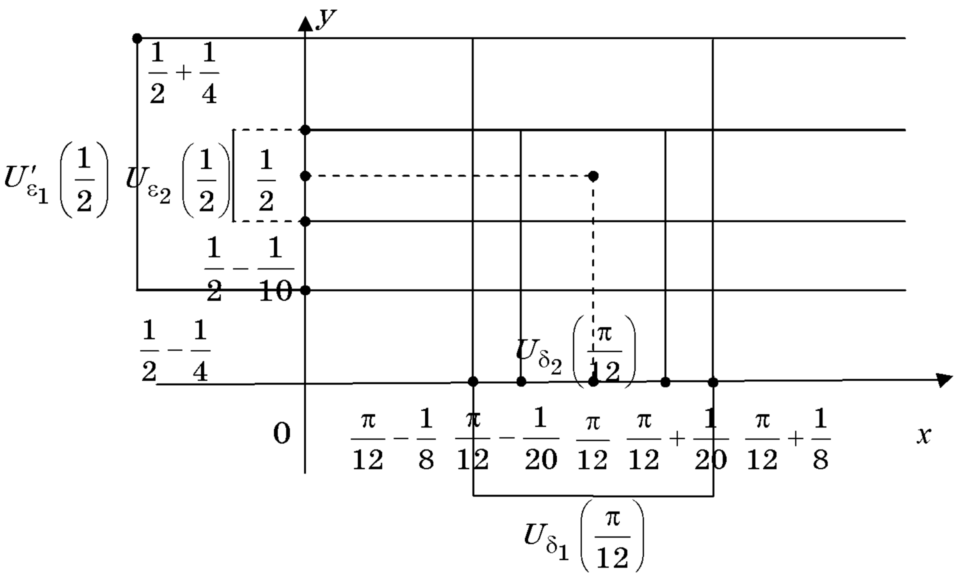


Рис. 6.9

При решении задач, связанных с нахождением предела по Гейне за последовательность $\{x_n\}$, сходящуюся к a, принимают

$$x_n = a + \frac{(-1)^n}{n}.$$

Определение предела функции в точке по Гейне очень удобно при доказательстве того, что данная функция не имеет предела в данной точке.

Пример 5. Доказать, что функция

$$f\ (x) = \sin\frac{1}{x}$$

не имеет предела в точке $x = 0$.

Решение. Исходя из определения предела функции в точке по Гейне, достаточно показать, что существуют последовательности $\{x_n\}$ и $\{\overline{x_n}\}$ с отличными от нуля членами, сходящимися к точке $x = 0$, такие, что $\lim\limits_{n\to\infty} f\ (x_n) \neq \lim\limits_{n\to\infty} f\ (\overline{x_n})$.

Рассмотрим следующие две последовательности

$$x_n = \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)^{-1} \text{ и } \overline{x_n} = (\pi n)^{-1}.$$

Тогда имеем

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \overline{x_n} = 0, \text{ а } \lim_{n\to\infty} f\ (x_n) = 1, \quad \lim_{n\to\infty} f\ (\overline{x_n}) = 0.$$

Следовательно, функция $\sin\frac{1}{x}$ не имеет предела в точке $x = 0$.

Эквивалентность определений предела функции в точке по Коши и по Гейне

Теорема 23. ***Определения предела функции в точке по Коши и по Гейне эквивалентны.***

Доказательство. Отметим, что в определениях предела функции f (x) в точке $x = 0$ по Коши и по Гейне предполагается, что $f\,(x)$ определена в некоторой проколотой окрестности точки a, то есть существует положительное число $\delta > 0$ такое, что $U_\delta(a) \subset D\ (f)$.

1. Пусть число A есть предел функции $f\ (x)$ в точке a по Коши, показать, что число A предел $f\,(x)$ в точке a по Гейне. Если число A есть предел функции $f\ (x)$ в точке a по Коши, тогда существует положительное число $\delta > 0$, такое что $U_\delta(a) \subset D\ (f)$ и

$$\forall\varepsilon > 0 \ \ \exists\delta_\varepsilon \in (0;\delta) \ \ \forall x \in U_{\delta_\varepsilon}(a) \Rightarrow f\ (x) \in U_\varepsilon(A). \tag{6.66}$$

Пусть теперь $\{x_n\}$ произвольная последовательность, сходящаяся к числу a, такая, что $x_n \in U_\delta(a)$ для любого $n \in N$. Согласно определению предела последовательности, для найденного в (6.66) положительного числа $\delta = \delta_\varepsilon(\varepsilon) > 0$, существует номер n_δ, такой, что $\forall n \geq n_\delta \Rightarrow x_n \in U_\delta(a)$, откуда в силу условия (6.66) следует, что $f\ (x_n) \in U_\varepsilon(A)$. Таким образом, имеем

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \quad \forall n \geq N_\varepsilon \Rightarrow f\ (x_n) \in U_\varepsilon(A), \tag{6.67}$$

где $N_\varepsilon = n_\delta(\varepsilon)$, при этом условие (6.67) выполняется для любой последовательности $\{x_n\}$ такой, что $\{x_n\} \to a$ и $x_n \in U_{\delta_\varepsilon}(a) \subset D\ (f)$. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} f\ (x_n) = A$, то есть число A предел функции $f\,(x)$ в точке a по Гейне.

2. Пусть число A есть предел функции $f(x)$ в точке a по Гейне, тогда докажем, что число A предел функции $f(x)$ по Коши, то есть имеет место условие (6.66). Предположим, что это неверно. Тогда имеем

$$\exists\ \varepsilon_0 > 0 \quad \forall\delta \in (0; \delta_0)\ \exists\ x\ (\delta) \in U_\delta(a) \quad |f(x)\delta - A| \geq \varepsilon_0. \quad (6.68)$$

Согласно (6.68) за δ можно взять любое число, принадлежащее полуинтервалу $(0; \delta_0]$. Выбирая $\delta = \dfrac{\delta_0}{n}$, $n \in N$, и пусть $x_n = x\left(\dfrac{\delta_0}{n}\right)$. Тогда в силу (6.68) для любого $n \in N$ выполняются неравенства

$$|x_n - a| < \frac{\delta_0}{n}, \quad (6.69)$$

$$|f\ (x_n) - A| \geq \varepsilon_0. \quad (6.70)$$

Из (6.69) следует, что $x_n \to a$ и $x_n \in U_{\delta_0}(a)$ при всех $n \in N$, а из (6.70) следует, что число A не может быть пределом последовательности $\{f\ (x_n)\}$. Значит, число A не является пределом функции f в точке a по Гейне. Полученное противоречие доказывает, что должно выполняться утверждение (6.66).

Упражнение 1. Доказать, что если функция $f\ (x)$ имеет предел в точке a, то он единственный.

4.3. Различные типы пределов функции в точке

4.3.1. Односторонние конечные пределы

Число A называют пределом слева функции $f(x)$ в точке а и обозначают $\lim\limits_{x \to a-0} f\ (x)$, если

$$\forall\varepsilon > 0, \quad \exists\ \delta_\varepsilon > 0, \quad \forall x \in (a - \delta_\varepsilon, a) \Rightarrow |f\ (x) - A| < \varepsilon.$$

С геометрической точки зрения число A предел слева функции f (x) в точке a означает следующее: *какую бы горизонтальную* ε*-полосу вдоль прямой y = A ни взять, всегда найдется вертикальная полоса, лежащая между прямыми* $x = a - \delta_\varepsilon$, $x = a$ *такая, что все точки графика функции f (x),* *расположенные в вертикальной полосе, кроме, может быть, точки, лежащей на прямой x = a, обязательно попадут во взятую горизонтальную полосу* (рис. 6.10).

Пример 6. Функция

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0, \\ 1\text{-}x, & x \ge 0 \end{cases}$$

в точке $x = 0$ (рис. 6.11) имеет левосторонний предел, равный 0.

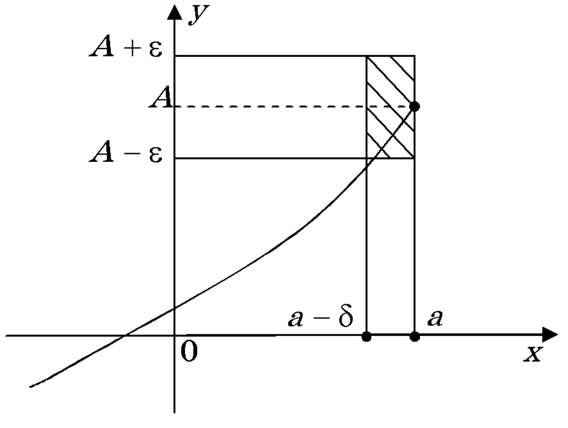


Рис. 6.10

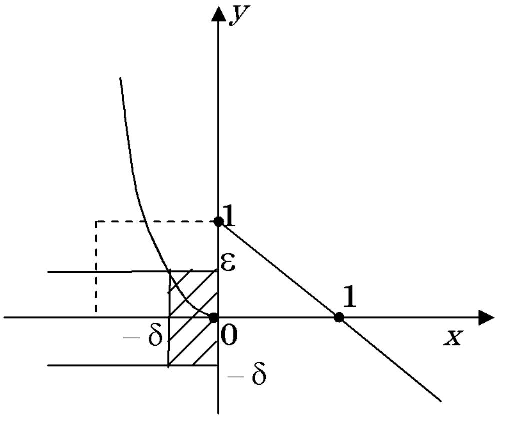


Рис. 6.11

Число A_1 называют пределом справа функции $f(x)$ в точке a, и обозначают $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$, если

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta_\varepsilon > 0, \quad \forall x \in (a, a + \delta_\varepsilon) \Rightarrow \left| f(x) - A_1 \right| < \varepsilon .$$

С геометрической точки зрения число A предел справа функции f (x) в точке a означает следующее: *какую бы горизонтальную* ε *-полосу вдоль прямой y = A ни взять, всегда найдется вертикальная полоса, лежащая между прямыми x = a и* $x = a + \delta_\varepsilon$ *такая, что все точки графика функции f (x), расположенные в вертикальной полосе, кроме, может быть, точки, лежащей на прямой x = a, обязательно попадут во взятую горизонтальную полосу* (рис. 6.12).

Пример 7. Функция

$$f(x) = \begin{cases} x^2, x \in (-1; 1], \\ 3 - x, x \in (1; 2) \end{cases}$$

в точке $x = 1$ (рис. 6.13) имеет предел справа, равный 2.

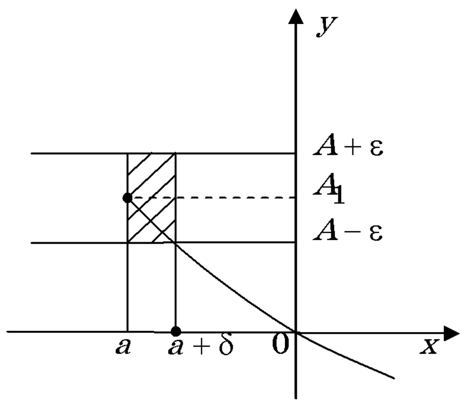


Рис. 6.12

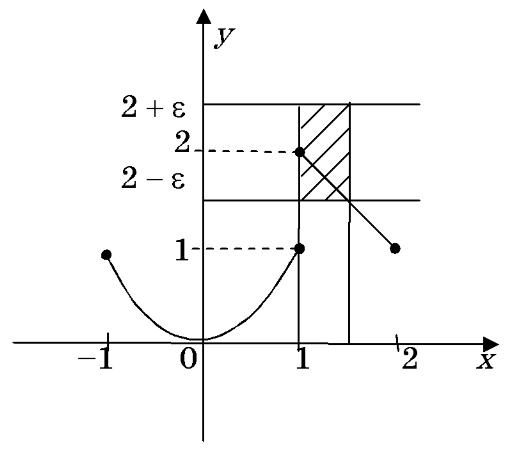


Рис. 6.13

Числа A и A_1 характеризуют поведение функции $f\,(x)$ соответственно в левой и правой полуокрестности точки a, поэтому пределы слева и справа называют односторонними пределами и обозначают соответственно

$$\lim_{x\to a-0} f\ (x) \text{ или } f\ (a-0);\ \lim_{x\to a+0} f\ (x) \text{ или } f\ (a+0).$$

В каждой внутренней точке области определения функции $f\,(x)$ могут существовать оба односторонних предела, которые в точке $x = a$ определяются и в том случае, когда $f\,(x)$ не определена в точке $x = a$.

Пример 8. Найти односторонние пределы в точке $x = 0$ для функции

$$f\ (x) = (x^2+2)\ \mathrm{sign}\ x\,.$$

Решение. В точке $x = 0$ (рис. 6.14) $f\,(x)$ имеет оба односторонних предела, отличных от значения функций в этой точке:

$$f\,(0) = 0;\ f\,(+0) = 2;\ f\,(-0) = -2.$$

В этом случае данная функция $f\ (x)$ определена в точке $x = 0$, $f\,(0) = 0$, а односторонние пределы в точке $x = 0$ существуют, оба конечные числа, но не равны.

Пример 9. Найти односторонние пределы в точке $x = 0$ для функции

$$f\ (x) = \mathrm{arctg}\,\frac{1}{x}\,.$$

Решение. Функция $f\ (x)=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$ не определена в точке $x = 0$, но имеет конечные односторонние пределы (рис. 6.15), не равные между собой

$$f\ (+0)=\lim_{x\to+0}\operatorname{arctg}\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2},$$

$$f\ (-0)=\lim_{x\to-0}\operatorname{arctg}\frac{1}{x}=-\frac{\pi}{2}.$$

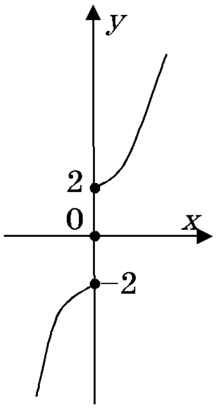


Рис. 6.14

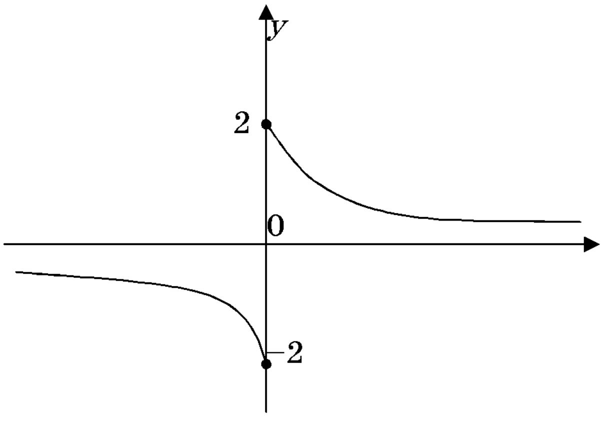


Рис. 6.15

Пример 10. Найти односторонние пределы в точке $x = -2$ для функции

$$f\ (x)=\frac{(x+2)^2}{x+2}.$$

Решение. Данная функция не определена в точке $x = -2$ (рис. 6.16), но

$$\lim_{x\to-2+0} f\ (x)=\lim_{x\to-2+0}(x+2)=0,$$

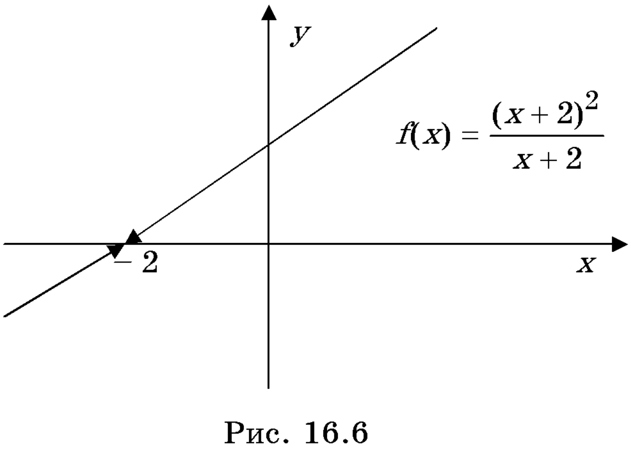


Рис. 16.6

$$\lim_{x\to-2-0} f\ (x)=\lim_{x\to-2-0}(x+2)=0$$

односторонние пределы существуют, конечные числа равны между собой.

Пример 11. Найти односторонние пределы в точке $x = 0$ для функции

$$f(x)=\cos\frac{1}{x}.$$

Решение. Данная функция не определена в точке $x = 0$. Выберем две последовательности $\{x_n\}$ и $\{\overline{x_n}\}$ с общими числами

$$x_n = \frac{1}{2n\pi} \text{ и } \overline{x_n} = \frac{2\pi}{(2n+1)\pi} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

соответственно.

Тогда имеем $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \overline{x_n} = 0$ и

$$\lim_{n\to\infty} f\,(x_n) = \lim_{n\to\infty} \cos 2\pi n = 1,$$

$$\lim_{n\to\infty} f\,(\overline{x_n}) = \lim_{n\to\infty} \cos(2n+1)\frac{\pi}{2} = 0\,.$$

В силу определения предела функции по Гейне: функция $f(x)$ не имеет предела справа в точке 0; а с учетом того, что $f(x)$ четная, то она не имеет также и предела слева (рис. 6.17).

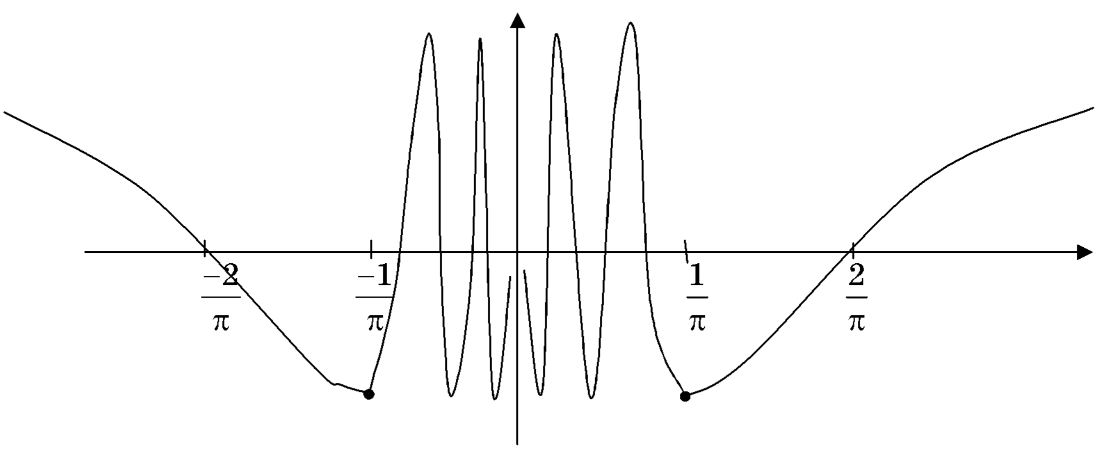


Рис. 6.17

4.3.2. Бесконечные пределы в конечной точке

Функция $f(x)$, определенная в некоторой проколотой окрестности точки $x = a$, имеет в этой точке бесконечный предел, который записывают

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty\text{, если}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta_\varepsilon > 0 \quad \forall x \in \bigcup \delta_\varepsilon(a) \Rightarrow |f(x)| > \varepsilon\,. \tag{6.71}$$

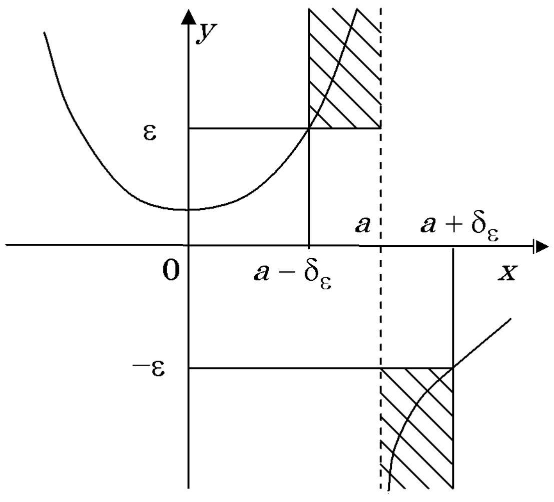


Рис. 6.18

В этом случае функцию $f\ (x)$ называют бесконечно большой при $x \to a$.

Согласно определения (6.71) имеем, что график функции $y = f\ (x)$ для всех $x \in \bigcup \delta_\varepsilon(a)$ лежит вне горизонтальной полосы $|y| \le \varepsilon$ (рис. 6.18).

ε-окрестностью бесконечности называют множество:

$$\bigcup \varepsilon(\infty) = \left\{y \ \ |y| > \varepsilon\right\} = (-\infty; -\varepsilon) \cup (\varepsilon; +\infty)$$

Тогда $\lim\limits_{x\to a} f\ (x) = \infty$ означает следующее: для любой ε-окрестности бесконечности $\bigcup \varepsilon\ (\infty)$ существует проколотая δ_ε-окрестности точки а, что для всех $x \in \bigcup \delta_\varepsilon(a)$ справедливо условие $f\ (x) \in \bigcup \varepsilon\ (\infty)$.

Пример 12. Доказать, что $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{x-2} = \infty$.

Решение. По определению $\lim\limits_{x\to a} f\ (x) = \infty$, если $\forall \varepsilon > 0$ можно подобрать $\delta_\varepsilon > 0$, так, что для всех значений $x \ne 2$, удовлетворяющих условию $|x-2| < \delta_\varepsilon$, будет выполняться неравенство $|f\ (x)| > M$. В данном примере, по заданному $\varepsilon > 0$ δ_ε будем выбирать из условия

$$|f\ (x)| = \frac{1}{|x-2|} > \varepsilon, \text{ или } |x-2| < \frac{1}{\varepsilon}.$$

Тогда, полагая $\delta_\varepsilon = \dfrac{1}{\varepsilon}$, получим, что для всех значений x, удовлетворяющих условию $|x-2| < \dfrac{1}{\varepsilon}$, выполняется неравенство $\left|\dfrac{1}{x-2}\right| > \varepsilon$. Значит, $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{x-2} = \infty$.

Функция $f(x)$ стремится к $+\infty$ $(\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty)$, если

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta_\varepsilon > 0 \quad \forall x \in \bigcup \delta_\varepsilon(a) \Rightarrow f(x) > \varepsilon,$$

то есть $f(x) \in \bigcup \varepsilon(+\infty)$ – ε-окрестность символа $(+\infty)$ (рис. 6.19).

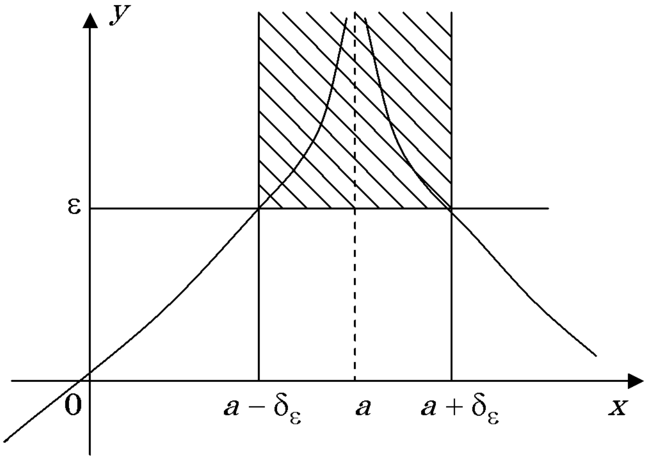


Рис. 6.19

Функция $f(x)$ стремится к $-\infty$ $(\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty)$, если

$$\forall\varepsilon > 0 \ \exists\ \delta_\varepsilon > 0, \quad \forall x \in \bigcup \delta_\varepsilon(a) \Rightarrow f(x) < -\varepsilon,$$

то есть $f(x) \in \bigcup \varepsilon(-\infty)$ – ε-окрестность символа $(-\infty)$ (рис. 6.20).

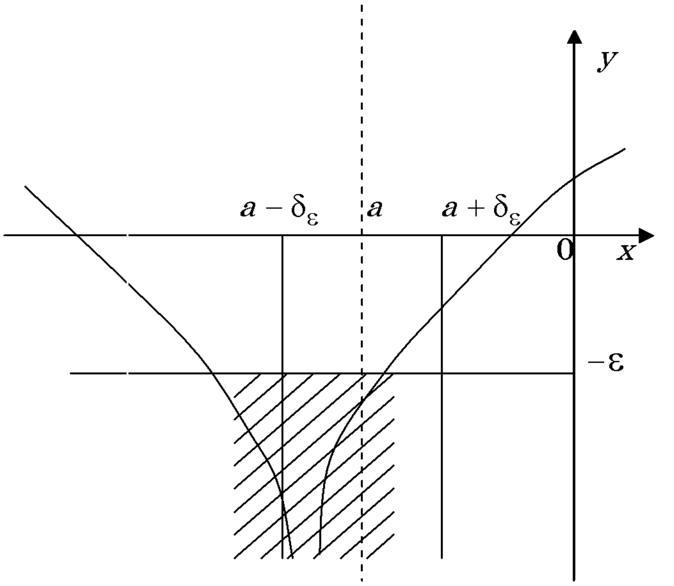


Рис. 6.20

Пример 13. Найти односторонние пределы в точке $x = -1$ для функции

$$f(x) = \frac{x^2}{2(x+1)}.$$

Решение.

При $x \to -1+0$ имеем

$$\lim_{x\to -1+0} f(x) = \lim_{x\to -1+0} \frac{x^2}{2(x+1)} = +\infty,$$

а при $x \to -1-0$ имеем

$$\lim_{x\to -1-0} f(x) = \lim_{x\to -1-0} \frac{x^2}{2(x+1)} = -\infty,$$

то есть в точке $x = -1$ имеет односторонние бесконечные пределы, равные соответственно $+\infty$ и $-\infty$. График данной функции – рис. 6.21.

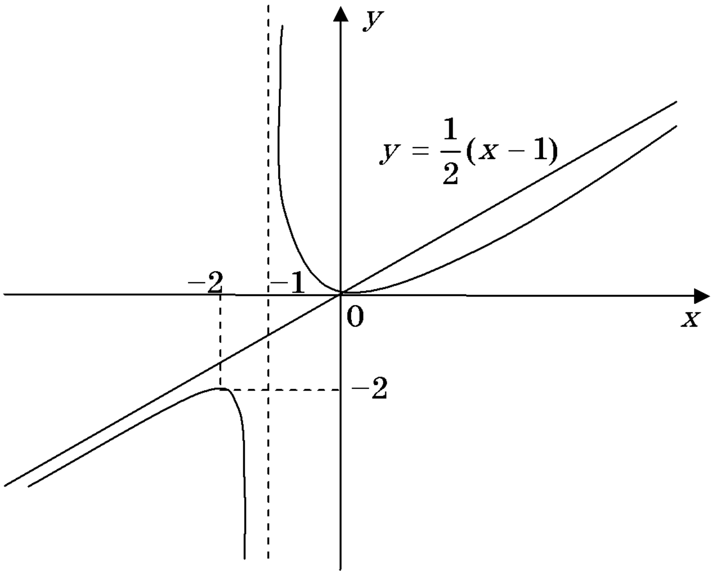


Рис. 6.21

Так, для $f(x) = |2 - x|^{-1}$ (рис. 6.22) имеем $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = +\infty$

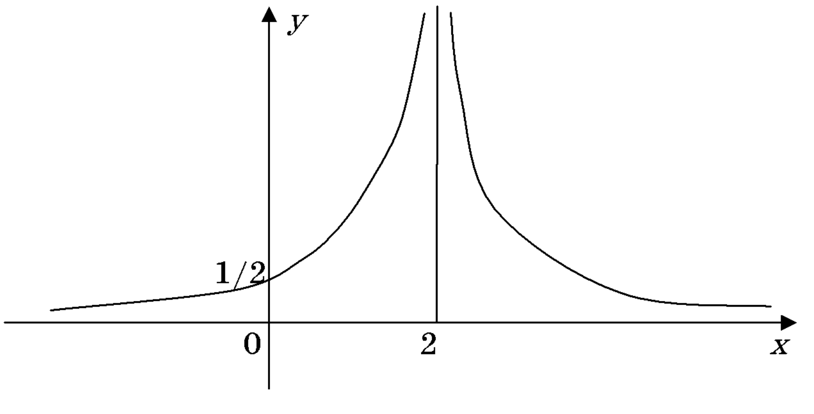


Рис. 6.22

Функция $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ (рис. 6.23) имеет в точке $x = 0$ предел, равный $-\infty$.

Для функции

$$f\ (x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-x}, x < 1, \\ x^2, x \geq 1 \end{cases}$$

предел справа в точке $x = 1$, конечное число, равное 1, а слева $+\infty$ (рис. 6.24).

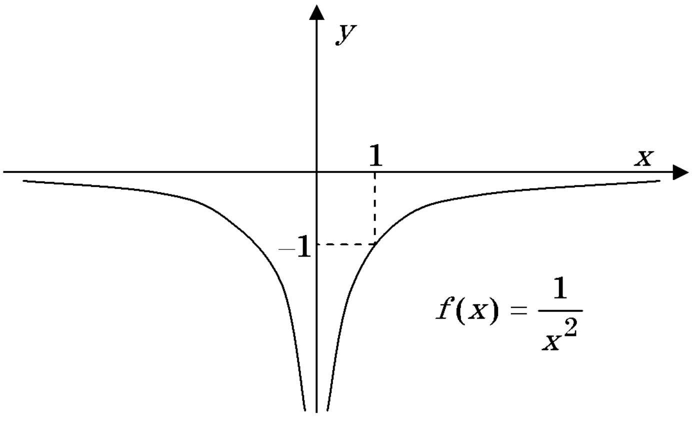


Рис. 6.23

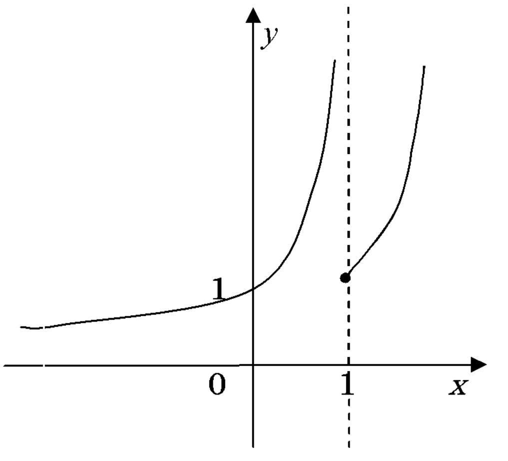


Рис. 6.24

Предел по бесконечности

Пусть $f\,(x)$ определена на множестве R. Говорят, что число A предел $f\,(x)$ при $x \to +\infty$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon > 0 \quad \forall x \quad x \geq \delta_\varepsilon \Rightarrow \left| f\ (x) - A \right| \leq \varepsilon$$

и пишут $\lim\limits_{x \to +\infty} f\ (x) = A$ (рис. 6.25).

А через «окрестности» $\lim\limits_{x \to +\infty} f\ (x) = A$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon > 0 \quad \forall x \in \bigcup \delta_\varepsilon(+\infty) \Rightarrow f(x) \in \bigcup \varepsilon\ (A).$$

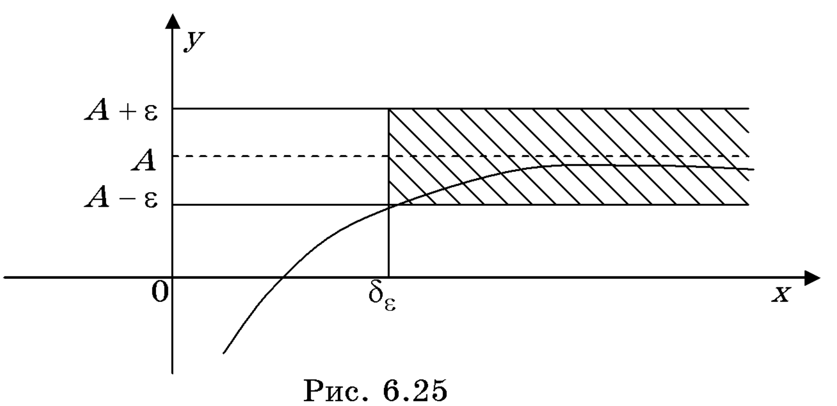


Рис. 6.25

Пример 14. Доказать, что $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3-2x}{x+1}=-2$.

Решение. Так как $f\,(x)=\dfrac{3-2x}{x+1}=-2+\dfrac{5}{x+1}$, и если $x>1$, тогда $x+1<2x$, поэтому $\dfrac{5}{x+1}<\dfrac{5}{2x}$, откуда и имеем неравенство

$$\left|f\,(x)+2\right|<\frac{5}{2x}<\varepsilon$$

для любого $\varepsilon>0$ выполняется при любом $x>\delta_\varepsilon$, где $\delta_\varepsilon=\max\left(1;\ \dfrac{5}{2\varepsilon}\right)$, то есть при любом $x\in\bigcup\delta_\varepsilon(+\infty)$.

Говорят, что число A предел $f\,(x)$ при $x\to-\infty$, если

$\forall\varepsilon>0\quad\exists\delta_\varepsilon>0\quad\forall x\quad x\le-\delta_\varepsilon\Rightarrow\left|f(x)-A\right|\le\varepsilon$ (рис. 6.26).

А через «окрестности» $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$, если

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists\ \delta_\varepsilon>0\ \ \forall x\in\bigcup\delta_\varepsilon(-\infty)\Rightarrow f(x)\in\bigcup\varepsilon(A).$$

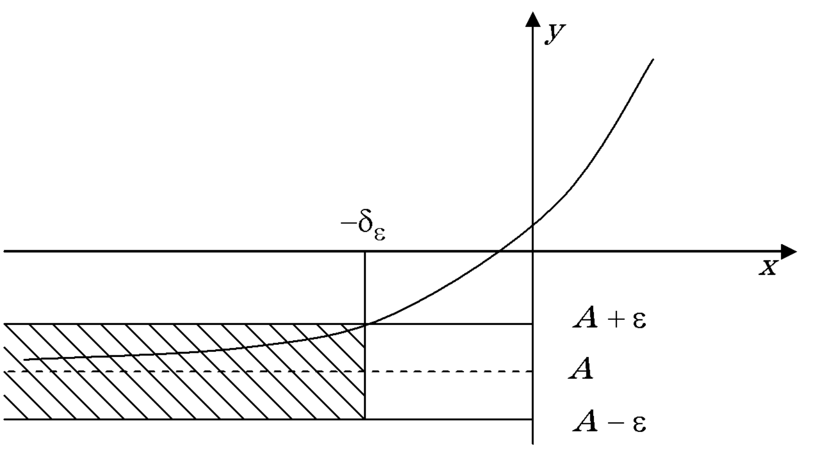


Рис. 6.26

Для функции $f(x)=\operatorname{arctg}x$ (рис. 6.27) имеем

$$\lim_{x\to+\infty}f\,(x)=\frac{\pi}{2},\ \text{а}\ \lim_{x\to-\infty}f\,(x)=-\frac{\pi}{2}.$$

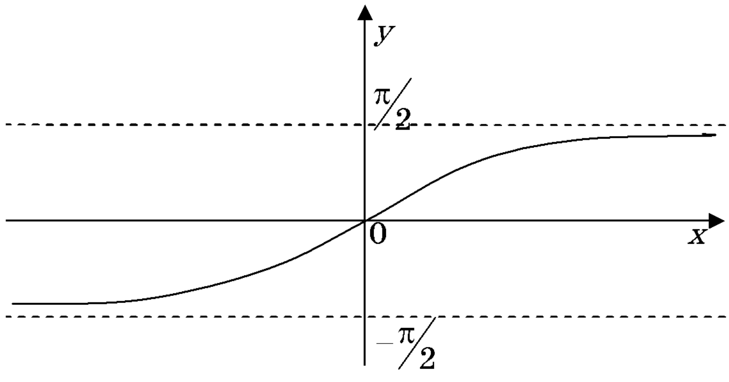


Рис. 6.27

Функция $f(x) = \frac{|x|}{x} \cdot \frac{1}{1 + x^2}$ имеет пределы при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$, равные нулю (рис. 6.28).

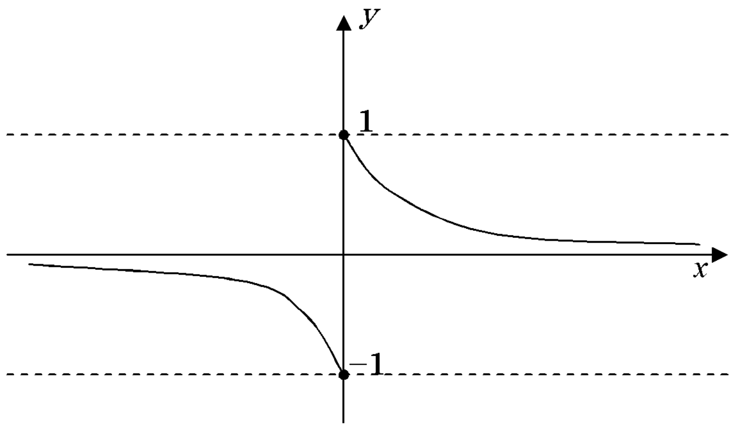


Рис. 6.28

Бесконечный предел функции на бесконечности ($x \to \pm\infty$)

Существуют функции, обладающие следующим свойством: при неограниченном увеличении $|x|$ значения $|f\ (x)|$ также неограниченно возрастают. Говорят, что предел функции $y = f\ (x)$ при $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$) есть бесконечность, который записывают $\lim\limits_{x \to \infty} f\ (x) = \infty$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon > 0 \quad \forall x \quad |x| > \delta_\varepsilon \Rightarrow |f\ (x)| > \varepsilon$$

или на языке «$\varepsilon - \delta$», используя понятие окрестности:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta_\varepsilon>0 \quad \forall x\in\bigcup\delta_\varepsilon(\infty)\Rightarrow f(x)\in\bigcup\varepsilon(\infty)$$

Аналогично вводится понятие бесконечного предела в бесконечности. Так запись $\lim f(x)=\infty$, означает следующее

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\ \delta_\varepsilon>0 \quad \forall x\in\bigcup\delta_\varepsilon(+\infty)\Rightarrow f(x)\in\bigcup\varepsilon(-\infty).$$

Упражнение 2. Сформулировать с помощью логических символов и окрестностей следующие утверждения (дать геометрическую интерпретацию):

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$; 2. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$; 3. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.

4.4. Бесконечно большая функция. Бесконечно малые функции

Функция $f(x)$ называется бесконечно большой (б.б.ф.) при $x\to x_0$, если

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty.$$

Если $f(x)$ стремится к бесконечности при $x\to x_0$ и принимает только положительные значения, то пишут

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty,$$

если же $f(x)$ стремится к бесконечности при $x\to x_0$ и принимает только отрицательные значения, то пишут

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=-\infty.$$

Например, функция $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ б.б.ф. при $x\to 1$.

Функция $y = f(x)$ называется бесконечно малой (б.м.ф.) при $x\to x_0$, если

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=0.$$

Примерами б.м.ф. являются функции $y=x^3$ при $x\to 0$; $y=x+1$ при $x\to -1$; $y=\dfrac{2x-4}{x^2+5}$ при $x\to 2$.

Бесконечно малые функции обладают следующими свойствами:

Теорема 24. ***Сумма (алгебраическая) конечного числа бесконечно малых функций есть бесконечно малая функция.***

Доказательство. Проведем доказательство для двух функций. Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – б.м.ф. при $x \to x_0$, то есть $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$ и $\lim\limits_{x \to x_0} \beta(x) = 0$.

Так как $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$, то это значит, что $\forall \varepsilon_1 > 0$, $\exists\, \delta_1 > 0$, что $\forall x$, удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta_1$, справедливо

$$|\alpha(x)| < \varepsilon_1 .$$

Так как $\lim\limits_{x \to x_0} \beta(x) = 0$, то это значит, что $\forall \varepsilon_2 > 0$, $\exists \delta_2 > 0$, что $\forall x$, удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta_2$, справедливо

$$|\beta(x)| < \varepsilon_2 .$$

Выбирая $\delta_\varepsilon = \min(\delta_1, \delta_2)$, тогда $\forall x$, $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$ справедливы неравенства

$$|\alpha(x)| < \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2} \text{ и } |\beta(x)| < \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда $|\alpha(x) \pm \beta(x)| \le |\alpha(x)| + |\beta(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Таким образом имеем

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon > 0 \qquad \forall x \quad |x - x_0| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |\alpha(x) \pm \beta(x)| < \varepsilon,$$

а это значит, что $\lim\limits_{x \to x_0} (\alpha(x) \pm \beta(x)) = 0$, то есть $\alpha(x) \pm \beta(x)$ – б.м.ф. при $x \to x_0$.

Аналогично доказывается теорема для любого конечного числа б.м.ф.

Теорема 25. ***Произведение бесконечно малой функции*** $\alpha(x)$ ***на ограниченную функцию f (x) есть бесконечно малая функция.***

Доказательство. Если функция $f\ (x)$ ограничена в окрестности точки $x = x_0$, то существует число $M > 0$, что имеет место неравенство

$$\left|f\ (x)\right| \le M \tag{6.72}$$

для всех x из δ_1-окрестности x_0.

Так как функция $\alpha\ (x)$ –б.м.ф. при $x \to x_0$, то есть $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha\ (x) = 0$, тогда $\forall \dfrac{\varepsilon}{M} > 0\ \exists\ \delta_2 > 0$, что $\forall x \quad \left|x - x_0\right| < \delta_2$ выполняется неравенство

$$\left|\alpha\ \left(x\right)\right| < \frac{\varepsilon}{M}. \tag{6.73}$$

Выбирая в качестве $\delta_\varepsilon = \min\ (\delta_1, \delta_2)$, тогда $\forall x \quad \left|x - x_0\right| < \delta_\varepsilon$, выполняются оба неравенства (6.72) и (6.73), а следовательно

$$\left|f\ (x) \cdot \alpha\ (x)\right| = \left|f\ (x)\right| \cdot \left|\alpha\ (x)\right| \le \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon.$$

А это значит, что $\lim\limits_{x \to x_0} (f\ (x) \cdot \alpha\ (x)) = 0$, то есть $f\ (x) \cdot \alpha\ (x)$ б.м.ф. при $x \to x_0$.

Следствие 1. Если $\alpha(x)$ – б.м.ф. при $x \to x_0$, а C – постоянная величина, тогда

$$\lim_{x \to x_0} C \cdot \alpha\ (x) = C \cdot \lim_{x \to x_0} \alpha\ (x) = 0.$$

Следствие 2. Если $\alpha\ (x)$ и $\beta\ (x)$ – б.м.ф. при $x \to x_0$, тогда

$$\lim_{x \to x_0} \alpha(x) \cdot \beta(x) = 0,$$

то есть произведение бесконечно малых функций есть б.м.ф.

Доказательство этого следствия следует из того, что всякая б.м.ф. ограничена.

Теорема 26. ***Если*** $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha\ (x) = 0$***, а*** $\lim\limits_{x \to x_0} f\ (x) = A \ne 0$***, то***

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha\ (x)}{f\ (x)} = 0.$$

Доказательство. Функцию $\dfrac{\alpha\ (x)}{f\ (x)}$ можно представить в виде $\alpha\ (x)\cdot\dfrac{1}{f\ (x)}$, где $\alpha\ (x)-$ б.м.ф. Докажем, что функция $\dfrac{1}{f\ (x)}$ ограничена. Так как $\lim\limits_{x\to x_0} f\ (x)=A\ \ (\mathrm{A}\neq 0)$, то по определению предела функции в точке имеем

$$\forall\varepsilon>0,\varepsilon\leq\left|\frac{A}{2}\right|\quad\exists\,\delta_\varepsilon>0,\ \forall x\quad |x-x_0|<\delta_\varepsilon\Rightarrow|f(x)-A|<\varepsilon.$$

А следовательно для x, удовлетворяющих неравенству $|x-x_0|<\delta_\varepsilon$ имеем $|f\ (x)-A|=|A-f\ (x)|\geq|A|-|f\ (x)|$, то

$$|\alpha|-|f\ (x)|<\varepsilon,\ \text{то есть}\ |f\ (x)|>|A|-\varepsilon=\frac{|A|}{2}.$$

Следовательно, для функции $\dfrac{1}{f\ (x)}$ имеем

$$\left|\frac{1}{f\ (x)}\right|=\frac{1}{|f\ (x)|}<\frac{1}{\frac{|A|}{2}}=\frac{2}{|A|}=M,$$

что означает, что $\dfrac{1}{f\ (x)}$ ограничена. Тогда функция $\alpha\ (x)\cdot\dfrac{1}{f\ (x)}-$ б.м.ф. А это значит, что $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha\ (x)}{f\ (x)}=0$.

Теорема 27 (связь между функцией, ее пределом и бесконечно малой функцией).

1. Если $\lim\limits_{x\to x_0} f\ (x)=A$***, то*** $f\ (x)=A+\alpha\ (x)$***, где*** $\alpha\ (x)$ ***– б.м.ф. при*** $x\to x_0$***.***

2. Если $f\ (x)=A+\alpha\ (x)$***, то*** $\lim\limits_{x\to x_0} f\ (x)=A$***, где*** $\alpha\ (x)$ ***– б.м.ф. при*** $x\to x_0$***.***

Доказательство:

1. Если $\lim\limits_{x\to x_0} f\ (x)=A$, то по определению предела имеем

$$\forall\varepsilon>0\quad\exists\,\delta_\varepsilon>0\quad\forall x\quad|x-x_0|<\delta_\varepsilon\Rightarrow|f\ (x)-A|<\varepsilon.$$

Откуда $\left|(f(x)-A)-0\right|<\varepsilon$ для

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta_\varepsilon>0\ \ \forall x\ \ \left|x-x_0\right|<\delta_2,$$

что значит $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)-A)=0$, то есть $f(x)-A=\alpha(x)$ – б.м.ф.

Тогда $f(x)=A+\alpha(x)$.

2. Если $f(x)=A+\alpha(x)$, где $\alpha(x)$ – б.м.ф., тогда $\alpha(x)=f(x)-A$. По определению б.м.ф. имеем

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists\ \delta_\varepsilon>0\ \ \forall x\ \ \left|x-x_0\right|<\delta_\varepsilon\Rightarrow\left|\alpha(x)\right|<\varepsilon.$$

Но так как $\alpha(x)=f(x)-A$, тогда получаем

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists\ \delta_\varepsilon>0\ \ \forall x\ \ \left|x-x_0\right|<\delta_\varepsilon\Rightarrow\left|f(x)-A\right|<\varepsilon.$$

А это значит, что $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

Пример 15. Найти пределы функций:

1.1. $\lim\limits_{x\to 2}(2x+10)$;

1.2. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x-6}{x^2+5}$;

1.3. $\lim\limits_{x\to 2}(x-2)^2\cos^2\dfrac{1}{x-2}$;

1.4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{5x}$.

Решение.

1.1. Функцию $f(x)=2x+10$ можно представить в виде $f(x)=2x+10=(2x-4)+14$. Так как $\lim\limits_{x\to 2}(2x-4)=0$, то есть $(2x-4)$ – б.м.ф. при $x\to 2$, то согласно теореме 27 (о связи между функцией, ее пределом и б.м.ф.) имеем, что

$$\lim_{x\to 2}(2x+10)=\lim_{x\to 2}\left[(2x-4)+14\right]=14.$$

1.2. Так как функция $\alpha(x)=2x-6$ – б.м.ф. при $x\to 3$, а функция $f(x)=\dfrac{1}{x^2+5}$ при $x\to 3$ имеет предел $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1}{x^2+5}=\dfrac{1}{14}\neq 0$, то согласно теореме 26 имеем

$$\lim_{x\to 3}(2x-6)\cdot\frac{1}{x^2+5}=0.$$

1.3. Так как $\lim\limits_{x\to 2}(x-2)^2=0$, то $\alpha(x)=(x-2)^2$ – б.м.ф. при $x\to 2$. Функция $f(x)=\cos^2\dfrac{1}{x-2}$ $x\neq 2$ – ограничена, так как $\cos^2\dfrac{1}{x-2}\leq 1$. Тогда функция $(x-2)^2\cdot\cos^2\dfrac{1}{x-2}$ – это произведение $\alpha(x)$– б.м.ф. и $f(x)=\cos^2\dfrac{1}{x-2}$ – ограниченной функции, следовательно $\lim\limits_{x\to 2}(x-2)^2\cdot\cos^2\dfrac{1}{(x-2)}=0$.

1.4. Так как $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{5x}=0$, то $\alpha(x)=\dfrac{1}{5x}$ – б.м.ф. при $x\to\infty$, функция $f(x)=\sin 2x$ при $x\to\infty$ ограничена, так как $|\sin 2x|\leq 1$. Тогда $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin 2x}{5x}=0$.

4.5. Свойства пределов функции в точке. Теоремы о пределах

В рассматриваемых ниже свойствах будут рассмотрены пределы функций, имеющих конечные пределы.

4.5.1. Локальные свойства функции, имеющей предел

Установим ряд локальных свойств для функции, имеющей конечный предел в данной точке.

Теорема 28. ***Если*** $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$, ***A – конечное число, то существует такая проколотая окрестность точки a, в которой эта функция ограничена, то есть существует положительное число M, такое, что*** $|f(x)|\leq M$ ***для всех*** $x\in\bigcup(a)$, $x\neq a$.

Доказательство. Так как по условию теоремы $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$, то

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta_\varepsilon>0\ \ \forall x\quad |x-a|<\delta_\varepsilon\Rightarrow|f(x)-A|\leq\varepsilon.$$

Так $|f(x)-A|\leq\varepsilon$, то $A-\varepsilon\leq f(x)\leq A+\varepsilon$. Выбирая в качестве $M=\max\{|A+\varepsilon|,|A-\varepsilon|\}$ получим, что

$$\forall x\quad |\text{x-a}|<\delta_\varepsilon\Rightarrow|f(x)|\leq M.$$

Что и требовалось доказать.

Теорема 29 (о сохранении знака предела). ***Если*** $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, ***причем*** $A \neq 0$, ***то существует проколотая окрестность точки а, в которой значения функции f (x) совпадают со знаком числа А.***

Доказательство. Так как $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, то по определению предела имеем

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta_\varepsilon > 0 \quad \forall x \quad |x - a| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon .$$

Последнее неравенство запишем в виде

$$A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon . \tag{6.74}$$

Полагая в (6.74) $\varepsilon = \dfrac{|A|}{2}$, получим

$$A - \frac{|A|}{2} < f(x) < A + \frac{|A|}{2}. \tag{6.75}$$

Если $A > 0$, то из неравенства (6.75) имеем

$$0 < \frac{A}{2} < f(x) < \frac{3}{2}A . \tag{6.76}$$

для $\forall x \quad |x - a| < \delta_\varepsilon$.

Таким образом получаем, что значения функции $f(x)$ совпадают со знаком числа A в некоторой проколотой окрестности точки a.

Замечание. При доказательстве теоремы 29 установленные неравенства (6.75) и (6.76) для указанных x имеют вид

$$f(x) > \frac{A}{2}, \text{ если } A > 0 \text{ и } \quad f(x) < \frac{a}{2}, \text{ если } A < 0.$$

Теорема 30. ***Если*** $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, $A \neq 0$, ***то*** $\exists\delta_\varepsilon > 0$, ***что функция*** $\dfrac{1}{f(x)}$ ***ограничена в проколотой окрестности точки а.***

Доказательство. Из определения предела функции в точке для заданного $\varepsilon = \dfrac{|A|}{2}$, $\exists\delta_\varepsilon > 0$, такое для всех x $|x - a| < \delta_\varepsilon$ выполняется неравенство

$$|f(x) - A| < \frac{|A|}{2} \tag{6.77}$$

Из неравенства (6.77) и неравенства $|A| - |f\ (x)| \le |f\ (x) - A|$ следует, что

$$|A| - |f\ (x)| < \frac{A}{2},$$

откуда $|f\ (x)| > \frac{|A|}{2}$, а поэтому $\frac{1}{|f\ (x)|} < \frac{2}{|A|}$ для всех x, $|x - a| < \delta_\varepsilon$, то есть функция $\frac{1}{f\ (x)}$ ограничена для всех x, $|x - a| < \delta_\varepsilon$. Что и требовалось доказать.

4.5.2. Свойства пределов, связанные с неравенствами

Теорема 31 (теорема о сжатой переменной). ***Если***

$$\lim_{x\to a} f\ (x) = A, \qquad \lim_{x\to a} g\ (x) = A$$

и в некоторой окрестности $\bigcup(a)$ $x \ne a$ ***справедливо неравенство***

$$f\ (x) \le \varphi\ (x) \le g\ (x), \tag{6.78}$$

то $\lim\limits_{x\to a} \varphi\ (x) = A$.

Доказательство. Из определения предела функции по Гейне, имеем, что если $\{x_n\}$ – произвольная последовательность такая, что $x_n \in \bigcup\delta\ (a)$, $\delta > 0$, $n \in N$ и сходящаяся к a, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Тогда в силу условия (6.78) теоремы имеем

$$\lim_{n\to\infty} f\ (x_n) = \lim_{n\to\infty} g\ (x_n) = A$$

Так как, согласно условию (6.78), для всех $n \in N$ справедливо неравенство

$$f\ (x_n) \le \varphi\ (x_n) \le g\ (x_n),$$

то в силу свойств пределов последовательностей имеем, что и $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi\ (x_n) = A$. Значит существует

$$\lim_{x\to a} \varphi\ (x) = A.$$

Что и требовалось доказать.

Теорема 32. ***Если***

$$\lim_{x\to a} f(x) = A, \qquad \lim_{x\to a} g(x) = B \qquad \textbf{\textit{(6.79)}}$$

и в некоторой окрестности $\bigcup(a)$, $x \neq a$

$$f(x) \leq g(x)\text{, }\textbf{\textit{то}}\ A \leq B.$$

Доказательство. Из определения предела функции по Гейне, имеем, что если $\{x_n\}$ произвольная последовательность, такая, что $x_n \in \bigcup\delta(a)$, $\delta > 0$, $n \in N$ и сходящаяся к a, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Тогда при достаточно большом N, для $n > N$ имеет место неравенство

$$f(x_n) \leq g(x_n) \text{ для } n > N. \qquad (6.80)$$

Переходя к пределу в неравенстве (6.80), в силу (6.79), имеем, что $A \leq B$. Что и требовалось доказать.

Замечание. Если исходное неравенство является строгим, то есть $f(x) < g(x)$ и существуют пределы функций $f(x)$ и $g(x)$ в точке $x = a$, то можно утверждать только то, что $\lim\limits_{x\to a} f(x) \leq \lim\limits_{x\to a} g(x)$, то есть знак строгого неравенства между функциями при переходе к пределу, вообще говоря, не сохраняется.

4.5.3. Свойства пределов, связанные с арифметическими операциями

Теорема 33. ***Если функции*** $f(x)$ ***и*** $g(x)$ ***имеют конечные пределы в точке x = a, причем*** $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$; $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$***, то***

1. $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x) = A \pm B.$

2. $\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to a} g(x) = A\cdot B.$

3. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \dfrac{A}{B}$***, при условии, что*** $B \neq 0$.

Доказательство. Проведем доказательство второго равенства. Пусть последовательность $\{x_n\} \to a$, $x_n \neq a$ $n \in N$; тогда по условию теоремы имеем

$$\lim_{n\to\infty} f\ (x_n) = A, \quad \lim_{n\to\infty} g\ (x_n) = B$$

$$\lim_{n\to\infty}(f(x_n)\cdot g(x_n)) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)\cdot \lim_{n\to\infty} g(x_n) = A\cdot B \qquad (6.81)$$

Равенство (6.81) доказано для любой последовательности

$\{x_n\} \to a, \quad x_n \neq a$,поэтому

$$\lim_{x\to a}\ (f\ (x)\cdot g\ (x)) = \lim_{x\to a} f\ (x)\cdot \lim_{x\to a} g\ (x) = A\cdot B$$

Замечание 1. Доказательство теоремы 33 можно провести, используя свойства б.м.ф. и теорему о связи между функцией, пределом и б.м.ф.

Замечание 2. Частный случай теоремы 33 (равенство (6.81)

$$\lim_{x\to a}(c\cdot f\ (x)) = c\cdot \lim_{x\to a} f\ (x),$$

то есть постоянный множитель можно вынести за знак предела.

4.5.4. Критерий Коши существования предела функций

Говорят, что функция $f\,(x)$ удовлетворяет в точке $x = a$ условию Коши, если она определена в некоторой проколотой окрестности точки a и

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists\ \delta = \delta_\varepsilon > 0 \ \ \forall x', x'' \in \bigcup \delta(a) \Rightarrow \left|f\ (x') - f\ (x'')\right| \le \varepsilon \quad (6.82)$$

Теорема 34. ***Для того, чтобы существовал конечный предел функции f (x) в точке x = a, необходимо и достаточно, чтобы эта функция удовлетворяла в точке a условию Коши (6.82).***

Доказательство (необходимость). Пусть $\lim_{x\to a} f\ (x) = A$, тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists\ \delta > 0 \ \forall x \in \bigcup \delta(a) \Rightarrow \left|f\ (x) - A\right| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (6.83)$$

Если x' и x'' – любые точки из множества $\bigcup \delta\ (a)$, то из (6.83) имеем

$$\left|f\ (x') - f\ (x'')\right| = \left|(f\ (x') - A) = (f\ (x'') - A)\right| \le$$

$$\le \left|f\ (x') - A\right| + \left|f\ (x'') - A\right| \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} + \varepsilon,$$

то есть выполняется условие Коши (6.82).

Доказательство (достаточность). Покажем, что если
$$\exists\ \delta_0 > 0\ \ \bigcup \delta_0(a) \in D\ (f)$$
и справедливо (6.82), то существует предел функции $f(x)$ в точке a.

Для доказательства этого воспользуемся определением предела функции по Гейне. Если $\{x_n\}$ – произвольная последовательность такая, что $x_n \in \bigcup \delta_0(a)$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} f\ (x_n)$ имеет конечный предел. Если имеет место условие Коши (6.82), тогда для $\forall \varepsilon > 0\ \ \exists \delta = \delta_\varepsilon > 0$, такое, что
$$\forall x',\quad x'' \in \bigcup \delta\ (a) \Rightarrow \left| f\ (x') - f\ (x'')\right| < \varepsilon . \qquad (6.84)$$
Так как $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, то для $\delta = \delta_\varepsilon > 0$ из (6.84) $\exists$, в силу определения предела последовательности, номер $n_\delta = N_\varepsilon \in N$, такой, что $\forall n \geq N_\varepsilon \Rightarrow \left| x_n - a\right| < \delta$.

Это означает, что $\forall n \geq N_\varepsilon$ и $\forall m \geq N_\varepsilon$ выполняются условия
$$x_n \in \bigcup \delta\ (a),\quad \mathrm{x_m} \in \bigcup \delta\ (a)$$
и в силу (6.84)
$$\left| f\ (x_n) - f\ (x_m)\right| < \varepsilon ,$$
то есть $\{f\ (x_n)\}$ имеет предел, для любой последовательности $\{x_n\} \to a$, а значит $\exists$ конечный предел $f(x)$ в точке $x = a$.

4.6. Замечательные пределы

4.6.1. Первый замечательный предел

Теорема 35.
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 .$$

Доказательство. Рассмотрим единичный круг, рис. 6.29. Так как $f\ (x) = \dfrac{\sin x}{x}$ – четная функция, то рассмотрим ее на интервале $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$. Пусть AM – дуга единичного круга, соответствующая углу, радианная мера которого равна x. Тогда имеем
$$\left|OA\right| = 1,\quad \left|MN\right| = \sin x,\quad \left|ON\right| = \cos x,\quad \left|AK\right| = \mathrm{tg}\ x .$$

Так как площадь сектора OAM заключена между площадями треугольников ΔOMA и ΔOKA, то

$$S_{\Delta OMA} < S_{сектораOAM} < S_{\Delta OKA}$$

или

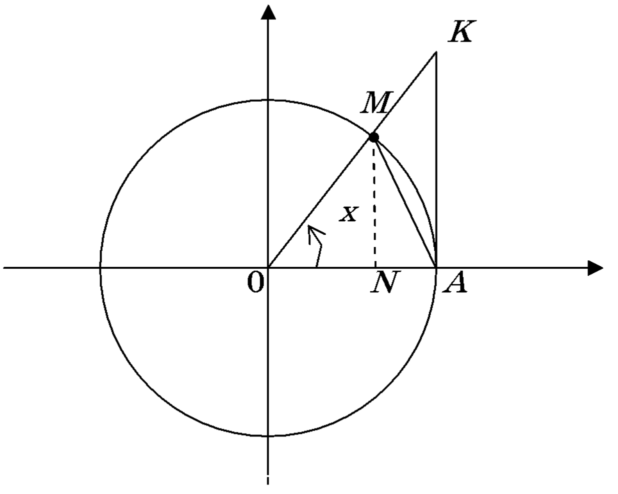


Рис. 6.29

$$\frac{1}{2}\cdot|OA|\cdot|MN| < \frac{1}{2}|OA|^2\cdot x < \frac{1}{2}|OA|\cdot|AK|.$$

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x.$$

Разделим обе части последнего неравенства на $\sin x > 0$, получим

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \text{ или } \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1. \qquad (6.85)$$

Так как функции $\cos x$ и $\dfrac{\sin x}{x}$ четные, то неравенство (6.85) справедливо для $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2};\ 0\right)$. Таким образом для любого $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2};\ 0\right)\cup\left(0;\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ справедливо неравенство (6.85). Переходя к пределу при $x \to 0$, в неравенстве (6.85) получим

$$1 < \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} < 1,$$

так как $\lim\limits_{x\to 0} 1 = 1$ $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$ и в силу теоремы 31 (п.4.5.2) (о сжатой переменной) имеем, что

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1. \qquad (6.86)$$

Замечание 1. Первый замечательный предел, определяемый равенством (6.86) имеет неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$.

Замечание 2. Из доказанной теоремы 35 имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin kx)^n}{(kx)^n}=1\,.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\arcsin x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\arcsin kx)^n}{(kx)^n}=1\,.$$

4.6.2. Второй замечательный предел

Теорема 36.

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=(1)^\infty=e\,. \tag{6.87}$$

Доказательство. Для числовой последовательности $x_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$, $n\in N$ было установлено, что

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e\,. \tag{6.88}$$

1. Пусть $x\to+\infty$ и $n\le x<n+1$. Тогда имеем

$$\frac{1}{n+1}<\frac{1}{x}\le\frac{1}{n};\quad 1+\frac{1}{\text{n}+1}<1+\frac{1}{x}\le 1+\frac{1}{n},$$

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n<\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\le\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}. \tag{6.89}$$

В силу (6.88) имеем

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\cdot\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-1}=e\cdot 1=e \tag{6.90}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)=e\cdot 1=e \tag{6.91}$$

Переходя к пределу в неравенстве (6.89) при $x\to+\infty$, а значит и $n\to+\infty$ получим с учетом (6.90) и (6.91)

$$\ell<\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\le e\,.$$

По теореме 31, о сжатой переменной (п. 4.5.2) имеем

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e. \tag{6.92}$$

2. Если $x\to-\infty$, то полагая $x=-t$, получим

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{t\to+\infty}\left(1-\frac{1}{t}\right)^{-t}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{t}{t-1}\right)^{t}=$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t}=\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t-1}\cdot\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{1}= \tag{6.93}$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t-1}=e$$

Из (6.92) и (6.93) следует, что имеет место равенство (6.87).

Замечание 1. Полагая в равенстве (6.87) $t=\dfrac{1}{x}$ ($t\to 0$ при $x\to\infty$) получим другую форму записи второго замечательного предела

$$\lim_{t\to 0}\left(1+t\right)^{\frac{1}{t}}=(1^{\infty})\;=e.$$

Замечание 2.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{m}{x}\right)^{nx}=(1^{\infty})=e^{mn},$$

$$\lim_{x\to 0}(1+mx)^{\frac{n}{x}}=(1^{\infty})=e^{mn}.$$

Замечание 3. При решении задач, связанных с вычислением пределов часто используют следующие равенства:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e \qquad (a>0,\;\; a\neq 1).$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1.$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a \quad (a>0)$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha$.

4.7. Основные методы вычисления пределов

4.7.1. Если $f(x)$ и $\varphi(x)$ имеют конечные пределы в точке x_0, причем $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=B$, то согласно теореме 33 (п. 4.5.3) имеем

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\pm\varphi(x))=\lim_{x\to x_0}f(x)\pm\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=A\pm B.$$

$$\lim_{x\to x_0}C\cdot f(x_0)=C\lim_{x\to x_0}=C\cdot\lim_{x\to x_0}f(x)=C\cdot A.$$

$$\lim_{x\to x_0}f(x)\cdot\varphi(x)=\lim_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=A\cdot B\quad.$$

Пример 16. Вычислить пределы функций:

1.1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x^5+9x+7}{2x^6+x^3+1}$;

1.2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x+3}\cdot\dfrac{x^2+3}{2x}$;

1.3. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{x}{x+2}\right)$;

1.4. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$;

1.5. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$;

1.6. $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{x}{x+1}$.

Решение.

1.1. Так как пределы числителя и знаменателя существуют и предел знаменателя отличен от нуля, то, используя теорему о пределе частного, получим

$$\lim_{x\to 1}\frac{4x^5+9x+7}{2x^6+x^3+1}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}(4x^5+9x+7)}{\lim\limits_{x\to 1}(2x^6+x^3+1)}=\frac{20}{4}=5;$$

1.2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x+3}\cdot\dfrac{x^2+3}{2x}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x+3}\cdot\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+3}{2x}=\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{7}{4}=\dfrac{7}{20}$;

1.3. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{x}{x+2}\right)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x+3}-\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x}{x+2}=\dfrac{1}{5}-\dfrac{2}{4}=-\dfrac{3}{10}$;

1.4. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^2+1}=\left(\dfrac{0}{2}\right)=0$;

1.5. $\lim\limits_{x\to}\dfrac{x^2+1}{x^2-1}=\left(\dfrac{2}{0}\right)=\infty$;

1.6. $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{x}{x+1}=(\sin 0)=0$.

4.7.2. Раскрытие неопределенности вида $\dfrac{0}{0}$

4.7.2.1. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f\,(x)}{\varphi\,(x)}=\left(\dfrac{0}{0}\right)$, $f\,(x)$ и $\varphi\,(x)$ – многочлены относительно x.

В этом случае применять теоремы о пределе частного нельзя. Для нахождения данного предела числитель дроби $f\,(x)$ и знаменатель $\varphi\,(x)$ разлагают на множители один из которых имеет вид $(x-x_0)^n$, сокращают на выражение вида $(x-x_0)^m$ и затем находят искомый предел.

Пример 17. Вычислить предел

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2+2x-15}{x^3-27}.$$

Решение.

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2+2x-15}{x^3-27}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+5)}{(x-3)(x^2+3x+9)}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{x+5}{x^2+3x+9}=\left(\frac{8}{27}\right)=\frac{8}{27}.$$

Пример 18. Вычислить предел

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x-3}{x^2-2x+1}.$$

Решение.

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2+2x-3}{x^2-2x+1}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x+3}{x-1}=\left(\frac{4}{0}\right)=\infty.$$

Пример 19. Вычислить предел

$$\lim_{x\to0}\frac{x^3+4x^2}{x^2+2x}.$$

Решение.

$$\lim_{x\to0}\frac{x^3+4x^2}{x^2+2x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to0}\frac{x^2(x+4)}{x(x+2)}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x(x+4)}{x+2}=\left(\frac{0}{2}\right)=0.$$

4.7.2.2. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f\,(x)}{g\,(x)}=\left(\dfrac{0}{0}\right)$, $f\,(x)$ и $g\,(x)$ содержат иррациональные выражения.

Для того, чтобы получить множители вида $(x-x_0)^n$ для $f(x)$ и $g(x)$ используют следующие приемы:

– избавиться от иррациональности в знаменателе, знаменателе и числителе, используя умножение на сопряженные выражения;
– замена переменной;
– подстановки.

Затем сокращают на выражение вида $(x-x_0)^m$ и находят искомый предел.

Пример 20. Вычислить предел

$$\lim_{x\to7}\frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}.$$

Решение.

$$\lim_{x\to 7}\frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 7}\frac{(2-\sqrt{x-3})(2+\sqrt{x-3})}{(x-7)(x+7)(2+\sqrt{x-3})}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 7}\frac{(7-x)}{(x-7)(x+7)(2+\sqrt{x-3})}=\lim_{x\to 7}\frac{-1}{(x+7)(2+\sqrt{x-3})}=$$

$$=\left(\frac{-1}{14\cdot 4}\right)=-\frac{1}{56}.$$

Пример 21. Вычислить предел

$$\lim_{x\to 4}\frac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}.$$

Решение.

$$\lim_{x\to 4}\frac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 4}\frac{\left(3-\sqrt{5+x}\right)\left(3+\sqrt{5+x}\right)\left(1+\sqrt{5-x}\right)}{\left(3+\sqrt{5+x}\right)\left(1-\sqrt{5-x}\right)\left(1+\sqrt{5-x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{\left(1+\sqrt{5-x}\right)\left(4-x\right)}{\left(3+\sqrt{5+x}\right)\left(x-4\right)}=-\lim_{x\to 4}\frac{1+\sqrt{5-x}}{3+\sqrt{5+x}}=-\left(\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{3}.$$

4.7.2.3. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\left(\dfrac{0}{0}\right).$

Для нахождения данного предела можно использовать эквивалентные бесконечно малые функции.

Пример 22. Вычислить предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^3}.$$

Решение. Так как при $x\to 0$ $1-\cos 2x$ ~ $2\sin^2 x$, а $\sin x$ ~ x, $\sin^2 x$ ~ x^2, получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^3}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{x}=\infty.$$

Пример 23. Вычислить предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}\ x-\sin x}{x^3}.$$

Решение. Так как $\sin x$ ~ x, $(1-\cos x)$ ~ $2\sin^2\frac{x}{2}$ ~ $\frac{x^2}{2}$ при $x\to 0$, тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}\ x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{x\cdot\frac{x^2}{2}}{x^3}=\frac{1}{2}.$$

Замечание. Если при вычислении предела с помощью эквивалентных б.м.ф. требуют особого внимания те случаи, когда в числителе или в знаменателе стоит сумма (разность) бесконечно малых функций, то при вычислении предела, вообще говоря, нельзя заменять отдельные слагаемые эквивалентными функциями. Так, в примере 23, при замене tg x на x и sin x на x, получится $\frac{0}{x^3}$, а это значит, что предел данной функции равен 0, что неверно.

4.7.3. Раскрытие неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$

4.7.3.1. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f\ (x)}{\varphi\ (x)}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, где $f\ (x)$ и $\varphi\ (x)$ – многочлены степени n и m. Для нахождения данного предела числитель и знаменатель делим на старшую степень переменной x: $f\ (x)$ и $\varphi\ (x)$ и, используя то, что $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^n}=0$ $n\in N$, находим искомый предел.

Пример 24. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3+3x^2+4x+1}{x^4+2x^3+3x^2+1}$.

Решение.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+3x^2+4x+1}{x^4+2x^3+3x^2+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{4}{x^3}+\frac{1}{x^4}}{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^4}}=\left(\frac{0}{1}\right)=0.$$

Пример 25. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+4x^2+5x+1}{x^3+2x+1}$.

Решение.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+4x^2+5x+1}{x^3+2x+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\dfrac{4}{x}+\dfrac{5}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}}{1+\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}}=\left(\frac{3}{1}\right)=3.$$

Пример 26. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+x^2+1}{4x^2+3x+7}$.

Решение.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+x^2+1}{4x^2+3x+7}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^3}}{\dfrac{4}{x}+\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{7}{x^3}}=\left(\frac{2}{0}\right)=\infty.$$

4.7.3.2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$, $f(x)$ и $g(x)$ содержат иррациональные выражения. Для нахождения данного предела в числителе и знаменателе выделяют множители вида x^m и x^n, сокращают на $x^k\cdot(k=\min(m,n))$ и находят искомый предел.

Пример 27. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{\sqrt[3]{x^3+1}}$.

Решение. Имеем

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt[3]{x^3+1}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x\sqrt[3]{1+\dfrac{1}{x^3}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{1+\dfrac{1}{x^3}}}=\left(\frac{1}{1}\right)=1.$$

Пример 28. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+3}}{2x+1}$.

Решение. Так как при $x>0$ $\sqrt{x^2}=|x|=x$, поэтому

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+3}}{2x+1}=\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2(1+\frac{3}{x^2})}}{x(2+\frac{1}{x})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}}{2+\frac{1}{x}}=\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}.$$

Пример 29. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+3}}{2x+1}$.

Решение. Так как при $x<0$ $\sqrt{x^2}=|x|=-x$, поэтому

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+3}}{2x+1}=\left(\frac{+\infty}{-\infty}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2(1+\frac{3}{x^2})}}{x(2+\frac{1}{x})}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{(-x)\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}}{(x)\cdot(2+\frac{1}{x})}=-\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}}{2+\frac{1}{x}}=-\frac{1}{2}.$$

Пример 30. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+3}}{2x+1}$.

Решение.

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+3}}{2x+1}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$. Но в силу рассмотренных выше примеров 27 и 28 заключаем, что данный предел не существует.

4.7.4. Раскрытие неопределенности вида $0\cdot\infty$

Неопределенные выражения вида $0\cdot\infty$ сводится к неопределенности вида $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$, используя соответствующие преобразования функций.

4.7.5. Раскрытие неопределенности вида $(\infty-\infty)$

$$\lim_{x\to x_0}\left[f\ (x)-\varphi\ (x)\right]=(\infty-\infty).$$

Для нахождения данного предела приводим к неопределенности вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$, для чего используем правило приведения к общему знаменателю, умножение на сопряженные выражения, и используют второй замечательный предел.

Пример 31. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{3x}{x^2-1}-\frac{2}{x-1}\right)$.

Решение.

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{3x}{x^2-1}-\frac{2}{x-1}\right)=(\infty-\infty)=\lim_{x\to 1}\frac{3x-2x-2}{(x^2-1)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x-2}{x-1}=\left(\frac{-1}{0}\right)=-\infty$$

Пример 32. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-1}-x)$.

Решение.

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-1}-x)=(\infty-\infty)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2-1}-x)(\sqrt{x^2-1}+x)}{\sqrt{x^2-1}+x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x}=\left(\frac{-1}{+\infty}\right)=0.$$

Пример 33. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{2x^2-3}-2x)$.

Решение. Так как сумма двух положительных бесконечно больших есть бесконечно большая, то имеем

$$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{2x^2-3}-2x)=\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{2x^2-3}+(-2x))=(+\infty+\infty)=+\infty.$$

Пример 34. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left[\ln(x+1)-\ln x\right]$.

Решение.

$$\lim_{x\to+\infty} x\left[\ln(x+1)-\ln x\right]=(\infty-\infty)=\lim_{x\to+\infty} x\ln\frac{x+1}{x}=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)^{x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\ln\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\ln e=1.$$

4.7.6. Раскрытие неопределенности вида 1^{∞}

Неопределенное выражение вида 1^{∞} получаем при вычислении пределов вида

$$\lim_{x\to x_0}\left[\varphi\ (x)\right]^{\varphi(x)}=C. \tag{6.94}$$

При нахождении пределов вида (6.94) следует иметь ввиду, что

1) если существуют конечные пределы

$$\lim_{x\to x_0} f\ (x)=A \text{ и } \lim_{x\to x_0}\varphi\ (x)=B,$$

тогда $C=A^{B}$;

2) если $\lim\limits_{x\to x_0} f\ (x)=A\neq 1$ и $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi\ (x)=\pm\infty$, то вопрос о нахождении предела (6.94) решается непосредственно

3) если $\lim\limits_{x\to x_0} f\ (x)=1$ и $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi\ (x)=\infty$, то есть имеет неопределенность (1^{∞}), тогда полагают $f\ (x)=1+\alpha\ (x)$, где $\alpha(x)\to 0$ при $x\to x_0$ и получаем

$$C=\lim_{x\to x_0}\left[(1+\alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}}\right]^{\alpha(x)\cdot\varphi(x)}=e^{\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)\cdot\varphi(x)}=e^{\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)-1)\cdot\varphi(x)}$$

4) если $\lim\limits_{x\to x_0} f\ (x)=1$ и $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi\ (x)=\infty$, то есть имеем неопределенность вида (1^{∞}), тогда исходный предел можно найти следующим образом

$$\left[f\ (x)\right]^{\varphi(x)}=e^{\varphi(x)\cdot\ln f(x)},$$

$$\lim_{x\to x_0}(f\ (x))^{\varphi(x)}=\lim_{x\to x_0} e^{\varphi(x)\ln f(x)}=e^{\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)\ln f(x)}.$$

Пример 35. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 3x}{x}\right)^{2+3x}$.

Решение. В данном случае имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=3 \text{ и } \lim_{x\to 0}(2+3x)=2$$

тогда

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{x}\right)^{2+3x}=(3^2)=9.$$

Пример 36. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{2x+3}\right)^{x^2}$.

Решение.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{2x+3}\right)^{x^2}=\left(\frac{1}{2}\right)^{+\infty}=0.$$

Пример 37. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x+3}{x+2}\right)^{x}$.

Решение. Имеем

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+3}{x+2}\right)^{x}=(2)^{+\infty}=+\infty.$$

Пример 38. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^{x}$.

Решение. Имеем неопределенность вида (1^{∞}), поэтому

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{x}=(1^{\infty})=\lim_{x\to\infty}\left(1+\left(\frac{x-1}{x+1}-1\right)\right)^{x}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{(-2)}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{-2}}\right]^{\frac{-2x}{x+1}}=e^{-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x}{x+1}}=e^{-2}.$$

В этом случае можно найти предел следующим образом

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x=(1^\infty)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)^x}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}=\frac{e^{-1}}{e}=e^{-2}.$$

Пример 39. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$.

Решение. В данном примере имеем $x\in D\ (y)$.

Замечание. При вычислении пределов, связанных с неопределенностью вида (1^∞) полезно использовать формулы

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{m}{x}\right)^{nx}=e^{mn} \quad \text{и} \quad \lim_{x\to 0}(1+mx)^{\frac{n}{x}}=e^{mn}.$$

4.7.7. Использование следующих важных пределов при решении задач на вычисление пределов функций

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a \qquad a>0.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha.$$

4.7.8. Замена переменного (подстановка) при вычислении предела

Теорема 37. ***Если существуют*** $\lim\limits_{x\to a}\varphi\ (x)=b$, $\lim\limits_{\mathrm{y}\to \mathrm{b}}f\ (y)=A$***, причем для всех x, принадлежащих некоторой проколотой окрестности точки a выполняется условие*** $\varphi\ (x)\neq b$***, то в точке a существует предел сложной функции*** $f\ (\varphi\ (x))$ ***и справедливо равенство***

$$\lim_{x\to a}f\ (\varphi\ (x))=\lim_{y\to b}f\ (y). \qquad \textbf{\textit{(6.95)}}$$

Доказательство. По определению предела, функции φ и f определены соответственно в проколотых окрестностях $\bigcup_\delta(a)$ и

$\bigcup_\delta(b)$, где $\delta > 0, \varepsilon > 0$, причем для $x \in \bigcup_\delta(a)$ выполняется условие $\varphi\,(x) \in \bigcup_\varepsilon(b)$. Следовательно на множестве $\bigcup_\delta(a)$ определена сложная функция $f\,(\varphi\,(x))$. Тогда если $\{x_n\}$ – произвольная последовательность такая, что $x_n \to a$ и $x_n \in \bigcup_\delta(a)$, $\mathrm{n} \in \mathrm{N}$, а $y_n \to b$, где $y_n \in \bigcup_\varepsilon(b)$ и в силу того, что существует $\lim\limits_{y \to b} f\,(y) = A$, получим

$$\lim_{n\to\infty} f\,(\varphi\,(x)) = \lim_{n\to\infty} f\,(y_n) = A.$$

А это значит, что $\lim\limits_{x\to a} f\,(\varphi\,(x)) = A$, то есть имеет место равенство (6.95).

Пример 40. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x+1}{\sqrt[4]{x+17}-2}$.

Решение.

$$\lim_{x\to -1} \frac{x+1}{\sqrt[4]{x+17}-2} = \left(\frac{0}{0}\right) = \left| \begin{array}{c} \sqrt[4]{x+17} = t \\ x = t^4 - 17 \\ x \to -1, t \to 2 \end{array} \right| = \lim_{t\to 2} \frac{t^4-16}{t-2} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= \lim_{t\to 2} \frac{(t-2)(t+2)(t^2+4)}{t-2} = \lim_{t\to 2}(t+2)(t^2+4) = 32.$$

Пример 41. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}} \dfrac{\sin(x-\frac{\pi}{6})}{\sqrt{3}-2\cos x}$.

Решение. Полагая $x - \dfrac{\pi}{6} = t$, получим $x = t + \dfrac{\pi}{6}$ и $x \to \dfrac{\pi}{6}$, а $t \to 0$, тогда

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{6}} \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)}{\sqrt{3}-2\cos x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{\sqrt{3} - 2\cos\left(t + \frac{\pi}{6}\right)} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{\sqrt{3} - \sqrt{3}\cos t + \sin t} = \lim_{t\to 0} \frac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\sqrt{3}\sin^2\frac{t}{2} + 2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\cos\frac{t}{2}}{\sqrt{3}\sin\frac{t}{2} + \cos\frac{t}{2}} = \left(\frac{1}{1}\right) = 1.$$

Пример 42. Вычислить предел

$$\lim_{x\to e} \frac{\ln x - 1}{x - e}.$$

Решение. Полагая $\frac{x}{e} - 1 = t$, откуда $x = e(t+1)$, $t \to 0$ при $x \to e$, тогда

$$\lim_{x\to e} \frac{\ln x - 1}{x - e} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to e} \frac{\ln\frac{x}{e}}{e\left(\frac{x}{e} - 1\right)} = \frac{1}{e}\lim_{t\to 0} \ln\frac{1+t}{t} = \frac{1}{e}.$$

4.7.9. Использование замены функций эквивалентными при вычислении пределов

Теорема 38. ***Если*** $f \sim f_1$ ***и*** $g \sim g_1$ ***при*** $x \to x_0$***, то из существования предела***

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

следует существование предела функции

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$$

и справедливо равенство

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} \qquad \textbf{\textit{(6.96)}}$$

Доказательство. По условию теоремы имеем $f \sim f_1$ и $g \sim g_1$ при $x \to x_0$, что означает $f(x) = f_1(x)\cdot h(x)$ и

$g(x) = g_1(x) \cdot h_1(x)$, где $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = 1$ и $\lim\limits_{x \to x_0} h_1(x) = 1$. Так как существует $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$ и $\lim\limits_{x \to x_0} h_1(x) = 1$, то найдется такая проколотая окрестность точки x_0, в которой определены функции f_1, g_1, h_1, при чем $g_1(x) \neq 0$ и $h_1(x) \neq 0$, что означает, что в этой окрестности определена функция $g(x) = g_1(x) \cdot h_1(x)$ такая, что $g(x) \neq 0$. Значит, в некоторой проколотой окрестности точки x_0 определена функция

$$\frac{f(x)}{g(x)} \text{ и } \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{h(x)}{h_1(x)} \cdot \frac{f_1(x)}{g_1(x)}.$$

Так как существует $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, а $\lim\limits_{x \to x_0} h_1(x) = 1$ и $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = 1$, то существует $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$ и справедливо равенство (6.96).

Пример 43. Вычислить предел $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\arg\sin 4x \cdot (e^x - 1)}{\cos x - \cos 3x}$.

Решение. Так как при $x \to 0$ argsin $4x$ ~ $4x$, $e^x - 1$ ~ x, cos x – cos $3x$ = 2 sin x · sin $2x$, sin x ~ x, sin $2x$ ~ $2x$, тогда получим

$$\lim_{x \to 0} \frac{\arg\sin 4x \cdot (e^x - 1)}{\cos x - \cos 2x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{4x \cdot x}{2x \cdot 2x} = 1.$$

Замечание. При нахождении пределов бывает полезный следующий факт: если при $x \to a$ величины $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ – б.м.ф. более высокого порядка, чем α, а $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ – б.м.ф. высокого порядка, чем β, то

$$\lim_{x \to a} \frac{\alpha + \alpha_1 + \ldots + \alpha_k}{\beta + \beta_1 + \ldots + \beta_m} = \lim_{x \to a} \frac{\alpha}{\beta}$$

(α может быть и числом, и одним из символов $+\infty, -\infty, \infty$).

Пример 44. Вычислить предел

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 5x + tg^2 x + \ln(1 + x^2)}{x + x^2 + \arg\sin^2 x}.$$

Решение. Согласно замечанию 2 будем иметь

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x + tg^2 x + \ln(1+x^2)}{x + x^2 + \arg\sin^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x} = 5.$$

4.8. Эквивалентные бесконечно малые функции. Сравнение бесконечно малых функций

Из установленных выше теорем имеем: сумма, разность, произведение ограниченной функции на бесконечно малую функцию и произведение двух б.м.ф. – бесконечно малая функция. А отношение двух б.м.ф. может быть:

1. бесконечно малой функцией;
2. бесконечно большой функцией;
3. любое конечное число;
4. не имеет предела.

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – б.м.ф. при $x \to x_0$. Если

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C \qquad (6.97)$$

Тогда

1. C – некоторое конечное число, отличное от нуля, то функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются бесконечно малыми функциями одного порядка.

2. $C = 1$, то функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ эквивалентными бесконечно малыми: записывают $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

3. $C = 0$, то функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой более высокого порядка, чем $\beta(x)$.

4. $C = \infty$, то функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой более низкого порядка, чем $\beta(x)$.

5. Если предел (6.97) не существует, то функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются несравнимыми бесконечно малыми.

6. Если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\left[\beta(x)\right]^n} = C$, $0 < |C| < +\infty$, то функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой n-ного порядка по сравнению с функцией $\beta(x)$.

Замечание. Аналогичным образом вводится понятие бесконечно больших функций различных порядков.

Пример 45. Сравнить с бесконечно малой $\alpha(x)=2x$ следующие бесконечно малые при $x\to 0$ функции $\beta(x)$:

1. $\beta(x)=\sin 2x$;
2. $\beta(x)=\sqrt{4+x}-2$;
3. $\beta(x)=\sqrt[5]{\sin^4 x}$;
4. $\beta(x)=x\cos\dfrac{1}{x}$.

Решение.

1. Так как $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{2x}=1$, то данные бесконечно малые функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ эквивалентны при $x\to 0$.

2. Так как $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+x}-2}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{2x(\sqrt{4+x}+2)}=\dfrac{1}{8}$, то данные бесконечно малые функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – одного порядка.

3. Так как $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[5]{\sin^4 x}}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[5]{\dfrac{\sin^4 x}{x^4}}\cdot\dfrac{1}{2\cdot\sqrt[5]{x}}=\infty$, то функция $\beta(x)$ есть бесконечно малая более низкого порядка, чем $\alpha(x)$.

4. Так как $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cos\frac{1}{x}}{2x}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\cos\dfrac{1}{x}$ не существует, то бесконечно малые функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ несравнимы.

Пример 46. Сравнить при $x\to\infty$, следующие бесконечно большие функции:

1. $f(x)=3x^4+2x^3+2x+1$ и $\varphi(x)=3x^4+1$.
2. $f(x)=3x^2+2x+1$ и $\varphi(x)=4x^3+1$.
3. $f(x)=x^2\sin\dfrac{1}{x}$ и $\varphi(x)=x^2$.

Решение.

1. Так как $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=1$, то $f(x)$ и $\varphi(x)$ эквивалентные функции при $x\to\infty$.

2. Так как $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=0$, то бесконечно большая функция $f(x)$ имеет более низкий порядок по сравнению с бесконечно большой функцией $\varphi(x)$ при $x\to\infty$.

3. Так как $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ не существует, то данные бесконечно большие функции несравнимы.

Для эквивалентных бесконечно малых имеют место следующие теоремы.

Теорема 38. ***Разность двух эквивалентных бесконечно малых функций есть бесконечно малая более высокого порядка, чем каждая из них.***

Доказательство. Если $\alpha\ (x)$ и $\beta\ (x)$ при $x \to x_0$ есть эквивалентные бесконечно малые, то

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha\ (x)}{\beta\ (x)} = 1.$$

Тогда

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha\ (x) - \beta\ (x)}{\beta\ (x)} = \lim_{x\to x_0} \left(\frac{\alpha\ (x)}{\beta\ (x)} - 1 \right) = 1 - 1 = 0.$$

Таким же образом имеем

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\beta\ (x) - \alpha\ (x)}{\alpha\ (x)} = \lim_{x\to x_0} \left(\frac{\beta\ (x)}{\alpha\ (x)} - 1 \right) = 1 - 1 = 0.$$

А это означает, что имеет место теорема 38.

Замечание. Справедливо и обратное утверждение: если $(\alpha\ (x) - \beta\ (x))$ есть бесконечно малая более высокого порядка, чем $\alpha\ (x)$ или $\beta\ (x)$, то $\alpha\ (x)$ и $\beta\ (x)$ – эквивалентные бесконечно малые $\alpha\ (x)$ и $\beta\ (x)$эквивалентны.

Действительно, в силу того, что $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\beta\ (x) - \alpha\ (x)}{\beta\ (x)} = 0$, то

$\lim\limits_{x\to x_0} \left(1 - \dfrac{\alpha\ (x)}{\beta\ (x)} \right) = 0$, а значит

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha\ (x)}{\beta\ (x)} = 1,$$

то есть $\alpha\ (x)$ и $\beta\ (x)$ эквивалентны.

Теорема 39. ***Сумма конечного числа бесконечно малых функций разных порядков эквивалентна бесконечно малой из данных слагаемых более низкого порядка.***

Доказательство. Пусть $\alpha\ (x)$, $\beta\ (x)$и $\gamma\ (x)$ – б.м.ф. при $x \to x_0$, причем $\alpha\ (x)$ и $\beta\ (x)$ – б.м.ф. более высокого порядка, чем $\gamma\ (x)$, то есть $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\alpha\ (x)}{\beta\ (x)} = 0$ и $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\beta\ (x)}{\gamma\ (x)} = 0$.

Тогда

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha\ (x)+\beta\ (x)+\gamma\ (x)}{\gamma\ (x)}=\lim_{x\to x_0}\left(\frac{\alpha\ (x)}{\gamma\ (x)}+\frac{\beta\ (x)}{\gamma\ (x)}+1\right)=1\text{, то есть}$$

$$\alpha\ (x)+\beta\ (x)+\gamma\ (x)\approx\lambda\ (x)\ \text{при}\ x\to x_0 \qquad (6.98)$$

Слагаемое $\gamma\ (x)$ в (6.98) называют главной частью суммы конечного числа бесконечно малых функций.

Замена суммы б.м.ф. ее главной частью называют отбрасыванием бесконечно малых более высокого порядка.

Замечание. Если в некоторой проколотой окрестности точки $x = x_0$, определены функцией $f\ (x)$, $g\ (x)$ и $h\ (x)$ такие, что в окрестности точки $x = x_0$ имеет место

$$f\ (x)=g\ (x)\cdot h\ (x),\quad \lim_{x\to x_0} h\ (x)=1,$$

то функция $f\ (x)$ и $g\ (x)$ называются эквивалентными (асимптотически равными) при $x\to x_0$ и пишут $f(x)\sim g(x)$ или $f\sim g$.

Отметим, что отношение эквивалентности функций f и g обладает свойствами:

1) симметричности, то есть если $f\sim g$ при $x\to x_0$, то $g\sim f$ при $x\to x_0$;

2) транзитивности, то есть, если $f\sim g$ и $g\sim\varphi$ при $x\to x_0$, то $f\sim\varphi$ при $x\to x_0$.

Теорема 40 (замена функций эквивалентными). ***Если $f\sim f_1$ и $g\sim g_1$ при $x\to x_0$, то из существования предела функций $\frac{f_1(x)}{g_1(x)}$ при $x\to x_0$ следует существование предела функций $\frac{f\ (x)}{g\ (x)}$ при $x\to x_0$ и имеет место равенство***

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f_1(x)}{g_1(x)} \qquad \textbf{\textit{(6.99)}}$$

Доказательство. По условию теоремы имеем $f\sim f_1$ и $g\sim g_1$ при $x\to x_0$, а это означает, что

$$f\ (x)=f_1(x)\cdot h\ (x)\ \text{ и }\ g\ (x)=g_1(x)\cdot h_1(x),$$

где $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = 1$ и $\lim\limits_{x \to x_0} h_1(x) = 1$.

Так как существует $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$ и $\lim\limits_{x \to x_0} h_1(x) = 1$, тогда существует проколотая окрестность точки x_0, в которой определены функции f_1, g_1, h_1, причем $g_1(x) \neq 0$ и $h_1(x) \neq 0$, откуда следует, что в этой окрестности будет определена функция

$$g(x) = g_1(x) \cdot h_1(x), \text{ такая, что } g(x) \neq 0.$$

Тогда, в некоторой проколотой окрестности точки x_0 определена функция $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ и $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{h(x)}{h_1(x)} \cdot \dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$.

Так как существует $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$, а $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = 1$ и $\lim\limits_{x \to x_0} h_1(x) = 1$, то существует $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ и имеет место равенство (6.99).

Таблица эквивалентностей
($\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x \to 0$)

1. $\sin \alpha(x) \sim \alpha(x)$;	6. $\ln(1 + \alpha(x)) \sim \alpha(x)$;
2. $\operatorname{tg} \alpha(x) \sim \alpha(x)$;	7. $a^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x) \cdot \ln a$; a > 0;
3. $1 - \cos \alpha(x) \sim [\alpha(x)]^2 \cdot \dfrac{1}{2}$;	8. $e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)$;
4. $\arcsin \alpha(x) \sim \alpha(x)$;	9. $(1 + \alpha(x))^K - 1 \sim K \cdot \alpha(x)$;
5. $\operatorname{arctg} \alpha(x) \sim \alpha(x)$;	10. $\sqrt[n]{1 + \alpha(x)} - 1 \sim \dfrac{\alpha(x)}{n}$.

Пример 46. Найти пределы функций

3.1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 3x}{\ln(1 + 5x)}$;

3.2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos 2x}{1 - \cos x}$;

3.3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + x + x^2} - 1}{\sin 2x}$;

3.4. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin \sqrt[3]{x} \cdot \ln(1 + 2x)}{\operatorname{arctg} x \cdot (e^{5 \cdot \sqrt[3]{x}} - 1)}$.

Решение.

3.1. Имеем $\sin 3x \sim 3x$; $\ln(1 + 5x) \sim 5x$.

Поэтому $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 3x}{\ln(1+5x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x}{5x}=\dfrac{3}{5}$.

3.2. Имеем $1-\cos 2x=2\sin^2 x \sim 2x^2$.

$$1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}=2\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2 \sim \frac{x^2}{2}.$$

Тогда

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos 2x}{1-\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{2\cdot 2x^2}{x^2}=4.$$

3.3. Имеем

$$\sqrt{1+x+x^2}-1 \sim \frac{x+x^2}{2} \sim \frac{x}{2};\ \sin 2x \sim 2x.$$

Тогда

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\sin 2x}=\lim_{x\to0}\frac{x}{2\cdot 2x}=\frac{1}{4}.$$

3.4. Имеем

$$\sin\sqrt[3]{x} \sim \sqrt[3]{x};\quad \ln(1+2x) \sim 2x;\quad arctg(x) \sim x;\quad e^{5\cdot\sqrt[3]{x}}-1 \sim 5\cdot\sqrt[3]{x}.$$

Тогда

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin\sqrt[3]{x}\cdot\ln(1+2x)}{arctg(x)\cdot(e^{5\sqrt[3]{x}}-1)}=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{x}\cdot 2x}{x\cdot5\cdot\sqrt[3]{x}}=\frac{2}{5}.$$

§5. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

1. Непрерывность функции в точке и на отрезке.
2. Точки разрыва. Классификация точек разрыва.
3. Свойства функций, непрерывных в точке.
4. Свойства функций, непрерывных на отрезке.

5.1. Непрерывность функции в точке и на отрезке

Важнейшее понятие математического анализа – непрерывность связано с понятием предела функции.

Говорят, что функция $f(x)$ определенная в некоторой окрестности точки a, непрерывна в точке a, если

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a) \qquad (6.100)$$

Равенство (6.100) означает выполнение трех условий:

1) функция $f(x)$ определена в точке $x = a$ и в ее окрестности;

2) функция $f(x)$ имеет предел при $x \to a$;

3) предел функции в точке $x = a$ равен значению функции в этой точке, то есть справедливо равенство (6.100).

Отметим, так как $\lim\limits_{x \to a} = a$, то равенство (6.100) принимает вид

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(\lim_{x \to a}) = f(a).$$

А это значит, что нахождением предела непрерывной функции $f(x)$ можно осуществить переход к пределу под знаком функции.

Например, при нахождении предела

$$\lim_{x \to 0} 2^{\frac{\sin 2x}{x}} = 2^{2 \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{2x}} = 4$$

в первом равенстве функция и предел поменялись местами в силу непрерывности функции 2^x.

Определение непрерывности функции в точке a, выраженное условием (6.100) можно сформулировать с помощью «$\varepsilon - \delta$», и с помощью окрестностей и в терминах последовательностей в следующем виде:

1. $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta_\varepsilon > 0 \quad \forall x \quad |x - a| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

2. $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta_\varepsilon > 0 \quad \forall x \in \bigcup \delta_\varepsilon(a) \Rightarrow f(x) \in \bigcup \varepsilon (f(x))$.

3. $\forall \{x_n\}; \quad \mathrm{x_n} \to a \Rightarrow f(x_n) \to f(a)$.

С геометрической точки зрения непрерывность функции $f(x)$ в точке $x = a$ означает следующее: какую бы горизонтальную ε-полосу вдоль прямой $y = f(a)$ не взять, всегда найдется вертикальная δ_ε-полоса вдоль прямой $x = a$, такая, что все точки графика, расположенные в вертикальной полосе, обязательно попадут во взятую горизонтальную полосу (рис. 6.30).

Величину $\Delta x = x - a$ называют приращением аргумента, а разность $f(x) - f(a) = \Delta y$ – приращением функции соответствующему приращению аргумента. Таким образом

$$\Delta x = x - a; \quad \Delta y = f(x) - f(a) = f(a + \Delta x) - f(a)$$

Тогда, функция $y = f(x)$ определенная в точке $x = a$ и некоторой ее окрестности непрерывна в точке $x = a$, если

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0 \qquad (6.101)$$

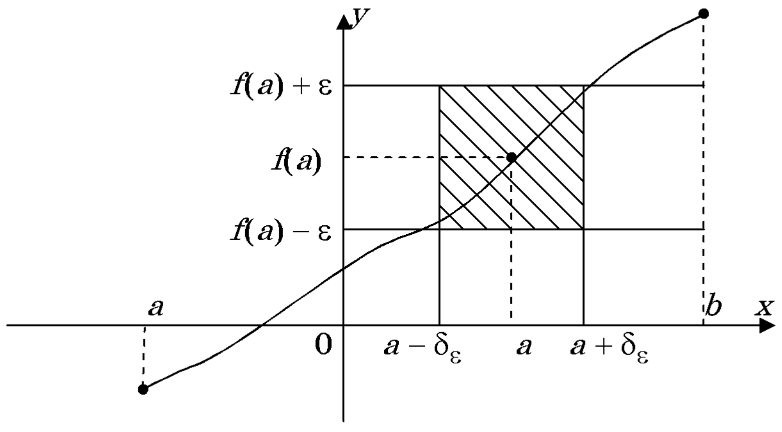


Рис. 6.30

С геометрической точки зрения непрерывность функции в точке (равенство (6.101)) означает следующее: бесконечно малому изменению аргумента (x) соответствует бесконечно малое приращение функции (y) (рис. 6.31).

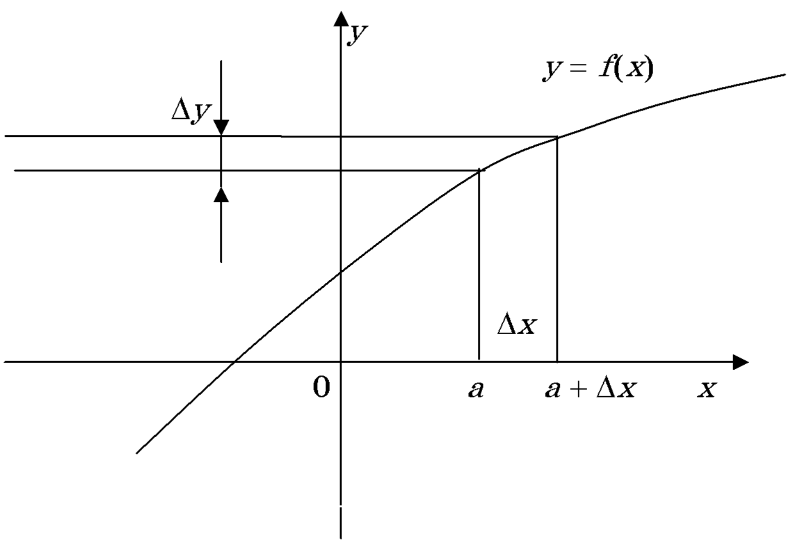


Рис. 6.31

Подчеркнем, что в определении непрерывности функции в точке a, в отличие от определения предела функции в точке, рассматривается полная, а не проколотая окрестность точки a, то есть функция определена в точке $x = a$ и некоторой ее окрестности. Пределом функции является значение этой функции в точке $x = a$.

Пример 1. Доказать непрерывность функции $f(x)$ в точке a по определению для

1. $f(x) = x^3, \quad a = 1.$

2. $f(x) = \dfrac{2x}{1 + x^2}, \quad a \in R.$

3. $f(x) = \sin x, \quad a \in R.$

4. $f(x) = \sqrt{x + 1}, \quad a = 3.$

5. $f(x) = \begin{cases} x \sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, \ x = 0, & a = 0. \end{cases}$

Решение.

1. Если $x \to 1$, то по свойству пределов получаем $x^3 \to 1$, то есть для функции $f(x) = x^3$ в точке $x = 1$ выполняется условие $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1) = 1$. А это значит, что $f(x) = x^3$ непрерывна в точке.

2. Доказательство непрерывности данной функции проведем по определению установив, что $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$. Пусть x любое число из $D(y)$. Дадим ему приращение Δx и рассмотрим значение аргумента $x + \Delta x$. Тогда функция получит приращение Δy:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \frac{2(x + \Delta x)}{1 + (x + \Delta x)^2} - \frac{2x}{1 + x^2} =$$

$$= \frac{2x}{1 + (x + \Delta x)^2} - \frac{2x}{1 + x^2} + \frac{2\Delta x}{1 + (x + \Delta x)^2} =$$

$$= \frac{2x(1 + x^2 - 1 - (x + \Delta x)^2)}{(1 + (x + \Delta x)^2)(1 + x^2)} + \frac{2\Delta x}{1 + (x + \Delta x)^2} =$$

$$= \frac{2x \cdot (x - x - \Delta x) \cdot (x + x + \Delta x)}{(1 + (x + \Delta x)^2)(1 + x^2)} + \frac{2\Delta x}{1 + (x + \Delta x)^2} =$$

$$= \frac{\Delta x}{1 + (x + \Delta x)^2}\left(\frac{-2x(2x + \Delta x)}{1 + x^2} + 2\right).$$

При любом фиксированном $x \in D\ (y)$ и $\Delta x \to 0$ имеем, что $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$. Значит, данная функция непрерывна на $D\,(y)$.

3. Область определения данной функции $x \in R$. Пусть x – любая точка из R, $(x + \Delta x)$ – приращение аргумента, тогда приращение функции –

$$\Delta y = f\ (x + \Delta x) - f\ (x) = \sin\ (x + \Delta x) - \sin x = 2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}.$$

Тогда

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} 2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \sin\frac{\Delta x}{2} = 0,$$

так как $\sin\dfrac{\Delta x}{2}$ – бесконечно малая функция при $\Delta x \to 0$.

Тогда, согласно определению имеем, что данная функция непрерывна в любой точке $x \in R$.

4. Докажем непрерывность данной функции в точке $x = 3$ на «$\varepsilon - \delta$» языке. В точке $x = 3$ данная функция определена: $f\,(3) = 2$. Пусть $\varepsilon > 0$, тогда при $\delta_\varepsilon > 0$ для всех x, удовлетворяющих неравенству $\left|x - 3\right| < \delta_\varepsilon$, имеем

$$\left|f\ (x) - f\ (3)\right| = \left|\sqrt{x+1} - 2\right| = \frac{\left|x - 3\right|}{\left|\sqrt{x+1} + 2\right|} < \frac{\left|x - 3\right|}{4} < \frac{\delta}{4}.$$

Полагая $\delta_\varepsilon = 4\varepsilon$, то при значениях x, для которых $\left|x - 5\right| < 4\varepsilon$, будет справедливо неравенство $\left|\sqrt{x+1} - 2\right| < \varepsilon$, что означает, что данная функция непрерывна при $x = 3$.

5. Функция имеет область определения R, и для любого $x \in R$ выполняется неравенство

$$\left|f\ (x) - f\ (0)\right| = \left|f\ (x)\right| \le x, \text{ так как } \left|\sin\frac{1}{x}\right| \le 1 \text{ при } x \ne 0.$$

Значит, $\lim\limits_{x \to 0} f\ (x) = f\ (0) = 0$, то есть данная функция $f\,(x)$ непрерывна в точке $x = 0$.

По аналогии с понятием предела слева (справа) в точке $x = a$, вводится понятие непрерывности в точке $x = a$ слева (справа). Так, если функция $f\,(x)$ определена на полуинтервале $(a - \delta,\ \ a)$ и $\lim\limits_{x \to a-0} f\ (x) = f\ (a)$, то есть $f\ (a - 0) = f\ (a)$, то эту функцию называют непрерывной слева в точке a (рис. 6.32).

Аналогично, если функция $f(x)$ определена на полуинтервале $(a,\ a+\delta)$ и $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = f(a)$, то есть $f(a+0) = f(a)$, то эту функцию называют непрерывной справа в точке a (рис. 6.33).

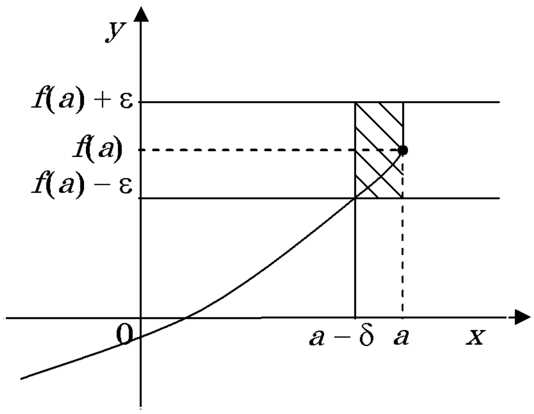


Рис. 6.32

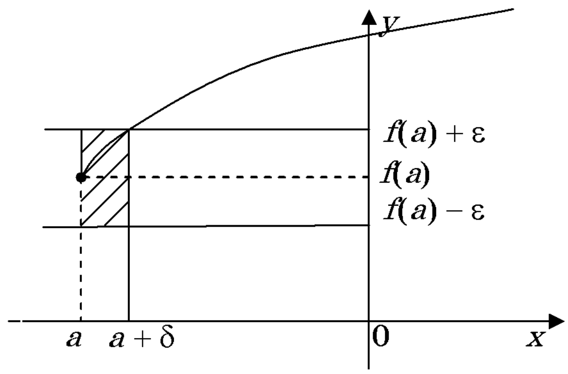


Рис. 6.33

Функция непрерывна в данной точке тогда и только тогда, когда она непрерывна как слева, так и справа в этой точке.

Например, функция $f(x) = x\cdot[x]$ (рис. 6.34) непрерывна в точке $x = 0$, так как $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot[x] = 0$ и $f(0) = 0$. Непрерывна справа в точках $x = -1$ и $x = 1$, так как $\lim\limits_{x\to 1+0} x\cdot[x] = 1$; $\lim\limits_{x\to -1+0} x\cdot[x] = 1$; $f(-1) = f(1) = 1$ и разрывна слева в точках $x = -1$ и $x = 1$.

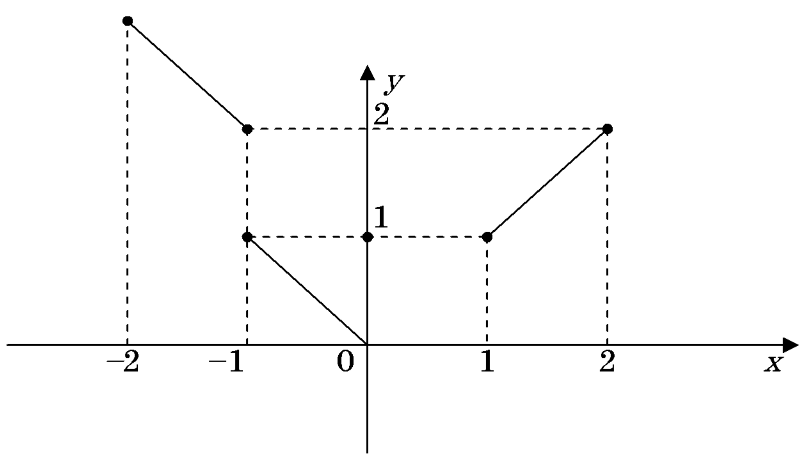


Рис. 6.34

Функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[ab]$, если она непрерывна в каждой точке данного отрезка.

5.2. Точки разрыва. Классификация точек разрыва

Пусть функция $f\ (x)$ определена в некоторой проколотой окрестности точки $x = a$. Точка $x = a$ называется точкой разрыва данной функции $f\ (x)$, если эта функция либо не определена в точке a, либо определена в точке a, но не является непрерывной в данной точке a.

Значит, a – точка разрыва функции $f\,(x)$, если не выполняется по крайней мере одно из следующих условий:

1. $a \in D\ (f)$.

2. существует конечный $\lim\limits_{x\to a} f\ (x) = A$.

3. $A = f\,(a)$.

Характер разрыва функции в точке $x = a$ определяется односторонними пределами ее в этой точке. Итак $x = a$ точка разрыва функции $f\,(x)$, если равенства (6.102) нарушаются хотя бы в одном месте.

$$\lim_{x\to a-0} f\ (x) = \lim_{x\to a+0} f\ (x) = f\ (a). \qquad (6.102)$$

Возможны следующие случаи:

1. Односторонние пределы функции $f\,(x)$ при $x \to a$ конечные числа, но не равны между собой. В этом случае точка $x = a$ – точка разрыва I рода, точка конечного скачка, а разность $f(a+0) - f(a-0)$ называют скачком функции $f\,(x)$ в точке a.

Пример 2. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \le 0, \\ x+1, & x > 0 \end{cases}$$

в точке $x = 0$.

Решение. Функция $f\,(x)$ определена в точке $x = 0$ $f\,(0) = 0$, $\lim\limits_{x\to 0-0} f\ (x) = \lim\limits_{x\to 0-0} x^2 = 0$, а $\lim\limits_{x\to 0+0} f\ (x) \ne \lim\limits_{x\to 0-0} f\ (x)$, то точка $x = 0$ – точка разрыва I рода – точка конечного скачка. Скачок функции $f\,(x)$ равен $f\ (a+0) - f\ (a-0) = 1 - 0 = 1$.

График данной функции изображен на рис. 6.35.

Пример 3. Исследовать на непрерывность функцию

$$f\ (x) = \frac{|x-1|}{x-1}$$

в точке $x = 1$.

Решение. Функция $f(x)$ в точке $x = 1$ не определена, значит точка $x = 1$ – точка разрыва данной функции. Так так

$$\lim_{x\to 1-0} f(x) = \lim_{x\to 1-0} \frac{-(x-1)}{x-1} = -1,$$

$$\lim_{x\to 1+0} f(x) = \lim_{x\to 1+0} \frac{x-1}{x-1} = 1,$$

то данная функция имеет разрыв I рода – точка конечного скачка; скачок $f(x)$ в точке $x = 1$ равен 2 (рис. 6.36).

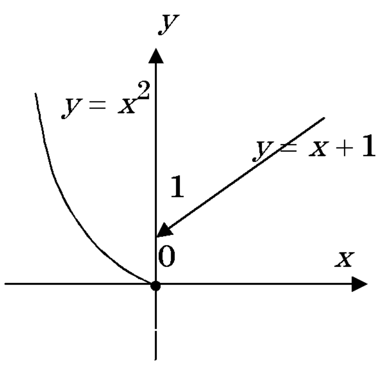


Рис. 6.35

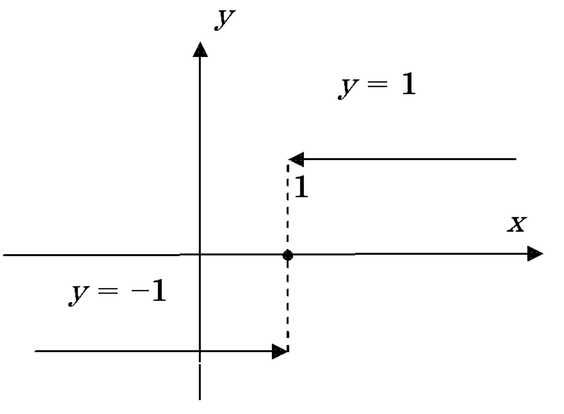


Рис. 6.36

2. Односторонние пределы функции $f(x)$ при $x \to a$ равны между собой, но не равны значению функции в точке $x = a$. Точка $x = a$, точка разрыва I рода – точка устранимого разрыва. Действительно, в этом случае полагая

$$f(a-0) = f(a+0) = f(a) = A,$$

получим функцию

$$f(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq a, \\ A, & x = a, \end{cases}$$

непрерывную в точке а и совпадающую с $f(x)$ при $x \neq a$. В этом случае говорят, что функция доопределена по непрерывности в точке a.

Пример 4. исследовать на непрерывность функцию

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

в точке $x = 0$.

Решение. Функция $f(x)$ не определена в точке $x = 0$, но

$$\lim_{x\to 0-0} f(x) = \lim_{x\to 0-0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

$$\lim_{x\to 0+0} f(x) = \lim_{x\to 0+0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Значит точка $x = 0$, точка разрыва I рода, точка устранимого разрыва. Действительно, доопределив функцию $f(x)$ в точке 0, $f(0) = 1$, получим непрерывную функцию

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

3. Если хотя бы один из односторонних пределов функции $f(x)$ в точке $x = a$ равен бесконечности, то в этом случае точка разрыва второго рода (точка бесконечного скачка).

Пример 5. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0, \\ \dfrac{1}{x}, & x < 0 \end{cases}$$

в точке $x = 0$.

Решение. Функция $f(x)$ определена в точке $x = 0$, $f(0) = 0$, но

$$\lim_{x\to 0-0} f(x) = \lim_{x\to 0-0} \frac{1}{x} = -\infty,$$

значит точка $x = 0$ – точка разрыва II рода (точка бесконечного скачка).

Пример 6. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

в точке $x = 0$.

Решение. Функция $f(x)$ в точке $x = 0$ не определена, и

$$\lim_{x\to 0-0} f(x) = \lim_{x\to 0-0} \frac{1}{x} = -\infty;$$

$$\lim_{x\to 0+0} f(x) = \lim_{x\to 0+0} \frac{1}{x} = +\infty,$$

следовательно точка $x = 0$ – точка разрыва второго рода.

4. Если не существует хотя бы один из односторонних пределов, то в этом случае $x = a$ точку разрыва называют точкой неопределенности.

Пример 6. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \le 0, \\ \sin\dfrac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$$

в точке $x = 0$.

Решение. Функция $f(x)$ в точке $x = 0$ определена и

$$\lim_{x\to 0-0} f(x) = \lim_{x\to 0-0} x^2 = 0.$$

$\lim\limits_{x\to 0+0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0+0} \sin\dfrac{1}{x}$ не существует предел, значит точка $x = 0$ – точка разрыва – точка неопределенности.

5.3. Свойства функций, непрерывных в точке

5.3.1. Локальные свойства непрерывных функций

Свойство 1. Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, то она ограничена в некоторой окрестности этой точки, то есть

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\, M > 0 \quad \forall x \bigcup{}_{\delta}(x_0) \Rightarrow |f(x)| \le M.$$

Свойство 2. Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, причем $f(x_0) \ne 0$, то в некоторой окрестности точки x_0 знак функции совпадает со знаком $f(x_0)$, то есть

$$\exists\, \delta > 0 \quad \forall x \in \bigcup{}_{\delta}(x_0) \Rightarrow \operatorname{sign} f(x) = \operatorname{sign} f(a).$$

Свойства 1 и 2 следуют из свойств пределов функции в точке.

5.3.2. Непрерывность функций, полученных в результате арифметических операций над непрерывными функциями

Теорема 41. ***Если функция f (x) и g (x) непрерывны в точке*** x_0***, тогда***

1. ***функция*** $f(x) \pm g(x)$ ***непрерывны в точке*** x_0***;***
2. ***функция*** $f(x) \cdot g(x)$ ***непрерывны в точке*** x_0***;***
3. ***функция*** $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x) \ne 0)$ ***непрерывны в точке*** x_0***.***

Доказательство. Докажем, например, непрерывность функции $(f(x)+g(x))$ в точке x_0.

Так как $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке $x = x_0$, то

$$\lim_{x\to x_0} = f(x_0), \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = g(x_0).$$

Тогда имеем

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x) = f(x_0)+g(x_0),$$

то есть функция непрерывна в точке x_0.

Следствие 1. Алгебраическая сумма и произведение конечного числа функций, непрерывных в точке x_0, непрерывны в точке x_0.

Следствие 2. Многочлен

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + .. + a_nx^n, \ ak \in R, \ k = \overline{0, n}$$

является функцией непрерывной для любого $x \in R$.

Следствие 3. Всякая рациональная функция $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ непрерывна в любой точке $x \in R$, для которой $Q(x) \neq 0$, где $P(x)$, $Q(x)$ – многочлены.

5.3.3. Непрерывность сложной функции

Напомним понятие сложной функции. Пусть функции $y = \varphi(x)$ и $z = f(y)$ определены на множествах x и y соответственно, причем множество значений функции φ содержится в области определения f. Тогда функцию, принимающую при каждом $x \in X$ значения $F(x) = f(\varphi(x))$, называют сложной функцией или суперпозицией (композицией) функций φ и f и записывают $f \circ \varphi$.

Теорема 42. ***Если функция*** $z = f(y)$ ***непрерывна в точке*** y_0, ***а функция*** $y = \varphi(x)$ ***непрерывна в точке*** x_0, ***определена сложная функция*** $f(\varphi(x))$ ***и эта функция непрерывна в точке*** x_0.

Доказательство. Пусть задано произвольное число $\varepsilon > 0$. Так как функция f непрерывна в точке y_0, то существует число

$p = p\ (\varepsilon) > 0$ такое, что $\bigcup_p(y_0) \subset D(f)$ и

$$\forall y \subset \bigcup_p(y_0) \Rightarrow f\ (y) \in \bigcup_\varepsilon(f\ (y_0)), \qquad z_0 = f\ (y_0) \tag{6.103}$$

В силу непрерывности функции φ в точке x_0, для найденного в (6.103) числа $p > 0$ можно указать число $\delta = \delta_p = \delta\ (\varepsilon) > 0$ такое, что

$$\forall x \in \bigcup_\delta(x_0) \Rightarrow \varphi\ (x) \in \bigcup_p(y_0) \tag{6.104}$$

Из условий (6.103) и (6.104) следует, что на множестве $\bigcup_\delta(x_0)$ определена сложная функция $f\ (\varphi\ (x))$, причем имеем

$$\forall x \in \bigcup_\delta(x_0) \Rightarrow f\ (y) = f\ (\varphi\ (x)) \in \bigcup_\varepsilon(z_0), \quad z_0 = f\ (y_0) = f\ (\varphi\ (x_0)),$$

то есть

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\ \delta > 0 \quad \forall x \in \bigcup_\delta(x_0) \Rightarrow f\ (\varphi\ (x)) \in \bigcup_\varepsilon(\varphi\ (x_0)).$$

А это означает, в силу определения непрерывности, что функция $f\ (\varphi\ (x))$ непрерывна в точке x_0.

Замечание. Соответствие между окрестностями точек x_0, y_0, z_0 представлено на рис. 6.37. По заданному числу $\varepsilon > 0$ находим число $p > 0$, а затем для числа $p > 0$ находим $\delta > 0$.

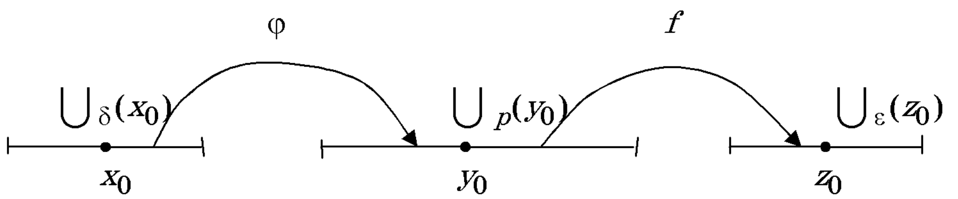


Рис. 6.37

Следствие. Сложная функция, являющаяся композицией конечного числа непрерывных в точке x_0 функций, непрерывна в точке x_0.

5.4. Свойства функций, непрерывных на отрезках

Функцию $f\ (x)$ называют непрерывной на отрезке $[a;\ b]$, если она непрерывна в каждой точке интервала $(a;\ b)$ и, кроме того непрерывна справа в точке a и непрерывна слева в точке b.

5.4.1. Ограниченность непрерывной на отрезке функции

Теорема 43 ***(Вейерштасса). Если функция f (x) непрерывна на отрезке*** $[a;\ b]$***, то она ограничена, то есть***

$$\exists\ M > 0 : \forall x \in [a;\ b] \Rightarrow |f(x)| \le M\ .$$

Замечание. Функция $y = x^3$ непрерывна на R, но не ограничена на R.

Функция $y = \dfrac{1}{x-1}$ непрерывна на (0; 1), но не ограничена на этом интервале.

5.4.2. Достижение точных граней

Теорема 44 (Вейерштрасса). ***Если функция f (x) непрерывна на отрезке*** $[a;\ b]$***, то она достигает своей точной верхней и нижней граней.***

5.4.3. Промежуточные значения

Теорема 45 (теорема Коши о нулях непрерывной функции). ***Если функция f (x) непрерывна на отрезке и принимает на его концах значения разных знаков, то есть*** $f(a) \cdot f(b) < 0$***, то на отрезке*** $[a;\ b]$ ***имеется хотя бы один нуль функции f (x), то есть***

$$\exists\ \ c \in (a;\ b), \quad f\ (c) = 0\ .$$

Геометрический смысл теоремы заключается в следующем: если точки $A\ (a;\ f\ (a))$ и $B\ (b;\ f\ (b))$ графика функции $f\ (x)$, соответствующие концам отрезка $[a;\ b]$, лежат по разные стороны от оси O_x (рис. 6.38), то график функции хотя бы в одной точке отрезка пересекает ось O_x.

Теорема 46 (теорема Коши о промежуточных значениях). ***Если функция f (x) непрерывна на отрезке*** $[a;\ b]$ ***и*** $f(a) \ne f(b)$***, то для каждого значения с, заключенного между f(a) и f(b), найдется точка р, что f(p) = с.***

Доказательство. Пусть $f\ (a) = A$, $f\ (b) = B$, по условию $A \ne B$. Пусть, например, $A < B$. Нужно доказать, что

$$\forall c \in [A;\ B] \quad \exists\ p \in [a;\ b] \qquad f\ (p) = c \tag{6.105}$$

Если $c = A$, то утверждение (6.105) выполняется при $p = a$, если $c = B$, то (6.105) имеет место при $p = b$. Значит, достаточно рассмотреть случай $A < c < B$.

Пусть $\varphi(x) = f(x) - c$, тогда имеем $\varphi(a) = A - c < 0$, $\varphi(b) = B - c > 0$ и в силу теоремы 45 имеем, что существует $p \in [a;\ b]$ такая, что $\varphi(p) = 0$, то есть $f(p) = c$. Что и требовалось доказать.

Следствие. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;\ b]$, $m = \inf\limits_{x\in[ab]} f(x)$; $M = \sup\limits_{x\in[ab]} f(x)$, то множество значений, принимаемых функций $f(x)$ на отрезке $[a;\ b]$, есть отрезок $[m; M]$.

С геометрической точки зрения теорема означает следующее: пусть график функции $f(x)$ (рис. 6.39),
$f(a) = A$ и $f(b) = B$. Тогда прямая $y = c$, где c – любое число, заключенное между A и B, пересечет график функции по крайней мере в одной точке.

Если же $f(x)$ непрерывна и монотонна на $[a;\ b]$, то существует единственная точка $p \in [a;\ b]$, такая, что $f(p) = c$.

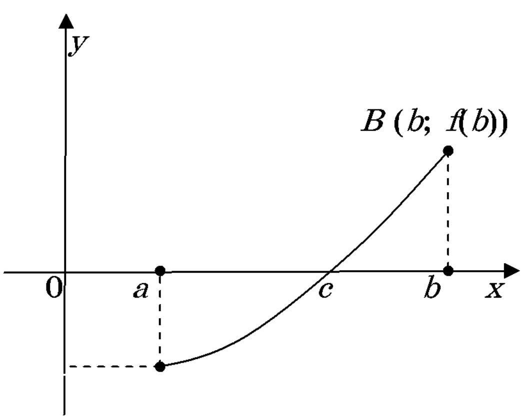


Рис. 6.38

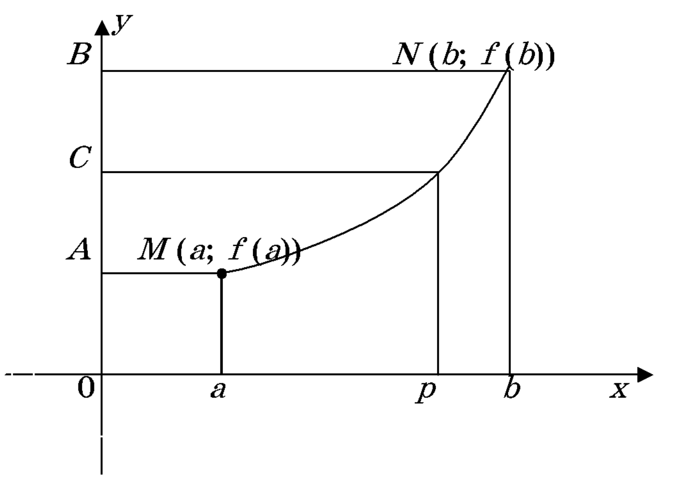


Рис. 6.39

Другими словами теорема 46 о промежуточных значениях можно сформулировать следующим образом: непрерывная функция, переходя от одного значения к другому, принимает все промежуточные значения.

5.4.4. Существование и непрерывность функции, обратной для непрерывной и строго монотонной функции

Пусть задана числовая функция $y = f\ (x)$, $x \in D\ (f)$. Тогда каждому числу $x_0 \in D\ (f)$ соответствует единственное число $y_0 = f\ (x_0) \in E\ (f)$. Но при решении задачи, связанной с тем, что по заданному значению функции y_0 требуется найти соответствующее значение аргумента, то есть решить относительно x уравнение

$$f\ (x) = y_0, \quad y_0 \in E\ (f) \tag{6.106}$$

Уравнение (6.106) может иметь одно, несколько или бесконечно много решений. Решения уравнения (6.106) – абсциссы всех точек, в которых – прямая $y = y_0$ – пересекает график функции $y = f\ (x)$. Например, если $f\ (x) = x^2$, то уравнение

$$x^2 = y_0$$

имеет два решения $x_0 \pm \sqrt{y_0}$, если $y \geq 0$, не имеет решения, если $y < 0$.

Если $f\ (x) = \sin x$, то уравнение

$$\sin x = y_0$$

имеет бесконечно много решений при $|y_0| \leq 1$:

$$x = (-1)^k \arcsin y_0 + n\pi,$$

а если $|y_0| > 1$, то уравнение не имеет решений.

Если функция $f\,(x)$ такова, что каждое значение $y_0 \in E(f)$ она принимает только при одном значении $x_0 \in D(f)$, то эту функцию называют обратимой. Для такой функции уравнение

$$f(x) = y$$

можно при любом $y \in E(f)$ однозначно разрешить относительно x, то есть каждому $y \in E(f)$ соответствует единственное значение $x \in D(f)$. Тогда это соответствие определяет функцию, которую называют обратной к функции f и обозначают символом f^{-1}.

Отметим, что прямая $y = y_0$ для каждого $y_0 \in D(f)$ пересекает график обратимой функции $y = f\,(x)$ в единственной точке $(x_0, f(x_0)$, $y_0 = f(x_0)$.

Обозначая, как обычно, аргумент обратной функции буквой x, а ее значения – y, обратную для f функцию записывают в виде

$$y = f^{-1}(x), \quad x \in D(f^{-1}).$$

Если f^{-1} обратная функция для функции f, то справедливы следующие свойства:

1. Если f^{-1} – функция, обратная к f, то и f – функция, обратная к f^{-1}, при этом

$$D(f^{-1}) = E(f), \quad E(f^{-1}) = D(f),$$

то есть область определения функции f^{-1} совпадает с множеством значений функции f и наоборот.

2. Для любого $x \in D(f)$ справедливо равенство

$$f^{-1}(f(x)) = x,$$

а для любого $x \in E(f)$ справедливо равенство

$$f\ (f^{-1}(x)) = x.$$

3. График функции $y = f^{-1}(x)$ симметричен графику функции $y = f(x)$ относительно прямой $y = x$.

4. Если нечетная функция обратима, то обратная к ней функция также является нечетной.

5. Если f – строго возрастающая (строго убывающая) функция, то она обратима, причем обратная к ней функция f^{-1} также является строго возрастающей (строго убывающей).

Свойства 1 и 2 следуют из определения обратной функции, а свойства 4 и 5 из определения обратной и соответственно нечетной и строго монотонной функции.

Для свойства 3 имеем: пусть точка $(x_0,\ y_0)$ принадлежит графику функции $y = f\ (x)$, то есть $y_0 = f\ (x_0)$. Тогда $x_0 = g\ (y_0)$, то есть точка $(y_0,\ x_0)$ принадлежит графику обратной функции f^{-1}.

Так как точки $(x_0,\ y_0)$ и $(y_0,\ x_0)$ симметричны относительно прямой $y = x$ (рис. 6.40), то график функции $y = f^{-1}(x)$ симметричен графику функции $y = f\ (x)$ относительно этой прямой.

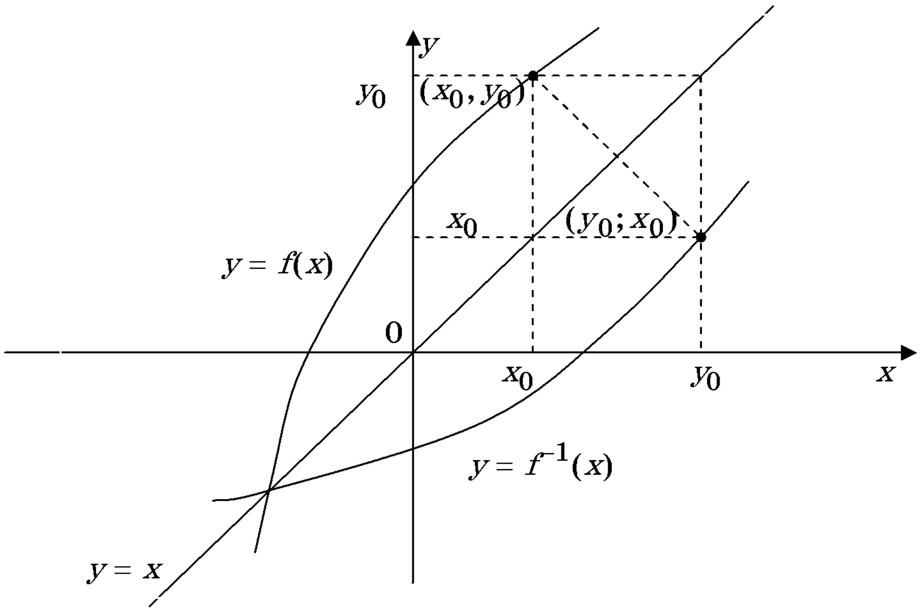


Рис. 6.40

Теорема 47. ***Если функция $y = f\ (x)$ непрерывна и строго возрастает на отрезке $[a;\ b]$, то на отрезке $[f\ (a);\ \ f\ (b)]$ определена функция $x = f^{-1}(y)$, обратная к f (x), непрерывная и строго возрастающая.***

§6. ПРИМЕРЫ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Найти предел функции:

а) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^3 - 5x^2 + 16}{x^3 + 3x^2 - 4}$;

Ответ: $\dfrac{1}{3}$;

б) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3 - 8}{3x^2 - 4x - 4}$.

Ответ: $\dfrac{3}{2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{4 - 3x - x^2}{x^3 + 64}$;

Ответ: $\dfrac{1}{16}$;

л) $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{3}} \dfrac{1 - 2\cos x}{tg(x + \frac{\pi}{3})}$.

Ответ: $-\sqrt{3}$;

м) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}} \dfrac{\sin(3x - \pi)}{1 - 2\cos x}$.

Ответ: $-\sqrt{3}$;

н) $\lim\limits_{x\to -1} (3 + 2x)^{\frac{x+4}{x+1}}$;

Ответ: e^6;

г) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 + 5x^2 + 7x + 3}{x^3 - 3x - 2}$;

Ответ: 0;

п) $\lim\limits_{x \to -4} (5 + x)^{\frac{x+2}{x+4}}$.

Ответ: e^{-2};

д) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{4 - x^2}{\sqrt{x + 2} - \sqrt{6 - x}}$;

Ответ: -8;

р) $\lim\limits_{x \to 2} (5 - 2x)^{\frac{3-x}{x-2}}$;

Ответ: e^{-2};

ж) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2 + 2x}{1 - \sqrt{x + 3}}$;

Ответ: 4;

с) $\lim\limits_{x \to +\infty} x(\ln(x + 2) - \ln(x - 1))$.

Ответ: 3;

з) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{2 - \sqrt{x + 1}}{3x - x^2}$;

Ответ: $\dfrac{1}{12}$;

т) $\lim\limits_{x \to +\infty} (1 - x)(\ln 3x - \ln(3x - 4))$.

Ответ: $-\dfrac{4}{3}$;

к) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x + 3} - \sqrt{5 - x}}{x^2 - x}$;

Ответ: $\dfrac{1}{2}$;

ф) $\lim\limits_{x \to +\infty} (2x - 1)(\ln(3x + 1) - \ln(3x + 2))$.

Ответ: $-\dfrac{2}{3}$.

2. Доказать непрерывность функций

а) $f(x) = -3x^2 - 9, \quad x_0 = 3$;

в) $f(x) = \operatorname{tg} x, \quad x_0 = \dfrac{\pi}{3}$;

б) $f(x) = 3x^2 + 2x - 4, \quad x_0 = -2$;

г) $f(x) = x^2 - 4x + 1, \quad x_0 = 2$.

3. Найти точки разрыва функций. Исследовать их характер

а) $f(x) = \dfrac{\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x - 3}}{x(x - 5)}$ Ответ: $x = 0 - 1, \ x = 5 - 2, \ x = 3 - 1$.

б) $f(x) = \dfrac{|x + 2|}{x + 2}$ Ответ: $x = -2 - 1$.

в) $f(x) = 5^{\frac{1}{x-3}}$ Ответ: $x = 3 - 2$.

г) $f(x) = x \sin \dfrac{1}{x}$ Ответ: $x = 0 - 1$.

д) $f(x) = \dfrac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{x^2 - 3x + 2}$ Ответ: $x = 1 - 1, \quad x = 2 - 1$.

ж) $f\ (x) = e^{\frac{1}{x-5}}$ Ответ: $x = 5 - 2$

з) $f(x) = \ln \dfrac{x^2}{(x+1)(x-3)}$ Ответ: $x = 1 - 2,\quad x = 0 - 2,\ x = 3 - 2.$

к) $f\ (x) = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x}$ Ответ: $x = 0 - 1$.

л) $f\ (x) = 3^{\frac{1}{x-4}}$ Ответ: $x = 4 - 2$.

м) $f\ (x) = x = \dfrac{1}{x}$ Ответ: $x = 0 - 2$.

н) $f\ (x) = \dfrac{\sin x}{1 + x^3}$ Ответ: $x = -1 - 2$.

п) $f\ (x) = \dfrac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 9}$ Ответ: $x = -3 - 2,\quad x = 3 - 1$.

4. Исследовать функцию на непрерывность. Сделать схематический чертеж

а) $f\ (x) = \begin{cases} x + 4, & x \in (-\infty; -1) \\ x^2 + 2, & x \in [-1; 1) \\ 2x & x \in [1; +\infty) \end{cases}$;

б) $f\ (x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & x \in (-\infty; 0) \\ x, & x \in [0; 2) \\ 2, & x \in [2; +\infty) \end{cases}$;

в) $f\ (x) = \begin{cases} x + \dfrac{x+2}{|x+2|}, & x \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty) \\ -2, & x = -2 \end{cases}$;

г) $f\ (x) = \begin{cases} 1 - x, & x \in (-\infty; 0) \\ \dfrac{1}{x}, & x \in (0; 2) \\ \dfrac{x}{4}, & x \in [2; +\infty) \end{cases}$;

д) $f\ (x)=\begin{cases}1, & x\in(-\infty;0)\\ 1+x, & x\in[0;3)\\ (x-3)^2, & x\in[3;+\infty)\end{cases}$;

ж) $f\ (x)=\begin{cases}-x, & x\in(-\infty;0]\\ -(x-1)^2, & x\in(0;2)\\ x-3, & x\in[2;+\infty)\end{cases}$.

5. Определить порядок малости $\alpha\ (x)$ относительно $\beta\ (x)$ при $x\to 0$

а) $\alpha\ (x)=2x^3+3x^5,\quad \beta\ (x)=x$ Ответ: 3.

б) $\alpha\ (x)=5^{\sin^2 x}-1,\quad \beta\ (x)=x$ Ответ: 2.

в) $\alpha\ (x)=\sqrt{\sin 2x},\quad \beta\ (x)=x$ Ответ: $\frac{1}{2}$.

г) $\alpha\ (x)=\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x},\quad \beta\ (x)=x$ Ответ: $\frac{1}{2}$.

д) $\alpha\ (x)=\sqrt{1+x\sin x},\quad \beta\ (x)=x$ Ответ: 1.

е) $\alpha\ (x)=3\sin^3 x-x^4,\quad \beta\ (x)=x$ Ответ: 3.

6. Вычислить пределы, используя эквивалентные функции

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+4x}-1}{\sin 2x}$ Ответ: $\frac{2}{3}$.

б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-11x+19}$ Ответ: $\frac{1}{7}$.

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin\frac{x}{3}+x^2}{\operatorname{arctg}\ 3x-x^2+4x^3}$ Ответ: $\frac{1}{9}$.

г) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\log_2(\sin\frac{\pi x}{4})}{1-e^{tg\,2\pi x}}$ Ответ: 0.

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-x^2)\ \operatorname{tg}\ 4x}{\sqrt{1+x\sin x}-1}$ Ответ: 0.

ж) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{tg(1-\sin\frac{x}{2})}{\ln(2+\cos x)}$ Ответ: 0,25.

ТЕМЫ РЕФЕРАТОВ И КУРСОВЫХ РАБОТ

1. Построение функций с геометрическим и физическим содержанием. Исследование и построение графиков функций.
2. Неявные функции. Функции заданы параметрически. Исследование и построение графиков.
3. Доказательство неравенств. Основные методы.
4. Понятие о бесконечности. Мощность множества. Числовые множества.
5. Метод математической индукции. Нахождение суммы.
6. Верхняя и нижняя грани числового множества.
7. Предельный переход – основной метод решения задач математического анализа.
8. Основная теорема алгебры. Неприводимые многочлены. Основные теоремы.
9. Границы корней кубического уравнения.
10. Графическое решение кубических уравнений.
11. Многочлены, наименее уклоняющиеся от нуля.
12. Число e. Различные доказательства.
13. Последовательности, подпоследовательности, рекуррентные соотношения.
14. Линейные пространства и последовательности.
15. Точки разрыва, различные подходы и исследование поведения функции.
16. Функции и уравнения.
17. Пространство $C_{[ab]}$.
18. Равномерная непрерывность функции.
19. Функции от матрицы.
20. Элементы асимптотики.
21. Рациональные подстановки и вычисление пределов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кудрявцев Л.Д. Математический анализ. Т. 1. – М.: Высш. школа, 1970.
2. Герасимович А.И., Рысюк А.А. Математический анализ. Ч. 1. – Мн.: Выш. школа, 1989.
3. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальное и интегральное исчисление. – М.: Наука, 1980.
4. Жевняк Р.М., Карпук А.А. Высшая математика. Т. 2. – Мн.: Высш. школа, 1985.
5. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. Т. 1. – М.: Наука, 1985.
6. Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И. Курс математического анализа. – М.: Наука, 1988.
7. Фихтенгольд Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1, 2, 3. – М.: Наука, 1969.
8. Марон И.А. Дифференциальное и интегральное исчисление в примерах и задачах. – М.: Наука, 1970.
9. Бронштейн И.Н., Семяндяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. – М.: Наука, 1986.
10. Никольский С.М. Курс математического анализа. Т. 1, 2. – М.: Наука, 1983.

МОДУЛЬ 7.
ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

§ 1. Производная функции.
§ 2. Основные правила нахождения производной.
§ 3. Дифференциал.
§ 4. Основные теоремы для дифференцируемых функций.
§ 5. Правило Лопиталя.
§ 6. Формула Тейлора.
§ 7. Исследование функций с помощью производных.
§ 8. Основные задачи.
Темы рефератов и курсовых работ.
Литература.

§ 1. ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ

1. Задачи, приводящие к понятию производной.
2. Определение производной. Механический и геометрический смысл. Уравнение касательной к нормали и кривой.
3. Односторонние и бесконечные производные.

1.1. Задачи, приводящие к понятию производной

1.1.1. Задача о скорости

Пусть материальная точка M движется неравномерно по некоторой прямой и пусть $S = S\ (t)$ – путь, пройденный точкой M за время t от начала движения. Равенство $S = S\ (t)$ называется законом движения точки M. Требуется найти скорость движения точки.

За промежуток времени от t до $(t + \Delta t)$ точка M пройдет путь $\Delta S = S\,(t + \Delta t) - S\,(t)$, поэтому средняя скорость за промежуток времени Δt будет равна

$$v_{\text{ср}} = \frac{S(t+\Delta t) - S(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta S(t)}{\Delta t}.$$

Так как материальная точка M движется неравномерно, то $v_{\text{ср}}$ при фиксированном t будет меняться при изменении Δt, и при этом чем меньше Δt, тем точнее средняя скорость $v_{ср}$ выражает скорость движения точки M в данный момент времени t.

Скоростью точки M в момент времени t (мгновенной скоростью) называется предел, к которому стремится средняя скорость, когда $\Delta t \to 0$, то есть

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} v_{ср} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S(t)}{\Delta t}. \qquad (7.1)$$

Итак, скорость движения точки M в момент времени t – есть предел отношения приращения пути $\Delta S\ (t)$ за промежуток времени от t до $(t + \Delta t)$ к приращению времени Δt, когда $\Delta t \to 0$.

Так, например, если материальная точка M движется по закону свободного падения $S\ (t) = \frac{1}{2} \cdot gt^2$, тогда

$$v_{ср} = \frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t} = \frac{g((t + \Delta t)^2 - t^2)}{2\Delta t} = gt + \frac{g}{2}\Delta t.$$

Откуда

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} v_{ср} = \lim_{\Delta t \to 0}(gt + \frac{g\Delta t}{2}) = gt, \text{ то есть } v = gt.$$

1.1.2. Задача о касательной

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 и непрерывна при $x = x_0$. Требуется найти уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M_0\ (x_0;\ y_0)$, где $y_0 = f(x_0)$.

Возьмем на графике функции $y = f(x)$ кроме точки $M_0\ (x_0;\ y_0)$, еще точку $M((x_0 + \Delta x);\ f(x_0 + \Delta x))$ и запишем уравнение прямой, проходящей через две точки M_0 и M, эту прямую называют секущей M_0M (рис. 7.1). Уравнение секущей (l) имеет вид

$$y - y_0 = \frac{\Delta y}{\Delta x}(x - x_0), \qquad (7.2)$$

где $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, $\quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg}\alpha = k$ – угловой коэффициент секущей M_0M.

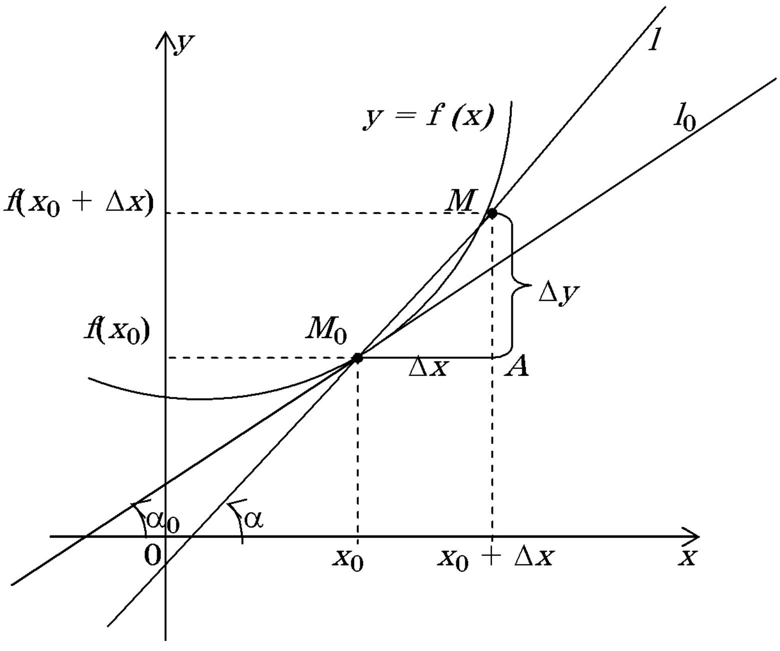


Рис. 7.1

Угол $\alpha = \alpha(\Delta x)$ – угол, образованный прямой l и осью O_x. Отметим, что если $\Delta x \to 0$, следовательно, и $\Delta y \to 0$, а в силу непрерывности функции $y = f(x)$ в точке $x = x_0$, тогда и $|M_0M| = \sqrt{(\Delta x)^2 + \Delta y^2} \to 0$ (треугольник ΔM_0AM – прямоугольный).

Касательной к кривой, заданной уравнением $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0;\ y_0)$ называют предельное положение секущей l при $\Delta x \to 0$ (то есть точка $M((x_0 + \Delta x);\ f(x_0 + \Delta x))$ неограниченно приближается по кривой $y = f(x)$ к точке $M_0(x_0;\ y_0)$.

Смысл этого определения состоит в следующем:

Если существует предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = k_0,$$

то существует предельное положение секущей l, то есть прямая l_0 – касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке M_0 с угловым коэффициентом k_0.

Итак, имеем:

$$k_0 = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \qquad (7.3)$$

Так, например, определим угловой коэффициент $\operatorname{tg} \alpha$ касательной в точке $M(x;\ y)$ для параболы $y = ax^2$, рис 7.2.

Пусть точки $M(x;\ y)$ и $M_1((x+\Delta x);\ a(x+\Delta x)^2)$ лежат на параболе $y = ax^2$. Тогда угловой коэффициент $\operatorname{tg}\varphi$ секущей MM_1 определим из прямоугольного треугольника ΔMNM_1:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{ax^2 - a(x+\Delta x)^2}{\Delta x} = 2ax + a\cdot\Delta x.$$

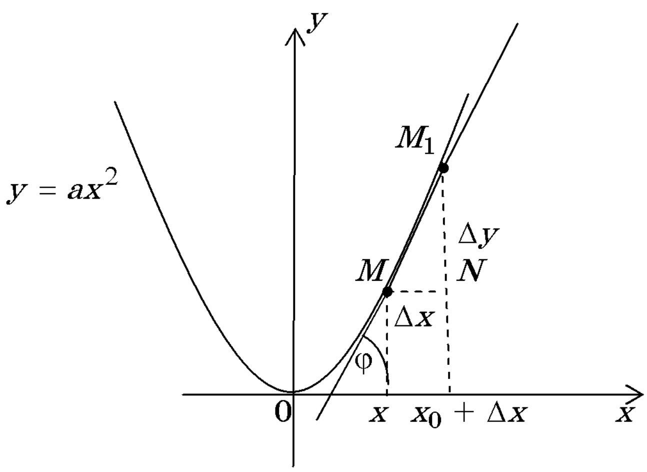


Рис. 7.2

Переходя к пределу в последнем равенстве при $\Delta x \to 0$ (что, равносильно тому, что хорда $MM_1 \to 0$) получим

$$\operatorname{tg}\alpha = \lim_{\Delta x\to 0}(2ax + a\cdot\Delta x) = 2ax.$$

Отметим, что отсюда следует прием для построения касательной к параболе (рис. 7.3): из прямоугольного треугольника ΔMPT:

$$TP = \frac{y}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{ax^2}{2ax} = \frac{x}{2},$$

то есть точка T есть середина отрезка OP.

Итак, для того, чтобы построить касательную к параболе в ее точке M, достаточно разделить пополам отрезок OP (P – основание перпендикуляра, опущенного из точки M на ось O_x) и середину его соединить с точкой M.

К нахождению пределов вида (7.1) и (7.3) приводят решения и множества других задач:

– если $Q = Q(t)$ – количество электричества, проходящего через поперечное сечение проводника за время t, тогда сила тока в момент времени t равна

$$I = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{Q(t + \Delta t) - Q(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q(t)}{\Delta t}; \qquad (7.4)$$

– если $N = N(t)$ – количество вещества, вступающего в химическую реакцию за время t, то скорость химической реакции в момент времени t равна

$$V = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta N(t)}{\Delta t}; \qquad (7.5)$$

– если $m = m\ (x)$ – масса неоднородного стержня на отрезке $[a;\ x]$, то линейная плотность стержня в точке x равна

$$\mu = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{m(x + \Delta x) - m(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta m(x)}{\Delta x}. \qquad (7.6)$$

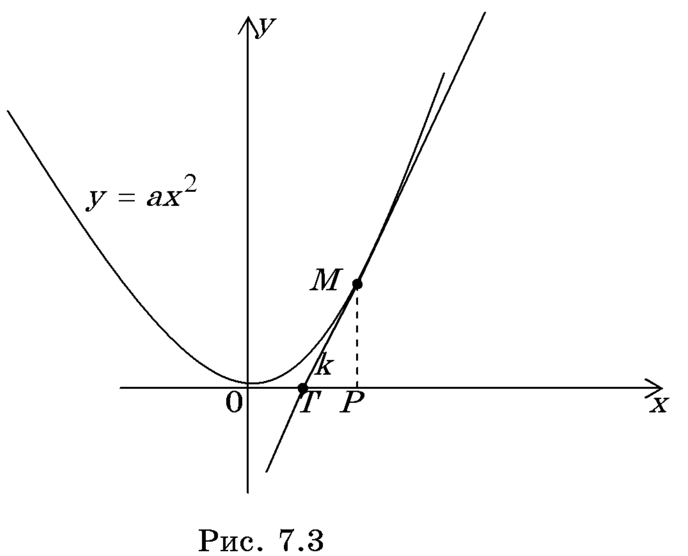


Рис. 7.3

Пределы (7.1), (7.3), (7.4) – (7.6) имеют одинаковый вид независимо от рассматриваемого процесса, а, именно: в каждом случае требуется найти предел отношения приращения функции к приращению аргумента. Рассмотренные задачи, в которых речь идет о пределе отношения приращения функции к приращению аргумента, исторически привели к появлению понятия *производной* – одного из важнейших понятий математического анализа.

1.2. Определение производной. Механический и геометрический смысл. Уравнение касательной и нормали к кривой

Сопоставляя операции, которые мы осуществляли при решении рассмотренных выше задач, легко усмотреть, что во всех случаях, если отвлечься от различия в истолковании переменных, по существу делалось одно и то же: составляли отношение приращения функции к приращению независимой переменной и затем вычисляли предел их отношения. Таким путем мы и приходим к основному понятию дифференциального исчисления – к понятию *производной функции*.

Пусть функция $y = f(x)$ определена в точке $x = x_0$ и некоторой ее окрестности. Если существует конечный предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

то он называется производной функции $y = f(x)$ по независимой переменной x в точке $x = x_0$, и обозначается $f'(x_0)$ или $y'(x_0)$.

Итак, по определению

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Таким образом, производная функции $y = f(x)$ в точке $x = x_0$, если существует, – есть число. А при каждом значении x из некоторого промежутка, $f'(x)$ – есть функция переменной x, то есть производная функции $y = f(x)$ – есть некоторая функция $f'(x)$, произведенная из данной функции.

Пример 1. Доказать, что функции $y = x^n$ $(n \in N)$, $y = \sin x$, $y = \cos x$ имеют производные в каждой точке $x \in R$, и найти эти производные.

а) Если $y = x^n$, где $n \in N$, тогда

$$\begin{aligned}\Delta y &= (x + \Delta x)^n - x^n = x^n + c_n^1 x^{n-1}\Delta x + \ldots + (\Delta x)^n - x^n = \\ &= n \cdot x^{n-1} \cdot \Delta x + c_n^2 x^{n-2} \cdot (\Delta x)^2 + \ldots + (\Delta x)^n\end{aligned}.$$

Откуда

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (n \cdot x^{n-1} + c_n^2 x^{n-2} \cdot \Delta x + \ldots + (\Delta x)^{n-1}) = n \cdot x^{n-1},$$

то есть $(x^n)' = nx^{n-1}$.

б) Если $y = \sin x$, то

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\cos(x + \frac{\Delta x}{2})\sin\frac{\Delta x}{2},$$

откуда

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{2\cos(x + \frac{\Delta x}{2})\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\cos(x + \Delta x) = \cos x,$$

то есть $(\sin x)' = \cos x$.

в) Если $y = \cos x$, то

$$\Delta y = \cos(x + \Delta x) - \cos x = -2\sin(x + \frac{\Delta x}{2}) \cdot \sin\frac{\Delta x}{2}.$$

Откуда $\lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = -\lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{2\sin(x + \frac{\Delta x}{2})\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = -\sin x$,

то есть $(\cos x)' = -\sin x$.

Таблица производных основных элементарных функций

1.	$y = c$	$y' = 0$.
2.	$y = x^n$	$y' = n \cdot x^n$.
3.	$y = a^x$	$y' = a^x \cdot \ln a$.
4.	$y = e^x$	$y' = e^x$.
5.	$y = \log_a x$	$y' = \dfrac{\log_a e}{x}$.
6.	$y = \ln x$	$y' = \dfrac{1}{x}$.
7.	$y = \sin x$	$y' = \cos x$.
8.	$y = \cos x$	$y' = -\sin x$.
9.	$y = \operatorname{tg} x$	$y' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.
10.	$y = \operatorname{ctg} x$	$y' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.
11.	$y = \arcsin x$	$y' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.
12.	$y = \arccos x$	$y' = \dfrac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

13. $y = \operatorname{arctg} x$ $\qquad y' = \dfrac{1}{1+x^2}$.

14. $y = \operatorname{arcctg} x$ $\qquad y' = \dfrac{-1}{1+x^2}$.

Геометрический смысл производной

Если функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x_0, то есть существует конечный предел

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

а это значит, существует предельное положение секущей l заданной уравнением (7.2) . Это означает, что в точке $M_0(x_0;\ f(x_0))$ существует касательная l_0 к графику функции $y = f(x)$, причем $k_0 = f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha_0$.

Таким образом, геометрический смысл производной состоит в следующем: *производная функции в данной точке равна угловому коэффициенту касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0;\ f(x_0))$. Уравнение касательной к графику функции (рис. 7.4) $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0;\ f(x_0))$ имеет вид*

$$y = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0)$$

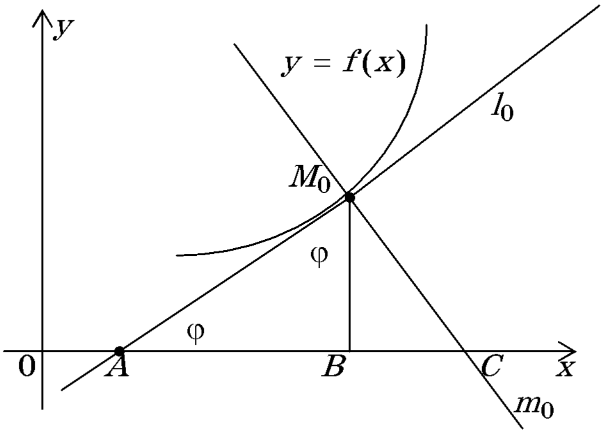


Рис. 7.4

Прямая m_0, проходящая через точку $M_0(x_0;\ f(x_0))$, перпендикулярная касательной l_0 (рис. 7.4) называется нормалью к графику функции $y = f(x)$ в точке M_0. Пусть A, C, B – точки пересечения с осью O_x соответственно касательной l_0, нормали m_0 и прямой, проходящей через точку M_0 параллельно оси O_y, то отрезок AB называют *подкасательной*, а отрезок BC – *поднормалью.*

Уравнение нормали к графику функции $y = f(x)$ в точке M_0 имеет вид

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0).$$

Замечание. Длина отрезка AB равна $|AB| = \left|\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}\right| = \left|\frac{y}{y'}\right|$,

а длина отрезка BC равна $|BC| = |f(x_0) \cdot f'(x_0)| = |y \cdot y'|$,

а $|AM_0| = \left|\frac{y}{y'}\right|\sqrt{1 + (y')^2}$, $|M_0C| = |y| \cdot \sqrt{1 + (y')^2}$.

Производная с физической точки зрения

В задаче о скорости прямолинейного движения было получено, что

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S(t)}{\Delta t} \text{ или } v = S'(t),$$

то есть скорость прямолинейного движения материальной точки в момент времени t есть производная от пути по времени t. В этом заключается ***механический смысл производной***.

Рассмотрим еще несколько примеров, выявляющих роль понятия производной.

1. Если скорость движения не постоянна и сама изменяется с течением времени: $v = f(t)$, то «скорость изменения скорости» называют ускорением a, которое определяется по формуле

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} a_{cp} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

Таким образом, *ускорение есть производная от скорости по времени*.

2. Если масса m, распределенная вдоль по отрезку $[0;\ x]$, будет зависеть от x: $m = f(x)$, то линейная плотность определяется по формуле

$$\rho = \lim_{\Delta x \to 0} \rho_{cp} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta x}.$$

Эта *плотность есть производная от массы по абсциссе.*

3. Если W – количество тепла, которое нужно сообщить телу при нагревании его от 0 до $t\,^0$C и $W = f(t)$, тогда C – теплоемкость определяется по формуле

$$C = \lim_{\Delta t \to 0} C_{cp} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W(t)}{\Delta t}.$$

Итак, *теплоемкость тела есть производная от количества тепла по температуре.*

Все эти применения производной (число которых можно увеличить) с достаточной четкостью устанавливают тот факт, что производная существенным образом связана с основными понятиями из различных областей естествознания, способствуя самому установлению этих понятий.

Обобщая, можно сказать, что *если функция $y = f(x)$ описывает какой-либо физический процесс, то производная y' – есть скорость протекания этого процесса, в этом состоит физический смысл производной.*

1.3. Односторонние и бесконечные производные

Аналогично с односторонними пределами вводится понятие левой и правой производных.

Если функция $y = f(x)$ непрерывна слева в точке x_0, и существует предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'_-(x_0),$$

то этот предел называют левой производной в точке x_0.

Если функция $y = f(x)$ непрерывна справа в точке x_0, то предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'_+(x_0)$$

называют правой производной функции $y = f(x)$ в точке x_0.

Прямые, проходящие через точку $M_0(x_0;\ f(x_0))$ с угловыми коэффициентами $f'_-(x_0)$ и $f'_+(x_0)$, называются соответственно левой и правой касательными к графику функции $y = f(x)$ в точке M_0.

Отметим, что из существования производной $f'(x_0)$ следует существование $f'_-(x_0)$ и $f'_+(x_0)$ и справедливо равенство

$$f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = f'(x_0). \qquad (7.7)$$

В этом случае левая и правая касательные к графику функции $y = f(x)$ в точке M_0 совпадают с касательной в точке M_0.

Справедливо и обратное, то есть если существуют левая и правая производные функции $y = f(x)$ в точке x_0 выполняется условие

$$f'_-(x) = f'_+(x),$$

тогда существует $f'(x_0)$ и справедливо равенство (7.7). Вместе с тем существуют функции, имеющие в данной точке правую и левую производные, но не имеющие производной в этой точке.

В качестве примера рассмотрим следующую задачу.

Найти левую и правую производные функции $f(x) = |x-1|$ в точке $x_0 = 1$.

Здесь $\Delta y = |\Delta x|$ и поэтому $f'_-(1) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to -0} \dfrac{-\Delta x}{\Delta x} = -1$, а

$$f'_+(1) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$$

Так как $f'_-(1) \neq f'_+(1)$, то функция $y = |x-1|$ не имеет производной в точке $x_0 = 1$. Прямые $y = -(x-1)$ и $y = x-1$ являются соответственно левой и правой касательными к графику функции $y = |x-1|$ в точке $x_0 = 1$. Заметим, что отсутствие производной функции означает вместе с тем отсутствие касательной в соответствующей точке кривой, так как угловой коэффициент касательной и равен производной. Опираясь на геометрический смысл производной, получим, что производная не существует всякий раз, когда график функции имеет излом в точке.

Так, например, функция, изображенная на рис. 7.5, не имеет производной в точках x_1 и x_2.

Но не только точки излома характеризуют отсутствие производной у функции.

Рассмотрим функцию $f(x) = \begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$

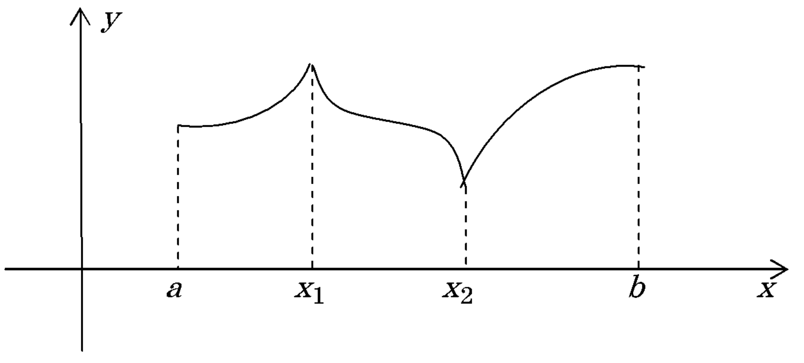


Рис. 7.5

Данная функция непрерывна и при $x = 0$, но не имеет в этой точке даже односторонних производных. Действительно,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \sin \frac{1}{\Delta x},$$

но последний предел не существует и даже при $\Delta x \to \pm 0$.

По графику этой функции (рис. 7.6) отметим, что секущая OM, проходящая через начало координат 0, не имеет предельного положения при стремлении M и 0, значит касательной к кривой в начале координат нет (даже односторонней).

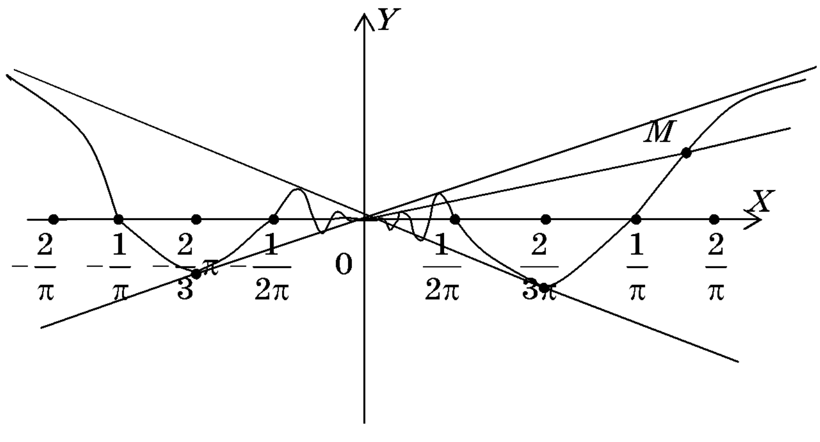


Рис. 7.6

Бесконечная производная

Пусть функция $y = f(x)$ определена в окрестности точки x_0 и непрерывна в точке $x = x_0$ и пусть

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \infty \tag{7.8}$$

Тогда прямая $x = x_0$ является касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0;\ f(x_0))$. Эта прямая $x = x_0$ есть предельное положение (при $\Delta x \to 0$) секущей l, если уравнение (7.2) записать в виде

$$x - x_0 = \frac{\Delta x}{\Delta y}(y - y_0)$$

и воспользоваться тем, что $\dfrac{\Delta x}{\Delta y} \to 0$ при $\Delta x \to 0$ и в силу условия (7.8).

Таким образом, геометрическое истолкование производной, как углового коэффициента касательной, остается в силе и в этом случае, но здесь – касательная оказывается параллельной оси O_y (рис. 7.7).

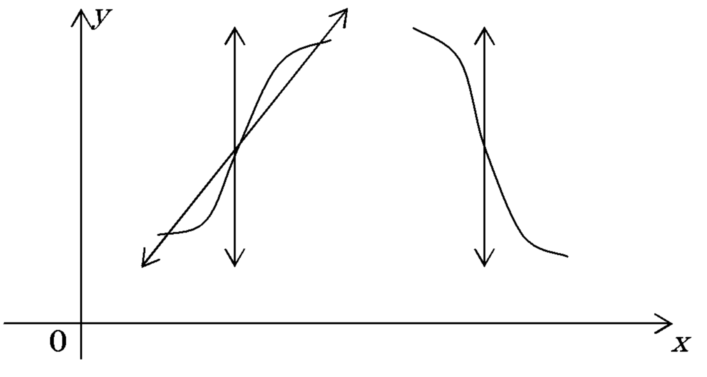


Рис. 7.7

Если $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = +\infty$, то говорят, что функция $y = f(x)$ имеет в точке $x = x_0$ производную, равную $(+\infty)$ и пишут $f'(x_0) = +\infty$.

Аналогично, если $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = -\infty$, то – функция $y = f(x)$ имеет в точке $x = x_0$ производную, равную $(-\infty)$ и пишут $f'(x_0) = -\infty$.

В этих случаях односторонние пределы

$$\lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \text{ и } \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

называются соответственно левой и правой производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 и обозначают $f'_-(x_0)$ и $f'_+(x_0)$.

Таким образом, если $f'(x_0) = +\infty$, то $f'_-(x_0) = +\infty$ и $f'_+(x_0) = +\infty$.

Например, если $f(x) = (x-1)^{1/3}$, то $f'(1) = +\infty$, так как

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\Delta x)^{1/3}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{(\Delta x)^{2/3}} = +\infty .$$

В точке $M_0(1;\ 0)$, касательной к графику функции $y = (x-1)^{1/3}$ является прямая $x = 1$.

Аналогично убеждаемся, что для функции $f(x) = x^{2/3}$ при $x_0 = 0$ производная слева равна $-\infty$, а справа $+\infty$.

Замечание. Если производная от функции $y = f(x)$ в некоторой точке x бесконечна: $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \infty$, тогда

1. $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = +\infty$, а $\alpha \to \frac{\pi}{2}$ (рис. 7.8)

2. $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\infty$, а $\alpha \to -\frac{\pi}{2}$ (рис. 7.9)

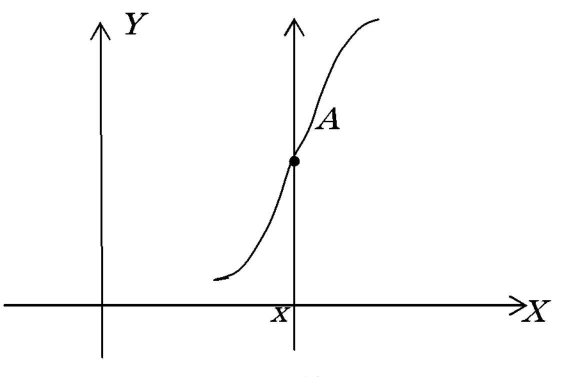


Рис. 7.8

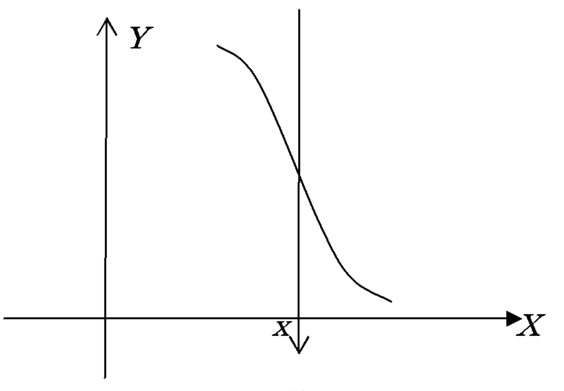


Рис. 7.9

3. $f'_{-}(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\infty$, а $\alpha \to -\frac{\pi}{2}$

$f'_{+}(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = +\infty$, а $\alpha \to \frac{\pi}{2}$ (рис. 7.10)

Левая касательная перпендикулярна оси x и направлена вниз. Правая касательная – оси x и направлена вверх.

4. $f'_{-}(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = +\infty$, а $\alpha \to \frac{\pi}{2}$

$f'_{+}(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\infty$, а $\alpha \to -\frac{\pi}{2}$ (рис. 7.11)

Левая и правая касательные направлены параллельно оси y (перпендикулярно оси x), левая – вверх, правая – вниз.

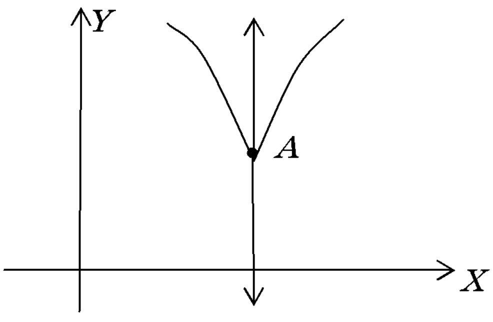


Рис. 7.10

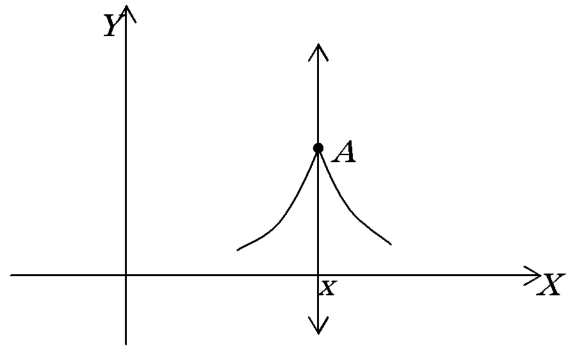


Рис. 7.11

§ 2. ОСНОВНЫЕ ПРАВИЛА НАХОЖДЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ

1. Основные правила вычисления производных.
2. Производная сложной и обратной функции.
3. Производная функции заданной неявно и параметрически. Логарифмическая производная.

2.1. Основные правила вычисления производных

Пусть функция $y = f\ (x)$ определена в точке x_0 и некоторой ее окружности, тогда приращение функции $y = f\ (x)$ в точке x_0 определяется следующим образом

$$\Delta y = \Delta f\ (x_0) = f\ (x_0 + \Delta x) - f\ (x_0)$$

Теорема 1 (формула для приращения функции). ***Если функция*** $y = f\ (x)$ ***в точке*** x_0 ***имеет (конечную) производную*** $y' = f'\ (x_0)$***, то приращение функции можно представить в виде***

$$\Delta f(x_0) = f'\ (x_0) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x\ , \qquad (7.9)$$

где $\alpha(\Delta x) \to 0$***, при*** $\Delta x \to 0$.

Доказательство. Так как в точке x_0 функция $y = f\ (x)$ имеет (конечную) производную $f'(x_0)$, тогда из равенства

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'\ (x_0) \text{ имеем } \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'\ (x_0) + \alpha(\Delta x),$$

где $\alpha(\Delta x) \to 0$, при $\Delta x \to 0$.

Откуда имеем

$$\Delta f\ (x_0) = f'\ (x_0) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x\,,$$

что и требовалось показать.

Теорема 2 (о связи между производной функции и непрерывностью функции в данной точке). ***Если функция*** $y = f\ (x)$ ***имеет в данной точке x конечную производную, то она непрерывна в этой точке.***

Доказательство. Так как функция $y = f\ (x)$ имеет конечную производную в точке x, то ее приращение в этой точке может быть представлена в виде (7.9). Переходя к пределу в (7.9) при $\Delta x \to 0$, получим, что

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0\,,$$

то есть функция $y = f\ (x)$ непрерывна в точке x.

Естественно, возникает вопрос о том, имеет ли место утверждение, обратное теореме 2, то есть вытекает ли из непрерывности функции в данной точке существование производной в этой точке. Утверждение, обратное теореме 2 не имеет места, т. к. существуют функции, непрерывные в некоторой точке, но не имеющие производную в этой точке. Примером такой функции может служить функция $y = |x-1|$, которая непрерывна в точке $x = 1$, но не имеет производную в этой точке.

Отметим, что существуют непрерывные на некотором промежутке функции, не имеющие производной ни в одной точке этого промежутка.

Первый опубликованный пример такой функции принадлежит Вейерштрассу. Ранее, независимо от него, аналогичный пример был построен чешским математиком Больцано, но он не был опубликован.

Теорема 3. ***Если функции*** $u = u\ (x)$ ***и*** $\sigma = \sigma\ (x)$ ***имеют производные в точке x, то функции*** $c \cdot u$, $u \pm \sigma$, $u \cdot \sigma$ ***и*** $\dfrac{u}{\sigma}(\sigma\ (x) \neq 0)$ ***имеют производные в этой точке, причем:***

1. $(cu)' = c \cdot u'$;

2. $(u \pm \sigma)' = u' \pm \sigma'$;

3. $(u \cdot \sigma)' = u'\sigma + \sigma' u$;

4. $\left(\dfrac{u}{\sigma}\right)' = \dfrac{u'\sigma - \sigma' u}{\sigma^2}$.

Доказательство. Доказательство теоремы проведем для *случая 3.* Пусть $y = u \cdot \sigma$, тогда, если x – независимая переменная, получим приращение Δx, то функции u, σ и y получат приращения Δu, $\Delta\sigma$ и Δy; при этом

$$y + \Delta u = (u + \Delta u)(\sigma + \Delta\sigma),$$

так, что

$$\Delta y = \Delta u \cdot \sigma + u \cdot \Delta\sigma + \Delta u \cdot \Delta\sigma \text{ и } \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x}\sigma + u\frac{\Delta\sigma}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x}\Delta\sigma$$

Так как при $\Delta x \to 0$, в силу теорем 1 и 2, и $\Delta\sigma \to 0$, то

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \sigma \cdot \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} + u \cdot \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta\sigma}{\Delta x} = u'\sigma + \sigma' u,$$

то есть производная y' существует и равна

$$y' = (u \cdot \sigma)' = u'\sigma + \sigma' u.$$

Следствие 1. Если $y = u \cdot \sigma \cdot w$, причем u', σ' и w' существуют, то

$$((u\sigma)w)' = (u\sigma)' \cdot w + (u\sigma) \cdot w' = u'\sigma w + u\sigma' w + u\sigma w'$$

Следствие 2. Методом математической индукции доказывают справедливость утверждения: если u', σ', ..., s$'$ существуют, то

$$\underbrace{(u \cdot \sigma \cdot \ldots \cdot s)'}_{n} = \underbrace{u'\sigma \cdot \ldots \cdot s + u\sigma' \cdot \ldots \cdot s + \ldots + u\sigma \cdot \ldots \cdot s'}_{n}.$$

2.2. Производная сложной и обратной функции

2.2.1. Производная сложной функции

В этом пункте установим весьма важное при практическом нахождении производных правило, позволяющее вычислить производную сложной функции, если известны производные составляющих функций. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 4 (производная сложной функции). ***Пусть:***

1. функция $u = u(x)$ ***имеет в некоторой точке*** x_0 ***производную*** $u_x' = u'(x_0)$;

2. функция $y = f(u)$ ***имеет в соответствующей точке*** $u_0 = u(x_0)$ ***производную*** $y_u' = f_u'(u_0)$.

Тогда сложная функция $y = f(u(x))$ в точке x_0 имеет производную, которая определяется по формуле

$$y_x' = \left[f(u(x))\right]' = f_u'(u) \cdot u_x' = \frac{df(u)}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Доказательство. Если независимая переменная x получит приращение Δx, то Δu – соответствующее приращение функции $u = u(x)$, а Δy – приращение функции $y = f(u)$. В силу соотношения (7.9) (теорема 1), в котором, заменяя x на u, будет иметь вид

$$\Delta y = \frac{df(u)}{du}\Delta u + \alpha(\Delta u) \cdot \Delta u,$$

где $\lim\limits_{\Delta u \to 0} \alpha(\Delta u) = 0$.

Разделив последнее равенство почленно на Δx, получим

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f_u'(u) \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha(\Delta x) \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Если $\Delta x \to 0$, то и $\Delta u \to 0$ (теорема 2), а тогда и $\alpha(\Delta u) \to 0$. Следовательно, существует предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f_u'(u) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = f_u'(u) \cdot u_x' = \frac{df(u)}{du} \cdot \frac{du}{dx},$$

который и представляет собой искомую производную y_x'.

Замечание. Правило вычисления производной сложной функции распространяется на композицию любого конечного числа функций. Так, если функции $x(t)$, $y(x)$, $z(y)$ имеют производные соответственно в точках t_0, $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(x_0)$, тогда в t точке сложная функция z: $z = z(y) = z(y(x)) = z(y(x(t)))$ имеет производную и имеет место равенство

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}.$$

Доказанная теорема 4 о производной сложной функции позволяет записать таблицу производных основных элементарных функций, если $u = u(x)$, тогда:

1. $(c)' = 0$
2. $(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'$
3. $(a^u)' = a^u \cdot u' \cdot \ln a$
4. $(e^u)' = e^u \cdot u'$

5. $(\log_a u)' = \dfrac{u' \cdot \log_a e}{u}$

6. $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$

7. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$

8. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$

9. $(\operatorname{tg} u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$

10. $(\operatorname{ctg} u)' = \dfrac{-u'}{\sin^2 u}$

11. $(\arcsin u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

12. $(\arccos u)' = \dfrac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$

13. $(\operatorname{arctg} u)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$

14. $(\operatorname{arcctg} u)' = \dfrac{-u'}{1+u^2}$

Пример 1. Найти производную функции $y = u^2 + \sqrt[3]{u} - 1$, где $u = x^4 + 1$.

Решение. По правилу нахождения сложной функции имеем

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \left(2u + \frac{1}{3\sqrt[3]{u^2}}\right)4x^3 = \left(2x^4 + 2 + \frac{1}{3\sqrt[3]{(x^4+1)^2}}\right)4x^3.$$

Пример 2. Найти производные функций y_x'.

а) $y = e^{x^2+x}$;

б) $y = \ln\sin x$;

в) $y = \ln^5 \ln^4 \sin^2 3x$.

Решение. По правилу нахождения сложной функции имеем

а) $y' = e^{x^2+x} \cdot (x^2+x)' = e^{x^2+x} \cdot (2x+1)$;

б) $y' = \dfrac{1}{\sin x} \cdot (\sin x)' = \dfrac{\cos x}{\sin x} = \operatorname{tg} x$;

в) $y' = 5\ln^4 \ln^4 \sin^2 3x \times$

$$\times \frac{1}{\ln^4 \sin^2 3x} \cdot 4\ln^3 \sin^2 3x \cdot \frac{1}{\sin^2 3x} \cdot 2\sin 3x \cdot \cos 3x \cdot 3.$$

2.2.2. Производная обратной функции

Теорема 5. ***Если функция*** $y = f(x)$ ***непрерывна и строго возрастает (убывает) на отрезке*** $[a;b]$***, и, если существует*** $f'(x_0) \neq 0$***,*** $x_0 \in (a;b)$***, тогда функция*** $x = \varphi(y)$***, обратная к функции*** $y = f(x)$***, имеет производную в точке*** $y_0 = f(x_0)$***, причем имеет место равенство***

$$\varphi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \qquad (7.10)$$

Доказательство. Пусть $y = f(x)$ непрерывная и строго возрастает на $[a;b]$, тогда на отрезке $[\alpha;\beta]$ определена функция $x = \varphi(y)$, обратная к функции $y = f(x)$, непрерывная и строго возрастающая, причем $y_0 \in f(x_0) \in (\alpha;\beta)$, т. к. $\alpha = f(a) < f(b) = \beta$.

Придавая значению $y = y_0$ произвольное приращение Δy независимой переменной y, такое, что $y_0 + \Delta y \in (\alpha, \beta)$, тогда соответствующее приращение Δx получит и функция $x = \varphi(y)$, то есть $\Delta x = \varphi(y_0 + \Delta y) - \varphi(y_0)$. Отметим, что если $\Delta y \neq 0$, то и $\Delta x \neq 0$, так как в противном случае $\varphi(y_0 + \Delta y) = \varphi(y_0)$ при $\Delta y \neq 0$, то есть функция $\varphi(y)$ принимает одинаковые значения в двух различных точках, что противоречит свойству строгого возрастания функции $\varphi(y)$. Поэтому, при $\Delta y \neq 0$ справедливо равенство

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\dfrac{\Delta y}{\Delta x}} \qquad (7.11)$$

Пусть $\Delta y \to 0$, тогда $\Delta x \to 0$, так как функция $x = \varphi(y)$ непрерывна в точке y_0. Но при $\Delta x \to 0$, существует $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$.

Тогда правая часть (7.11) имеет предел $\dfrac{1}{f'(x_0)}$, а, следовательно, и в левой части этого равенства существует предел, в силу определения, равен $\varphi'(y_0)$, то есть справедлива формула (7.10).

Замечание 1. Заменяя в формуле x_0 на y, а y_0 – на x, получим формулу в виде

$$\varphi'(x) = \frac{1}{f'(\varphi(x))} \qquad (7.12)$$

Замечание 2. Теорема 5 о производной обратной функции имеет место и в тех случаях, когда $f'(x_0)$ равна нулю или $\pm\infty$, производная обратной функции $\varphi'(y_0)$ существует и равна, соответственно, $\pm\infty$ или нулю. Так, например, функция $f(x) = \sin x$ при $x = \pm\dfrac{\pi}{2}$ имеет производную $\cos(\pm\dfrac{\pi}{2}) = 0$, то для обратной функции $\varphi(y) = \arcsin y$ при $y = \pm 1$ существует бесконечная производная (именно, $\pm\infty$).

Пример 1. Доказать формулы

а) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $|x| < 1$;

б) $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$, $x \in \boldsymbol{R}$.

Решение.

а) Если $y = \varphi(x) = \arcsin x$, где $|x| < 1$, значит обратная функция $x = f(y) = \sin y$, где $|y| < \dfrac{\pi}{2}$, тогда по формуле (7.12) имеем

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y}.$$

Но так как $\sin y = x$ и $y \in (-\dfrac{\pi}{2};\ \dfrac{\pi}{2})$, то $\cos y = \sqrt{1-x^2}$, и, следовательно, $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\quad |x| < 1$.

б) Если $y = \varphi(x) = \operatorname{arctg} x$, где $x \in \boldsymbol{R}$, значит обратная функция $x = f(y) = \operatorname{tg} y$, где $|y| < \dfrac{\pi}{2}$, тогда по формуле (7.12) имеем

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \cos^2 y = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}, \text{ то есть}$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \boldsymbol{R}.$$

Пример 2. Найти производные, пользуясь правилом вычисления производной обратной функции

а) $y = 2x^3 + 3x^5 + x$ найти x'_y

б) $y = \ln\sqrt{1+x^2}$, найти y_x'.

Решение.

а) Имеем $y_x' = 6x^2 + 15x^4 + 1$, следовательно,

$$x_y' = \frac{1}{y_x'} = \frac{1}{6x^2 + 15x^4 + 1}$$

б) При $x > 0$ обратная функция $x = \sqrt{e^{2y} - 1}$ имеет производную $x_y' = \frac{e^{2y}}{\sqrt{e^{2y} - 1}}$.

Значит, $y_x' = \frac{\sqrt{e^{2y} - 1}}{e^{2y}} = \frac{\sqrt{x^2}}{x^2 + 1} = \frac{x}{x^2 + 1}$.

Замечание 3. Теорема о производной обратной функции допускает наглядную геометрическую и физическую интерпретацию (рис. 7.12).

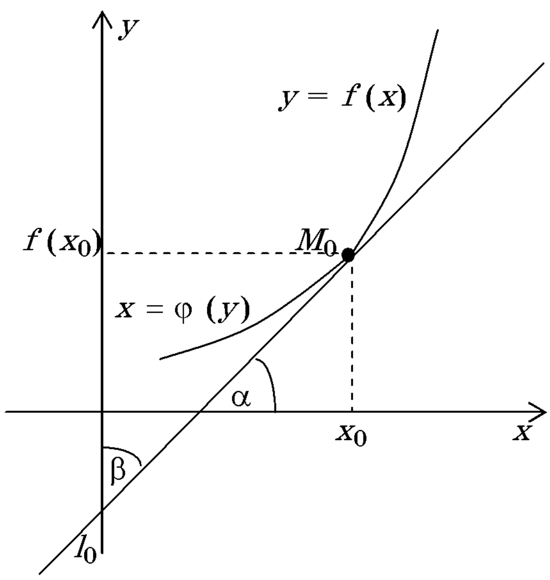


Рис 7.12

Если существует конечная производная $f'(x_0) \neq 0$, то в точке $M_0(x_0; f(x_0))$ существует касательная l_0 к графику функции $y = f(x)$, с угловым коэффициентом $\operatorname{tg} \alpha = f'(x_0)$, где α – угол, образованный l_0 с положительным направлением оси O_x. Так как $f'(x_0)$ конечна и отлична от нуля, то касательная l_0 не параллельна координатным осям. Для определенности считаем $f'(x_0) > 0$, тогда $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ (рис. 7.12).

Если y – независимая переменная, а x рассматривать как функцию, то кривая, заданная уравнением $y = f(x)$, будет графиком функции $x = \varphi\,(y)$.

Пусть β – угол, образованный касательной l_0 с положительным направлением оси O_y, тогда $\operatorname{tg}\beta = \varphi'\,(y_0)$. Так как $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$, тогда $\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$, то есть $\varphi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$.

Это физическая интерпретация формулы (7.12). Так как $f'(x_0)$ – скорость изменения переменной y по отношению к переменной x, а $\varphi'(y_0)$ – скорость изменения переменной x по отношению к переменной y, то формула (7.12) выражает тот факт, что указанные скорости являются взаимно обратными.

2.3. Производная функции заданной неявно и параметрически. Логарифмическая производная

2.3.1. Функции, заданные неявно

Если функция задана уравнением $y = f(x)$, разрешимым относительно y, то функция задана в явном виде. Во многих задачах приходится рассматривать случай, когда переменная y, является по смыслу задачи функцией от x, и определяется уравнением

$$F(x;\ y) = 0. \tag{7.13}$$

В этом случае говорят, что $y = f(x)$, как функция аргумента x, задана неявно, то есть под неявным заданием функции $y = f(x)$ понимают способ задания функции в виде уравнения (7.13), не разрешенного относительно y.

Если функция задана неявно уравнением (7.13), то для нахождения производной от y по x нет необходимости разрешать уравнение относительно y (а в ряде случаев невозможно разрешать уравнение относительно y); достаточно дифференцировать уравнение (7.13) по x, считая при этом: x – функцией x, и y – функцией x, то есть сложной функцией, а полученное затем уравнение разрешить относительно y'. Отметим, что производная функции, заданной неявно, выражается через аргумент x и функцию y.

Пример 1. Найти производную функции y, заданной неявно

а) $x^3 + y^3 - 3xy = 0$;

б) $e^y + xy = 1$ в точке $x_0 = 0$.

Решение.

а) Дифференцируя данное уравнение по x, и учитывая, что $y = y(x)$, получим $3x^2 + 3y^2 \cdot y_x' - 3(y + xy_x') = 0$.

Решая последнее уравнение, относительно y_x', получим

$$y_x' = \frac{y - x^2}{y^2 - x}.$$

б) Дифференцируя данное уравнение по x, и учитывая, что $y = y(x)$, получим $e^y \cdot y' + y + xy' = 0$. Отсюда $y' = \dfrac{-y}{x + e^y}$.

Тогда $y'(0) = 0$.

Пример 2. Написать уравнение касательной в точке $M_0(x_0;\ y_0)$ $|x_0| < a$ к эллипсу

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{7.14}$$

Решение. Дифференцируя уравнение (7.14), получим

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2y \cdot y'}{b^2} = 0. \tag{7.15}$$

Подставляя в уравнение (7.15) координаты точки $M_0(x_0;\ y_0)$ находим угловой коэффициент касательной к эллипсу в точке M_0:

$$k = y'(x_0) = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_0}{y_0}.$$

Следовательно, искомое уравнение касательной имеет вид

$$y - y_0 = k(x - x_0) \text{ или } y - y_0 = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_0}{y_0}(x - x_0),$$

которое можно записать следующим образом:

$$\frac{yy_0}{b^2} + \frac{xx_0}{a^2} = \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{x_0^2}{a^2},$$

но так как $\dfrac{x_0^2}{a^2} + \dfrac{y_0^2}{b^2} = 1$, тогда уравнение касательной к эллипсу в точке $M_0(x_0;\ y_0)$ имеет вид

$$\frac{x \cdot x_0}{a^2} + \frac{y \cdot y_0}{b^2} = 1.$$

Таким образом, чтобы получить уравнение касательной к эллипсу в его точке $M_0(x_0;\ y_0)$ нужно в каноническом уравнении эллипса (7.14) заменить x^2 на $x \cdot x_0$, а y^2 – на $y \cdot y_0$.

Замечание 1. Написать уравнение касательной к эллипсу в его точке $M_0(x_0;\ y_0)$ можно было, выразив y в явном виде, разрешив уравнение (7.14) относительно y. Затем определить угловой коэффициент касательной в точке M_0:

$$k = y'(x_0),$$

а, следовательно, и найти уравнение касательной.

Замечание 2. Проводя рассуждения, аналогично как в примере 2, получим уравнение касательной в точке $M_0(x_0;\ y_0)$ к гиперболе $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, которое имеет вид

$$\frac{x \cdot x_0}{a^2} - \frac{y \cdot y_0}{b^2} = 1.$$

А уравнение касательной в точке $M_0(x_0;\ y_0)$ к параболе $y^2 = 2px$ имеет вид:

$$y \cdot y_0 = p(x - x_0).$$

Отметим, что касательные к любым параболам $y^2 = 2px$ в точке $(x_0;\ \sqrt{2px_0})$ пересекает ось x в одной и то же точке $(-x_0)$.

2.3.2. Функции, заданные параметрически

Пусть зависимость между аргументом x и функцией y задана параметрически в виде уравнений

$$\begin{cases} x = \varphi\ (t) \\ y = \psi\ (t) \end{cases},$$

где t – параметр, $t \in \left[T_0, T_1\right]$, а функции $\varphi\ (t)$ и $\psi\ (t)$ определены в окрестности t_0, причем $\varphi\ (t)$ непрерывна и строго возрастает (убывает), а значит для нее существует обратная функция $t = \varphi^{-1}(x)$ непрерывная и строго возрастающая (убывающая). Предположим, что существуют $x'(t_0)$ и $y'(t_0)$, причем $x'(t_0) \neq 0$.

Тогда сложная функция $y = \psi(t) = \psi(\varphi^{-1}(x))$ имеет производную по x в точке $x_0 = x(t_0)$, причем

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}. \tag{7.16}$$

Действительно, по правилу нахождения производной сложной функции $y = \psi(t) = \psi(\varphi^{-1}(x))$ имеем

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\psi}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \left| \frac{dt}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dt}} \right| = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

Итак, справедлива формула (7.16).

Пример 1. Найти производную функции, заданную параметрически в виде

1) $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases};$

2) $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}.$

Решение.

1) Зная уравнение, определяемое формулами (7.13) – параметрическое представление кривой на плоскости, называемой циклоидой, найдем производную, которая имеет вид

$$y_x' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{a \cdot \sin t}{a(1 - \cos t)} = \frac{\sin t}{1 - \cos t} = \frac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\cos^2\frac{t}{2}} = \operatorname{tg}\frac{t}{2}.$$

2) Уравнение (7.14) – параметрическое представление эллипса, производная в этом случае имеет вид

$$y_x' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = -\frac{b\cos t}{d\sin t} = -\frac{b}{a}\operatorname{ctg} t.$$

Отметим, что производная по x от функции, заданной параметрически, есть функция от переменной t.

2.3.3. Логарифмическая производная

В ряде случаев для нахождения производных сложных функций $y = f(x)$ целесообразно заданную функцию сначала прологарифмировать, а затем полученный результат дифференцировать по переменной x, считая y сложной функцией. Такую операцию называют логарифмической производной или *логарифмическим дифференцированием*.

Так, если y – некоторая функция, $y = f(x)$ $f(x) > 0$, тогда имеем $\ln y = \ln f(x)$ и вычисляя производную по x, получим

$$(\ln y)' = (\ln f(x))' \text{ или } \frac{y'}{y} = (\ln f(x))'.$$

Откуда $y' = f(x) \cdot (\ln f(x))'$.

Пример 1. Найти производную функции

$$y = \frac{(x^2+1)\cdot(x+1)^{\frac{3}{4}} e^x}{(x+2)^4}.$$

Решение. Данную задачу можно решить с помощью правил и формул нахождения сложной функции. Но этот способ требует довольно сложных и громоздких преобразований. Применим метод логарифмического дифференцирования, рассмотрев предварительно функцию

$$\ln y = \ln(x^2+1) + \ln(x+1)^{\frac{3}{4}} + \ln e^x - \ln(x+2)^4.$$

Откуда имеем $\dfrac{y'}{y} = \dfrac{2x}{x^2+1} + \dfrac{3}{4(x+1)} + 1 - \dfrac{4}{x+2}$ а, следовательно, искомая производная равна $y' = y\left(\dfrac{2x}{x^2+1)} + \dfrac{3}{4(x+1)} + 1 - \dfrac{4}{x+2}\right)$

или

$$y' = \frac{(x^2+1)\cdot(x+1)^{\frac{3}{4}} e^x}{(x+2)^4}\left(\frac{2x}{x^2+1} + \frac{3}{4(x+1)} + 1 - \frac{4}{x+2}\right).$$

Существуют функции, производные которых можно найти только методом логарифмического дифференцирования. К их числу относится степенно-показательная функция $y = u^{\sigma}$, $(u > 0)$, а u и σ – суть функции от x, имеющие в данной точке производные u' и σ'.

Прологарифмируем равенство $y = u^{\sigma}$, получим $\ln y = \sigma \ln u$. Дифференцируя последнее равенство, получим

$$\frac{y'}{y} = \sigma' \cdot \ln u + \sigma \frac{u'}{u}.$$

Откуда $y' = y \cdot \left(\frac{\sigma u'}{u} + \sigma' \ln u \right)$ или, подставляя вместо y его выражение, имеем

$$y' = u^{\sigma} \cdot \left[\frac{\sigma u'}{u} + \sigma' \ln u \right]. \qquad (7.17)$$

Эта формула впервые была установлена Лейбницем и И. Бернулли.

Пример 2. Найти производную функции $y = x^{\sin x}$.

Решение. Применяя метод логарифмического дифференцирования, получим

$$y' = x^{\sin x} \left(\frac{\sin x}{x} + \cos x \cdot \ln x \right).$$

Замечание. Формулу (7.17) запишем в виде

$$(u^{\sigma})' = \sigma \cdot u^{\sigma-1} \cdot u^{1} + u^{\sigma} \cdot \ln u \cdot \sigma',$$

которая дает правило для вычисления производной степенно-показательной функции: *производная степенно-показательной функции равна сумме производной степенной функции* $(\sigma \cdot u^{\sigma-1} \cdot u')$, *при условии* $\sigma = const$, *и показательной функции* $(u^{\sigma} \cdot \ln u \cdot \sigma')$, *при условии* $u = const$.

§ 3. ДИФФЕРЕНЦИАЛ

1. Дифференцируемость функции. Дифференциал.
2. Производные и дифференциалы высших порядков.

3.1. Дифференцируемость функции. Дифференциал

Если функция $y = f(x)$ определена в точке x_0 и некоторой ее окрестности, а приращение Δy функции $y = f(x)$ в точке x_0 можно представить в виде

$$\Delta y = A(x_0) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x, \qquad (7.18)$$

где $A(x_0)$ не зависит от Δx, а $\alpha(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$, то функция $y = f(x)$ называется дифференцируемой в точке x_0, а выражение $A(x_0) \cdot \Delta x$ называется ее дифференциалом в точке x_0 и обозначается $df(x_0)$ или dy, то есть

$$dy = A(x_0) \cdot \Delta x. \tag{7.19}$$

Другими словами, дифференциалом функции $y = f(x)$, соответствующим приращению аргумента Δx в данной точке $x = x_0$, называют главную линейную часть приращения этой функции относительно Δx в точке x_0.

В случае, когда $A(x_0) = 0$, то дифференциал функции $y = f(x)$ определяют формулой (7.19), то есть считают, что он равен нулю в этом случае.

Теорема 6. ***Для того чтобы функция $y = f(x)$ была дифференцируемой в точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы эта функция имела производную в точке x_0, и более того***

$$dy = f'(x_0) \cdot \Delta x. \tag{7.20}$$

Доказательство (необходимость). Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, докажем, что существует $f'(x_0)$. Действительно, так как функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, тогда имеет место равенство (7.18), а, поэтому, переходя в (7.18) к пределу при $\Delta x \to 0$, получим

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = A(x_0), \text{ то есть } f'(x_0) = A(x_0).$$

Доказательство (достаточность). Если функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x_0, то есть $f'(x_0)$, докажем, что функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0.

Действительно, так как функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x_0, тогда $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, откуда имеем, что

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(\Delta x) \text{ или } \Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x.$$

Это означает, что функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке $x = x_0$, причем коэффициент $A(x_0)$ в формулах (7.18) и (7.19) равен $f'(x_0)$, и поэтому дифференциал записывается в виде (7.20).

Доказанная теорема позволяет в дальнейшем отождествлять понятие дифференцируемости функции в данной точке с понятием существования у функции в данной точке производной. *Операцию нахождения производной называют дифференцированием.*

Замечание 1. При рассмотрении дифференциала функции $y = f(x)$ и доказанной теоремы (7.18) получена формула (7.20). Дифференциалом независимой переменной x называют приращение Δx, то есть полагают

$$dx = \Delta x . \tag{7.21}$$

Если отождествить дифференциал независимой переменной x с дифференциалом функции $y = x$, то формулу (7.21) можно доказать, ссылаясь на уравнение (7.20)

$$dx = x' \cdot \Delta x = 1 \cdot \Delta x = \Delta x .$$

Учитывая формулу (7.21), теперь можно записать уравнение (3), дающее определение дифференциала в виде

$$dy = f'(x) \cdot dx . \tag{7.22}$$

Замечание 2. Из формулы (7.22) получается

$$y'(x_0) = f'(x_0) = \frac{dy}{dx} \tag{7.23}$$

То обстоятельство, что в левой части уравнения (7.23) стоит вполне определенное число, в то же время в правой части имеем отношение двух неопределенных чисел dy и dx ($dx = \Delta x$ – произвольно), не должно служить некоторой неопределенности, ибо числа dx и dy изменяются пропорционально, причем производная $y'(x_0)$ – как раз коэффициент пропорциональности.

Пример 1. Площадь S круга радиуса r определяется формулой $S = \pi r^2$. Если радиус r увеличить на Δt, тогда соответствующее приращение ΔS площади S будет площадь кругового кольца, находящегося между концентрическими окружностями радиуса r и $r + \Delta t$.

Тогда ΔS будет иметь вид

$$\Delta S = \pi(r+\Delta r)^2 - \pi r^2 = 2\pi r\cdot\Delta r + \pi\cdot(\Delta r)^2,$$

и главной линейной частью ΔS относительно Δr будет $2\pi r\cdot\Delta r$: это и есть дифференциал dS. Геометрически дифференциал dS выражает площадь прямоугольника (полученного «разверткой» кольца) с основанием $2\pi r$ (длина окружности) и высотой Δr.

Пример 2. Пусть $S(t) = \dfrac{gt^2}{2}$ – закон свободного падения материальной точки. Тогда за промежуток времени Δt, от t до $t+\Delta t$ точка пройдет путь

$$\Delta S = \frac{g(t+\Delta t)^2}{2} - \frac{gt^2}{2} = gt\cdot\Delta t + \frac{g}{2}(\Delta t)^2.$$

При $\Delta t\to 0$ его главная часть $dS = gt\cdot\Delta t = v\cdot\Delta t$. Таким образом, дифференциал пути вычисляется как путь, пройденный точкой, которая в течение всего промежутка времени Δt двигалась бы именно с этой скоростью $v = gt$.

Пример 3. Найти дифференциал функции

$$f(x) = 3x^2 + \cos(2x+3).$$

Решение. По формуле $dy = f'(x)dx$ находим

$$dy = (3x^2 + \cos(2x+3))'dx = (6x - 2\sin(2x+3))dx.$$

Геометрический и физический смысл дифференциала

Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке $x = x_0$, то существует касательная l_0 (рис. 7.13) к графику этой функции в точке $M_0(x_0;\ f(x_0))$, уравнение которой имеет вид

$$y = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0).$$

Пусть $M((x_0+\Delta x);\ f(x_0+\Delta x))$ – точка графика функции $y = f(x)$ абсцисса, которой $(x_0 + x)$. E и F – точки пересечения прямой $x = x_0 + \Delta x$ с касательной l_0 и прямой $y = y_0 = f(x_0)$, соответственно. Тогда координаты точек F и E будут

$$F((x_0+\Delta x);\ f(x_0)) \text{ и } E((x_0+\Delta x);\ (f(x_0) + f'(x_0)\cdot\Delta x)),$$

так как ордината точки E – это значение y в уравнении касательной l_0 при $x = x_0 + \Delta x$. Тогда разность ординат точек E и F равна $f'(x_0) \cdot \Delta x$, то есть равна дифференциалу dy функции $y = f(x)$ в точке x_0.

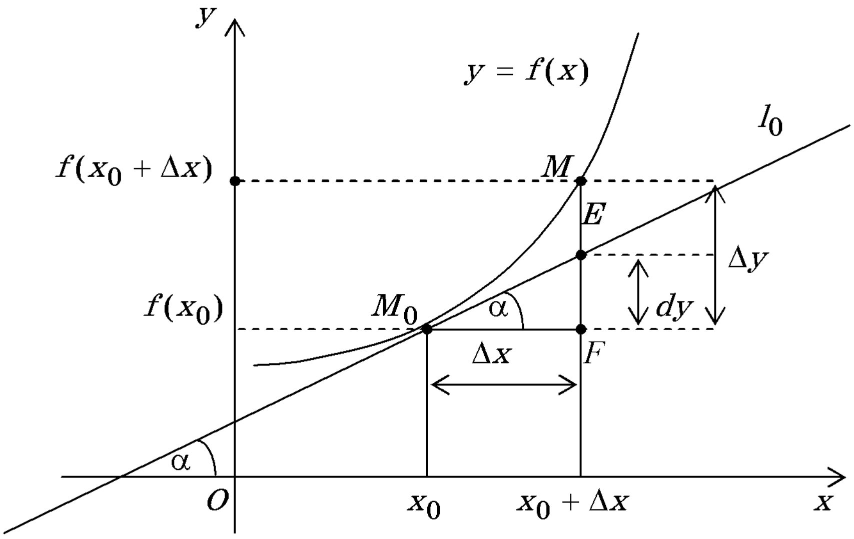


Рис. 7.13

Итак, *геометрический смысл дифференциала функции* состоит в следующем: *дифференциал функции $y = f(x)$ при $x = x_0$ равен приращению ординаты касательной к графику этой функции в точке с абсциссой x_0 при изменении аргумента (то есть x) от x_0 до $x_0 + \Delta x$.* Так как $MF = \Delta y$, то

$$EF = \Delta M_0 E \cdot tg\alpha = f'(x_0) \cdot \Delta x = dy,$$

тогда согласно определению дифференциала и формуле (7.21)

$$ME = \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x \to 0 \text{ при } \Delta x \to 0.$$

Рассмотрим физический смысл дифференциала. Пусть $S(t)$ – путь, пройденный материальной точкой за время t от начала движения. Тогда $S'(t) = v$ – мгновенная скорость (см. п. 1.1). По определению дифференциала имеем

$$dS = S'(t) \cdot \Delta t = v \cdot \Delta t.$$

Следовательно, *дифференциал функции $S(t)$ равен расстоянию, которое прошла бы точка за промежуток времени от t до $(t + \Delta t)$, если бы она двигалась со скоростью, равной мгновенной скорости точки в момент времени t.* В этом состоит физический смысл дифференциала.

Замечание 3. Понятие дифференциала и сам термин «дифференциал» (от латинского слова differentia, означающего «разность») принадлежит Лейбницу, который, однако, точного определения этого понятия не дал. Наряду с дифференциалами Лейбниц рассматривал частные двух дифференциалов, что аналогично нашим производным; однако именно дифференциал был для Лейбница первоначальным понятием. Со времен Коши, который своей теорией пределов построил фундамент для всего анализа и впервые определил производную как предел, стало обычным отправляться именно от производной, а понятие дифференциала строить уже на основе производной.

Основные теоремы о дифференциалах

Основные теоремы о дифференциалах получаем, используя теорему 6, устанавливающую связь дифференциала к производной функции ($dy = f'(x)dx$), и теоремы 3 о производных. Имеет место следующая теорема.

Теорема 8 (правила дифференцирования). ***Если в данной точке x функции*** $u(x)$ ***и*** $\sigma(x)$ ***дифференцируемы, то:***

1. $d(u \pm \sigma) = du \pm d\sigma$;

2. $d(u \cdot \sigma) = ud\sigma + \sigma du$;

3. $d\left(\dfrac{u}{\sigma}\right) = \dfrac{ud\sigma - \sigma du}{\sigma^2} \quad (\sigma \neq 0)$.

Доказательство (доказательство проводим для формулы 2). Так, по определению дифференциала функции, имеем

$$d(u\sigma) = (u\sigma)'dx = (u'\sigma + \sigma' u)dx = \sigma u' dx + \sigma' u dx = \sigma du + ud\sigma,$$

то есть $d(u\sigma) = \sigma du + ud\sigma$.

Инвариантность формы дифференциала первого порядка

Правило нахождения сложной функции (теорема 4) приведет нас к одному важнейшему и замечательному свойству дифференциала.

Теорема 9 (об инвариантности формы первого дифференциала). ***Дифференциал функции*** $y = f(x)$ ***имеет один и тот же вид***

$$dy = f'(x)dx \tag{7.24}$$

как в случае, когда x — независимая переменная, так и в случае, когда x — дифференцируемая функция какой-либо другой переменной.

Доказательство. Пусть $x = \varphi\ (t)$ дифференцируемая функция переменной t, тогда $y = f(\varphi\ (t))$ – сложная функция. Тогда

$$dy = y'dt = f'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt = f'(\varphi(t)) \cdot d\varphi(t) = f'(x)dx,$$

то есть вернулись к прежней форме дифференциала. Таким образом, мы получим, что форма дифференциала сохраняет свой вид даже в том случае, если прежняя независимая переменная заменена новой. Отметим, что всегда можно писать дифференциал функции $y = f(x)$ в форме (7.24), будет x независимой переменной или нет. Но следует иметь в виду то, что если за независимую переменную выбрали t, то dx – это уже не произвольное приращение Δx, а дифференциал x – как функция от переменного t, то есть формулы $dy = f'(x)dx$ и $dy = f'(u)du$ по внешнему виду совпадают, но между ними существует принципиальное отличие, суть которого состоит в следующем: в первой формуле x – независимая переменная, поэтому $dx = \Delta x$, а во второй формуле u – есть функция от x, поэтому $du = \Delta u$ вообще говоря.

Замечание 1. Из доказанной теоремы 9 и формулы (7.24) следует, что

$$f'(x) = \frac{dy}{dx},$$

то есть производная функции в точке численно равна отношению дифференциалов функции к независимой переменной, независимо от того x – независимая переменная или функция. Это обозначение производной согласуется с алгебраическим тождеством

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{f'(x)dx}{dx}.$$

Использование этой формы записи производной можно будет оценить при рассмотрении формулы замены переменных в неопределенном интеграле или при интегрировании дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными.

Замечание 2. Учитывая то, что в формуле (7.18) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$, и заменяя приращение функции ее дифференциалом, получим приближенное равенство $\Delta y \approx f'(x_0) \cdot \Delta x$ или

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x. \qquad (7.25)$$

Формула (7.25) – формула приближенного вычисления значения функции $f(x_0+\Delta x)$ при малых Δx, если известны значения $f(x_0)$ и $f'(x_0)$.

3.2. Производные и дифференциалы высших порядков

3.2.1. Пусть функция задана явно $y=f(x)$ и имеет производную $y'=f'(x)$. Если функция $f'(x)$ дифференцируема, то ее производную называют второй производной или производной второго порядка функции $f(x)$ в точке x и обозначают $f''(x)$, $\dfrac{d^2y}{ax^2}$. Таким образом по определению имеем

$$f''(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x+\Delta x)-f'(x)}{\Delta x}.$$

Заметим, что функцию $f'(x)$ называют первой производной или производной первого порядка функции $f(x)$, а под производной нулевого порядка $f^{(0)}(x)$ подразумевают функцию $f(x)$, то есть $f^{(0)}(x)\equiv f(x)$.

Пример 1. Найти y'', если $y=|x|^3$.

Решение. Если $x\neq 0$, тогда

$$y'=\begin{cases}3x^2, \text{если } x>0\\ -3x^2, \text{если } x<0\end{cases},$$

если $x=0$, то по определению производной

$$y'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|^3}{x}=0.$$

Значит, $y'(x)=3x^2\cdot\operatorname{sign} x$.

Тогда $y''=\begin{cases}6x, \text{ если } x>0\\ -6x, \text{ если } x<0\end{cases}$,

Если $x=0$, то $y''(0)=0$, то есть $y''(x)=6|x|$.

С физической точки зрения $y''(x)$ означает следующее: если материальная точка движется прямолинейно по закону $S=S(t)$. Тогда $v=S'(t)$ – скорость точки в момент времени t. Отношение

$$\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{S'(t+\Delta t)-S'(t)}{\Delta t}$$

есть среднее ускорение точки на промежутке времени $\left[t;\ t+\Delta t\right]$, а предел этого отношения (если он существует), равный $S''(t)$ – ускорение точки в момент времени t.

В случае криволинейного движения $f''(t)$ дает проекцию вектора ускорения на касательную к траектории.

Производную от второй производной функции *f (x)* называют третьей производной или производной третьего порядка этой функции и обозначают $f'''(x)$ или $f^{(3)}(x)$. Аналогично определяются производные любого порядка.

Пусть функция *f (x)* имеет производные $f'(x)$, $f''(x)$, ..., $f^{(n-1)}(x)$. Если существует производная функции $f^{(n-1)}(x)$, то эту производную называют производной n-ного порядка или n-ной производной функции *f (x)* и обозначают $f^{(n)}(x)$.

Таким образом, если функция *f (x)* имеет в точке x производные по n-ного порядка включительно, то

$$f^{(n)}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f^{(n-1)}(x+\Delta x) - f^{(n-1)}(x)}{\Delta x}.$$

Если функции u и σ имеют производные n-ного порядка, то:

1. $(A \cdot u + B \cdot \sigma)^{(n)} = Au^{(n)} + B\sigma^{(n)}$
2. $(u \cdot \sigma)^{(n)} = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k n^{(k)} \cdot \sigma^{(n-k)}$ – формула Лейбница.

Доказательство этих утверждений проводится методом математической индукции.

3.2.2. Пусть функция задана параметрически

$$\begin{cases} x = \varphi\ (t) \\ y = \psi\ (t) \end{cases}.$$

Так как вторая производная от y по x есть первая производная от y'_x по x, то задача нахождения второй производной сводится к нахождению первой производной от функции, заданной параметрически

$$\begin{cases} y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t} \\ x = \varphi(t) \end{cases}.$$

Следовательно, по определению второй производной для функции, заданной параметрически, имеем

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t} \\ x = \varphi(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y''_{x^2} = \dfrac{(y'_x)'_t}{x'_t} \\ x = \varphi(t) \end{cases}.$$

Аналогичным образом – третья производная:

$$\begin{cases} y'''_{x^3} = \dfrac{(y''_{x^2})'_t}{x'_t} \\ x = \varphi(t) \end{cases}$$

и производные высших порядков.

3.2.3. Производные высших порядков от функции, заданной неявно.

В 2.3.1 рассмотрено правило нахождения первой производной от функции, заданной неявно.

По определению вторая производная от функции есть производная от первой производной. Следовательно, для нахождения второй производной надо продифференцировать найденную первую производную по x, рассматривая y функцию от x (сложная функция). Вторая производная будет выражаться через x, y и y'. Подставляя вместо y' его значение, находим y'' через x и y. Аналогично поступаем при нахождении y''' и т. д.

3.2.4. Дифференциалы высших порядков.

Пусть задана функция $y = f(x)$, тогда ее дифференциал (первый дифференциал) определяется по формуле

$$dy = f'(x)dx$$

и является функцией от x, но не надо забывать при этом, что дифференциал независимой переменной dx считается уже независящим от x и при дальнейшем дифференцировании не выносится за знак производной как постоянный множитель. Рассматривая dy как функцию от x, составим дифференциал этой функции, который называют дифференциалом второго порядка исходной функции $f(x)$ и обозначают символом d^2y:

$$d^2y = d(dy)dx = \left[f'(x)dx\right]' dx = f''(x) \cdot dx^2 .$$

Составляя аналогично дифференциал полученной функции от x, получим дифференциал третьего порядка:

$$d^3y = d(d^2y) = \left[f''(x)dx^2\right]' dx = f'''(x)dx^3 .$$

Поступая аналогично, приходим к понятию о дифференциале n-ного порядка функции $f(x)$ и получим для него выражение

$$d^n y = f^{(n)}(x)dx^n . \qquad (7.26)$$

Формула (7.26) позволяет представить производную n-ного порядка в виде частного:

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}.$$

Рассмотрим случай, когда функция является сложной, то есть $y = f(u)$, где u – функция некоторой независимой переменной. Ранее было установлено, что первый дифференциал этой функции имеет тот же вид, как и в том случае, когда u – независимая переменная:

$$dy = f'(u)du.$$

При нахождении дифференциалов высших порядков получим формулы, отличные по виду от формулы (7.26), так как в этом случае будем иметь, что du не является величиной постоянной. Так для дифференциала второго порядка будем иметь, применяя правило для нахождения дифференциала произведения, что

$$d^2 y = d(f'(u)du) = du \cdot d(f(u)) + f(u)d(du) = f''(u)du^2 + f'(u)d^2 u.$$

Отметим, что полученное выражение содержит, по сравнению с формулой (7.26), дополнительное слагаемое $f'(u)d^2 u$. Таким образом, второй дифференциал не обладает инвариантностью формы, в отличие от дифференциала первого порядка.

Если u есть независимая переменная, то du есть величина постоянная и $d^2 u = 0$.

Если u есть линейная функция независимой переменной x, то есть $u = ax + b$.

При этом имеем $du = a \cdot dx$, то есть du есть величина постоянная, а поэтому дифференциалы высших порядков сложной функции будут выражены по формуле (7.26)

$$d^n f(u) = f^{(n)}_{(u)} du^n,$$

то есть выражение (7.26) для дифференциалов высших порядков годится в том случае, если x независимая переменная или линейная функция независимой переменной.

Отметим еще следующие свойства дифференциалов n-ного порядка в предположении существования $u^{(n)}$ и $\sigma^{(n)}$:

1. $d^n(Au + B\sigma) = Ad^n u + Bd^n \sigma$; A, B – постоянные.

2. $d^n(u\sigma) = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k d^k u \cdot d^{n-k}\sigma$.

§ 4. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

1. Локальный экстремум и теорема Ферма.
2. Теорема Ролля о нулях производной.
3. Формула конечных приращений Лагранжа.
4. Обобщенная формула конечных приращений.

4.1. Локальный экстремум и теорема Ферма

Пусть существует число $\delta > 0$ такое, что функция *f (x)* определена в δ – окрестности точки x_0, то есть на множестве $\bigcup_{\delta}(x_0) = (x_0 - \delta;\ x_0 + \delta)$, и если для всех $x \in \bigcup_{\delta}(x_0)$ выполняется неравенство

$$f(x) \geq f(x_0) \tag{7.27}$$

то функция *f (x)* имеет в точке x_0 локальный минимум.

Если для всех $x \in \bigcup_{\delta}(x_0)$ выполняется неравенство

$$f(x) \leq f(x_0),$$

то функция *f (x)* имеет в точке x_0 локальный максимум.

Локальный минимум и локальный максимум называют локальным экстремумом.

Теорема 10. (Ферма). ***Если функция f (x) имеет локальный экстремум в точке x_0 и дифференцируема в этой точке, то***

$$f'(x_0) = 0.$$

Доказательство (проводим для случая локального минимума). Так как функция *f (x)* имеет локальный минимум в точке x_0, то в силу неравенства (7.27) для всех $x \in (x_0 - \delta;\ x_0 + \delta)$ выполняется неравенство

$$f(x) - f(x_0) \geq 0. \tag{7.28}$$

С другой стороны для $x \in (x_0 - \delta, x_0)$, $x - x_0 < 0$ и в силу неравенства (7.28) получим неравенство

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0, \tag{7.29}$$

а для $x \in (x_0;\ x_0 + \delta)$ выполняется неравенство

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0. \qquad (7.30)$$

Так как функция *f (x)* дифференцируема в точке x_0, то существует предел при $x \to x_0$ в левой части неравенства (7.29), равный $f'(x_0) = f'(x)$, при этом из неравенства (7.29) имеем

$$f(x_0) \leq 0. \qquad (7.31)$$

Переходя к пределу в неравенстве (7.30), получим

$$f(x_0) \geq 0. \qquad (7.32)$$

Из полученных неравенств (7.31) и (7.32) следует, что

$$f'(x_0) = 0.$$

Геометрический смысл теоремы Ферма состоит в следующем: *касательная к графику функции y = f (x) в точке локального экстремума параллельна оси абсцисс (рис. 7.14).*

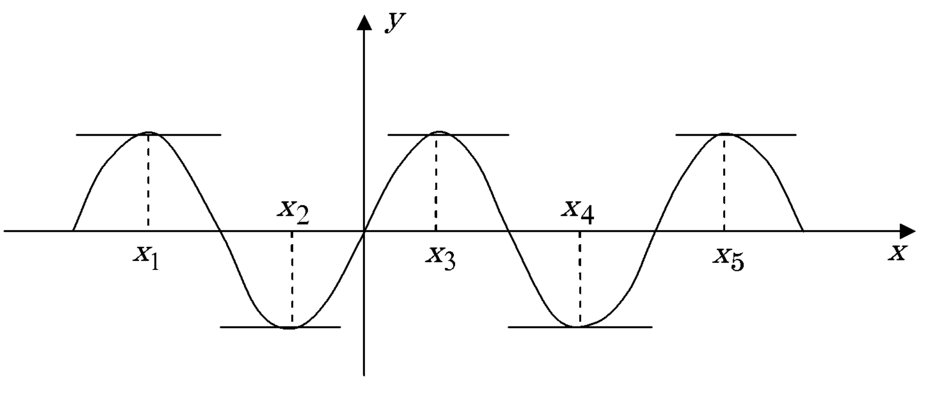


Рис. 7.14

4.2. Теорема Ролля о нулях производной

Теорема 11 (Ролля о нулях производной). ***Если функция f (x) непрерывна на отрезке $[a;\ b]$, дифференцируема на промежутке (a; b) и принимает на концах отрезка $[a;\ b]$ равные значения f(a) = f(b), то существует по крайней мере одна точка $c \in (a;\ b)$, такая, что***

$$f'(c) = 0. \qquad (7.33)$$

Доказательство. Так как функция *y = f (x)* непрерывна на $[a;\ b]$, то она достигает своих наибольшего M и наименьшего m значений, то есть $\exists\ c_1$ и c_2, принадлежащие $[a;\ b]$ такие, что $f(c_1) = m;\ f(c_2) = M$. Возможны следующие два случая:

1. $M = m$, то $f(x) = \text{const},\ f'(x) = 0\ \ \forall x \in [a;\ b]$ и в качестве c можно выбрать любую точку $(a;\ b)$.

2. Если $m \neq M$, то $m < M$ и поэтому $f(c_1) < f(c_2)$ и в силу условий $f(a) = f(b)$, по крайней мере одна из точек c_1 и c_2 является внутренней точкой отрезка $[a;\ b]$. Пусть это будет точка $c_1 \in (a;\ b)$, тогда существует число $\delta > 0$ такое, что $\bigcup_\delta(c_1) \in (a;\ b)$. И так для $\forall x \in \bigcup_\delta(c_1)$ выполняется

$$f(x) \geq f(c_1) = m,$$

то по теореме Ферма $f'(c_1) = 0$, то есть условие (7.33) имеет место. Рассматривая аналогичным образом случай, когда $c_2 \in (a;\ b)$ устанавливает справедливость данной теоремы.

Геометрический смысл теоремы Ролля состоит в следующем: *при выполнении условий теоремы 11, на графике функции f (x) найдется хотя бы одна точка с абсциссой x = c, в которой касательная параллельна оси O_x (рис. 7.15).*

Замечание 1. Условия теоремы Ролля достаточные условия для того, чтобы $f'(c) = 0$ и необходимыми не являются, то есть существуют функции *f (x)*, для которых выполняются не все условия теоремы Ролля, но существует точка $c \in (a;\ b)$, что $f'(c) = 0$. Например, рассмотрим функцию $f(x) = x^3 + 1$, определенную и непрерывную на $[-2;\ 2]$, дифференцируемую на $(-2;\ 2)$, но $f(-2) \neq f(2)$ и, тем не менее, имеем, что существует точка $c = 0$, такая, что $f'(c) = 0$.

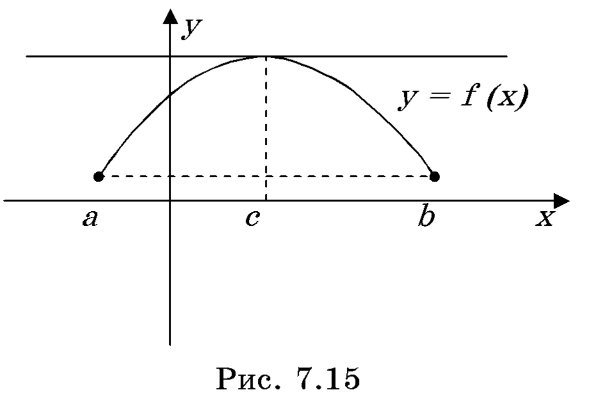


Рис. 7.15

Замечание 2. Теорему Ролля можно сформулировать следующим образом: между двумя точками, в которых дифференцируемая функция принимает равные значения, найдется хотя бы один ноль производной этой функции. В случае, когда $f(a) = f(b) = 0$, то теорема формулируется следующим образом: между двумя нулями дифференцируемой функции находится хотя бы один нуль ее производной.

4.3. Формула конечных приращений Лагранжа

Теорема 12 (формула Лагранжа). ***Если функция f (x) непрерывна на отрезке*** $[a;\ b]$ ***и дифференцируема на интервале (a; b), то существует хотя бы одна точка*** $c \in (a;\ b)$ ***такая, что***

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a). \tag{7.34}$$

Доказательство. Для доказательства теоремы Лагранжа рассмотрим функцию

$$\varphi\ (x) = f(x) + \lambda x\,, \tag{7.35}$$

где число λ выбирают таким образом, чтобы выполнялось условие $\varphi\ (a) = \varphi\ (b)$, то есть $f(a) + \lambda a = f(b) + \lambda b$ откуда имеем, что

$$\lambda = -\frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \tag{7.36}$$

Таким образом, функция $\varphi\ (x)$, заданная формулой (7.35) обладает следующими свойствами:

1. $\varphi\ (x)$ непрерывна на $[a;\ b]$;
2. $\varphi\ (x)$ дифференцируема на интервале $(a;\ b)$;
3. $\varphi\ (a) = \varphi\ (b)$.

Тогда в силу теоремы Ролля для функции $\varphi\ (x)$ существует по крайней мере одна точка $c \in (a;\ b)$ такая, что

$$\varphi'(c) = f'(c) + \lambda = 0. \tag{7.37}$$

В силу равенства (7.36) из (7.37) имеем

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \tag{7.38}$$

или

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Формулу (7.34) называют формулой Лагранжа или формулой конечных приращений.

Геометрический смысл теоремы Лагранжа состоит в следующем: *на промежутке (a; b) существует по крайней мере одна точка $c \in (a;\ b)$, такая, что касательная к графику функции y = f (x) в точке (c; f(c)) параллельна секущей, проходящей через точки A и B. (рис. 7.16).*

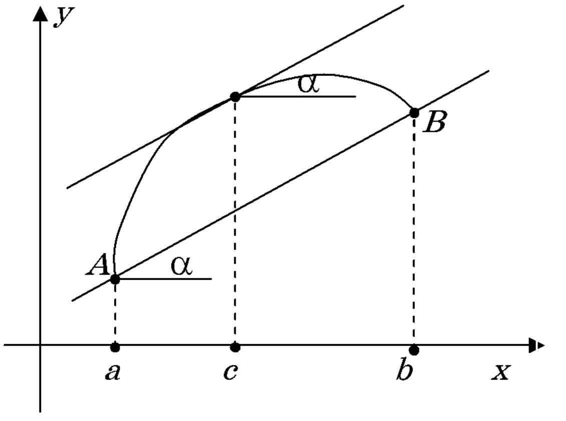


Рис. 7.16

Действительно, так как правая часть равенства (7.38) равна угловому коэффициенту секущей, проходящей через точки A и B графика функции $y = f(x)$, а левая часть этой формулы равна угловому коэффициенту касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $(c;\ f(c))$.

Замечание. Пусть для функции *f (x)* справедливы условия теоремы Лагранжа, а $x_0 \in [a;\ b]$ и $x_0 + \Delta x \in [a;\ b]$ (Δx может быть как положительным, так и отрицательным). Применяя теорему Лагранжа на отрезке $[x_0;\ x_0 + \Delta x]$, получим формулу

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(c) \cdot \Delta x, \qquad (7.39)$$

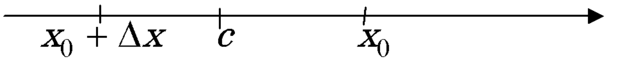
где $c \in (x_0, x_0 + \Delta x)$.

Отметим, что если $\Delta x > 0$, то $0 < c - x_0 < \Delta x$

и $0 < \dfrac{c - x_0}{\Delta x} < 1$. Полагая $\theta = \dfrac{c - x_0}{\Delta x}$ получим

$$c = x_0 + \theta\Delta x, \quad 0 < \theta < 1. \qquad (7.40)$$

Если $\Delta x < 0$, то $0 < x_0 - c < |\Delta x|$,



а поэтому $0 < \dfrac{x_0 - c}{-\Delta x} < 1$. Аналогично, полагая $\theta = \dfrac{x_0 - c}{-\Delta x} = \dfrac{c - x_0}{\Delta x}$, получим равенство (7.40) $c = x_0 + \theta\Delta x,\quad 0 < \theta < 1$.

Тогда (7.39) примет вид

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0 + \theta\Delta x) \cdot \Delta x, \tag{7.41}$$

где $0 < \theta < 1$.

Формулу (7.41) называют формулой конечных приращений Лагранжа. Эта формула дает точное выражение для приращения функции. Формулу

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x$$

называют формулой бесконечно малых приращений, и она дает приближенное значение для приращения функции.

Следствие из формулы Лагранжа

Постоянство функции, имеющей на интервале равную нулю производную

Теорема 13. ***Если функция f (x) дифференцируема на (a; b) и*** $\forall x \in (a;\ b)$ $f'(x) = 0$, ***тогда***

$$f(x) = C = \text{const},\quad \forall x \in (a;\ b).$$

Доказательство. Пусть x_0 – некоторая фиксированная точка интервала $(a;\ b)$, а x – любая точка этого интервала. Тогда $[x_0, x] \in (a;\ b)$ и функция *f (x)* дифференцируема (а, следовательно, и непрерывна) $\forall x \in [x_0, x]$. Тогда согласно теореме Лагранжа $\exists\ c \in [x_0, x]$ такая, что

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0) \cdot f'(c). \tag{7.42}$$

По условию теоремы $f'(x) = 0\ \ \forall x \in (a;\ b)$, а следовательно $f'(c) = 0$. В силу равенства (7.42) имеем

$$f(x) = f(x_0),$$

то есть значение *f (x)* в любой точке *(a; b)* равно $f(x_0) = \text{const}$, т.е $f(x) = \text{const},\quad \forall x \in (a;\ b)$.

Геометрический смысл теоремы 13 состоит в следующем: *если касательная в каждой точке некоторого участка кривой y = f (x)* *параллельна оси O_x, то указанный участок кривой $y = f(x)$ есть отрезок прямой, параллельной оси O_x.*

Теорема 14. ***Если функция f (x) непрерывна на** $[a;\ b]$, **дифференцируема на (a; b) и** $\forall x \in (a;\ b)$, $f'(x) = k$, **k − const, то***

$$f(x) = kx + m,\ \ x \in (a;\ b).$$

Доказательство. Применяя теорему Лагранжа к функции *f (x)* на отрезке $[ax] \in [a;\ b]$, получим

$$f(x) - f(a) = k(x - a).$$

Откуда следует, что

$$f(x) = kx + (f(a) - ka) = kx + m.$$

Теорема 15. ***Если f (x) дифференцируема на (a; b), за исключением, быть может, точки** $x_0 \in (a;\ b)$ **и непрерывна в точке** x_0. **Тогда, если существует конечный или бесконечный***

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f'(x) = A, \tag{7.43}$$

то в точке** x_0 **существует производная слева, причем

$$f'_-(x_0) = A. \tag{7.44}$$

Если существует

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = B, \tag{7.45}$$

то в точке** x_0 **существует производная справа, причем

$$f'_+(x_0) = B. \tag{7.46}$$

Доказательство. Пусть $x_0 \in (a;\ b)$, а $\Delta x \neq 0$ такое, что $x_0 + \Delta x \in (a;\ b)$. Тогда формулу (7.41) можно записать в виде

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0 + \theta\Delta x),\ \ 0 < \theta < 1. \tag{7.47}$$

Если $\exists$ предел (7.43), то есть $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to -0} f'(x_0 + \Delta x) = A$, тогда правая часть (7.47) будет иметь предел, равный A, а значит существует предел и в левой части (7.47) и имеет место равенство (7.44).

Таким же образом доказывается, что из (7.45) следует (7.46).

Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, тогда справедливы соотношения

$$f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = f'(x_0). \tag{7.48}$$

Если пределы (7.43) и (7.45) существуют и конечны, то из (7.44), (7.45) и (7.47) следует, что

$$\lim_{x\to x_0-0} f'(x) = \lim_{x\to x_0+0} f'(x) = f'(x_0).$$

А это означает следующее: если функция $f(x)$ имеет конечную производную в каждой точке $(a;\ b)$, то $f'(x)$ не может иметь на $(a;\ b)$ ни точек устранимого разрыва, ни точек разрыва первого рода. Другими словами, каждая точка интервала $(a;\ b)$ является либо точкой непрерывности функции $f'(x)$, либо точкой разрыва второго рода.

Теорема 16. ***Если функции*** $\varphi(x)$ ***и*** $\psi(x)$ ***дифференцируемы при*** $x \ge x_0$ ***и удовлетворяют условиям*** $\varphi(x_0) = \psi(x_0)$ ***и*** $\varphi'(x) > \psi'(x)$ ***при*** $x \ge x_0$***, то*** $\varphi(x) > \psi(x)$ ***при*** $x > x_0$***.***

Доказательство. Рассмотрим функцию $f(x) = \varphi(x) - \psi(x)$ на $[x_0, x]$, где $x > x_0$. Применяя теорему Лагранжа получим $f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0)$ или, учитывая, что $f(x_0) = 0$ получим $f(x) = f'(c)(x - x_0)$.

Учитывая, что если $c > x_0, f'(c) = \varphi'(c) - \psi'(c) > 0$ получим, что $f(x) > 0$, то есть $\varphi(x) > \psi(x)$ при $x > x_0$.

Пример 1. Доказать, что $\ln(1+x) > x - \dfrac{x^2}{2}$ при $x > 0$.

Решение. Выбирая в качестве функций

$$\varphi(x) = \ln(1+x), \quad \psi(x) = x - \frac{x^2}{2},$$

получим, что $\varphi(0) = \psi(0)$ и $\varphi'(x) = \dfrac{1}{1+x}$, $\psi'(x) = 1 - x$ и, более того, справедливо неравенство для $x > 0$ $\dfrac{1}{1+x} > 1 - x$.

Действительно, т. к. $x > 0$, то $1 + x > 1$ и $1 > 1 - x^2$.

Тогда, в силу установленной теоремы 16 справедливо исходное неравенство.

Пример 2. Доказать, что

1) $|\sin x_1 - \sin x_2| \le |x_1 - x_2|$;

2) $|\operatorname{arctg} x_1 - \operatorname{arctg} x_2| \le |x_1 - x_2|$.

Решение.

1) Применим теорему Лагранжа к функции $f(x) = \sin x$ на $[x_1;\ x_2]$, получим $\sin x_1 - \sin x_2 = (x_1 - x_2) \cdot f'(c)$.

Учитывая, что $f'(c) = \cos c$ и $|\cos c| \le 1$, переходя в последнем равенстве к модулям, получим требуемое неравенство.

2) Доказательство данного неравенства базируется на применении теоремы Лагранжа на $[x_1;\ x_2]$ и функции $f(x) = \operatorname{arctg} x$ с учетом того, что $f'(c) = \dfrac{1}{1 + c^2} \le 1$.

4.4. Обобщенная формула конечных приращений

Теорема 17 (Коши). ***Если каждая из двух функций f (x) и g(x) непрерывна на отрезке*** $[a;\ b]$***, дифференцируема на интервале (a; b), кроме того*** $g'(x) \ne 0$ ***для всех*** $x \in (a;\ b)$***, то существует точка*** $c \in (a;\ b)$ ***такая, что***

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \qquad (7.49)$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda g(x),$$

где число λ выберем таким, чтобы выполнялось равенство $\varphi\ (a) = \varphi\ (b)$, которое равносильно следующему уравнению

$$f(b) - f(a) + \lambda(g(b) - g(a)) = 0. \qquad (7.50)$$

Отметим, что $g(a) \ne g(b)$, так как в противном случае, были бы выполнены условия теоремы Ролля и существовала бы точка $c \in (a;\ b)$ такая, что $g'(c) \ne 0$ – но это противоречит условию теоремы $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a;\ b)$. Таким образом, имеем $g(b) - g(a) \neq 0$ и из (7.51) следует, что

$$\lambda = -\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}. \qquad (7.51)$$

Функция $\varphi\ (x)$ при любом λ непрерывна на $\left[a;\ b\right]$, дифференцируема на $(a;\ b)$ и при λ, определенном равенством (7.51), $\varphi\ (a) = \varphi\ (b)$, то в силу теоремы Ролля существует точка $c \in (a;\ b)$, такая, что $\varphi'(c) = 0$, то есть $f'(c) + \lambda g'(c) = 0$. Откуда

$$\lambda = -\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

и в силу формулы (7.51) имеем, что справедливо утверждение (7.49).

Замечание 1. Если в формуле (7.49) положить $g(x) = x$, то все условия теоремы Коши будут выполнены и формула Коши (7.49) принимает вид формулы Лагранжа, то есть теорема Лагранжа является частным случаем теоремы Коши.

Замечание 2. В формуле (7.49) вовсе не обязательно считать, что $b > a$.

Замечание 3. Формулу (7.49) называют обобщенной формулой конечных приращений или формулой Коши.

Геометрический смысл теоремы Коши и Лагранжа совпадают. Действительно, считая, что линия задана параметрически

$$\begin{cases} x = g(t), \\ y = f(t), \end{cases} \quad t \in \left[t_1;\ t_2\right]. \qquad (7.52)$$

Когда $t \in \left[t_1;\ t_2\right]$, текущая точка перемещается по дуге, начальная точка которой $A(g(t_1);\ f(t_1))$, а конечная точка $B(g(t_2);\ f(t_2))$. Угловой коэффициент хорды, стягивающей эти точки равен

$$\frac{f(t_2) - f(t_1)}{g(t_2) - g(t_1)}.$$

Производная от функции, заданной параметрически определяется по формуле

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f'(t)}{g'(t)}.$$

Из формулы (7.49)

$$\frac{f(t_2) - f(t_1)}{g(t_2) - g(t_1)} - \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

следует, что, если дуга задана в параметрической форме (7.52), то существует точка C, в которой касательная параллельна хорде, стягивающей эту дугу.

§ 5. ПРАВИЛО ЛОПИТАЛЯ

1. Правило Лопиталя.
2. Вычисление пределов функций с помощью правила Лопиталя.

5.1. Правило Лопиталя

При раскрытии неопределенностей, то есть при вычислении предельных значений вида

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

при условии, что эти предельные значения существуют, полезна и эффективна следующая теорема.

Теорема 18. ***Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют следующим условиям:***

1) определены и дифференцируемы на $(a;\ b)$, за исключением, быть может, точки x_0, при этом $g'(x) \neq 0$ и

$$f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a;\ b);$$

2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ или (∞)***;***

3) существует предел (конечный или бесконечный) отношения производных $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$***, то существует также предел*** $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$***, причем***

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Доказательство (проведем для случая $\frac{0}{0}$). Функции $f(x)$ и $g(x)$ доопределим в точке $x = x_0$, полагая $f(x_0) = g(x_0) = 0$, тогда $f(x)$ и $g(x)$ будут непрерывны в точке x_0 и рассмотрим отрезок $[x_0;\ x]$, где $x_0 < x < b$. Тогда $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на $[x_0;\ x]$ и дифференцируемы на $(x_0;\ x)$. Тогда по теореме Коши существует точка с $(a < x_0 < c < x)$ такая, что

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Учитывая то, что $f(x_0) = g(x_0) = 0$ имеем

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \tag{7.53}$$

Если $x \to x_0$, то и $c \to x_0$, то в силу условия 3 теоремы 18, из равенства (7.53) имеем, что

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Замечание 1. Из доказанной теоремы следует, что нахождение предела отношения функций в случае неопределенности вида $\frac{0}{0}$ $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ сводится к нахождению предела отношения производных данных функций. Причем из существования предела отношения производных следует существование предела отношения функций.

Замечание 2. Если производные $f'(x)$ и $g'(x)$ удовлетворяют тем же условиям, что и сами функции $f(x)$ и $g(x)$ и существует

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = A,$$

то справедливо

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = A.$$

Замечание 3. Правило Лопиталя можно применять до тех пор (то есть столько раз), пока не будет получена дробь, для которой условия теоремы не выполняются.

5.2. Вычисление пределов функции с помощью правила Лопиталя

5.2.1. Неопределенность вида $\frac{0}{0}$

Пример 1. Найти пределы функций, применяя правило Лопиталя:

1.1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^{-4x}}{\ln(1+x)}$;

1.2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^{-2x}-4x}{x^3}$;

1.3. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\pi-2\operatorname{arctg} x}{\ln\dfrac{x+1}{x}}$;

1.4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\dfrac{1}{x}}{\sin x}$.

Решение.

1.1. В данном случае функции $f(x)=e^{2x}-e^{-4x}$ и $g(x)=\ln(1+x)$ – бесконечно малые в окрестности точки $x = 0$, $f'(x)$ и $g'(x)$ существуют в окрестности точки $x = 0$ $(x\neq -1)$, при этом $g'(x)=\dfrac{1}{1+x}\neq 0$ при $x > -1$. И более того имеем, что

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-e^{-4x}}{\ln(1+x)}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{2e^{2x}+4e^{-4x}}{\dfrac{1}{1+x}}=\lim_{x\to 0}2(1+x)(e^{2x}+2e^{-4x})=4.$$

Отметим, что при нахождении пределов функции по правилу Лопиталя вопросы о существовании нужных производных и пределов устанавливают по ходу решения задачи. Если при этом отношение $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ есть неопределенность $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ или $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$, то правило Лопиталя применяют снова, до тех пор покуда не удается устранить указанные неопределенности или установить, что данные пределы не существуют, или невозможно применить правило Лопиталя для нахождения предела данной функции.

1.2. В данном случае имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-e^{-2x}-4x}{x^3}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{2e^{2x}+2e^{-2x}-4}{3x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{4e^{2x}-4e^{-2x}}{6x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{8e^{2x}+8e^{-2x}}{6}=\left(\frac{16}{6}\right)=\frac{8}{3}$$

Для нахождения соответствующего предела применяют трижды правило Лопиталя, при этом на каждом шаге проверяют наличие неопределенности $\frac{0}{0}$ и существование производных.

1.3. В данном случае имеем

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\pi-2arctgx}{\ln\frac{x+1}{x}}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{2}{1+x^2}}{\frac{x}{x+1}\cdot\frac{x-x-1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2(x+1)\cdot x}{(1+x^2)}=$$

$$=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2(x+1+x)}{2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x+2}{2x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{2}=2$$

Отметим, что данный предел можно было найти, не применяя постоянно правило Лопиталя, а на втором шаге поступить следующим образом:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2(x+1)x}{1+x^2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+2x}{1+x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2+\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x^2}}=2\,.$$

1.4. В данном случае имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cdot\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}}{\cos x}\,.$$

Последний предел не существует, т. к. $\lim\limits_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}\neq\exists$. Но следует помнить, что предел отношения $\frac{f(x)}{g(x)}$ может существовать, в то время как отношение производных не имеет предела. В таких случаях для нахождения предела используют другие методы (используют I и II замечательные пределы, раскрытие неопределенностей, эквивалентные соотношения). Для нахождения предела в нашем случае поступаем следующим образом:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\left|\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1,\right.$$

функция $\sin\frac{1}{x}$ при $x\to 0$ ограничена,

$x -$ б.м.ф. при $x \to 0\Big| = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x \cdot x \cdot \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = 0$.

5.2.2. Неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$

Пример 2. Найти пределы функций, применяя правило Лопиталя:

2.1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{2x^2} + 1}{x^4}$;

2.2. $\lim\limits_{x \to +0} \dfrac{\ln(1 - \cos x)}{\ln \sin x}$;

2.3. $\lim\limits_{x \to +0} \dfrac{\ln x}{\operatorname{ctg}\ x}$;

2.4. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2 + \sin x}{x^2 - \sin x}$.

Решение.

2.1. В данном случае имеем

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{2x^2} + 1}{x^4} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{4xe^{2x^2}}{4x^3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{2x^2}}{x^2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{4xe^{2x^2}}{2x} = \lim_{x \to +\infty} 2e^{2x^2} = +\infty$$

2.2. В данном случае имеем

$$\lim_{x \to +0} \frac{\ln(1 - \cos x)}{\ln \sin x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \to +0} \frac{\sin^2 x}{(1 - \cos x) \cos x} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= \lim_{x \to +0} \frac{2 \sin x \cdot \cos x}{2 \sin x \cdot \cos x - \sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{2 \cos x}{2 \cos x - 1} = 2$$

При нахождении данного предела можно было поступить следующим образом (после применения один раз правила Лопиталя).

$$\lim_{x \to +0} \frac{\sin^2 x}{(1 - \cos x) \cos x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to +0} \frac{1 - \cos^2 x}{(1 - \cos x) \cos x} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= \lim_{x \to +0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{(1 - \cos x) \cos x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to +0} \frac{1 + \cos x}{\cos x} = 2$$

2.3. В данном случае имеем

$$\lim_{x \to +0} \frac{\ln x}{\operatorname{ctg}\ x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \to +0} \frac{-\sin^2 x}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{-\sin x}{x} \cdot \sin x = 1 \cdot 0 = 0\,.$$

2.4. В данном случае имеем

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+\sin x}{x^2-\sin x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{2x+\cos x}{2x-\cos x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\cos x}{2+\cos x}.$$

Так как пределы числителя и знаменателя не существуют, то по правилу Лопиталя найти данный предел невозможно. Для нахождения данного предела поступим следующим образом: числитель и знаменатель исходного предела разделим на x^2 (старшая степень переменной x) получим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+\sin x}{x^2-\sin x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{\sin x}{x^2}}{1-\frac{\sin x}{x^2}}=1.$$

5.2.3. Другие виды неопределенностей

1. *Неопределенность вида* $(0\cdot\infty)$. Для раскрытия неопределенности $(0\cdot\infty)$ преобразуем произведение $f(x)\cdot g(x)$, где $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$, в частное $\dfrac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$ (неопределенность $\frac{0}{0}$), или $\dfrac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$ (неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$).

2. *Неопределенность вида* $(\infty-\infty)$. Для раскрытия неопределенности данного вида поступают следующим образом:

$$f(x)-g(x)=f(x)\left(1-\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{1-\frac{f(x)}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}}=\left(\frac{0}{0}\right),$$

если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$, или преобразованием соответствующего выражения приводим к $\dfrac{\infty}{\infty}$.

3. *Неопределенность вида* 1^∞, 0^0, ∞^0. Находим с помощью предварительного логарифмирования или основного логарифмического тождества и нахождения $\lim\limits_{x\to a}\ln(f(x)^{g(x)})$.

Пример 3. Найти пределы функций, применяя правило Лопиталя:

3.1. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$;

3.2. $\lim\limits_{x\to +0} x^3\ln x$;

3.3. $\lim\limits_{x\to +0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\sin x}$;

3.4. $\lim\limits_{x\to 0} x^x$;

3.5. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}$.

Решение.

3.1. В данном случае имеем

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=(\infty-\infty)=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}-1}{\ln x+\frac{x-1}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{x\ln x+x-1}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{-1}{1+\ln x+1}=-\frac{1}{2}$$

3.2. В данном случае имеем

$$\lim_{x\to +0} x^3\ln x=(0\cdot\infty)=\lim_{x\to +0}\frac{\ln x}{x^{-3}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to +0}\frac{\frac{1}{x}}{-3x^{-4}}=-\frac{1}{3}\lim_{x\to +0} x^3=0\,.$$

3.3. В данном случае имеем

$$\lim_{x\to +0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}=(\infty^0)=\lim_{x\to +0} e^{\ln\left(\frac{1}{x}\right)\sin x}=e^{\lim\limits_{x\to +0}\frac{-\ln x}{\frac{1}{\sin x}}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to +0}\frac{\sin^2 x}{x\cos x}}=e^{\lim\limits_{x\to +0}\frac{\sin x\cdot\sin x}{x\cos x}}=e^0=1$$

3.4. В данном случае имеем

$$\lim_{x\to 0} x^x=(0^0)=\left|\begin{matrix} x^x=t\\ \ln t=x\ln x\end{matrix}\right|.$$

Тогда

$$\lim_{x\to 0}\ln t=\lim_{x\to 0} x\ln x=(0\cdot\infty)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}(-x)=0$$

Откуда $\lim\limits_{x\to 0} t = 1$, то есть $\lim\limits_{x\to 0} x^x = 1$.

3.5. В данном случае имеем

$$\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}} = (1^\infty) = \lim_{x\to 0} e^{\ln(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\ln\cos 2x}{x^2}} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= e^{-6\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg 2x}{2x}} = e^{-6}$$

§ 6. ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА

1. Формула Тейлора.
2. Приложения формулы Тейлора.

6.1. Формула Тейлора

Если $p(x)$ – многочлен в степени n:

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n \qquad (7.54)$$

то, последовательно дифференцируя его n раз получим

$$\begin{aligned}
&p'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x + 3a_3 x^2 + \ldots + n\cdot a_n x^{n-1}\\
&p''(x) = 1\cdot 2\cdot a_2 + 3\cdot 2a_3 x + \ldots + n\cdot(n-1)a_n x^{n-2}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&p^{(n)}(x) = \qquad\qquad n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ \ \cdot 2\cdot 1a_n
\end{aligned}$$

Полагая в полученных равенствах $x = 0$, найдем выражения коэффициентов многочлена через значение самого многочлена и его производных при $x = 0$:

$$a_0 = f(0); \qquad a_1 = \frac{p'(0)}{1!}; \qquad a_2 = \frac{p''(0)}{2!}; \quad \ldots..; \quad a_n = \frac{p^{(n)}(0)}{n!}.$$

Подставляя эти значения коэффициентов в (1), получим

$$p(x) = p(0) + \frac{p'(0)}{1!}x + \frac{p''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{p^{(n)}(0)}{n!}x^n. \qquad (7.55)$$

Формула (7.55) отличается от формулы (7.54) записью коэффициентов.

Находим разложение многочлена $p(x)$ степени n по степеням $(x - x_0)$, то есть

$$p(x) = A_0 + A_1(x - x_0) + A_2(x - x_0)^2 + \ldots + A_n(x - x_0)^n. \quad (7.56)$$

Дифференцируя выражение (7.56) последовательно n раз, и полагая в полученных равенствах $x = x_0$, получим

$$A_0 = p(x_0); \quad A_1 = \frac{p'(x_0)}{1!}; \quad A_2 = \frac{p''(x_0)}{2!}; \quad A_n = \frac{p^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Коэффициенты разложения уравнения (7.56) выражаются через значения самого многочлена и его производных при $x = x_0$. Подставляя их в (7.56) получим

$$p(x) = f(x_0) + \frac{p'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \\ + \frac{p''(x)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{p^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \quad (7.57)$$

Формула (7.57), так же как и ее частный случай (7.55) $(x_0 = 0)$ называется формулой Тейлора для многочлена. Формулу (7.55) называют формулой Маклорена.

Формула Тейлора для произвольной функции

Пусть *f (x)* произвольная функция, определенная в точке $x = x_0$ и некоторой ее окрестности, при этом *f (x)* имеет производные до n-ного порядка включительно в точке $x = x_0$ и некоторой ее окрестности. Тогда для функции *f (x)* по аналогии с формулой (7.57) можно получить многочлен

$$p_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n. \quad (7.58)$$

Этот многочлен и его производные (до n-ного порядка включительно) в точке x_0, имеют те же значения, что и функция *f (x)* и ее производные. В случае если *f (x)* не является многочленом степени n, то нельзя утверждать, что $f(x) = p_n(x)$. Многочлен $p_n(x)$ дает только приближенное значение к функции *f (x)*, с помощью которого она была вычислена с некоторой степенью точности.

Теорема 19. ***Если функция f (x) определена в некоторой окрестности точки x_0 и имеем производные до (n + 1)-го порядка включительно, то для любого x из этой окрестности существует точка $C_0 \in (x_0, x)$ такая, что имеет место формула Тейлора***

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(C)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \qquad (7.59)$$

или

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x),$$

где $$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)(x - x_0)}{1!} + \ldots + f^{(n)}(x_0)\frac{(x - x_0)^n}{n!} \quad -$$

многочлен Тейлора, а

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(C)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \quad - \qquad (7.60)$$

остаточный член формулы Тейлора, записанный в форме Лагранжа.

$R_n(x)$ – погрешность приближенного равенства

$$f(x) \approx P_n(x). \qquad (7.61)$$

Следовательно, формула Тейлора дает возможность заменить функцию *f (x)* многочленом $P_n(x)$ с соответствующей степенью точности – величина которой равна $R_n(x)$ – остаточный член.

Если в формуле (7.59) положить $x_0 = 0$, то получим частный случай формулы Тейлора – формулу Маклорена

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} + \frac{f^{(n+1)}(C)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

где $C = \theta x, \quad 0 < \theta < 1$.

При $n = 0$ формула Тейлора (7.59) имеет вид

$$f(x) = f(x_0) + f'(C)(x - x_0),$$

а это формула конечных приращений Лагранжа, то есть формула Тейлора является прямым обобщением формулы конечных приращений Лагранжа.

Частным случаем более точной формулы (7.61)

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

является формула приближенного вычисления, основанная на применении дифференциала функции к приближенным вычислениям

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0).$$

Замечание 1. Хотя остаточный член $R_n(x)$ в формуле Лагранжа имеем очень простой вид, но в ряде случаев эта форма непригодна для оценки $R_n(x)$, поэтому рассматривают другие формы остаточного числа. Так как

$$(x - c)^n = \left[x - x_0 - \theta(x - x_0)\right]^n = (1 - \theta)^n (x - x_0)^n,$$

тогда

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{n!}(1 - \theta)^n (x - x_0)^{n+1}, \qquad (7.62)$$

где $0 < \theta < 1$.

Формула (7.62) определяет остаточный член в форме Коши для формулы Тейлора (7.59).

Отметим, что по сравнению с формой Лагранжа (7.60), потеря множителя (n + 1) в знаменателе, форме Коши (7.62) бывает выгоднее, благодаря наличию множителя $(1 - \theta)^n$.

Замечание 2. Формула Тейлора с остаточным членом в той или другой формулах является разновидностью теорем о средних значениях.

Замечание 3. Формы остаточного члена в формуле Тейлора, рассмотренные выше, применяют в случаях, когда при тех или иных фиксированных значениях x $(x \neq x_0)$ заменяют приближенно функцию $f(x)$ многочленом $P_n(x)$ и численно оценивают погрешность. В ряде случаев нам требуется определить значения x. А важно определить поведение $R_n(x)$ при $x \to x_0$, то есть важен порядок малости. Предполагая существование n последовательных производных $f'(x)$, $f''(x)$, ..., $f^{(n)}(x)$ в окрестности точки x_0 и непрерывной в $f^{(n)}(x_0)$, тогда формула Тейлора имеет вид

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(n)}(C)}{n!}(x - x_0)^n, \qquad (7.63)$$

где $C \in (x_0;\ x)$.

Считаем, что последнее слагаемое в формуле (7.63) можно представить в виде

$$\frac{f^{(n)}(c)}{n!} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \alpha(x).$$

Так как при $x \to x_0$, $c \to x_0$, так что (по непрерывности) $f^{(n)}(c) \to f^{(n)}(x_0)$, то $\alpha(x) \to 0$ и $\alpha(x) \cdot (x - x_0)^n = 0\left((x - x_0)^n\right)$.

Следовательно

$$R_n(x) = 0\left((x - x_0)^n\right), \qquad (7.64)$$

то есть в остаточном члене в этом случае имеем, что при постоянном n и $x \to x_0$ он будет бесконечно малой величиной порядка выше n-ного по сравнению с $(x - x_0)$.

Таким образом ряд Тейлора с остаточным членом в форме Пеано (7.64) имеет вид

$$\begin{gathered} f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \\ + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + 0\left((x - x_0)^n\right) \end{gathered} \qquad (7.65)$$

Формула (7.65) имеет «локальный» характер, характеризует поведение функции при стремлении x к x_0.

В формуле (7.65), полагая $x - x_0 = \Delta x$, а $f(x) - f(x_0) = \Delta f(x_0)$, получим

$$\begin{gathered} \Delta f(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x + \frac{f''(x_0)}{2!}(\Delta x)^2 + \ldots + \\ + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(\Delta x)^n + 0(\Delta x)^n \end{gathered} \qquad (7.66)$$

которая служит обобщением формулы

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x + 0(\Delta x),$$

получающейся из формулы (7.66) при $n = 1$.

Замечание 4. Заменяя Δx на dx и учитывая, что

$$f'(x_0)dx = df(x_0), \quad f''(x_0)dx^2 = d^2f(x_0), \quad \ldots, \quad f^{(n)}(x_0)dx^n = d^nf(x_0)$$

и

$$f^{(n+1)}(c)dx^{n+1} = d^{n+1}f(c),$$

получим

$$\Delta f(x_0) = df(x_0) + \frac{1}{2}d^2f(x_0) + \ldots + \frac{1}{n!}d^nf(x_0) + \frac{d^{n+1}f(c)}{(n+1)!},$$
$$c = x_0 + \theta\Delta x, \quad 0 < \theta < 1$$

или

$$\Delta f(x_0) = df(x_0) + \frac{1}{2}d^2f(x_0) + \ldots + \frac{1}{n!}d^nf(x_0) + 0(\Delta x^n).$$

Отметим, что если $\Delta x \to 0$, то по этим формулам из бесконечно малого приращения функции $\Delta f(x_0)$ выделяется не только его главный член $df(x_0)$ – первый дифференциал, но и члены более высоких порядков малости, которые с точностью до факториалов в знаменателях совпадают с последовательными дифференциалами высших порядков:

$$d^2f(x_0), d^3f(x_0), \ldots d^nf(x_0).$$

Разложение основных элементарных функций Маклорена

1. Показательная функция $f(x) = e^x$. Так как $f(x) = 1$ и $f^{(n)}(0) = 1$, а $f^{(n+1)}(x) = e^x$ и $f^{(n+1)}(\theta x) = e^{\theta x}$, тогда

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{(n+1)!}e^{\theta x}.$$

2. $f(x) = \sin x$. Так как $f'(x) = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$;

$$f''(x) = -\sin x = \sin\left(x + 2\cdot\frac{\pi}{2}\right); \quad f'''(x) = -\cos x = \sin\left(x + 3\cdot\frac{\pi}{2}\right);$$

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right); \quad f^{(n+1)}(x) = \sin\left(x + (n+1) \cdot \frac{\pi}{2}\right),$$

а $f(0) = f''(0) = \ldots = f^{(2n)}(0) = 0; \quad f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n$.

Тогда

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + 0\left(x^{2n+2)}\right).$$

3. $f(x) = \cos x$. Так как $f^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\dfrac{\pi}{2}\right)$, тогда

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + 0\left(x^{2n+1}\right)$$

4. $f(x) = (1+x)^m$. Данная функция определена и дифференцируема на интервале $(-1; 1)$.

$$f(x) = (1+x)^m, \quad f'(x) = m(1+x)^{m-1}, \quad f''(x) = m(m-1)(1+x)^{m-2},$$

$$f^{(n)}(x) = m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)(1+x)^{m-n}$$

$$f(0) = 1; \qquad f'(0) = m; \qquad f''(0) = m(m-1)$$

$$f^{(n)}(0) = m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)$$

Тогда

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots + \\ + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + 0(x^n) \qquad (7.67)$$

Отметим два важных частных случая формулы (7.67):

а) $\dfrac{1}{1+x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + 0(x^n)$,

б) $\dfrac{1}{1-x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + 0(x^n)$.

5. $f(x) = \ln(1+x)$. Если $f(x) = \ln(1+x)$, то $f(0) = 0$

$$f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}; \quad f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1} \cdot (k-1)!$$

Тогда

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n + 0(x^n). \qquad (7.68)$$

Заменяя в формуле (7.68) x на $(-x)$, получим

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \ldots - \frac{x^n}{n} + 0(x^n).$$

6.2. Приложения формулы Тейлора

6.2.1. Выделение главной части функции

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в проколотой окрестности точки $x = x_0$ и возможно представление:

$$f(x) = g(x) + 0(g(x)), \qquad (7.69)$$

тогда функция $g(x)$ называется главной частью функции $f(x)$ в окрестности точки x_0.

Из формулы (7.69) следует, что

$$\frac{f(x)}{g(x)} = 1 + \frac{0(g(x))}{g(x)} \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1,$$

то есть при $x \to x_0$ главная часть и сама функция эквивалентны.

Следует отметить, что главная часть функции определяется неоднозначно если не задан вид функции.

Пример 1. Найти главную часть функции $f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x$ в проколотой окрестности $x_0 = 0$.

Решение. Так как $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3 + 2x^2 + 3x}{3x} = 1$, то функция $g(x) = 3x$ является главной частью $f(x)$ в проколотой окрестности точки $x_0 = 0$, то есть $x^3 + 2x^2 + 3x = 3x + 0(3x)$.

Отметим, что главной частью функции $f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x$ в проколотой окрестности точки $x_0 = 0$ является также функция $\varphi(x) = 2x^2 + 3x$, так как

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{x^3 + 2x^2 + 3x}{2x^2 + 3x} = 1.$$

Формула Тейлора с остаточным числом в форме Пеано дает общий метод нахождения главной части функции *f (x)* в окрестности некоторой точки. Главная часть функции *f (x)* в окрестности точки x_0 – это ее многочлен Тейлора. Для нахождения главной части функции используют основные разложения в ряд Тейлора с остаточными членами в форме Пеано, так называемую локальную формулу Тейлора.

Следовательно, используя многочлен Тейлора функции *f (x)*, можно получить асимптотические формулы для функции *f (x)* в окрестности точки $x = x_0$.

6.2.2. Приближенные вычисления значений функции

Для вычисления приближенных значений функции в окрестности точки x_0 используют формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа. Значения *f (x)* в окрестности точки x_0 вычисляют по формуле

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n,$$

а погрешность приближения

$$|R_n(x)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}\right|, x_0 < c < x.$$

Отметим, что если $n = 1$, то функция *f (x)* аппроксимируется многочленом первой степени:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

с погрешностью

$$R_2(x) = \frac{f''(c)}{2!}(x - x_0)^2, x_0 < c < x.$$

Рассмотрим, для примера, следующие функции и оценки погрешности.

1. Пусть $f(x) = e^x$, тогда приближенная формула

$$e^x \approx 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!},$$

а остаточный член $R_n(x) = \dfrac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1}$.

Тогда, например, при $x > 0$ погрешность оценивается так:

$$0 < R_n(x) < e^x \cdot \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

В частности, если $x = 1$, то $0 < R_n(1) < \frac{3}{(n+1)!}$.

2. Пусть $f(x) = \sin x$, тогда

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{m-1} \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}.$$

Остаточный член

$$R_{2m}(x) = \frac{\sin\left(\theta x + (2m+1)\frac{\pi}{2}\right)}{(2m+1)!} \cdot x^{2m+1} = (-1)^m \cos\theta x \cdot \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}$$

и погрешность оценивается $|R_{2m}(x)| \le \frac{|x|^{2m+1}}{(2m+1)!}$.

Так, если взять в приближении один член $\sin x \approx x$, то для того, чтобы погрешность была меньше, чем 0,001, достаточно взять (считая $x > 0$) $\frac{x^3}{6} < 0{,}001$ или $x < 0{,}1817$.

3. Пусть $f(x) = \cos x$, тогда имеем

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!},$$

причем $R_{2m+1}(x) = (-1)^{m+1} \cos\theta x \cdot \frac{x^{2m+2}}{(2m+2)!}$, так, что

$$|R_{2m+1}| \le \frac{|x|^{2m+2}}{(2m+2)!}.$$

И для формулы $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$ погрешность будет

$$|R_3(x)| \le \frac{x^4}{24}$$

и для того, чтобы погрешность была меньше, чем 0,001, достаточно взять (считая $x > 0$) $x < 0{,}22113$.

4. Доказать, что $\sin(\alpha + h)$ отличается от $\sin\alpha + h\cos\alpha$ не более, чем на $\dfrac{h^2}{2}$.

Решение. По формуле Тейлора имеем

$$\sin(\alpha + h) = \sin\alpha + h\cos\alpha - \frac{h^2}{2}\sin c.$$

Отсюда

$$\left|\sin(\alpha + h) - (\sin\alpha + h\cos\alpha)\right| = \frac{h^2}{2}\left|\sin c\right| \le \frac{h^2}{2}.$$

6.2.3. Доказательство неравенств

Пример 2. Доказать, что при $x > 0$ имеет место

$$x - \frac{x^2}{2} < \ln(1 + x) < x.$$

Решение. Применяя формулу Маклорена с остаточным числом $R_2(x)$ будем иметь

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2(1 + c)^2},$$

где $0 < c < x$.

С другой стороны, по той же формуле Маклорена с остаточным членом $R_3(x)$ будем иметь

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3(1 + c_1)^3}, 0 < c_1 < x.$$

Так как $\dfrac{x^2}{2(1 + c)^2} > 0$ и $\dfrac{x^3}{(1 + c_1)^3} > 0$ при $x > 0$, тогда отсюда следует

$$x - \frac{x^2}{2} < \ln(1 + x) < x.$$

6.2.4. Вычисление пределов с помощью формулы Тейлора

1. Пусть требуется вычислить предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{f\ (x)}{g\ (x)} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

Считаем, что $f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(n-1)}(0) = 0,\ f^{(n)}(0) \neq 0$. Тогда разложение *f (x)* по формуле Маклорена имеет вид

$$f(x) = ax^n + 0(x^n), a \neq 0.$$

Аналогично предполагаем, что

$$g(0) = g'(0) = \ldots = g^{(m-1)}(0) = 0, g^{(m)}(0) \neq 0$$

и, следовательно, $g(x) = bx^m + 0(x^m),\ b \neq 0$. Тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{ax^n + 0(x^n)}{bx^m + 0(x^m)} = \begin{cases} \dfrac{a}{b}, & \text{если } m = n \\ 0, & \text{если } m < n \\ \infty, & \text{если } m > n \end{cases}$$

При вычислении предела с использованием формулы Тейлора в точке $x_0 \neq 0$, полагают $x - x_0 = t$, и приводят задачу к вычислению предела при $t = 0$.

Пример 3. Найти пределы:

1.1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1+x^2}\cos x}{\sin^4 x}$; 1.2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e(1+x)^{-\frac{1}{x}}-1}{x}$.

Решение.

1.1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1+x^2}\cos x}{\sin^4 x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1+x^2}\cos x}{x^4} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1-\left[1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1\cdot(-1)x^4}{2\cdot 2}+0(x^4)\right]\left[1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+0(x^5)\right]}{x^4} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^4}{4}+\frac{x^4}{8}-\frac{x^4}{24}+0(x^4)}{x^4} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{3}+\frac{0(x^4)}{x^4}\right] = \frac{1}{3}$$

1.2. Так как имеет место равенство $(1+x)^{-\frac{1}{x}} = e^{-\frac{1}{x}\ln(1+x)}$ и так как $-\frac{1}{x}\ln(1+x) = -1+\frac{x}{2}+0(x)$, тогда имеем

$$e\cdot(1+x)^{-\frac{1}{x}}-1 = e\cdot e^{-1+\frac{x}{2}+0(x)}-1 = e^{\frac{x}{2}+0(x)-1} = \frac{x}{2}+0(x).$$

Тогда искомый предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{e\,(1+x)^{-\frac{1}{x}}-1}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{2}+0(x)}{x}=\frac{1}{2}.$$

2. Пусть требуется вычислить предел вида

$$\lim_{x\to x_0}(1+f\ (x))^{g\ (x)}=(1)^{\infty}.$$

Пусть разложение $f\ (x)$ в ряд Маклорена в окрестности точки $x_0\ =0$ имеет вид $f\ (x)=ax^n+0(x^n), x\to 0, a\neq 0$, а функцию $g(x)$ при $x\to 0$ можно представить в виде

$$g\ (x)=\frac{1}{bx^n+0(x^n)},\ \text{где}\ b\neq 0,\ n\in N.$$

Тогда предел имеет вид

$$\lim_{x\to 0}(1+f\ (x))^{g\ (x)}=\lim_{x\to 0}(1+ax^n+0(x^n))^{\frac{1}{bx^m+0(x^m)}}=e^{\frac{a}{b}}.$$

Пример 4. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}(e^{tgx}+\ln(1-x))^{\frac{6}{x^3}}$.

Решение. Разлагая функции e^x, $\operatorname{tg}x$, $\ln(1-x)$ по формуле Маклорена до $0(x^3)$, получим

$$e^{tgx}+\ln(1-x)=e^{x+\frac{x^3}{3}+0(x^4)}-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+0(x^3)=1+x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+$$
$$+\frac{x^3}{3}+0(x^3)-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+0(x^3)=1+\frac{x^3}{6}+0(x^3)$$

Тогда имеем

$$\lim_{x\to 0}\left(e^{tgx}+\ln(1-x)\right)^{\frac{6}{x^3}}=(1^{\infty})=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x^3}{6}+0(x^3)\right)^{\frac{6}{x^3}}=e^1=e.$$

Замечание. Неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$; $0\cdot\infty$; $\infty-\infty$ приводят, как правило, к виду $\frac{0}{0}$.

Пример 5. Вычислить предел $A = \lim\limits_{x\to 0}\left(\cos x + \frac{x^2}{2}\right)^{\frac{1}{x(\sin x - x)}}$.

Решение. Логарифмируя, получим $\ln A = \dfrac{\ln(\cos x + \frac{x^2}{2})}{x(\sin x - x)}$.

Тогда $\lim\limits_{x\to 0} \ln A = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\left(\cos x + \frac{x^2}{2}\right)}{x^2(\sin x - x)}$.

Так как $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + 0(x^5)$; $\sin x = x - \frac{x^2}{6} + 0(x^4)$;

$$\ln\left(1 + \frac{x^4}{24} + 0(x^5)\right) = \frac{x^4}{24} + 0(x^5).$$

Тогда имеем

$$\lim_{x\to 0} \ln A = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^4}{24} + 0(x^5)}{\frac{-x^4}{6} + 0(x^4)} = -\frac{1}{4}.$$

Таким образом $A = e^{-\frac{1}{4}}$.

Замечание. Многочлен Тейлора является многочленом наилучшего приближения функции в окрестности данной точки, то есть, если построен многочлен Тейлора степени n, то этот многочлен наилучшим образом среди всех многочленов степени n приближающим данную функцию $f(x)$ в «бесконечно малой окрестности точки x_0, то есть при $x \to x_0$». При этом такой многочлен оказывается единственным. Таким образом, имеет место следующая теорема.

Теорема 20. ***Если функция f (x) определена и дифференцируема до порядка n включительно в точке*** x_0 ***и***

$$f(x) = P_n(x) + 0((x - x_0)^n), \tag{7.70}$$

где $P_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k(x - x_0)^k$ ***– многочлен степени меньше или равной n, тогда***

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}; \quad k = 0; 1; \ldots; n, \tag{7.71}$$

то есть $P_n(x)$ ***– многочлен Тейлора.***

То есть, никакой многочлен степени равной или меньшей степени n, отличный от многочлена Тейлора, не может приближать данную функцию $f(x)$ с точностью $0((x-x_0)^n)$ при $x \to x_0$.

Доказательство. Из формул (7.70) и (7.71) следует

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + 0((x-x_0)^n) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k + 0((x-x_0)^n).$$

Переходя к пределу при $x \to x_0$ получим $a_0 = f(x_0)$. Отбрасывая в обеих частях этого равенства одинаковые слагаемые a_0 и $f(x_0)$, и сокращая на $(x-x_0)$, $(x \neq x_0)$, получим

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^{k-1} + 0((x-x_0)^{n-1}) = \sum_{k=1}^{n} a_k (x-x_0)^{k-1} + 0((x-x_0)^{n-1})$$

Переходя к пределу в последнем равенстве при $x \to x_0$, получим $a_1 = f'(x_0)$.

Поступая аналогично данному процессу, получим

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, \quad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Что и требовалось доказать.

§ 7. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ ПРОИЗВОДНЫХ

1. Возрастание и убывание функции.
2. Экстремумы функции.
3. Наибольшее и наименьшее значения функции.
4. Выпуклость функции.
5. Точки перегиба.
6. Асимптоты.
7. Полное исследование функции и построение графиков.

7.1. Возрастание и убывание функции

7.1.1. Критерий возрастания (убывания) дифференцируемой функции на интервале

Теорема 21. ***Для того чтобы дифференцируемая на интервале*** $(a;\ b)$ ***функция*** $f(x)$ ***была возрастающей на этом интервале, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие***

$$f'(x) \ge 0, \text{ при всех } \ x \in (a;\ b). \tag{7.72}$$

Аналогично условие

$$f'(x) \le 0, \textbf{ при всех } \ x \in (a;\ b)$$

является необходимым и достаточным для убывания дифференцируемой функции $f(x)$ ***на интервале*** $(a;\ b)$.

Ограничимся доказательством теоремы для случая возрастающей функции.

Доказательство (необходимость). Пусть x_0 – произвольная точка интервала $(a;\ b)$. Из определения возрастающей функции следует, что

$$\forall\, x \in (a;\ b): \quad x > x_0 \to f(x) \ge f(x_0),$$

$$\forall\, x \in (a;\ b): \quad x < x_0 \to f(x) \le f(x_0).$$

Следовательно, если $x \in (a;\ b)$ и $x \ne x_0$, то выполняется неравенство

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \ge 0. \tag{7.73}$$

Так как левая часть (7.73) имеет при $x \to x_0$ предел, равный $f'(x_0)$, то из неравенства (7.73) по свойству сохранения знака нестрогого неравенства при предельном переходе получаем $f'(x_0) \ge 0$ для любого $x_0 \in (a;\ b)$.

Доказательство (достаточность). Пусть выполняется условие (7.72) и пусть $x_1,\ x_2$ – произвольные точки интервала $(a;\ b)$, причём $x_1 < x_2$. Применяя к функции $f(x)$ на отрезке $\left[x_1,\ x_2\right]$ теорему Лагранжа, получаем

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)\,(x_2 - x_1),$$

где $f'(\xi) \geq 0$, так как $\xi \in (a;\ b)$. Отсюда следует, что

$$\forall\, x_1, x_2 \in (a;\ b): \quad x_2 \geq x_1 \rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$$

Это означает, что функция $f(x)$ является возрастающей на интервале $(a;\ b)$.

7.1.2. Достаточное условие строгого возрастания (убывания) функции

Теорема 22. ***Если для всех*** $x \in (a;\ b)$ ***выполняется условие***

$$f'(x) > 0, \tag{7.74}$$

то функция $f(x)$ ***строго возрастает на интервале*** $(a;\ b)$***, а если для всех*** $x \in (a;\ b)$ ***справедливо неравенство***

$$f'(x) < 0, \tag{7.75}$$

то функция $f(x)$ ***строго убывает на интервале*** $(a;\ b)$***.***

Ограничимся доказательством теоремы для случая, когда выполняется условие (7.74). Пусть x_1 и x_2 – произвольные точки интервала $(a;\ b)$ такие что $x_1 < x_2$. По теореме Лагранжа

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi) \cdot (x_2 - x_1), \text{ где } \xi \in (a;\ b).$$

Отсюда и из условия (7.74) следует, что $f(x_2) > f(x_1)$. Это означает, что функция $f(x)$ строго возрастает на интервале $(a;\ b)$.

Теорема 23. ***Если функция*** $f(x)$ ***непрерывна на отрезке*** $[a;\ b]$***, дифференцируема на интервале*** $(a;\ b)$ ***и удовлетворяет условию (7.75), то эта функция строго убывает на отрезке*** $[a;\ b]$***.***

Теорема 23, как и теорема 22, доказывается с помощью формулы конечных приращений Лагранжа.

Пример 1. Доказать, что если $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, то

$$\sin x > \frac{2}{\pi} x. \tag{7.76}$$

Рассмотрим функцию $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$, $f(0) = 1$. Эта функция непрерывна на отрезке $\left[0;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$ и дифференцируема на интервале $\left(0;\ \dfrac{\pi}{2}\right)$, причем $f'(x) = \dfrac{\cos\ x}{x^2} \cdot (x - \operatorname{tg}\ x) < 0$, так как на интервале $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ выполняются неравенства $\cos\ x > 0$, $\operatorname{tg}\ x > x$. По теореме 23 функция $f(x)$ строго убывает на отрезке $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$, и поэтому $f(x) > f(\dfrac{\pi}{2})$ для $x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$, то есть выполняется неравенство $\dfrac{\sin\ x}{x} > \dfrac{2}{\pi}$, равносильное на интервале $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ неравенству (7.76).

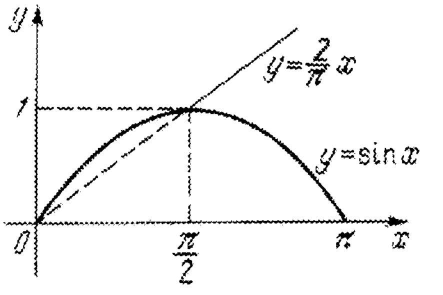


Рис. 7.17

Геометрическая интерпретация неравенства (7.76): на интервале $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ график функции $y = \sin\ x$ лежит выше графика функции $y = \dfrac{2}{\pi} \cdot x$ (рис. 7.17).

Отметим, что

$$\sin\ x \geq \frac{2}{\pi} \text{ при } \left[0; \frac{\pi}{2}\right], \tag{7.77}$$

причем при $x = 0$ и $x = \pi/2$ неравенство (7.77) обращается в равенство.

7.1.3. Возрастание (убывание) функции в точке

Будем говорить, что функция $f(x)$ строго возрастает в точке x_0, если существует $\delta > 0$ такое, что

$$\forall x \in (x_0 - \delta;\ x_0) \to f(x) < f(x_0), \tag{7.78}$$

$$\forall x \in (x_0;\ x_0 + \delta) \to f(x) > f(x_0).$$

Заметим, что условие (7.78) равносильно условию

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0,\ \ x \in \dot{U}_\delta(x_0). \tag{7.79}$$

Аналогично вводится понятие строгого убывания функции $f(x)$ в точке x_0. В этом случае

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}<0, \qquad x\in\dot{U}_\delta(x_0).$$

Теорема 24. ***Если $f'(x_0)>0$, то функция строго возрастает в точке x_0, а если $f'(x_0)<0$, то функция строго убывает в точке x_0.***

Пусть, например, $f'(x_0)>0$. Из определения производной следует, что по заданному числу $\varepsilon=f'(x_0)>0$ можно найти $\delta>0$ такое, что для всех $x\in\dot{U}_\delta(x_0)$ выполняется неравенство $\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f'(x_0)\right|<f'(x_0)$, откуда следует утверждение (7.79).

Аналогично рассматривается случай $f'(x_0)<0$.

7.2. Экстремумы функции

7.2.1. Необходимые условия экстремума

Понятие локального экстремума было рассмотрено ранее. Необходимые условия экстремума легко получить из теоремы Ферма. Согласно этой теореме точки локального экстремума функции $f(x)$ следует искать среди тех точек области ее определения, в которых производная этой функции либо равна нулю, либо не существует.

В дальнейшем будем часто опускать слово «локальный» при формулировке утверждений, связанных с понятием локального экстремума.

Точки, в которых производная данной функции равна нулю, называют стационарными точками этой функции, а *точки, в которых функция непрерывна, а ее производная либо равна нулю, либо не существует, – ее критическими точками*. Поэтому все точки экстремума функции содержатся среди ее критических точек.

Точка $x=0$ является критической точкой для каждой из функций $y=x^2$, $y=x^3$, $y=|x|$, $y=\sqrt[3]{x}$, причем для функций $y=x^2$, $y=|x|$ точка $x=0$ – точка экстремума, а для функций $y=x^3$, $y=\sqrt[3]{x}$ эта точка не является точкой экстремума.

Таким образом, не всякая критическая точка является точкой экстремума функции.

7.2.2. Достаточные условия экстремума

Введем понятие строгого экстремума. Назовем x_0 точкой строгого максимума функции $f(x)$, если

$$\exists\delta > 0 \quad \forall x \in \dot{U}_\delta(x_0) \to f(x) < f(x_0). \tag{7.80}$$

Аналогично x_0 называют точкой строгого минимума функции $f(x)$, если

$$\exists\delta > 0 \quad \forall x \in \dot{U}_\delta(x_0) \to f(x) > f(x_0). \tag{7.81}$$

Отметим, что если функция $f(x)$, определенная в δ-окрестности точки x_0, строго возрастает на промежутке $\left(x_0 - \delta;\ x_0\right]$ и строго убывает на промежутке $\left[x_0;\ x_0 + \delta\right)$, то выполняется условие (7.80), и поэтому x_0 является точкой строгого максимума функции $f(x)$.

Аналогично формулируется достаточное условие строгого минимума.

Обратимся к достаточным условиям экстремума дифференцируемых функций. Для формулировки первого достаточного условия и в дальнейшем нам потребуется понятие смены знака функции.

Если функция $g(x)$ определена в проколотой δ-окрестности точки x_0 и для всех $x \in (x_0 - \delta;\ x_0)$ выполняется неравенство $g(x) < 0$, а для всех $x \in (x_0;\ x_0 + \delta)$ – неравенство $g(x) > 0$, то говорят, что функция $g(x)$ меняет свой знак с минуса на плюс при переходе через точку x_0.

Аналогично вводится понятие смены с плюса на минус при переходе через точку x_0.

Замечание. Если x_0 – точка строгого экстремума функции $f(x)$, то есть выполняется одно из условий (7.80), (7.81), то разность $f(x) - f(x_0)$ сохраняет знак в проколотой δ-окрестности точки x_0.

Обратно, если разность $f(x) - f(x_0)$ сохраняет знак в $\dot{U}_\delta(x_0)$, то x_0 – точка строгого экстремума функции $f(x)$.

Если же эта разность меняет знак при переходе через точку x_0, то функция $f(x)$ не имеет экстремума в точке x_0.

Теорема 25 (первое достаточное условие строгого экстремума). ***Пусть функция*** $f(x)$ ***дифференцируема в некоторой окрестности точки*** x_0***, кроме, быть может, самой точки*** x_0***, и непрерывна в точке*** x_0***. Тогда:***

а) если $f'(x)$ ***меняет знак с минуса на плюс при переходе через точку*** x_0***, то есть существует*** $\delta > 0$***, такое, что***

$$\begin{aligned} &\forall x \in (x_0 - \delta,\, x_0) \to f'(x_0) < 0 \\ &\forall x \in (x_0,\, x_0 + \delta) \to f'(x_0) > 0 \end{aligned}, \qquad (7.82)$$

то точка x_0 ***– точка строгого минимума функции*** $f(x)$ ***(рис. 7.18);***

б) если $f'(x)$ ***меняет знак с плюса на минус при переходе через точку*** x_0***, то*** x_0 ***– точка строгого максимума функции*** $f(x)$ ***(рис. 7.19).***

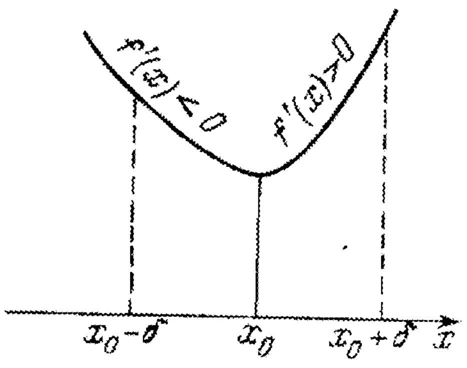


Рис. 7.18

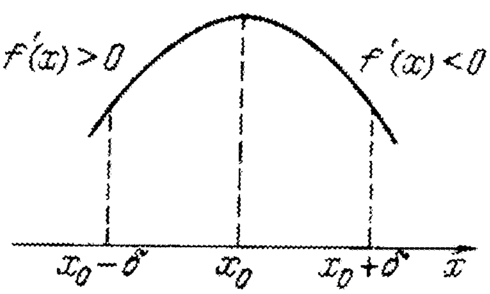


Рис. 7.19

Пусть функция $f'(x)$ меняет знак с минуса на плюс при переходе через точку x_0, тогда выполняется условие (7.82).

Если x – произвольная точка интервала $(x_0 - \delta;\, x_0)$, то функция $f(x)$ дифференцируема на интервале $(x;\, x_0)$ и непрерывна на отрезке $[x;\, x_0]$. По теореме Лагранжа

$$f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0)$$

где $f'(\xi) < 0$, так как $x_0 - \delta < x < \xi < x_0$ и $x - x_0 < 0$.

Отсюда следует, что

$$\forall x \in (x_0 - \delta;\, x_0) \to f(x) > f(x_0). \qquad (7.83)$$

Аналогично, применяя теорему Лагранжа к функции $f(x)$ на отрезке $\left[x_0; x\right]$, где $x_0 < x < x_0 + \delta$, получаем, что

$$\forall x \in (x_0;\, x_0 + \delta) \to f(x) > f(x_0). \qquad (7.84)$$

Из условий (7.83) и (7.84) следует утверждение (7.81). Это означает, что x_0 – точка строгого минимума функции $f(x)$.

Аналогично рассматривается случай строгого максимума.

Замечание. Если x_0 – точка строгого экстремума функции $f(x)$, то из этого следует, что функция $f'(x)$ меняет знак при переходе через точку x_0.

Теорема 26. (второе достаточное условие строгого экстремума***). Пусть*** x_0 ***– стационарная точка функции*** $f(x)$***, то есть***

$$f'(x_0) = 0$$

и пусть существует $f''(x_0)$***. Тогда:***

а) если $f''(x_0) > 0$***, то*** x_0 ***– точка строгого минимума функции*** $f(x)$***;***

б) если $f''(x_0) < 0$***, то*** x_0 ***– точка строгого максимума функции*** $f(x)$***.***

Если $f''(x_0) > 0$, то по теореме 4 функция $f'(x)$ является возрастающей в точке x_0, то есть существует $\delta > 0$, такое, что

$$\forall x \in (x_0 - \delta,\, x_0) \to f'(x) < f'(x_0) < 0,$$

$$\forall x \in (x_0,\, x_0 + \delta) \to f'(x) > f'(x_0) > 0,$$

откуда следует, что $f'(x)$ меняет знак с минуса на плюс при переходе через точку x_0. Согласно теореме 25 x_0 – точка строгого минимума функции $f(x)$. Аналогично рассматривается случай $f''(x_0) < 0$.

Например, если $f(x) = x^2$, то $f'(0) = 0$, $f''(0) = 2$ и потому $x_0 = 0$ – точка строгого минимума функции $f(x) = x^2$.

Замечание. Если $f'(x_0) = 0$ и $f''(x_0) = 0$, то в точке x_0 функция $f(x)$ может иметь экстремум ($f(x) = x^4$, $x_0 = 0$), а может и не иметь ($f(x) = x^3$, $x_0 = 0$). Следующая теорема дает достаточные условия экстремума для случая $f''(x_0) = 0$.

Теорема 27. (третье достаточное условие строгого экстремума)
Пусть существует $f^{(n)}(x_0)$, где $n > 2$, и выполняются условия

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \tag{7.85}$$

$$f^{(n)}(x_0) \neq 0 \tag{7.86}$$

Тогда:

а) если n – четное число, то x_0 – точка экстремума функции $f(x)$, а именно точка строгого максимума в случае $f^{(n)}(x_0) < 0$ и точка строгого минимума в случае $f^{(n)}(x_0) > 0$;

б) если n – нечетное число, то x_0 – не является точкой экстремума функции $f(x)$.

Используя локальную формулу Тейлора для функции $f(x)$ в окрестности точки x_0 и условия (7.85), получаем

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n). \tag{7.87}$$

Из условия (7.86) следует, что равенство (7.87) можно записать в виде

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n(1 + \alpha(x)). \tag{7.88}$$

где $\alpha(x) = o(1) \to 0$ при $x \to x_0$, так как $C \cdot o((x - x_0)^n) = o((x - x_0)^n)$ при $C \neq 0$ ($C = \text{const}$). Поэтому $\exists \delta > 0 : \forall x \in \dot{U}_\delta(x_0) \to |\alpha(x)| < \frac{1}{2}$, откуда следует, что

$$1 + \alpha(x) > 0 \text{ для } x \in \dot{U}_\delta(x_0). \tag{7.89}$$

Из равенства (7.88) в силу условия (7.89) получаем

$$\operatorname{sign}(f(x)-f(x_0))=\operatorname{sign}(f^{(n)}(x_0)\cdot(x-x_0)^n),\ \ \forall x\in\dot{U}_\delta(x_0),\quad(7.90)$$

а) Пусть n – четное число ($n=2k$), тогда

$$\forall x\in\dot{U}_\delta(x_0)\to(x-x_0)^n=(x-x_0)^{2k}>0$$

из равенства (7.90) получаем

$$\operatorname{sign}\,(f(x)-f(x_0))=\operatorname{sign}\,f^{(n)}(x_0).$$

Если $f^{(n)}(x_0)>0$, то для $x\in\dot{U}_\delta(x_0)$ выполняется неравенство

$$f(x)-f(x_0)>0.$$

Это означает, что x_0 – точка строгого минимума функции $f(x)$.

Аналогично, если $f^{(n)}(x_0)<0$, то $f(x)-f(x_0)<0$ для $x\in\dot{U}_\delta(x_0)$, то есть x_0 – точка строгого максимума функции $f(x)$.

б) Пусть $n=2k+1$, тогда из формулы (7.90) следует, что разность $f(x)-f(x_0)$ меняет знак при переходе через точку x_0, так как функция $(x-x_0)^{2k+1}$ меняет знак при переходе через точку x_0.

Это означает, что x_0 не является точкой экстремума функции $f(x)$.

Пример 2. Найти точки экстремума функции $f(x)$, если

а) $f(x)=(x-2)^2(x+1)^3$;

б) $f(x)=\left|x^2-4\right|e^{-|x|}$.

Решение.

а) Функция дифференцируема на R, поэтому все ее точки экстремума содержатся среди стационарных точек функции, являющихся корнями уравнения

$$f'(x)=2(x-2)(x+1)^3+3(x+1)^2(x-2)^2=(x-2)(x+1)^2(5x-4)=0.$$

Это уравнение имеет корни: $x_1=-1$, $x_2=\dfrac{4}{5}$, $x_3=2$. Причем при переходе через точку x_1 функция $f'(x)$ не меняет знака, при переходе через точку x_2 она меняет знак с плюса на минус, а при переходе через точку x_3 – с минуса на плюс.

Следовательно, x_2 и x_3 являются соответственно точкой строгого максимума и строгого минимума функции $f(x)$, а x_1 не является точкой экстремума этой функции.

б) Функция непрерывна на R, дифференцируема на R, кроме точек -2, 0, 2, и является четной. Если $x > 0$, то

$$f(x) = \begin{cases} -g(x) & при \;\; x \in [0; 2] \\ g(x) & при \;\; x > 2 \end{cases},$$

где $g(x) = (x^2 - 4)e^{-x}$.

Уравнение $g'(x) = (-x^2 + 2x + 4)e^{-x} = 0$ имеет на промежутке $(0, +\infty)$ единственный корень $x_1 = 1 + \sqrt{5}$, причем $g'(x) = f'(x)$ при $x > 2$, и $g'(x)$ меняет знак с плюса на минус при переходе через точку x_1. Поэтому x_1 – точка строгого максимума функции $f(x)$.

При переходе через точку $x_2 = 2$ функция $f'(x)$ меняет знак с минуса на плюс, так как $f'(x) = -g'(x)$ при $x \in (0; 2)$ и $f'(x) = g'(x)$ при $x > 2$. Поэтому x_2 – точка строгого минимума функции $f(x)$.

Учитывая, что функция $f(x)$ строго убывает на интервале $(0; 2)$ и четная, отсюда заключаем, что $x = 0$ точка строгого максимума функции $f(x)$.

Используя полученные результаты и четность функции $f(x)$, получаем $x = -2$ и $x = 2$ – точки строгого минимума функции $f(x)$, $x = -(1 + \sqrt{5})$, $x = 0$ и $x = 1 + \sqrt{5}$ – точки строгого максимума этой функции.

7.3. Наибольшее и наименьшее значения функции

Для функции, непрерывной на отрезке, существует согласно теореме Вейерштрасса точка, в которой эта функция принимает наибольшее значение, и точка, в которой функция принимает наименьшее значение.

В случае, когда непрерывная на отрезке $[a; b]$ функция $f(x)$ имеет локальные максимумы в точках $x_1, \dots, x_k$ и локальные минимумы в точках $\tilde{x}_1, \dots \tilde{x}_m$ и не имеет других точек локального экстремума, наибольшее значение функции $f(x)$ на отрезке

$\left[a;\, b\right]$ равно наибольшему из чисел $f(a), f(x_1), \dots, f(x_k), f(b)$, а наименьшее значение этой функции на отрезке $\left[a;\, b\right]$ равно наименьшему из чисел $f(a), f(\tilde{x}_1), \dots, f(\tilde{x}_m), f(b)$.

В прикладных задачах при нахождении наибольшего (наименьшего) значения функции на отрезке $\left[a;\, b\right]$ или на интервале $(a;\, b)$ часто встречается случай, когда функция $f(x)$ дифференцируема на интервале $(a;\, b)$ и непрерывна на отрезке $\left[a;\, b\right]$, а уравнение $f'(x) = 0$ имеет единственный корень $x \in (a;\, b)$, такой, что $f'(x) > 0$ при $x \in (a;\, x_0)$ и $f'(x) < 0$ при $x \in (x_0;\, b)$ или $f'(x) < 0$ при $x \in (a;\, x_0)$ и $f'(x) > 0$ при $x \in (x_0;\, b)$.

В этом случае число $f(x_0)$ является не только локальным экстремумом функции $f(x)$, но и наибольшим (наименьшим) значением этой функции на отрезке $\left[a;\, b\right]$ или на интервале $(a;\, b)$.

Пример 3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$ на множестве E, если:

а) $f(x) = (x-2)^2(x+1)^3, \quad E = \left[0;\, 3\right]$;

б) $f(x) = \left|x^2 - 4\right| e^{-|x|}, \quad E = \boldsymbol{R}$.

Пусть M и m соответственно наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$ на множестве E.

а) Для данной функции $x = \dfrac{4}{5}$ – точка максимума; $x = 2$ – точка минимума, причем $f\left(\dfrac{4}{5}\right) = \dfrac{3^8 \cdot 4}{5^5}$, $f(2) = 0$, а значения функции в концах отрезка $\left[0;\, 3\right]$ равны $f(0) = 4$ и $f(3) = 4^3$. Так как M – наибольшее, а m – наименьшее из чисел $f(0), f\left(\dfrac{4}{5}\right), f(2), f(3)$, то $M = f(3) = 64$, $m = f(2) = 0$.

б) Для данной функции $x = -2$ и $x = 2$ – точки минимума; $x = -(1+\sqrt{5})$, $x = 0$ и $x = 1+\sqrt{5}$ – точки максимума. Функция убывает при $x > 1+\sqrt{5}$ и является четной, $f(0) = 4$, $f(2) = 0$, $f(1+\sqrt{5})$ наибольшее и наименьшее, получаем $M = f(0) = 4$, $m = f(2) = 0$.

7.4. Выпуклость функции

7.4.1. Понятие выпуклости

Непрерывная функция $y = f(x)$ называется выпуклый вверх отрезок [a; b], если для любых точек x_1 и x_2 отрезка [a; b] выполняется неравенство

$$f\left[\frac{(x_1 + x_2)}{2}\right] \geq \frac{\left(f(x_1) + f(x_2)\right)}{2}. \tag{7.91}$$

Дадим геометрическую интерпретацию понятия выпуклости. Пусть M_1, M_2, M_0 – точки графика функции $y = f(x)$, абсциссы которых соответственно равны x_1, x_2, $x_0 = (x_1 + x_2)/2$. Тогда $f(x_1 + x_2)/2 = f(x_0)$ – есть ордината точки К – середина отрезка $[M_1M_2]$, а $f((x_1 + x_2)/2) = f(x_0)$ – ордината точки M_0 графика с абсциссой, равной абсциссе точки K (рис. 7.20).

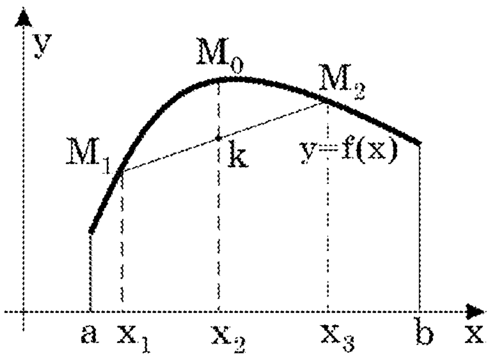


Рис. 7.20

Условие (7.91) означает, что для любых точек M_1 и M_2 графика функции $y=f(x)$ середина K хорды M_1M_2 лежит или ниже соответствующей точки M_0 графика, или совпадает с ней.

Если неравенство (7.91) является строгим при любых x_1, $x_2 \in [a;$ b] таких, что $x_1 \neq x_2$, то непрерывную функцию $y = f(x)$ называют выпуклой вниз на отрезке $[a; b]$.

Аналогично непрерывная функция $y = f(x)$ называется выпуклой вниз на отрезке $[a; b]$, если для любых точек x_1 и x_2 отрезка $[a; b]$ выполняется неравенство

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \tag{7.92}$$

Если неравенство (7.92) является строгим при любых x_1, $x_2 \in [a;$ b] таких, что $x_1 \neq x_2$, то непрерывную функцию $y = f(x)$ называют строго выпуклой вниз на отрезке $[a; b]$.

Понятие выпуклости и строгой выпуклости вверх (вниз) можно ввести и на интервале. Например, если неравенство (7.91) выполняется для точек интервала $(a; b)$, то непрерывная функция $y = f(x)$ называется выпуклой вверх на этом интервале.

7.4.2. Достаточные условия выпуклости

Теорема 28. ***Пусть $f'(x)$ существует на отрезке$[a; b]$, а $f''(x)$ – на интервале $(a; b)$. Тогда***

а) если $f''(x) \geq 0$ при $x \in (a; b)$, (7.93)

то функция $y = f(x)$ выпукла вниз на отрезке $[a, b]$;

б) если $f''(x) > 0$ при всех $x \in (a; b)$,

то функция $y=f(x)$ строго выпукла вниз на отрезке $[a; b]$.

Аналогично, при выполнении на интервале $(a; b)$ условия $f''(x) \leq 0$ ($f'' \leq 0$) функции $y = f(x)$ выпукла строго вверх (строго выпукла вниз) на отрезке $[a; b]$.

Доказательство. Ограничимся доказательством для случая, когда выполняется условие (7.93). Нужно доказать, что для любых точек x_1, x_2 отрезка $[a; b]$ выполняется условие (7.92). Пусть, например, $x_1 < x_2$ (при $x_1 = x_2$ условие (7.92) выполняется).

Обозначим $x_0 = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$, $x_2 - x_1 = 2h$, тогда $x_2 - x_0 = x_0 - x_1 = h$, откуда $x_1 = x_0 - h$, $x_2 = x_0 + h$. Применяя к функции $f(x)$ на отрезках $[x_1; x_0]$ и $[x_0; x_2]$ формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа при $n = 2$

$$f(x_1) = f(x_0 - h) = (f(x_0) - f'(x_0)h + \left(f''(\xi_1)h^2\right)/2!, \quad x_0 - h < \xi_1 < x_0,$$

$$f(x_2) = f(x_0 + h) = (f(x_0) + f'(x_0)h + \left(f''(\xi_2)h^2\right)/2!, \quad x_0 < \xi_2 < x_0 - h.$$

Складывая эти равенства, находим

$$f(x_1) + f(x_2) = 2f(x_0) + h^2\left(\left(f''(\xi_1) + f''(\xi_1)\right)\right)/2. \tag{7.94}$$

Так как $\xi_1 \in (a; b)$, $\xi_2 \in (a; b)$, то в силу условия (7.93) $f''(\xi_1) \geq 0$, $f''(\xi_2) \geq 0$ и из равенства (7.94) следует неравенство $f(x_1) + f(x_2) \geq 2f(x_0)$, равносильно неравенству (7.92).

Замечание. Условие $f''(x) > 0$ не является необходимым условием строгой выпуклости вниз функции $f(x) = x^4$. Условие $f''(x) > 0$ нарушается при $x = 0$, так как $f''(x) = 0$, однако эта функция строго выпукла вниз.

7.5.Точки перегиба

7.5.1. Понятие точки перегиба

Пусть функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и имеет в этой точке либо конечную, либо бесконечную производную. Функция при переходе через точку x_0 меняет направление выпуклости, то есть существует $\delta > 0$ такое, что на одном из интервалов вниз, точку x_0 называют точкой перегиба функции $f(x)$, а точку $(x_0, f(x_0))$ – точкой перегиба графика функции $y = f(x)$.

Например, для функции $y = x^3$ и $y = x^{1/3}$ $x = 0$ – точка перегиба.

7.5.2. Необходимое условие наличия точки перегиба

Теорема 29. ***Если x_0 – точка перегиба функции f (x) и если функция f (x) имеет в некоторой окрестности точки x_0 вторую производную, непрерывную в точке x_0, то***

$$f''(x_0) = 0. \tag{7.95}$$

Доказательство. Пусть $f''(x_0) \neq 0$. Тогда в силу непрерывности функции $f''(x)$ в точке x_0

$$\exists\delta > 0 \quad \forall x \in U_\delta(x_0) \to \operatorname{sign} f''(x_0)$$

то есть $f''(x) > 0$ или $f''(x) < 0$ для любых $x \in U_\delta(x_0)$.

По теореме 28 функция $f(x)$ либо строго выпукла вниз на интервале $U_\delta(x_0)$ (если $f''(x) > 0$), либо строго выпукла вверх на интервале $U_\delta(x_0)$.

Это противоречит определению точки перегиба. Следовательно, должно выполняться условие (7.95).

7.5.3. Достаточные условия наличия точки перегиба

Теорема 30. (первое достаточное условие). ***Если функция f (x) непрерывна в точке x_0, имеет в этой точке конечную или бесконечную производную и если функция f''(x) меняет знак при переходе через точку x_0, то x_0 – точка перегиба функции f (x).***

Доказательство. Пусть, например, функция $f''(x)$ меняет знак с минуса на плюс при переходе через точку x_0 (в точке x_0 вторая производная может и не существовать). Это означает, что существует $\delta > 0$ такое, что на интервале $\Delta_1 = (x_0 - \delta; x_0)$ выполняется неравенство $f''(x) < 0$, а на интервале $\Delta_2 = (x_0; x_0 + \delta)$ – неравенство $f''(x) > 0$.

Тогда по теореме 28 функция $f(x)$ выпукла вверх на интервале Δ_1 и выпукла вниз на интервале Δ_2. Следовательно, точка x_0 удовлетворяет всем условиям, указанным в определении точки перегиба.

Например, для функции $f(x) = \operatorname{arctg} x$ точка $x = 0$ – точка перегиба, так как

$$f''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

меняет знак при переходе через точку $x = 0$.

Теорема 31. (второе достаточное условие). ***Если $f^{(2)}(x_0) = 0$, $f^{(3)}(x_0) \neq 0$, то x_0 – точка перегиба функции $f(x)$.***

Доказательство. Так как $f^{(3)}(x_0) \neq 0$, то по теореме 24 функция $f''(x)$ либо строго возрастает, либо строго убывает в точке x_0. По условию $f^{(2)}(x_0) = 0$, и поэтому $f^{(2)}(x)$ имеет разные знаки на интервале $(x_0 - \delta;\ x_0)$ откуда заключаем, что x_0 – точка перегиба функции $f(x)$. Например, для функции $f(x) = \sin x$ точка $x = 0$ – точка перегиба, так как $f^{(2)}(0) = 0$, $f^{(3)}(0) = -1$.

7.6. Асимптоты

7.6.1. Вертикальные асимптоты

Если выполнено хотя бы одно из условий

$$\lim_{x\to x-0} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to x+0} f(x) = \infty,$$

то прямую $x = x_0$ называют вертикальной асимптотой графика функции $y = f(x)$.

Например, прямая $x = 0$ – вертикальная асимптота графика функции $y = 1/x$, $y = \lg x^2$, $y = 1/x^2$, прямая $x = -1$ – вертикальная асимптота графика функции $y = (3 - 2x)/(x+1)$, прямые $y = \pi/_2 + \pi\kappa$ ($\kappa \in Z$) – вертикальные асимптоты графика функции $y = \operatorname{tg} x$.

7.6.2. Асимптота (невертикальная асимптота)

Прямую $y = kx + b$ называют асимптотой (невертикальной асимптотой) графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$, если

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x) - (k\cdot x + b)\right] = 0. \qquad (7.96)$$

Если $k \neq 0$, то асимптоту называют наклонной, а если $k = 0$, то асимптоту $y = b$ называют горизонтальной.

Аналогично вводится понятие асимптоты при $x \to -\infty$.

Например, прямая $y = 0$ – горизонтальная асимптота графиков функций $y = 1/x$, $y = 1/x^2$ при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$, графика функции $y = a^x$, $a > 1$ при $x \to -\infty$.

Теорема 12. ***Для того чтобы прямая $y = kx + b$ была асимптотой графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$, необходимо и достаточно, чтоб существовали конечные пределы:***

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \tag{7.97}$$

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = b. \tag{7.98}$$

Доказательство (необходимость). Если прямая $y = kx + b$ – асимптота графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$, то выполняется условие (7.97) или равносильное ему условие

$$f(x) = kx + b + \alpha(x), \quad \alpha(x) \to 0 \text{ при } x \to +\infty. \tag{7.99}$$

Разделив обе части равенства (7.99) на x, получим:

$$f(x)/x = k + b/x + \alpha(x)/x,$$

откуда следует, что существует придел (7.97).

Из равенства (7.97) получаем

$$f(x) - kx = b + \alpha(x), \text{ где } \alpha(x) \to 0 \text{ при } x \to +\infty,$$

откуда следует, что существует придел (7.98).

Доказательство (достаточность). Если существуют конечные приделы (7.97) и (7.98), то

$$f(x) - (kx + b) = \alpha(x),$$

где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to +\infty$,
то есть выполняется условие (7.96). Это означает, что прямая $y = kx + b$ – асимптота графика функции $y = f(x)$.

Замечание 6. Для случая горизонтальной асимптоты теорема 32 формулируется в следующем виде: для того чтобы прямая $y = b$ была асимптотой графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = b.$$

7.7. Полное исследование функции и построение графика

При построении графика функции $y = f(x)$ можно придерживаться следующего плана:

1) Найти область определения функции. Выяснить является ли функция четной (нечетной), периодической.

2) Найти точки пересечения графика с осями координат и промежутки, на которых $f(x) > 0$ и $f(x) < 0$.

3) Найти асимптоты графика.

5) Вычислить $f'(x)$, найти экстремумы и промежутки возрастания (убывания) функции.

6) Вычислить $f''(x)$, найти точки перегиба и промежутки выпуклости вверх (вниз) функции.

7) Нарисовать график функции.

Задание. Провести полное исследование функции и построить график

$$y = \frac{x^3}{x^2 - 4}.$$

Решение.

1) Функция определена всюду, кроме точек $x = \pm 2$.

2) Функция нечетна, так как

а) $D(f)$ – симметрична относительно $x = 0$;

б) $f(-x) = -f(x)$,

а значит ее график симметричен относительно начала координат, поэтому достаточно провести исследование функции в промежутке $x \in [0; +\infty]$.

3) Функция не периодична.

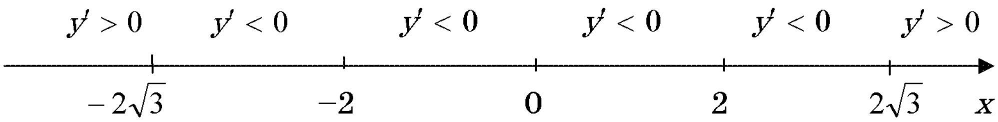
4) Функция непрерывна во всех точках области определения.

5) Интервалы возрастания и убывания функции, точки экстремума.

Для нахождения интервалов возрастания и убывания функции, а также точек экстремума находим точки, где $y'(x) = 0$ обращается в бесконечность или не существует, затем определяем знаки $y'(x)$ на соответствующих интервалах. В данном случае имеем

$$y' = \frac{3x^2(x^2 - 4) - 2x^4}{(x^2 - 4)^2} = \frac{x^2(x^2 - 12)}{(x^2 - 4)^2}.$$

Для $x \in (0;+\infty)$ $y' = 0$ при $x = 0$ и $x = 2\sqrt{3}$ обращается в бесконечность в точке $x = 2$.



Для $x \in (-\infty;-2\sqrt{3}) \cup (2\sqrt{3};+\infty)$ $y' > 0$, значит функция возрастает.

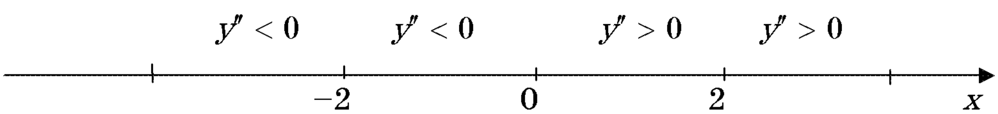
Для $x \in (-2\sqrt{3};-2) \cup (-2;2) \cup (2;2\sqrt{3})$ $y' < 0$, значит функция убывает. Точки $x = \pm 2\sqrt{3}$ – точки экстремума, а именно $x = 2\sqrt{3}$ – точка минимума $y(2\sqrt{3}) = 2 = 3\sqrt{3}$, а $x = -2\sqrt{3}$ – точка максимума $y(-2\sqrt{3}) = 3\sqrt{3}$.

6) Интервалы выпуклости и вогнутости, точки перегиба.

Вторая производная имеет вид

$$y'' = \frac{8x(x^2+12)}{(x^2-4)^2}$$

и обращается в нуль в точке $x = 0$ и в бесконечность при $x = \pm 2$. Определим знаки y'' на соответствующих интервалах



Для $x \in (-\infty;-2) \cup (-2;0)$ $y'' > 0$ – значит, график функции обращен выпуклостью вниз. Для $x \in (0;2) \cup (2;+\infty)$ $y'' < 0$ это значит, что график функции обращен выпуклостью вверх. Точка $x = 0$ – точка перегиба графика функции $y(0) = 0$.

7) Асимптоты графика функции.

1. Вертикальные асимптоты.

Так как

$$\lim_{x\to 2-0} \frac{x^3}{x^2-4} = -\infty; \quad \lim_{x\to 2+0} \frac{x^3}{x^2-4} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 2-0} \frac{x^3}{x^2-4} = +\infty; \quad \lim_{x\to -2+0} \frac{x^3}{x^2-4} = -\infty,$$

то прямые $x = 2$ и $x = -2$ – вертикальные асимптоты.

2. Горизонтальные асимптоты.

Так как $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$; а $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, то это означает, что горизонтальных асимптот нет.

3. Наклонные асимптоты $y = kx + b$.

Имеем

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2-4} = 1,$$

$$b = \lim_{x\to\infty}(y - kx) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-4} - 1x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{4x}{x^2-4} = 0,$$

$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{y}{x} = 1; \quad \mathrm{b} = \lim_{x\to-\infty}(y - kx) = 0.$$

Значит график функции имеет наклонную асимптоту $y = x$.

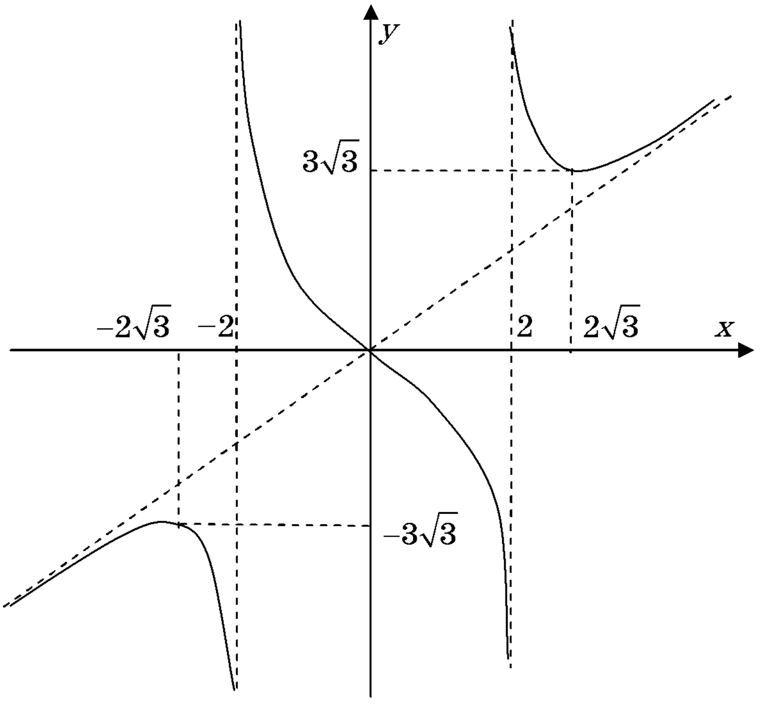
8) Точки пересечения графика функции с осями координат. $x = 0$, то $y = 0$; $y = 0$, то $x = 0$.

9) Поведение функции на бесконечности.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x^2-4} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{x^2-4} = -\infty$$

10) Используя результаты исследования, строим график данной функции.



§8. ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ

1. Вычисление производных.
2. Дифференцируемость функции.
3. Правило Лопиталя.

8.1. Вычисление производных
(см. §2 и §3 – контролирующая программа
для индивидуальной работы студентов)

Составить уравнение касательной и нормали к кривой

а) $y = x^4 - 3, \quad x_0 = 1$. Ответ: $y = 4x + 9; \quad 4y + x - 2 = 0$.

б) Точка движется по кубической параболе $12y = x^3$. Какая из ее координат изменяется быстрее?

Ответ: При $-2 < x < 2$ ордината изменяется медленнее абсциссы.

При $x = \pm 2$ скорости изменения абсциссы и ординаты одинаковы.

При $x < -2$ и $x > 2$ ордината изменяется быстрее абсциссы.

8.2. Дифференцируемость функции. Дифференциал (см. §3)

1. Пример. Доказать, что функция

$$f(x) = \begin{cases} x^3, x < 0, \\ x^2, x \geq 0, \end{cases}$$

дифференцируема в точке $x = 0$.

Решение. Так как функция $f(x)$ задается различными аналитическими выражениями на лучах $(-\infty; 0)$, $[0; \infty)$, общим концом которых является точка $x = 0$, вычислим односторонние производные в точке $x = 0$. Сначала найдем $f'(+0)$. Если $\Delta x > 0$, то $f(\Delta x) = \Delta x^2$, и поэтому

$$f'(+0) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x^2 - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x = 0.$$

Если же $\Delta x < 0$*, то* $f(\Delta x) = \Delta x^3$*, и поэтому*

$$f'(-0) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x < 0}} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x^3 - 0}{\Delta x} = 0.$$

Так как односторонние производные равны, то производная функции $f(x)$ в точке $x = 0$ существует (она равна нулю), а значит, функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x = 0$.

2. Пример. Доказать, что функция

$$f(x) = \begin{cases} x^2, x < 0, \\ \sin x, x \geq 0, \end{cases}$$

не имеет производной в точке $x = 0$.

Решение. Мы имеем:

$$f'(+0) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} = 1 \ \text{ и } f'(-0) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x < 0}} \frac{\Delta x^2}{\Delta x} = 0.$$

Так как производные слева и справа различны, то функция не дифференцируема в точке $x = 0$.

3. Пример. Показать, что функция

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x}, \text{ если } x \neq 0 \\ 0, \text{ если } x = 0 \end{cases}$$

имеет производную при всех значениях x, но ее производная разрывна при $x = 0$.

Решение. При $x \neq 0$ производная вычисляется по основным правилам дифференцирования $f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$. Если же $x = 0$, то вычисляем производную непосредственно по определению

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\Delta x)^2 \sin \dfrac{1}{\Delta x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x \sin \frac{1}{\Delta x} = 0,$$

так как $\sin \frac{1}{\Delta x}$ – ограниченная функция, а $\Delta x \to 0$. Таким образом, функция $f(x)$ всюду дифференцируема. Но $\lim\limits_{x \to 0} f'(x)$ не существует, так как $\lim\limits_{x\to 0} 2x\sin\frac{1}{x} = 0$, а $\lim\limits_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}$ не существует. Поэтому производная функции разрывна при $x = 0$.

4. Пример. Доказать, что функция

$$f(x) = f(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \text{ рационально}, \\ x^2, \text{ если } x \text{ иррационально}, \end{cases}$$

дифференцируема в точке $x = 0$.

Решение. Мы имеем $f(0) = 0$. Пусть Δx стремится к нулю, пробегая рациональные значения. Тогда $f(0 + \Delta x) = f(\Delta x) = 0$, а значит, и $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$.

Если же Δx стремится к нулю, пробегая иррациональные значения, то $f(0 + \Delta x) = \Delta x^2$ и

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x^2 - 0}{\Delta x} = 0.$$

Так как оба предела совпадают, то функция $f(x)$ дифференцируема при $x = 0$. отметим, что она разрывна во всех точках, исключая точку $x = 0$.

5. Какие условия нужно наложить на показатель n, чтобы функция

$$f(x) = \begin{cases} x^n \sin\frac{1}{x}, x \neq 0, \\ 0, x = 0, \end{cases}$$

а) была непрерывна при $x = 0$;

б) была дифференцируема при $x = 0$;

в) имела непрерывную производную при $x = 0$.

Ответ: а) $n > 0$; б) $n > 1$; в) $n > 2$.

6. При каком условии функция

$$f(x) = \begin{cases} |x|^n \sin\frac{1}{|x|^m}, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases} \text{ имеет:}$$

а) производную в точке $x = 0$;

б) ограниченную производную в окрестности точки $x = 0$;

в) непрерывную производную в точке $x = 0$;

г) неограниченную производную в точке $x = 0$.

Ответ: а) $n>1$; б) $n \geq 1$ и $n \geq m+1$; в) $n>1$ и $n > m+1$; г) $1 < n < m+1$.

7. Найти точки в которых не дифференцируема функция

$$y = x^2 \left|\cos\frac{\pi}{x}\right|.$$

Принадлежит ли к их числу точка $x = 0$?

Ответ: $x = \left\{\dfrac{2}{2n+1}\right\}$. При $x = 0$ функция дифференцируема.

8. Доказать, что функция

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{n}}, \text{ если } \dfrac{1}{n+1} \leq |x| < \dfrac{1}{n} \\ 0, \text{ если } x = 0 \end{cases}$$

не дифференцируема в точке $x = 0$.

9. Пусть функции $y = f(x)$ и $y = \varphi(x)$ не имеют производной в точке $x = a$. Следует ли отсюда, что в этой точке не имеют производной функции:

$$y = f(x) + \varphi(x); \quad y = f(x)\varphi(x); \quad y = \frac{f(x)}{\varphi(x)}?$$

Разобрать примеры функций:

а) $f(x) = |x|$, $\varphi(x) = -|x|$, $a = 0$;

б) $f(x) = \varphi(x) = |x|$, $a = 0$;

в) $f(x) = \varphi(x) = |x| + 1$, $a = 0$.

Ответ: а), б), в) – не следует.

10. Пусть функция $y = f(x)$ имеет производную в точке $x = a$, а функция $y = \varphi(x)$ не имеет производной в этой точке. Следует ли отсюда, что следующие функции не имеют производной в точке $x = a$:

а) $y = f(x) + \varphi(x)$; б) $y = f(x)\varphi(x)$; в) $y = \dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$?

Ответ: а) следует, б) не следует, в) не следует.

11. Для ниже следующих функций найти точки, в которых производная не существует. Найти для этих точек левую и правую производные:

а) $f(x) = \sqrt{16 - 8x^2 + x^4}$;

б) $f(x) = \sqrt{1 - \cos 2x}$;

в) $f(x) = \ln\left|x^2 - 4x + 3\right|$;

Ответ: а) $x = \pm 2$; б) $x = \pi n$; в) $x = 1$; $x = 3$ – точки разрыва функций.

12. Найти приращение и дифференциал площади квадрата $S = x^2$ при некотором приращении аргумента. Дать им геометрическое истолкование.

13. Ток I определяется по тангенс-гальванометру по формуле $I = C \cdot \operatorname{tg} \varphi$. Пусть $d\varphi$ – ошибка, допущенная при отсчете угла φ. Найти абсолютную и относительную погрешности при определении I. При каком угле φ относительная погрешность будет минимальной?

14. Показать, что функция $y = \operatorname{arctg} x - x$ убывает на всей числовой оси.

15. Показать, что функция $y = x - \sin x$ возрастает на всей числовой оси.

16. Доказать неравенства:

а) $\cos x > 1 - \dfrac{x^2}{2}$ при $x > 0$;

б) $\sin x > x - \dfrac{x^3}{6}$ при $x > 0$;

в) $2\sqrt{x} > 3 - \dfrac{1}{x}$ при $x > 1$;

г) $x - \dfrac{x^3}{3} < \operatorname{arctg} x < x - \dfrac{x^3}{6}$ $(0 < x \le 1)$;

д) $(a + b)^p \le a^p + b^p$ $(0 \le p \le 1)$.

8.3. Правило Лопиталя (см. §5)

Найти пределы, используя правило Лопиталя

1) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\ln\sin x}{(2x-\pi)^2}$

Ответ: $-\dfrac{1}{8}$.

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\cos x}{5^{\sin^2 x}-1}$

Ответ: $-\dfrac{1}{2\ln 5}$.

3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{1+\cos 2x}{e^{\cos x}-1}$

Ответ: 0.

4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x+e^{-x}-2}{\sin^2 x}$

Ответ: 1.

5) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{2^{\sin\pi x}-1}{\ln(x^3-6x-8)}$

Ответ: $-\dfrac{\pi\ln 2}{21}$.

6) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-x^2}{\sin\pi x}$

Ответ. $\dfrac{2}{\pi}$.

7) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\ln\dfrac{x}{x+1}$

Ответ: $-\infty$.

8) $\lim\limits_{x\to+0} \sin x\cdot\ln x$

Ответ: 0.

9) $\lim\limits_{x\to 0} \ln(1+x)ctg\ x$

Ответ: 1.

10) $\lim\limits_{x\to+0} \ln x\cdot arctg\ x$

Ответ: 0.

11) $\lim\limits_{x\to+0} \left(\dfrac{1}{x}-e^{\frac{1}{x}}\right)$

Ответ: $-\infty$.

12) $\lim\limits_{x\to+1} \left(\dfrac{1}{\ln x}-\operatorname{ctg}\pi x\right)$

Ответ: ∞.

13) $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^x$

Ответ: 1.

14) $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{ctg} x)^x$

Ответ: 1.

15) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\sin x}$

Ответ: 1.

ТЕМЫ РЕФЕРАТОВ И КУРСОВЫХ РАБОТ

1. Производная функции. Различные подходы к определению. Непрерывность и дифференцируемость.
2. Производные высших порядков. Теорема Лейбница.
3. Особые случаи для производных:
   – бесконечные производные;
   – несуществование производной;
   – разрывы производной.
4. Дифференциалы как источник приближенных формул. Оценка погрешности.
5. Формула Тейлора. Различные формулы дополнительного члена.
6. Кривизна. Круг и радиус кривизны.
7. Элементы матричного анализа.
8. Элементы асимптотики.
9. О доказательстве правила Лопиталя – Бернулли.
10. От Евклида до Лейбница, от касательной до дифференциалов.
11. От дифференциалов – к формуле Тейлора.
12. От вектора к вектору функции.
13. Кинематический смысл некоторых теорем.
14. Дифференцирование площади некоторых фигур.
15. Дифференциал как дифференциальная форма.
16. Правило Декарта для многочленов.
17. Теорема Роля. Обобщенная теорема Роля.
18. Определители системы функций.
19. О бесконечных и бесконечно малых в Эйлера.
20. О дифференцировании функций по Эйлеру.
21. Об эйлеровом «Введении в анализ бесконечно малых».
22. Непрерывные числовые функции в метрических пространствах. Непрерывные отображения.
23. Формулы приближенного дифференцирования, основанные на первой интерполяционной формуле Ньютона.
24. Формулы приближенного дифференцирования, основанные на формуле Стирлинга.
25. Графическое дифференцирование.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кудрявцев Л.Д. Математический анализ. Т. 1. – М.: Высш. школа, 1970.
2. Герасимович А.И., Рысюк А.А. Математический анализ. Ч. 1. – Мн.: Выш. школа, 1989.
3. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальное и интегральное исчисление. – М.: Наука, 1980.
4. Жевняк Р.М., Карпук А.А. Высшая математика. Т. 2. – Мн.: Выш. школа, 1985.
5. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. Т. 1. – М.: Наука, 1985.
6. Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И. Курс математического анализа. – М.: Наука, 1988.
7. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1, 2, 3. – М.: Наука, 1969.
8. Марон И.А. Дифференциальное и интегральное исчисление в примерах и задачах. – М.: Наука, 1970.
9. Бронштейн И.Н., Семяндяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. – М.: Наука, 1986.
10. Никольский С.М. Курс математического анализа. Т. 1, 2. – М.: Наука, 1983.

Учебное издание

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Учебно-методический комплекс
для студентов технических специальностей

В двух частях

Часть 2

Составитель
ЦЫВИС Николай Васильевич

2-е издание

Редактор О.П. Михайлова

Подписано в печать 07.09.09. Формат 60х84 1/16. Гарнитура Таймс.
Бумага офсетная. Ризография.
Усл. печ. л. 19,95. Уч.-изд. л. 17,32. Тираж 55. Заказ № 1447.

Издатель и полиграфическое исполнение:
учреждение образования «Полоцкий государственный университет»

ЛИ 02330/0548568 от 26.06.2009 ЛП № 02330/0494256 от 27.05.2009

211440 г. Новополоцк, ул. Блохина, 29