Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Полоцкий государственный университет»

Н. В. Цывис
В. М. Кулага

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

РЯДЫ

Учебно-методический комплекс
для студентов технических специальностей

Новополоцк
ПГУ
2008

УДК 517(075.8)
ББК 22.161я73
Ц93

Рекомендовано к изданию учебно-методической комиссией
радиотехнического факультета в качестве
учебно-методического комплекса (протокол № 1 от 23.01.08)

РЕЦЕНЗЕНТЫ:

доктор педагогических наук, профессор УО «ВГТУ» К. О. АНАНЧЕНКО;
канд. пед. наук, доцент УО «ПГУ» В.С. ВАКУЛЬЧИК

Цывис, Н. В.

Ц93 Дифференциальные уравнения. Ряды. : учеб.-метод. комплекс для студентов техн. спец. / Н. В. Цывис, В. М. Кулага. – Новополоцк : ПГУ, 2008. – 212 с.

ISBN 978-985-418-700-6.

Рассмотрены все виды дифференциальных уравнений и систем уравнений с доказательством и выводом общих решений, приведены подобные решения примеров и задач, а также предложены задания с ответами для самостоятельной работы. В главе «Ряды» уделено внимание разнообразным приложениям рассматриваемых вопросов с разбором необходимых примеров и задач.

Предназначен для студентов технических специальностей высших учебных заведений, может быть полезен преподавателям, а также изучающим самостоятельно курс высшей математики.

УДК 517(075.8)
ББК 22.161я73

ISBN 978-985-418-700-6

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Преподавание высшей математики в высших учебных заведениях имеет цель:

– развитие интеллекта и способностей к логическому и алгоритмическому мышлению, формирование личности студентов;

– обучение основным математическим методам, необходимым для анализа и моделирования устройств, процессов и явлений при поиске оптимальных решений для осуществления научно-технических идей.

Задачи преподавания высшей математики состоят в том, чтобы на примерах математических понятий и методов продемонстрировать студентам действие законов материалистической диалектики, сущность научного подхода, специфику математики и ее роль в осуществлении научно-технических разработок. Необходимо научить студентов приемам исследования и решения математических формализованных задач, выработать умение анализировать полученные результаты, привить навыки самостоятельного изучения специальной литературы (по математике и ее приложениям).

В результате изучения курса высшей математики студент должен:

- иметь представление:

– о месте математики в системе естественных наук;

– математике как особом способе познания мира;

– содержании основных разделов высшей математики, отличии прикладной математики от фундаментальной;

- знать и уметь использовать:

– методы математического анализа, аналитической геометрии, линейной алгебры, теории функций комплексного переменного и операционного исчисления, теории поля;

– методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений;

- владеть:

– методами дифференциального и интегрального исчисления;

– методами решения уравнений математической физики;

– аналитическими методами решения прикладных задач;

- иметь навыки:

– аналитического и численного решения уравнений;

– качественного исследования, аналитического и численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений;

– самостоятельной смысловой постановки прикладных задач.

При изучении различных явлений природы, решении многих задач физики и техники, химии и биологии, экономики и финансов, других наук не всегда удается непосредственно установить законы, связывающие рассматриваемые величины, описывающие тот или иной процесс. Но в то же самое время относительно легко выявляется зависимость между теми же величинами (функциями) и скоростями их изменения относительно других (независимых) переменных величин, т.е. можно найти уравнения, в которых неизвестные функции входят под знак производной. Такие уравнения называются дифференциальными уравнениями. Зависимость между искомыми величинами будет найдена, если будут указаны методы нахождения неизвестных функций, определяемых дифференциальными уравнениями, что и является основной задачей теории дифференциальных уравнений.

Характерная особенность дифференциальных уравнений состоит в том, что они имеют бесконечное множество решений. Богатство мира дифференциальных уравнений определяется разнообразием реального мира. Для нахождения одного решения, описывающего именно этот процесс, надо иметь дополнительную информацию, например, начальное состояние процесса. Использование дифференциальных уравнений в качестве математических моделей соответствующих процессов эффективно, но при этом не следует забывать об ограниченной области применения любого рода моделей.

При изучении теории рядов приходится обратить внимание на следующие два обстоятельства. Прежде всего, теория рядов, как и любая математическая теория, имеет свой аналитический аппарат, состоящий из теорем, различных преобразований и формул, методов доказательств, вычисления пределов и т.д. Этот аппарат составляет существенную часть курса теории рядов, и его освоение требует основательного изучения и хороших практических навыков при решении практических задач. С этой точки зрения теория рядов мало чем отличается от тех разделов курса высшей математики, которые рассматривались ранее. Другое обстоятельство связанно с необычностью самого объекта изучения, каковым является ряд. Говоря о том, что ряд – это сумма «бесконечного числа слагаемых», следует иметь в виду, что на самом деле речь идет не об обычной сумме, а о чем-то таком, что еще нужно правильно истолковать и понять. По этой причине мы не можем пользоваться такими привычными и удобными законами действий как переместительный (коммутативный) или сочетательный (ассоциативный). Осторожно следует относиться к переносу на ряды законов о дифференцировании и интегрировании сумм, составленных из конечного числа слагаемых.

Теория рядов находит огромное приложение и применение практически в любой области знаний.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

1.1. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям

При изучении многих явлений природы, решении задач по физике и технике, химии и биологии не всегда удается непосредственно найти закон (или установить прямую зависимость), связывающий рассматриваемые величины, однако, в большинстве случаев удается установить зависимость между величинами (функциями) и скоростями их изменения относительно других (независимых) переменных величин, т.е. найти уравнения, в которых неизвестные функции входят под знак производной или дифференциала.

Рассмотрим несколько задач, приводящих к дифференциальным уравнениям.

Задача 1. Свободное падение с трением (модель парашюта).

Пусть тело массы m падает вниз с некоторой высоты, причем наряду с силой тяжести $F_T = mg$ на него действует направленная противоположно скорости сила вязкого трения, пропорциональная величине скорости: $F_{тр} = -kv$, где $k > 0$ – коэффициент трения. Определить зависимость скорости от времени.

Решение. Из второго закона Ньютона имеем $ma = F$; $F = F_T + F_{тр}$ или $mv' = mg - kv$, откуда приходим к дифференциальному уравнению вида

$$v' + \frac{k}{m}v = g .$$

Это дифференциальное уравнение первого порядка, общее решение которого определяется формулой

$$v(t) = \frac{mg}{k} + C \cdot e^{-\frac{k}{m}t} .$$

В случае, когда $v(0) = 0$, имеем $C = -\dfrac{mg}{k}$,

$$v(t) = \frac{mg}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right).$$

При свободном падении без трения ($v' = g$) величина скорости возрастает линейно:

$$v(t) = g \cdot t.$$

При наличии вязкого трения скорость возрастает, но стремится к постоянной величине: при возрастании t величина $e^{-\frac{k}{m}t}$ стремится к 0, поэтому $v(t)$ стремится к предельному значению $v_{пр} = \frac{mg}{k}$ (рис. 1 – график $v(t)$).

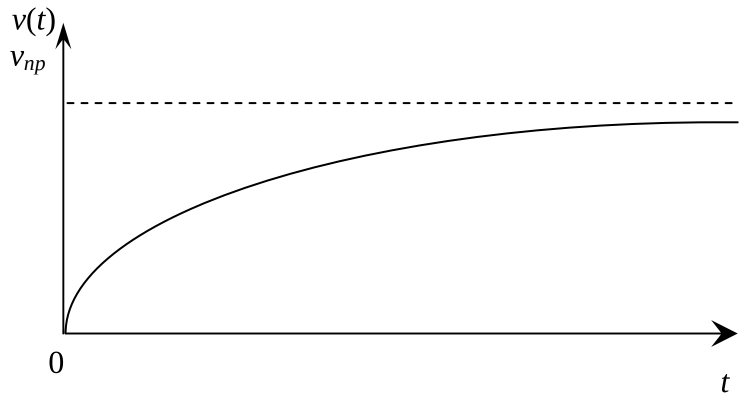

Рис. 1

Задача 2. (Барометрическая формула).

Установить зависимость $p = p(h)$ давления p от высоты над уровнем моря h.

Решение. За величину атмосферного давления принимается вес вертикального столба воздуха с площадью сечения S = 1см^2. Тогда, разность численно равна весу столбика воздуха от высоты h до высоты $h + \Delta h$:

$$p(h) - p(h + \Delta h) = -\Delta p(h),$$

то есть $\Delta m \cdot g = -\Delta p(h)$, где Δm – масса этого столбика.

Объем этого столбика $\Delta V = S \cdot \Delta h = \Delta h$. Если средняя плотность воздуха в столбике $\rho_{ср}$, то $\Delta m = \rho_{ср} \cdot \Delta h$, откуда $\rho_{ср} \cdot \Delta h = -\Delta p(h)$ или

$$\frac{\Delta p(h)}{\Delta h} = -g \cdot \rho_{ср}.$$

Пусть плотность воздуха на высоте h равна $\rho(h)$; тогда при $\Delta h \to 0$, средняя плотность $\rho_{ср} \to \rho'(h)$, и из последнего соотношения получаем дифференциальное уравнение

$$p'(h) = -g\rho(h).$$

В этом уравнении неизвестные функции $p'(h)$ и $\rho(h)$. Предполагая, что температура воздуха одна и та же во всех слоях атмосферы, тогда из закона Бойля-Мариотта (уравнение газового состояния) получаем, что давление пропорционально плотности $p(h) = b \cdot \rho(h)$. Действительно, имеем $p \cdot V = R \cdot T$, откуда $p = \frac{RT}{V} = \frac{RT}{M} \cdot \frac{M}{V} = b \cdot \rho$, где $b = \frac{RT}{M}$, R – универсальная газовая постоянная, M – молярная масса газа.

Тогда из равенств $p'(h) = -g \cdot \rho(h)$ и $p(h) = b\rho(h)$ получаем дифференциальное уравнение

$$p'(h) = -\frac{g}{b} p(h),$$

которое имеет решение

$$p(h) = p(0) \cdot e^{-\frac{gh}{b}},$$

где $p(0)$ – атмосферное давление на уровне моря, т.е. при $h = 0$.

Таким образом, давление убывает с высотой по показательному закону $p(h) = p(0)\left(e^{-\frac{gh}{b}}\right)$ в соответствии с полученной барометрической формулой.

Полученная формула «отказывает» при высотах, сравнимых по величине с радиусом Земли. И это связано не только с тем, что мы пренебрегли изменением температуры с высотой, но и с изменением ускорения свободного падения.

Отметим, что в данном случае дифференциальное уравнение описывает не физический процесс, а просто изменение одной физической величины (p) в зависимости от другой (h).

Задача 3. Уравнение механических колебаний.

Рассмотрим материальную точку массы m, движущуюся в среде и подверженную действию силового поля, если:

1) силовое поле действует по линейному закону (закон Гука):

$$F = -ky, \tag{1}$$

где F – сила; y – смещение точки от положения равновесия; k – коэффициент (постоянная Гука), $k > 0$. Знак минус указывает, что сила направлена против смещения и стремится вернуть точку в положение равновесия ($y = 0$; $F = 0$);

2) сопротивление среды S пропорционально скорости:

$$S = -l \cdot \frac{dy}{dt}, \tag{2}$$

где l – коэффициент сопротивления, а знак минус указывает, что сила сопротивления направлена против движения.

Назовем такое движение свободным механическим колебанием, примерами которого могут служить:

а) маятник – шарик на невесомой нити. Силовое поле – сумма полей земного тяготения и натяжения нити. Сопротивляющаяся среда – воздух.

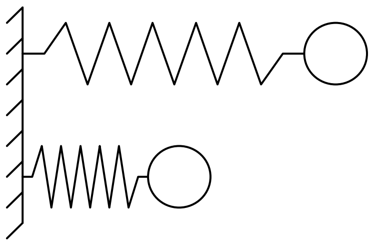

Рис. 2

Если длина нити много больше размаха (малые колебания), то выполняются условия (1) и (2);

б) шарик на пружине (рис. 2).

Силовое поле создается упругостью пружины, материальная среда – жидкость или газ;

в) атом в кристалле. Силовое поле создает кристаллическая решетка (электрические связи).

Уравнения свободных механических колебаний

По закону Ньютона имеем $ma = F + S$ или $m\frac{d^2y}{dt^2} = -ky - l \cdot \frac{dy}{dt}$, откуда получим уравнение

$$y'' + py' + qy = 0, \tag{3}$$

где $p = \frac{l}{m}$ – коэффициент, характеризует сопротивление среды; $q = \frac{k}{m}$ – коэффициент, характеризующий силовое поле.

Если теперь помимо силового поля и сопротивления среды на точку действует внешняя сила *f(t)* – такое движение (при условиях (1) и (2)) называется вынужденным механическим колебанием. Уравнение вынужденных механических колебаний имеет вид

$$y'' + py' + qy = \frac{f(t)}{m}. \tag{4}$$

Здесь правая часть характеризует действие внешней силы.

Задача 4. Уравнения электрических колебаний.

Требуется изучить работу простейшего колебательного контура (рис. 3), т.е. установить зависимость $I(t)$ силы тока от времени.

Решение. Рассмотрим падения напряжения $U_{AB}(t),\ U_{BF}(t),\ U_{FD}(t),\ U_{DA}(t)$. Согласно второму закону Кирхгофа их сумма равна 0 (цепь замкнута):

$$U_{AB}(t)+U_{BF}(t)+U_{FD}(t)+U_{DA}(t)=0. \qquad (5)$$

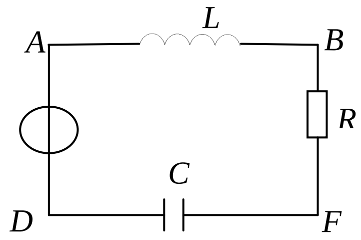

Рис. 3

Определим каждое слагаемое в уравнении (5).

Участок AB – есть индуктивность, тогда

$$U_{AB}(t)=L\cdot\frac{dI}{dt}, \qquad (6)$$

где $I = I(t)$ – сила тока; L – индуктивность.

Участок BF – сопротивление, и по закону Ома выполняется условие

$$U_{BF}(t)=R\cdot I(t), \qquad (7)$$

где R – сопротивление.

Участок FD есть конденсатор. А в конденсаторе падение напряжения – результат заряда его пластин, поэтому

$$U_{FD}(t)=\frac{Q(t)}{C}, \qquad (8)$$

где $Q(t)$ – заряд конденсатора; C – емкость конденсатора.

Участок DA есть источник тока, поэтому

$$U_{DA}(t)=-U_{DA}(t)=-U(t), \qquad (9)$$

где $U(t)$ – напряжение на источнике.

Подставляя уравнения (6) – (8) в (5) получим

$$LI'(t)+R\cdot I(t)+\frac{1}{C}\cdot Q(t)-U(t)=0. \qquad (10)$$

Дифференцируя (10), с учетом $I(t)=\dfrac{dQ(t)}{dt}$ и $U'(t)=E(t)$, получим дифференциальное уравнение электрических колебаний

$$LI''+RI'+\frac{1}{C}\cdot I=E(t). \qquad (11)$$

Дифференциальное уравнение (11) – уравнение электрических колебаний лишь обозначениями отличается от уравнения механических колебаний. Правая часть уравнения (11) $E(t)$ – эдс – аналог внешней силы.

1.2. Основные определения

Уравнения, в которые неизвестная функция входит под знаком производной или дифференциала, называются дифференциальными уравнениями.

Например:

1) $y' = x^2 + y^2$, 2) $y'' = -4y$,

3) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$, 4) $x^2 dy - y dx = 0$.

Зависимость между искомыми величинами будет установлена, если будут указаны методы нахождения неизвестных функций, определяемых дифференциальными уравнениями. Определение неизвестных функций, входящих в дифференциальные уравнения, является основной задачей теории дифференциальных уравнений.

Если в дифференциальном уравнении неизвестная функция является функцией одной переменной, то дифференциальное уравнение называется *обыкновенным*.

Например:

1) $y' + 2y + x = 0$, 2) $\dfrac{d^2 y}{dx^2} + 2\dfrac{dy}{dx} + y = \sin x$,

3) $(x - y)dy + (x + y)dx = 0$.

Если же неизвестная функция, входящая в дифференциальное уравнение, является функцией двух или большего числа независимых переменных, то дифференциальное уравнение называется *уравнением в частных производных*.

Например:

1) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$, 2) $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = z^2$.

Порядком дифференциального уравнения называется порядок старшей производной, входящей в это уравнение. Например, уравнения

$$y' + 2xy = x^3 \quad \text{и} \quad (x^2 - y^2)dy + (x^2 + y^2)dx = 0$$

будут уравнениями первого порядка, а уравнения

$$y'' + 2y' + 3y = x^2 \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 1$$

являются уравнениями второго порядка.

Пусть x – независимая переменная и y – искомая функция этой переменной. Общий вид *обыкновенного дифференциального уравнения порядка n:*

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0. \tag{1}$$

Общим решением дифференциального уравнения (1) называется n раз дифференцируемая функция

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_n), \tag{2}$$

которая при подстановке в уравнение (1) обращает его в тождество. Здесь C_1, C_2, …, C_n – произвольные постоянные. Если функция (2) есть неявная функция x, определяемая в результате n-кратного интегрирования уравнения, вида

$$\Phi(x, C_1, C_2, ..., C_n) = 0, \tag{3}$$

то функция (3) называется общим *интегралом дифференциального уравнения* (1).

Пример 1. Интегралом дифференциального уравнения

$$xy' - y + x\sqrt{x^2 - y^2} = 0$$

является функция $x + \arcsin\frac{y}{x} = C$.

Решение. Действительно, дифференцируя эту функцию, заданную неявно, получим

$$1 + \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2}} \cdot \frac{xy' - y}{x^2} = 0$$

или, решая относительно y', получим

$$y' = \frac{1}{x}\left(y - x^2\frac{\sqrt{x^2 - y^2}}{x}\right) = \frac{y}{x} - \sqrt{x^2 - y^2}.$$

Подставляя значение производной y' в данное дифференциальное уравнение, получим тождество

$$x\left(\frac{y}{x} - \sqrt{x^2 - y^2}\right) - y + x\sqrt{x^2 - y^2} = 0.$$

Частным решением обыкновенного дифференциального уравнения (1) называется решение получаемого из общего решения (2) при определенных числовых значениях постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

С геометрической точки зрения общее решение (общий интеграл) – это семейство кривых на координатной плоскости, зависящее от постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Эти кривые называются интегральными кривым данного дифференциального уравнения. Частному решению (интегралу) соответствует одна кривая этого семейства, проходящая через заданную точку плоскости.

Процесс нахождения решений дифференциального уравнения называется интегрированием дифференциального уравнения. Проинтегрировать (решить) дифференциальное уравнение – значит:

1) найти его общее решение или общий интеграл,

2) найти частное решение уравнения, которое удовлетворяет заданным начальным условиям (если таковы имеются).

Особым решением обыкновенного дифференциального уравнения называется такое его решение, которое нельзя получить из общего решения ни при каких значениях постоянных (констант).

Пример 2. Для дифференциального уравнения $y' = \sqrt{1-y^2}$ $y = \sin(x+C)$ – общее решение; $y = \pm 1$ – особое решение.

Пример 3. Для дифференциального уравнения $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ общее решение уравнения имеет вид $y = \arcsin x + c$. Прямые $x = \pm 1$ – особые решения.

Пример 4. Для дифференциальных уравнений укажем общие и особые решения уравнений.

4.1) $y^2(1+(y')^2) = 9$.

Общее решение – $y^2 + (x-c)^2 = 9$; особое решение – $y = \pm 3$.

4.2) $(y')^2 + yy' + e^{-x} = 0$.

Общее решение – $y = Ce^{-x} + \dfrac{1}{C}$; особое решение – $y = \pm 2e^{\frac{x}{2}}$.

4.3) $x(y')^2 - 2yy' + 4x = 0$.

Общее решение – $x^2 = 2C(y-2C)$; особое решение – $y = \pm 2x$.

§ 2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

2.1. Основные понятия. Задача Коши

В общем случае дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид

$$F(x, y, y') = 0, \tag{1}$$

где F – заданная функция.

Если функция F такова, что из уравнения (1) производную y' можно однозначно выразить через x и y, то это уравнение в разрешенном относительно производной имеет вид

$$y' = f(x, y), \tag{2}$$

где f – заданная функция своих аргументов.

Симметричная форма дифференциального уравнения (1) первого порядка записывается в виде

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0, \tag{3}$$

где $M(x,y)$ и $N(x,y)$ – заданные функции своих аргументов.

При подобной форме записи дифференциального уравнения переменных x и y равноправны, и каждую из них можно рассматривать как функцию другой. Уравнение (3) можно записать в симметричной форме

$$\frac{dx}{N(x, y)} = \frac{dy}{M_1(x, y)}, \tag{4}$$

где $M_1(x, y) = -M(x, y)$.

Уравнение (3) можно привести к уравнению вида (2) и наоборот. Действительно, имеем

$$N(x, y)dy = -M(x, y)dx,$$

откуда

$$\frac{dy}{dx} = y' = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)} = f(x, y).$$

Обратный переход очевиден.

Общим решением дифференциального уравнения (2) называется функция

$$y = \varphi(x, C), \tag{5}$$

зависящая от произвольной постоянной C, если:

а) функция $\varphi(x, C)$ является решением (2) при любом значении произвольной постоянной C;

б) функция $\varphi(x,C)$ такая, что из равенства (5) можно выразить C в виде однозначной функции x и y, т.е.

$$C = \Phi(x, y). \tag{6}$$

Частным решением дифференциального уравнения первого порядка называется решение, получающееся из общего решения при некотором фиксированном значении произвольной постоянной C, включая $\pm\infty$.

Интегралом дифференциального уравнения первого порядка называется уравнение $\psi(x, y) = 0$, не содержащее производных, такое, что если из него выразить y как функцию x, то $y(x)$ – решение дифференциального уравнения (2).

Если общее решение дифференциального уравнения (2) задано в неявном виде

$$\psi(x, y, C) = 0 \quad \text{или} \quad \Phi(x, y) = C,$$

то оно называется *общим интегралом* уравнения (2).

Смысл общего интеграла состоит в том, что если из него выразить y как функцию от x и C, то получим общее решение.

Отметим, что общее решение (общий интеграл) зависит от произвольной постоянной интегрирования, поэтому в общей постановке задача интегрирования дифференциального уравнения является неопределенной, т.е. приводящей к многозначному результату. В прикладных задачах эту неопределенность можно устранить, наложив на искомую функцию дополнительное условие. Это условие называется *начальным условием*.

В общем виде оно сводится к тому, чтобы искомая функция принимала наперед заданное значение $y = y_0$ при заданном значении независимой переменной $x = x_0$. Таким образом, из множества функций, удовлетворяющих данному дифференциальному уравнению, выбирается та, которая удовлетворяет начальному условию.

Частным решением дифференциального уравнения (1) является функция

$$y = \varphi(x), \tag{7}$$

обращающая уравнение (1) в тождество.

С геометрической точки зрения равенство (7) есть уравнение кривой на плоскости xOy. Эта кривая – интегральная кривая и представляет собой график данного частного решения.

Общее решение дифференциального уравнения (1) $y = \varphi(x, C)$ задает бесконечное множество интегральных кривых, заполняющих некоторую область на плоскости xOy. Все интегральные кривые имеют непрерывно изменяющуюся касательную, т.е. являются *гладкими кривыми*.

Рассмотрим дифференциальные уравнения первого порядка вида (2). График решения $y = \varphi(x)$ на плоскости xOy – интегральная кривая. Пусть α – угол между касательной к интегральной кривой $y = \varphi(x)$ в точке $P(x,y)$ и положительным направлением оси Ox (рис. 1).

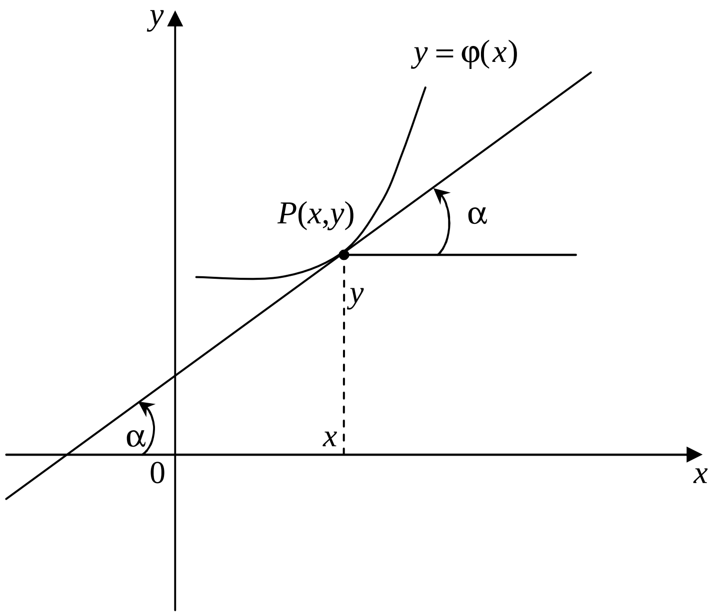

Рис. 1

Учитывая то, что $\mathrm{tg}\alpha = y'$ и $y' = f(x, y)$, получим $\mathrm{tg}\alpha = f(x, y)$. Следовательно, направление касательных к интегральным кривым задается самим дифференциальным уравнением. В каждой точке области определения функции $f(x,y)$ строим отрезок единичной длины с центром в этой точке, образующий с положительным направлением оси абсцисс угол α ($\mathrm{tg}\alpha = f(x, y)$): получим поле *направлений* (рис. 2) для функции $f(x,y)$.

Если в точке (x_0, y_0) правая часть уравнения (2) обращается в бесконечность, то направление поля параллельно оси ординат (y), так как равенство $\mathrm{tg}\alpha = \infty$ возможно при $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$. Если в точке (x_0, y_0) правая часть уравнения (2) обращается в неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$, то поле направлений в этой точке не определено, а сама точка называется *особой точкой* этого дифференциального уравнения.

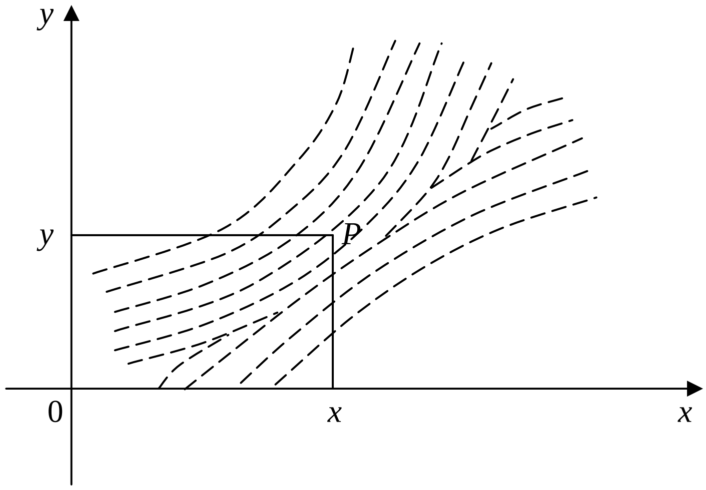

Рис. 2

Поле направлений определяется заданным дифференциальным уравнением и представляет собой график дифференциального уравнения. Поле направлений $y' = Ay^2 + B\dfrac{y}{x} + \dfrac{C}{x^2}$ дает возможность получить представление об интегральных кривых этого уравнения, а иногда и сами интегральные кривые.

Из дифференциального уравнения (2) имеем, что любой паре значений (x,y) соответствует определенное значение y'. В точке $P(x,y)$ кривой существует касательная с наклоном $y' = \mathrm{tg}\alpha$. Точку $P(x,y)$ кривой и отрезок прямой с наклоном $y' = \mathrm{tg}\alpha$ называют *линейным элементом* для данной кривой и данной точки. Тогда дифференциальное уравнение $y' = f(x,y)$ определяет для каждой точки плоскости линейный элемент. Совокупность таких линейных элементов образует поле направлений (рис. 3).

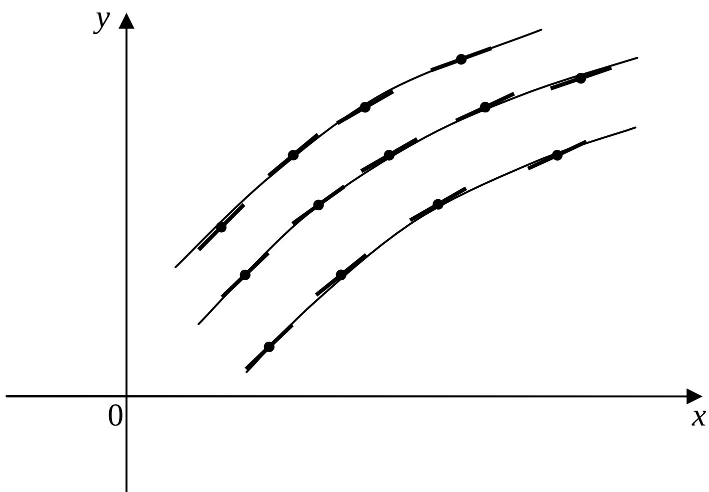

Рис. 3

Таким образом, дифференциальное уравнение первого порядка отождествляется с полем направлений.

Решить дифференциальное уравнение первого порядка – значит определить такую кривую $y = y(x)$, которая в каждой своей точке $P(x, y)$ касается заданного этим уравнением поля направлений.

При постоянном наклоне $y' = k$ уравнение $k = f(x, y)$ определяет некоторую кривую в плоскости xOy, в точках которой отрезки касательных имеют одинаковый наклон k. Кривая, имеющая линейные элементы одинакового направления, называется *изоклиной*. Или, другими словами, геометрическое место точек плоскости (x,y), в которых наклон касательных к решениям уравнения $y' = f(x, y)$ один и тот же, называется *изоклиной*. Следовательно, уравнение изоклины имеет вид $f(x, y) = k$, где k – постоянная.

Чтобы приближенно построить решения уравнения $y' = f(x, y)$, можно начертить достаточное число изоклин, а затем провести решения, то есть кривые, которые в точках пересечения с изоклинами $f(x, y) = k_1$, $f(x, y) = k_2$, ... имеют касательные с угловыми коэффициентами соответственно k_1, k_2, ...

Пример 1. Исследовать поле направлений дифференциального уравнения $y' = \dfrac{x}{y}$ и найти его интегральные кривые.

Решение. Поле направлений обладает следующими особенностями:

при $x = 0$, т.е. линейные элементы находятся по оси ординат;

при у = 0 $y' = \infty$, т.е. линейные элементы находятся на оси абсцисс;

при $y = x$ $y' = 1$, т.е. линейные элементы лежат на биссектрисе координатного угла.

Находим значения производной y' для координат x и y, принимающих числовые значения (например, – 3, – 2, – 1, 0, 1, 2, 3), отмечаем линейные элементы для выбранных точек и тем самым получим поле направлений (рис. 4).

На рис. 4 видно, что имеем две прямые, проходящие через начало координат: $y = x$ и $y = – x$, другие интегральные кривые асимптотически приближаются к этим линиям.

Интегральные кривые – множество равносторонних гипербол.

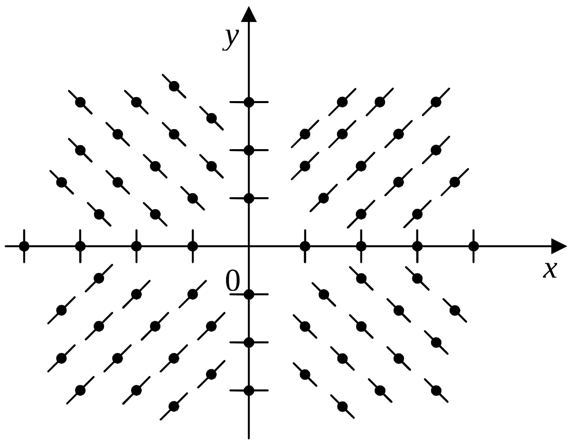

Рис. 4

Пример 2. Построить поле направлений и приближенно провести искомые интегральные кривые для уравнения $y' = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Решение. Для построения поля направлений найдем геометрическое место точек, в которых касательные к искомым интегральным кривым сохраняют постоянный наклон или постоянное направление. Уравнение изоклин имеет вид $y' = k$, k – постоянная;

$$\sqrt{x^2 + y^2} = k \quad \text{или} \quad x^2 + y^2 = k^2 .$$

Изоклинами в данном случае являются окружности с центром в начале координат, причем угловой коэффициент касательной к искомым интегральным кривым равен радиусу этих окружностей. Для построения поля направлений (рис. 5) придадим постоянной k некоторые значения, а потом можно приближенно построить искомые интегральные кривые (рис. 6).

Замечание 1. Рассмотрим следующую задачу. Пусть дано семейство функций, зависящие от одного параметра C:

$$y = \varphi(x, C), \tag{8}$$

причем через каждую точку плоскости (или некоторой области на плоскости) проходит только одна кривая из этого семейства. Для какого дифференциального уравнения данное семейство функций является общим интегралом?

Решение поставленной задачи проводится следующим образом: дифференцируя (8) по *x*, получим

$$\frac{dy}{dx} = \varphi'_x(x, C). \tag{9}$$

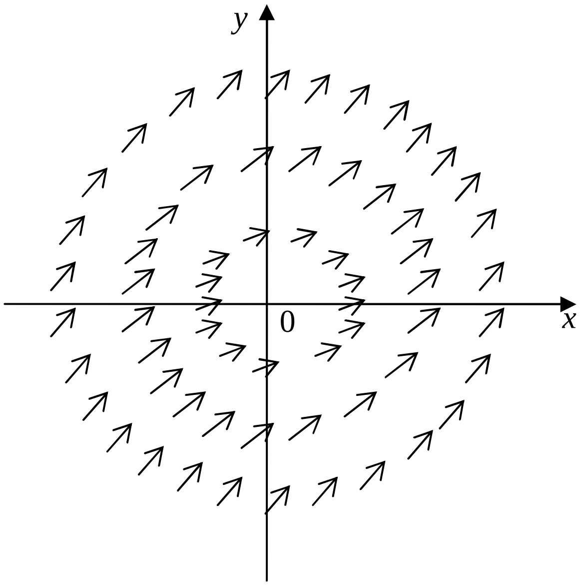

Рис. 5

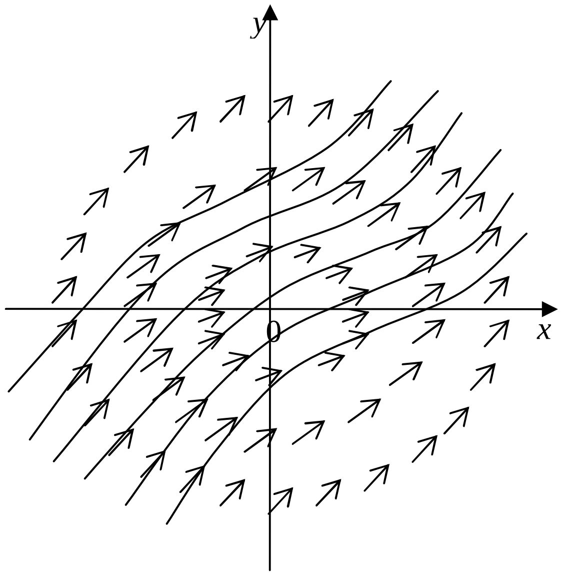

Рис. 6

Так как через каждую точку плоскости проходит только одна кривая семейства, то для каждой пары чисел x и y определяется единственное значение C из уравнения (8). Подставляя найденное значение C в (9), находим $\dfrac{dy}{dx}$ как функцию от x и y. Это и дает дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет всякая функция из семейства (8).

Таким образом, чтобы установить связь между x, y и $\dfrac{dy}{dx}$, т.е. написать дифференциальное уравнение, общий интеграл которого определяется формулой (8), нужно исключить C из соотношений (8) и (9).

Пример 3. Составить дифференциальные уравнения семейства кривых:

1) $y^2 = Cx$; 2) $x^2 + y^2 - Cx = 0$;

3) $y = \sin x + C\cos x$; 4) $x + y + C(1 - xy) = 0$.

Решение. 1) Дифференцируя по x уравнение $y^2 = Cx$, получим $2y \cdot \dfrac{dy}{dx} = C$. Исключая из этих двух равенств параметр C, получим искомое дифференциальное уравнение

$$2x\frac{dy}{dx} - y = 0.$$

2) Рассматривая в данном уравнении y как неявную функцию от x и дифференцируя по x, имеем $2x + 2y\dfrac{dy}{dx} - C = 0$. Отсюда $C = 2x + 2y\dfrac{dy}{dx}$.

Подставляя в исходное уравнение найденное C, получим искомое дифференциальное уравнение $x^2 + y^2 - x\left(2x + 2y\dfrac{dy}{dx}\right) = 0$ или $2xy\dfrac{dy}{dx} + x^2 - y^2 = 0$.

3) Дифференцируя данное уравнение по x, имеем

$$\frac{dy}{dx} = \cos x - C\sin x.$$

Умножив обе части исходного равенства на $\sin x$, а последнего – на $\cos x$ и сложив почленно, получим искомое уравнение

$$y\sin x + \frac{dy}{dx}\cos x = \sin^2 x + \cos^2 x$$

или

$$\cos x \cdot \frac{dy}{dx} + y\sin x = 1.$$

4) Дифференцируя данное равенство по x, находим

$$1 + \frac{dy}{dx} - C\left(x\frac{dy}{dx} + y\right) = 0.$$

Из условия задачи $C = \dfrac{x+y}{xy-1}$, подставив его в последнее соотношение, получим искомое уравнение

$$1 + \frac{dy}{dx} - \frac{x+y}{xy-1}\left(x\frac{dy}{dx} + y\right) = 0$$

или после упрощения имеем

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1+y^2}{1+x^2} = 0.$$

Замечание 2. Чтобы составить дифференциальное уравнение, которому удовлетворяют кривые семейства

$$\varphi(x, y, C_1, C_2, ..., C_n) = 0,$$

надо продифференцировать исходное равенство n раз, считая y функцией x, а затем из полученных уравнений и исходного уравнения исключить произвольные постоянные C_1, C_2, ..., C_n.

Пример 4. Составить дифференциальное уравнение семейства кривых $C_1x + (y - C_2)^2 = 0$.

Решение. Так как уравнение семейства кривых содержит два параметра, то дифференцируем его дважды, считая y функцией от x,

$$C_1 + 2(y - C_2) \cdot y' = 0,$$

$$2(y')^2 + 2(y - C_2)y'' = 0.$$

Из первого уравнения $C_1 = -2(y - C_2)y'$, а из второго уравнения $y - C_2 = \dfrac{-(y')^2}{y''}$ и, подставляя найденные значения C_1 и C_2 в исходное уравнение, после упрощений получим

$$y' + 2xy'' = 0.$$

Задания для самостоятельной работы

1. Написать уравнение геометрического места точек $M(x, y)$, являющихся точками экстремума решений уравнения $y' = f(x, y)$.

Ответ: $f(x, y) = 0$, при этом если $\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial x} < 0$ – то max, если $\dfrac{\partial f}{\partial x} > 0$ – то min.

2. Написать уравнение геометрического места точек перегиба графиков решений уравнений:

2.1. $y' = y - x^2$; 2.2. $y^2 y' + x^2 = 1$;

2.3. $y = x - e^y$; 2.4. $y' = f(x, y)$.

Ответы: 2.1. $y = x^2 + 2x$, решение данной задачи находим, с помощью уравнения $y'' = 0$, т.е. $y'' = y' - 2x$ или $y'' = y - x^2 - 2x$, откуда имеем $y - 2x - x^2 = 0$. 2.2. $xy^3 + (1 - x^2) = 0;\ y = 0$; 2.3. $x = 2chy$; 2.4. $\dfrac{\partial f}{\partial x} + f\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$.

3. Составить дифференциальные уравнения семейств линий:

3.1. $y = e^{cx}$; 3.2. $y = (x - c)^3$; 3.3. $y = \sin(x + c)$;

3.4. $x^2 + cy^2 = 2y$; 3.5. $y = c(x - c)^2$; 3.6. $x = ay^2 + by + c$;

3.7. $y = cx$; 3.8. $y = cx + c^2$; 3.9. $y = ax + b$.

Ответы: 3.1. $y = e^{\frac{xy'}{y}}$; 3.2. $y' = 3y^{\frac{2}{3}}$; 3.3. $y^2 + (y')^2 = 1$;

3.4. $yy' + xy = x^2 y'$; 3.5. $(y')^3 = 4y(xy' - 2y)$; 3.6. $y''' \cdot y' = 3(y')^2$;

3.7. $y = xy'$; 3.8. $y = xy' + (y')^2$; 3.9. $y'' = 0$.

2.2. Дифференциальные уравнения с разделенными и разделяющимися переменными

Дифференциальное уравнение первого порядка вида

$$P(x)dx+Q(y)dy=0 \qquad (1)$$

называется дифференциальным уравнением с разделенными переменными. Функции $P(x)$ и $Q(y)$ – непрерывные соответственно только по x или по y. Тогда общий интеграл дифференциального уравнения (1) имеет вид

$$\int P(x)dx+\int Q(y)dy=C\,. \qquad (2)$$

Пример 1. Найти интегральную кривую дифференциального уравнения

$$x^2dx+(y+1)dy=0\,,$$

проходящую через точку (0;1).

Решение. Интегрируя почленно данное дифференциальное уравнение, получим общий интеграл

$$\frac{x^3}{3}+\frac{y^2}{2}+y=C\,.$$

Полагая $x = 0$ и $y = 1$, находим $C=\frac{3}{2}$.

Тогда искомая интегральная кривая определяется уравнением

$$2x^3+3y^2+6y=9\,.$$

Дифференциальным уравнением первого порядка с разделяющимися переменными называется уравнение вида

$$M_1(x)\cdot N_1(y)dx+M_2(x)\cdot N_2(y)dy=0\,, \qquad (3)$$

где $M_1(x)$, $M_2(x)$, $N_1(y)$ и $N_2(y)$ – непрерывные функции.

Разделив обе части дифференциального уравнения (3) на $M_2(x)\cdot N_1(y)\neq 0$, получим

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx+\frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy=0 \qquad (4)$$

дифференциальное уравнение с разделенными переменными, интегрируя которое, получим

$$\int\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx+\int\frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy=C\,. \qquad (5)$$

Если соотношение (5) содержит все решения дифференциального уравнения (3), то оно является **общим интегралом этого дифференциального уравнения**.

При разделении переменных в уравнении (3) можно потерять некоторые решения. Так, если $x = x_0$ – корень уравнения $M_2(x) = 0$, то при любом y имеем $M_1(x_0) = 0$; $dx_0 = 0$ и, подставив в (3), получим тождество, т.е. ($x = x_0$, y – любое) – решение дифференциального уравнения (3). Аналогично, если $y = y_0$ – корень уравнения $N_1(y) = 0$, то при (x – любое, $y = y_0$) – решение уравнения (3).

Пример 2. Найти уравнение кривой, проходящей через точку (4;2), если известно, что отрезок любой ее касательной, заключенный между осями координат, делится точкой касания пополам (рис. 1).

Решение. Для определенности предположим, что кривая расположена в первой четверти. Пусть $P(x,y)$ – середина касательной AB.

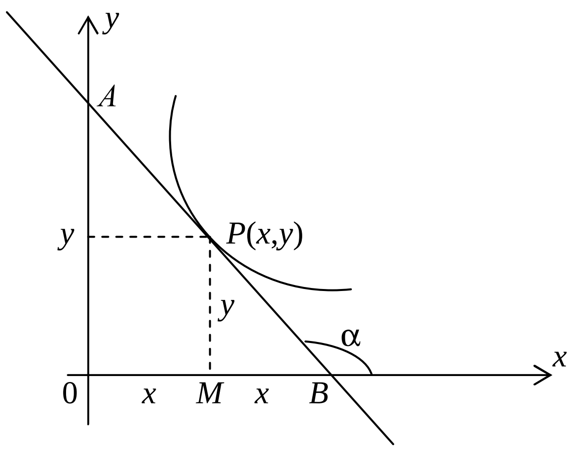

Рис. 1

Угловой коэффициент касательной в точке $P(x,y)$ $\operatorname{tg}\alpha = y'$, но $\operatorname{tg}(MBP) = \operatorname{tg}(180^0 - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha = \frac{-y}{x}$.

Таким образом, получим $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$ или $\frac{dy}{y} + \frac{dx}{x} = 0$ – уравнение с разделенными переменными, общий интеграл которого $xy = c$. Так как кривая проходит через точку (4;2), то $4 \cdot 2 = C$, и, следовательно, уравнение искомой кривой имеет вид $x \cdot y = 8$.

Замечание 1. К интегрированию дифференциального уравнения первого порядка с разделяющимися переменными относятся дифференциальные уравнения, несодержащие искомую функцию $(y' = f(x))$ или несодержащие независимую переменную $y' = f(y)$.

Замечание 2. К уравнению с разделяющимся переменным приводятся уравнения вида $y' = f(ax+by+c),\ b \neq 0$ с помощью замены (подстановки) $ax+by+c=t$. Действительно, дифференцируя по x последнее равенство, получим $a+by' = \dfrac{dt}{dx}$ и, подставляя y' в данное уравнение, имеем $\left(\dfrac{dt}{dx} - a\right) \cdot \dfrac{1}{b} = f(t)$ или $\dfrac{dt}{dx} = a + bf(t)$. Откуда получим уравнение с разделенными переменными $\dfrac{dt}{a+bf(t)} = dx$.

Замечание 3. Дифференциальное уравнение первого порядка $f(x, y') = 0$ можно решить следующим образом:

1) положим, например, $x = v(t)$,

2) разрешая уравнение $f(x, y') = 0$ относительно y', получим $y' = u(t)$,

3) отсюда $y = \int u(t) v'(t) dt + C$,

4) параметрические уравнения интегральных кривых $\begin{cases} x = v(t), \\ y = \int u(t) v'(t) dt + C \end{cases}$ для данного дифференциального уравнения.

Тогда также и для дифференциального уравнения $f(y, y') = 0$ имеем $y = v(t);\ y' = u(t);\ x = \int \dfrac{v'(t)}{u(t)} dt + C$.

Например, при нахождении решения дифференциального уравнения $y \cdot \sqrt{1 + (y')^2} = 1$ положим $y = \cos t$. Решая уравнение относительно y', получим $y'_x = |\mathrm{tg} t|$. Откуда $dx = \dfrac{dy}{y'_x} = \dfrac{-\sin t dt}{+\mathrm{tg} t} = \pm \cos t dt$ или $x = \mp \sin t + C$.

Таким образом, уравнения интегральных кривых в параметрической форме имеют вид

$$\begin{cases} x = \mp \sin t + C, \\ y = \cos t. \end{cases}$$

Это уравнения окружностей единичного радиуса, центры которых (C, 0).

Пример 3. Температура вынутого из печи тела за 20 минут падает от 200°C до 160°C. Через сколько времени от начала охлаждения температура тела понизится до 30°C, если температура воздуха равна 25°C.

Решение. Согласно закону теплопроводности, скорость охлаждения тела пропорциональна разности температур тела и окружающей среды, т.е. дифференциальное уравнение охлаждения имеет вид:

$$\frac{dT}{dt} = K(T - t_0),$$

где T – температура тела, t_0 – температура окружающего воздуха (в данном примере t_0 = 25°C), $\frac{dT}{dt}$ – скорость охлаждения, K – коэффициент охлаждения. Данное дифференциальное уравнение – уравнение вида $y' = f(y)$.

Разделяя переменные, получим (t = 25°C)

$$\frac{dT}{T-25} = K \cdot dt.$$

Интегрируя $\ln(T-25) = K \cdot t + \ln C$ или $T - 25 = C \cdot e^{Kt}$.

Постоянную интегрирования C определим, используя начальное условие T = 200°C при $t = 0$, т.е. 200 – 25 = C, C = 175.

Величину e^K находим из условия T = 160°C при t = 20 мин:

$$160 - 25 = 175\, e^{20K}, \quad e^{20K} = \frac{27}{35}; \quad e^K = \left(\frac{27}{35}\right)^{\frac{1}{20}}$$

Тогда $T = 175 \cdot \left(\frac{27}{35}\right)^{\frac{t}{20}} + 25$, если T = 30°C, имеем $t = \frac{-20\ln 35}{\ln 27 - \ln 35} = 274(\text{мин})$, т.е. тело охлаждается до температуры 30°C через 274 мин.

Пример 4. Материальная точка массы m погружается в жидкость, сила сопротивления которой пропорциональна скорости движения с коэффициентом пропорциональности k. Найти скорость точки через t секунд после начала погружения, если начальная скорость точки равна v_0.

Решение. Ось Ox направим вертикально вниз по линии движения материальной точки. Тогда уравнение движения материальной точки имеет вид

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kv + mg, \text{ где } v = \frac{dx}{dt}.$$

Откуда имеем дифференциальное уравнение первого порядка с разделенными переменными

$$\frac{dv}{-kv+mg} = \frac{dt}{m}.$$

Интегрируя, получим

$$-\frac{1}{k}\ln\left|-kv+mg\right|=\frac{t}{m}+\ln\left|C\right| \quad \text{или} \quad -\frac{t}{m}=\ln\left|C(mg-kv)^{\frac{1}{k}}\right|.$$

Откуда имеем

$$\left|C(mg-kv)^{\frac{1}{k}}\right|=e^{-\frac{t}{m}} \quad \text{или} \quad mg-kv=C_1\cdot e^{-\frac{kt}{m}}; \quad v=\frac{mg}{k}-\frac{C_1}{k}e^{-\frac{kt}{m}}.$$

При $t=0$, $v=v_0$, поэтому $v_0=\frac{mg}{k}-\frac{C_1}{k}$, $C_1=mg-kv_0$.

Следовательно, скорость движения задается формулой

$$v=\frac{mg}{k}-\frac{mg-kv_0}{k}\cdot e^{-\frac{kt}{m}}.$$

Пример 5. (Рост денежных вкладов). Рассмотрим процесс возрастания денежной суммы, положенной в банк, при начислении $p=100r$ сложных процентов в год.

Решение. Пусть начальная денежная сумма y_0, а $y(t)$ – денежная сумма по истечении t лет. Если проценты начислялись один раз, то будем иметь

$$y(t+1)=y(t)+r\cdot y(t)=(1+r)y(t).$$

Если проценты начислялись два раза в год (раз в полугодие), то будем иметь

$$y\left(t+\frac{1}{2}\right)=y(t)+\frac{1}{2}r\cdot y(t)=\left(1+\frac{r}{2}\right)y(t)$$

$$t=0,\ \frac{1}{2},\ 1,\ \frac{3}{2},\ 2.$$

Если проценты начислялись n раз в год, то денежная сумма имеет вид

$$y\left(t+\frac{1}{n}\right)=\left(1+\frac{r}{n}\right)y(t).$$

Обозначим $\frac{1}{n}=h$ и из последнего равенства будем иметь

$$\frac{y(t+h)-y(t)}{h}=r\cdot y(t).$$

Неограниченно увеличивая n, приходим к процессу возрастания денежной суммы при непрерывном начислении процентов. При $n \to \infty$, $\frac{1}{n} = h \to 0$, тогда

$$\lim_{h \to 0} \frac{y(t+h) - y(t)}{h} = \frac{dy(t)}{dt}.$$

Тогда имеем закон возрастания денежной суммы при непрерывном начислении процентов, который имеет вид

$$\frac{dy(t)}{dt} = r \cdot y(t).$$

А это дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными. Учитывая, что задана начальная денежная сумма, равная y_0, т.е. $y(0) = y_0$ – получили задачу Коши

$$\frac{dy(t)}{dt} = r \cdot y(t),$$

$$y(0) = y_0.$$

Откуда имеем:

$$\int \frac{dy}{y} = \int r dt \quad \text{или} \quad \ln|y| = rt + \ln|C|; \quad \frac{y}{C} = e^{rt}.$$

$y = C \cdot e^{rt}$ – общее решение уравнения.

Учитывая, что при $t = 0$ $\quad y(0) = y_0 = C \cdot e^{ot} = C$.

Тогда решение задачи Коши имеет вид

$$y(t) = y_0 \cdot e^{rt}.$$

Пример 6. Коническая воронка высотой H и углом раствора при вершине, равным α, заполнена водой (рис. 2). Вода вытекает через отверстие, площадь которого S. Определить время, за которое вся вода вытечет из воронки.

Решение. Известно, что скорость истечения жидкости v в тот момент, когда высота ее уровня равна h, определяется формулой $v = C \cdot \sqrt{2g \cdot h}$, где C – постоянная, зависящая от типа жидкости (для воды C = 0,6), g – ускорение свободного падения, h – высота уровня жидкости над отверстием.

Пусть в момент времени t высота уровня воды $h = h(t)$. За промежуток времени $(t,\ t + dt)$ уровень воды понизится на dh. Тогда для мало-

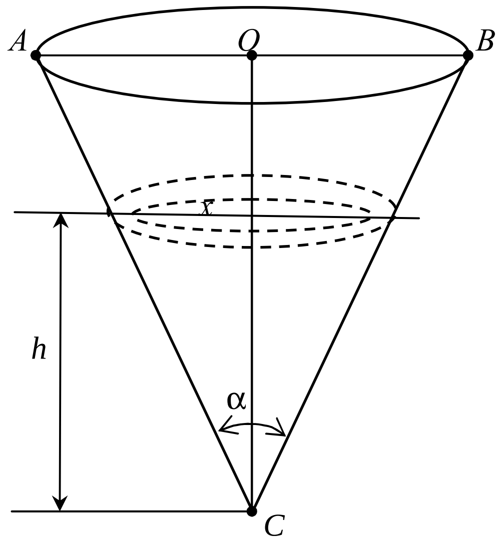

Рис. 2

го промежутка времени dt объем вытекающей воды будет равен объему цилиндра высотой dh и радиусом $x = h\cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, т.е. $dV = -\pi h^2 \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}dh$. С другой стороны за промежуток времени dt через отверстие вытекает объем воды, равный объему цилиндра, площадь основания которого S и высотой $v\cdot dt$, т.е. $dV = C\cdot S\sqrt{2gh}dt$.

Приравнивая полученные выражения объемов, получим дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными

$$-\pi h^2 \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}dh = C\cdot S\cdot\sqrt{2gh}dt .$$

Учитывая начальное условие $h(0) = H$, получим математическую модель задачи (задача Коши):

$$-\pi h^2 \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}dh = C\cdot S\cdot\sqrt{2gh}dt,$$

$$h(0) = H .$$

Интегрируя, получим, что

$$t = \frac{2}{5}\pi\frac{\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{S\sqrt{2g}}\left(H^{\frac{5}{2}} - h^{\frac{5}{2}}\right).$$

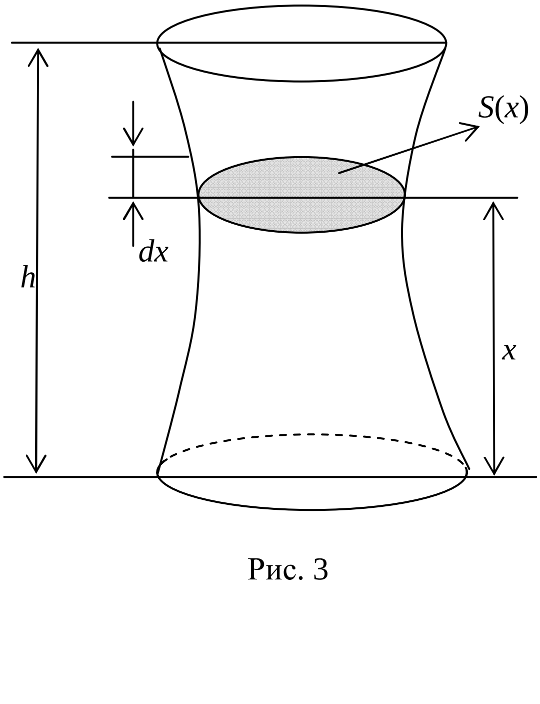

Рис. 3

Время, за которое вода полностью вытекает из воронки, определим исходя из того, что $h = 0$, т.е.

$$T = \frac{2}{5}\pi\frac{\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{S\sqrt{2g}}H^{\frac{5}{2}}.$$

Замечание 4 (истечение жидкости из емкости). Рассмотрим задачу в общем виде, т.е. пусть имеем емкость, (рис. 3) площадь горизонтального сечения которой является функцией расстояния от дна сосуда. Считаем, что высота уровня жидкости в емкости в момент времени $t=0$ равна h, площадь сечения на высоте x равна $S(x)$, а площадь отверстия на дне емкости равна S.

Известно, что скорость истечения жидкости v в тот момент, когда высота ее уровня равна x, определяется по формуле $v = C\cdot\sqrt{2gx}$, где $g=9{,}8\frac{м}{c^2}$, C – коэффициент, зависящий от типа жидкости (для воды $C=0{,}6$).

Считаем, что на бесконечно малом промежутке времени dt истечение жидкости равномерно, а поэтому за промежуток времени dt вытекает столбик (цилиндр) жидкости, высота которого vdt и площадь сечения S, что приводит к понижению уровня жидкости в емкости на dx (т.е. имеем столбик (цилиндр) жидкости объема $S(x)dx$). Приравнивая полученные объемы, приходим к дифференциальному уравнению первого порядка с разделяющимися переменными $C\cdot S\cdot\sqrt{2gx}dt = -S(x)dx$.

Учитывая начальное условие $t(0)=h$, приходим к математической модели рассматриваемого процесса (задача Коши), который имеет вид

$$\begin{cases} dt = -\dfrac{S(x)}{C\cdot S\cdot\sqrt{2gx}}, \\ t(0)=h. \end{cases}.$$

Задачи для самостоятельной работы

1. $yxdx+(x+1)dy=0$.

Ответ: $y=c(x+1)e^{-x},\ x=-1$.

2. $y'=\cos(y-x)$.

Ответ: $y=x+2\pi n,\ n\in Z;\ x+c=\operatorname{ctg}\dfrac{y-x}{2}$.

3. $2x^2yy'+y^2=2$.

Ответ: $y^2=ce^{\frac{1}{x}}+2$.

4. $y'-xy^2=2xy$.

Ответ: $y(ce^{-x^2}-1)=2;\ y=0$.

5. $(1-x^2)y'-xy=xy^2$.

Ответ: $y(c\sqrt{1-x^2}-1)=1$.

6. $y' = (x - y)^2 + 1$.

Ответ: $y = x \cdot \dfrac{1}{x + c}$.

7. $y' = \sin(x - y)$.

Ответ: $x + c = \mathrm{ctg}(\dfrac{y - x}{2} - \dfrac{\pi}{4})$; $y = x + \pi n,\ n \in Z$.

8. $y' = ax + by + c$.

Ответ: $(ax + by + c)b = ce^{bx}$.

9. $(x + y)^2 y' = 1$.

Ответ: $x + y = \mathrm{tg}(y + c)$.

10. (Задача Лейбница 1684 г.) Найти все кривые, у которых длина подкасательной – постоянная, равная a.

Ответ: $y = ce^{\frac{x}{a}}$.

11. Найти все кривые, у которых отрезок касательной, заключенный между осями координат, делится точкой касания в отношении m:n.

Ответ: $c = x^m y^n$. Если $m = n$, то $xy = c$.

12. В баке находится 100 л раствора, содержащего 10 кг соли. В бак непрерывно подается вода (5 л в мин), которая перемешивается с имеющимся раствором. Смесь вытекает из бака с той же скоростью, что и подается вода. Сколько соли в баке останется через 1 ч.

Ответ: количество соли $x(t) = 10e^{\frac{-t}{20}}$; $x(60) = 0{,}5$ кг.

13. Найти все кривые, для которых площадь треугольника, образованного касательной, ординатой точки касания и осью абсцисс, есть величина постоянная, равная a^2.

Ответ: $2a^2 = y(c \pm x)$.

2.3. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка

Определение. Функция $f(x,y)$ называется однородной функцией порядка k относительно x и y, если справедливо тождество

$$f(tx, ty) = t^k f(x, y), \quad \forall t \in R.$$

Пример 1. $f(x,y)=x^2+y^2$ – однородная функция порядка 2, т. к. $f(tx,ty)=t^2 f(x,y)$.

Функция $f(x,y)=\sqrt[3]{x^2+y^2}$ – однородная функция порядка $\frac{2}{3}$, т. к. $f(tx,ty)=t^{\frac{2}{3}} f(x,y)$.

Функция $f(x,y)=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ – однородная функция нулевого порядка, т.к. $f(tx,ty)=t^0\cdot f(x,y)$.

Дифференциальное уравнение первого порядка

$$y'=f(x,y) \qquad (1)$$

называется *однородным*, если $f(x,y)$ – однородная функция нулевого порядка.

Найдем общее решение дифференциального уравнения (1). Так как уравнение (1) однородное, то $f(x,y)=f(tx,ty)$, полагая $t=\frac{1}{x}$, получим $f(x,y)=f(1;\frac{y}{x})$. Полагая $\frac{y}{x}=u$ или $y=ux$ и $y'=u+xu'$ и подставляя в дифференциальное уравнение $y'=f(1;\frac{y}{x})$, получим $x\cdot u'+u=f(1;u)$ или $x\dfrac{du}{dx}=f(1;u)-u$.

Последнее уравнение – дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными. Разделяя переменные, получим

$$\frac{du}{f(1;u)-u}=\frac{dx}{x},$$

интегрируя которое, имеем $\displaystyle\int\frac{du}{f(1;u)-u}=\ln|cx|$,

и, подставляя вместо u отношение $\frac{y}{x}$, находим общее решение уравнения (1).

Пример 2. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'=\frac{xy+y^2\cdot e^{-\frac{x}{y}}}{x^2}.$$

Решение. Так как правая часть данного уравнения – однородная функция, то исходное дифференциальное уравнение первого порядка – однородное, поэтому, полагая $\frac{y}{x}=u$, $y=u\cdot x$; $y'=xu'+u$ и подставляя в данное уравнение, получим

$$x\frac{du}{dx}+u=u+u^2e^{-\frac{1}{u}} \quad \text{или} \quad \frac{e^{\frac{1}{u}}}{u^2}du=\frac{dx}{x},$$

откуда $-e^{\frac{1}{u}}=\ln|x|-c$ или $e^{\frac{x}{y}}+\ln|x|=C$ – общий интеграл исходного уравнения.

Дифференциальное уравнение первого порядка

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0 \tag{2}$$

называется однородным, если $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ – однородные функции своих аргументов одного и того же порядка, непрерывные вместе со своими частными производными первого порядка.

Подстановка $y = ux$; $dy = udx + xdu$ приводит однородное дифференциальное уравнение первого порядка к дифференциальному уравнению с разделяющимися переменными.

Замечание 1. Решая уравнение (2) относительной производной, получим

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}=\varphi(x,y) \tag{3}$$

однородное дифференциальное уравнение типа (1), т. к. функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ – однородные функции одного и того же порядка, а, следовательно, $\varphi(x,y)$ – однородная функция нулевого порядка.

Пример 3. Найти общее решение уравнения

$$(xy+y^2)dx-(2x^2+xy)dy=0.$$

Решение. Функции $P(x,y)=xy+y^2$ и $Q(x,y)=(2x^2+xy)$ – однородные функции второй степени, следовательно, данное дифференциальное уравнение – однородное.

Полагая $y = ux$, $dy = udx + xdu$, после преобразования получим

$$\frac{2+u}{u}du=-\frac{dx}{x}.$$

Интегрируя, получим $2\ln u+u+\ln x=c_1$ или $u^2x=ce^{-u}$ ($c=e^{c_1}$).

Так как $u=\frac{y}{x}$, то общий интеграл имеет вид $y^2=cxe^{-\frac{y}{x}}$.

Замечание 2. К однородным уравнениям приводятся уравнения вида

$$y' = \Phi\left(\frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}\right), \qquad (4)$$

где $|C| + |C_1| \neq 0$.

С помощью преобразования $x = x_1 + h$, $y = y_1 + k$, где h и k являются решением системы уравнений $\begin{cases} ah + bk + c = 0 \\ a_1h + b_1k + c_1 = 0 \end{cases}$, если $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \neq 0$, уравнение (4) приводится к однородному.

Уравнение (4) сводится к уравнению с разделяющимися переменными с помощью преобразования $ax + by = t$ (или $ax + by + c = t$) в случае, когда $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = 0$.

Пример 4. Найти общее решение уравнения

$$(2x - 4y + 6)dx + (x + y - 3)dy = 0.$$

Решение. Данное уравнение приводится к однородному. Решая систему уравнений $\begin{cases} 2x - 4y + 6 = 0 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases}$ получим $x_0 = 1$, $y_0 = 2$. Применяя замену переменных $x = x_1 + 1$ и $y = y_1 + 2$, получим однородное уравнение $(2x_1 - 4y_1)dx_1 + (x_1 + y_1)dy_1 = 0$. Полагая $y_1 = u \cdot x_1$, получим $2x_1(1 - 2u)dx_1 + x_1(1 + u)(udx_1 + x_1du) = 0$ или $(2 - 3u + u^2)dx_1 + x_1(1 + u)du = 0$.

Выражение $u^2 + 3u - 2$ равно нулю при $u = 1$ и $u = 2$, поэтому функции $u = 1$ и $u = 2$ являются решениями этого уравнения. Остальные решения получим, разделяя переменные

$$\frac{(1 + u)du}{u^2 - 3u + 2} + \frac{dx_1}{x_1} = 0 \text{ или } \left(\frac{3}{u - 2} - \frac{2}{u - 1}\right)du + \frac{dx_1}{x_1} = 0.$$

Интегрируя, получим $\ln|x_1| + \ln\frac{|u - 2|^3}{(u - 1)^2} = \ln C$ или $x_1\frac{(u - 2)^3}{(u - 1)^2} = C$,

то есть $x_1(u - 2)^3 = C(u - 1)^2$ или $x_1\left(\frac{y_1}{x_1} - 2\right)^3 = C\left(\frac{y_1}{x_1} - 1\right)^2$ откуда имеем $(y_1 - 2x_1)^3 = C(y_1 - x_1)^2$, возвращаясь к x и y получим

$$(y - 2x)^3 = C(y - x - 1)^2. \qquad (5)$$

Равенствам $u = 1$ и $u = 2$ в переменных x и y соответствуют решения исходного уравнения $y = x + 1$ и $y = 2x$. Решение $y = 2x$ получаем из общего решения (2) при $C = 0$.

Пример 5. Найти общее решение уравнения $y' = \dfrac{y+2}{x+1} + \operatorname{tg}\dfrac{y-2x}{x+1}$.

Решение. Данное уравнение становится однородным, если положить $x + 1 = x_1$ и $y + 2 = y_1$, поэтому заменой переменных $y_1 = x_1 u$, $x = x_1 - 1$ и $y = ux_1 - 2$ приводим исходное уравнение к уравнению с разделяющимися переменными $x_1\dfrac{du}{dx_1} + u = u + \operatorname{tg}\dfrac{ux_1 - 2 - 2(x_1 - 1)}{x_1}$ или $x_1\dfrac{du}{dx_1} = \operatorname{tg}(u-2)$. Разделяя переменные, получим $\dfrac{du}{\operatorname{tg}(u-2)} = \dfrac{dx_1}{x_1}$ или $\ln\left|\sin(u-2)\right| = \ln\left|x_1\right| + \ln\left|C\right|$ или $\sin(u-2) = Cx_1$.

Отметим, что функция $u - 2 = k\pi (k \in Z)$ – решение данного уравнения, которое получаем из общего решения при $C = 0$. Возвращаясь к переменным x и y, получим

$$\sin\left(\frac{y+2}{x+1} - 2\right) = c(x+1) \quad \text{или} \quad c(x+1) = \sin\frac{y-2x}{x+1}.$$

2.4. Линейные дифференциальные уравнения

Линейным дифференциальным уравнением первого порядка относительно переменной y называется уравнение:

$$y' + P(x)y = Q(x), \tag{1}$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ – функции переменной x или постоянные числа.

Если в уравнении (1) $Q(x) = 0$, то уравнение называется линейным однородным, в противном случае – линейным неоднородным.

Рассмотрим методы интегрирования уравнения (1).

Метод И. Бернулли

Суть метода И. Бернулли состоит в следующем: общее решение уравнения (1) будем искать в виде произведения двух функций

$$y = u(x)\cdot\sigma(x). \tag{2}$$

Одна из этих функций произвольная (но не равная нулю), а другая должна быть определена так, чтобы произведение удовлетворяло линейному уравнению (1).

Действительно, любую функцию $y(x)$ можно представить в виде $y(x)=\dfrac{y(x)\cdot\sigma(x)}{\sigma(x)}=u(x)\cdot\sigma(x);\quad \sigma(x)\neq 0$.

Дифференцируя равенство (2)

$$y'=u'\sigma+\sigma' u \tag{3}$$

и подставляя (2) и (3) в (1), получим

$$u'\sigma+u(\sigma'+P(x)\sigma)=Q(x). \tag{4}$$

Подбираем хотя бы одну функцию $\sigma(x)$ такую, чтобы $\sigma'+P(x)\sigma=0$ в (4), а, тогда из уравнения (4) получим $u'\sigma=Q(x)$. Полученные уравнения – уравнения с разделяющимися переменными. Действительно, $\dfrac{d\sigma}{\sigma}=-P(x)dx$, т.е. $\sigma(x)=ce^{-\int P(x)dx}$, полагая $c = 1$, получим $\sigma(x)=e^{-\int P(x)dx}$, тогда $\sigma\dfrac{du}{dx}=Q(x)$ или $\dfrac{du}{dx}=Q(x)e^{\int P(x)dx}$, т.е.

$$u(x)=\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C. \tag{5}$$

Тогда общее решение уравнения (1) имеет вид

$$y=u(x)\cdot\sigma(x)=\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+c\right)\cdot e^{-\int P(x)dx}.$$

Пример 1. Найти частное решение уравнения $xy'-3y=x^2$, удовлетворяющее условию $y(1) = 2$.

Решение. Пусть $y=u\cdot\sigma$, тогда $y'=u'\sigma+\sigma' u$. Подставляя эти соотношения в исходное уравнение, получим $xu'\sigma+xu\sigma'-3u\sigma=x^2$ или $xu'\sigma+u(x\sigma'-3\sigma)=x^2$. Откуда $\left[\begin{array}{l} x\sigma'-3\sigma=0 \\ xu'\sigma=x^2. \end{array}\right.$

Решая первое уравнение из совокупности, получим $\dfrac{d\sigma}{\sigma}=3\dfrac{dx}{x}$, т.е. $\sigma=x^3$, тогда $du=\dfrac{dx}{x^2}$, т.е. $u=C-\dfrac{1}{x}$. Следовательно, искомое общее решение исходного дифференциального уравнения –

$$y=u\cdot\sigma=x^3\left(C-\frac{1}{x}\right)=Cx^3-x^2.$$

Найдем частное решение, удовлетворяющее условию $y(1) = 2$ (задача Коши)

$$2 = c\cdot 1 - 1,\ \text{т.е.}\ \ c = 3.$$

Искомое частное решение имеет вид

$$y = 3x^3 - x^2.$$

Метод Лагранжа
(метод вариации произвольной постоянной)

Суть метода вариации произвольной постоянной интегрирования линейного дифференциального уравнения первого порядка (1) состоит в следующем: общее решение дифференциального уравнения $y' + P(x)y = Q(x)$ будем искать в виде общего решения соответствующего однородного уравнения

$$y' + P(x) \cdot y = 0, \tag{6}$$

считая произвольную постоянную этого решения непрерывной функцией от x, т.е. $C = C(x)$.

Находим общее решение соответствующего однородного уравнения $y' + P(x)y = 0$ – это уравнение с разделяющимися переменными, т.е. $\frac{dy}{y} = -P(x)dx$ или

$$y = C \cdot e^{-\int P(x)dx} \tag{7}$$

есть общее решение однородного дифференциального уравнения (6). Общее решение линейного дифференциального уравнения (1) $y' + P(x)y = Q(x)$ будем искать в виде общего решения (7) однородного уравнения (6), считая постоянную C в формуле (7) непрерывной дифференцируемой функцией от переменной x, т.е.

$$y = C(x) \cdot e^{-\int P(x)dx}. \tag{8}$$

Дифференцируя (8), получим

$$y' = C'(x)e^{-\int P(x)dx} - C(x) \cdot P(x)e^{-\int P(x)dx}. \tag{9}$$

Подставляя (8) и (9) в уравнение (1), после приведения подобных получим

$$C'(x) \cdot e^{-\int P(x)dx} = Q(x). \tag{10}$$

Откуда $C'(x) = Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx}$ и, интегрируя последнее уравнение, получим

$$C(x) = \int Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx} dx + C. \tag{11}$$

Тогда общее решение исходного уравнения имеет вид (в формулу (8) подставим (11))

$$y = e^{-\int P(x)dx} \cdot \left[\int Q(x) e^{\int P(x)dx} dx + C \right].$$

Пример 2. Решить уравнение $y' + y\cos x = e^{-\sin x}$.

Решение. Найдем общее решение соответствующего однородного уравнения $y' + y\cos x = 0$.

$\dfrac{dy}{y} = -\cos x dx;$ $y = Ce^{-\sin x}$ – общее решение однородного уравнения.

Решение исходного уравнения будем искать в виде $y = C(x)e^{-\sin x}$, то

$$y' = C'(x)e^{-\sin x} - C(x)\cos x e^{-\sin x}.$$

Тогда, подставляя y и y' в исходное уравнение, получим $C'(x) = 1$ или $C(x) = x + C$, и, следовательно, общее решение $y = (x + C)e^{-\sin x}$.

Метод Эйлера
(интегрирования дифференциальных уравнений первого порядка)

Пусть дано линейное дифференциальное уравнение (1)

$$y' + P(x)y = Q(x).$$

Суть метода Эйлера при интегрировании уравнения (1) состоит в следующем: левая часть уравнения (1) есть производная произведения двух функций – одна из которых y. Умножая (1) на $e^{\int P(x)dx}$, получим

$$y' e^{\int P(x)dx} + yP(x)e^{\int P(x)dx} = Q(x)e^{\int P(x)dx} \quad \text{или} \quad \left(y \cdot e^{\int P(x)dx} \right)' = Q(x)e^{\int P(x)dx},$$

откуда $y = e^{-\int P(x)dx}(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C)$ – общее решение дифференциального уравнения (1).

Пример 3. Решить уравнение $y' + y\mathrm{tg}x = \dfrac{1}{\cos x}$.

Решение. Умножим обе части уравнения на $\dfrac{1}{\cos x}$, получим $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{y}{\cos x} \right) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ или $\dfrac{y}{\cos x} = \mathrm{tg}x + C$, или $y = C\cos x + \sin x$ – общее решение исходного уравнения.

Пример 4. Найти уравнение кривой, которая проходит через точку $A(a,\ a)$ и обладает следующим свойством: если в любой точке $M(x,\ y)$ кривой с ординатой, равной $|BM|$ провести касательную до пересечения с осью ординат в точке C, то площадь трапеции $OCMB$ постоянна и равна a^2 (рис. 1).

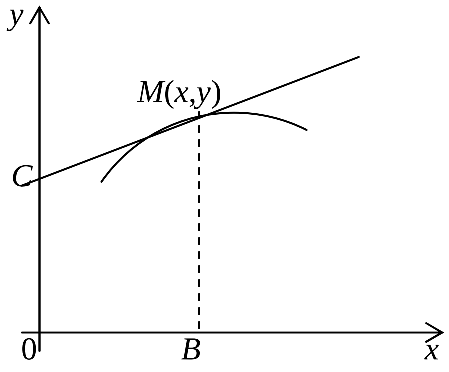

Рис. 1

Решение. Площадь трапеции $OCMB$ – $S = \frac{1}{2}\left(|OC| + |MB|\right)\cdot|OB|$.

Так как $|OC| = y - x\cdot y'$; $|OB| = x$; $|MB| = y$, то получим дифференциальное уравнение $(2y - xy')x = 2a^2$ или $x^2y' - 2xy + 2a^2 = 0$, откуда $0 = x^4\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{y}{x^2}\right) + 2a^2$. Интегрируя, получим $y = x^2\left(\frac{2a^2}{3x^3} + C\right)$. Так как $y(a) = a$, тогда $C = \frac{1}{3a}$. Следовательно, уравнение кривой $y = \frac{2a^2}{3x} + \frac{x^2}{3a}$.

Уравнение Бернулли

Дифференциальное уравнение Бернулли – это уравнение вида

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n, \tag{12}$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ – определенные и непрерывные функции: n – постоянная величина ($n \neq 0$; $n \neq 1$). Если $n = 0$ или $n = 1$, уравнение (12) – это линейное уравнение или уравнение с разделяющимися переменными.

Интегрирование уравнения Бернулли приводится к интегрированию линейного дифференциального уравнения первого порядка с помощью новой переменной: если разделить уравнение (12) на y^n, то

$$\frac{y'}{y^n} + \frac{P(x)}{y^{n-1}} = Q(x). \tag{13}$$

Положим $Z = \frac{1}{y^{n-1}}$; $Z' = (1-n)\frac{y'}{y^n}$, тогда уравнение (13) приводим к виду

$$\frac{Z'}{1-n} + P(x)Z = Q(x). \tag{14}$$

Уравнение (14) – линейное дифференциальное уравнение первого порядка относительно переменной Z, которое можно интегрировать методами, рассмотренными выше.

Отметим, что удобнее интегрировать уравнение Бернулли подстановкой $y = u(x)\cdot\sigma(x)$.

Пример 5. Найти уравнение кривой, проходящей через точку $A(0;1)$, если известно, что в каждой точке нормаль к кривой отсекает на оси абсцисс отрезок, равный квадрату расстояния от начала координат до этой точки.

Решение. Пусть $M(x,y)$ – произвольная точка искомой кривой $y = f(x)$. Уравнение нормали к кривой $y = f(x)$ в точке $M(x,y)$ имеет вид $Y - y = \dfrac{-1}{y'(x)}(X - x)$. Полагая в последнем уравнении $Y = 0$, найдем абсциссу точки пересечения нормали и оси абсцисс в виде

$$X = x + yy'.$$

Тогда уз условия задачи получим уравнение

$$x + yy' = x^2 + y^2 \quad \text{или} \quad y' - y = (x^2 - x)y^{-1}.$$

Это уравнение Бернулли, поэтому $y = u\cdot\sigma$; $y' = u'\sigma + \sigma' u$ и $\sigma(u' - u) + u\sigma' = \dfrac{x^2 - x}{u\sigma}$ откуда

$$\left[\begin{array}{lll} u' - u = 0, & u' - u = 0, & u = e^x, \\ u\sigma' = \dfrac{x^2 - x}{u\sigma}, & \sigma d\sigma = (x^2 - x)e^{-2x}dx, & \sigma^2 = -x^2e^{-2x} + c. \end{array}\right.$$

Тогда $y = u\cdot\sigma = \pm e^x\cdot\sqrt{c - x^2e^{-2x}}$ или $x^2 + y^2 = ce^{2x}$, а так как кривая проходит через точку $A(0;1)$, то $c = 1$. Следовательно, уравнение искомой кривой $x^2 + y^2 = e^{2x}$.

Уравнение Дарбу

Дифференциальное уравнение вида

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy + P(x,y)(xdy - ydx) = 0,$$

где $M(x,y)$ и $N(x,y)$ – однородные функции порядка m, а $P(x,y)$ – однородная функция порядка l $(l \neq m - 1)$, называется уравнением Дарбу. Уравнение Дарбу всегда интегрируется в квадратурах, т.к. подстановка $y = z\cdot x$ (z – новая неизвестная функция) приводит к уравнению Бернулли с неизвестной функцией x от независимой переменной z, причем последнее уравнение будет линейным, если $l = m - 2$, и уравнением с разделяющимися переменными, если $N(x,y) = 0$.

Пример 6 . Решить уравнение $\left(\sqrt{\dfrac{y}{x}} - y\right)dx + (x-1)dy = 0$.

Решение. Запишем данное уравнение в виде $\sqrt{\dfrac{y}{x}}dx - dy + xdy - ydx = 0$, так как $m = 0$ и $l = 0$, то это уравнение Дарбу, тогда с помощью подстановки $y = z\cdot x$, получаем

$$dy = xdz + zdx; \qquad xdy - ydx = x^2dz,$$

$(\sqrt{z} - z)dx + (x^2 - x)dz = 0$ или $\dfrac{dx}{dz} + \dfrac{x}{z-\sqrt{z}} = \dfrac{x^2}{z-\sqrt{z}}$ – уравнение Бернулли относительно функции x ($z - \sqrt{z} \neq 0$).

Интегрируя, получим $\dfrac{1}{x} = c(1-\sqrt{z})^2 + 1$ или $\dfrac{1}{x} = c\left(1-\sqrt{\dfrac{y}{x}}\right)^2 + 1$.

Уравнение Риккати

Уравнение вида $y' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x)$, где правая часть – квадратичная функция от y $(R(x) \neq 0)$, называется уравнением Риккати.

Уравнение Риккати в общем случае не интегрируется в квадратурах, но если y_1 его частное решение, то подстановкой $y = y_1 + \dfrac{1}{z}$, z – новая неизвестная функция, оно приводится к линейному уравнению

$$z' + (2P(x)y_1 + Q(x))z = -P(x).$$

Если известно одно частное решение $y_1(x)$, то заменой $y = y_1(x) + z$ уравнение Риккати сводится к уравнению Бернулли и, следовательно, $\int f(x)dx + \int \varphi(y)dy = C$ может быть решено в квадратурах.

Отметим, что уравнение Риккати

$$y' = Ay^2 + B\frac{y}{x} + \frac{C}{x^2},$$

где A, B и $C \in R$, допускает частное решение вида $y_1(x) = \dfrac{a}{x}$, $a \in R$, если алгебраическое уравнение $Aa^2 + (B+1)a + C = 0$ относительно a имеет действительные корни.

Уравнение Риккати вида $y' = A\dfrac{y^2}{x} + \dfrac{y}{2x} + C$ подстановкой $y = \sqrt{x} \cdot u$ приводится к уравнению с разделяющимися переменными. Уравнение Риккати вида $y' = ay^2 + \dfrac{b}{x^2}$ заменой $y = \dfrac{1}{u}$ сводится к однородному уравнению.

Пример 7. Решить уравнение $y' + y^2 = \dfrac{2}{x^2}$.

Решение. Это уравнение Риккати. Частное решение $y_1(x) = \dfrac{-1}{x}$ (еще одно частное $y = \dfrac{2}{x}$). Тогда $y = z - \dfrac{1}{x}$ и получим $z' - \dfrac{2z}{x} = -z^2$, умножим на x^2, получим $x\dfrac{d(zx)}{dx} = 3zx - (zx)^2$; $u = zx$.

Тогда $x\dfrac{du}{dx} = u(3-u)$ или $u = (u-3)cx^3$ и $u = 3$, получим $z = c(zx-3)x^3$; $z = \dfrac{3}{x}$.

Окончательно $y = z - \dfrac{1}{x} = \dfrac{2cx^3+1}{(cx^3-1)x}$ и $y = \dfrac{2}{x}$.

Замечание 1. Некоторые классы уравнений становятся линейными, если x – функция, а y – аргумент. Так нелинейное уравнение $A(y) + \left(B(y)x - C(y)\right)\dfrac{dy}{dx} = 0$ относительно y решается как линейное, относительно x, – если его представить в виде

$$\frac{dx}{dy} + \varphi(y) \cdot x = f(y),$$

где $\varphi(y) = \dfrac{B(y)}{A(y)}$; $f(y) = \dfrac{C(y)}{A(y)}$.

К линейным приводятся уравнения вида

$$f'(y)\frac{dy}{dx} + f(y) \cdot a(x) = b(x),$$

с помощью замены $z = f(y)$. Например, уравнение Бернулли заменой $z = y^{1-n}$ приводится к линейному уравнению.

Пример 8. Найти решение уравнения $(y^2 - 6x)y' + 2y = 0$.

Решение. Это уравнение не является линейным, если считать искомой функцией y, но оно оказывается линейным, если искомая функция x, а y – аргумент. Данное уравнение эквивалентно уравнению $2yx' - 6x = -y^2$.

Уравнение Бернулли относительно функции x интегрируем, используя подстановку $x = u \cdot \sigma$, получим общее решение в виде $2x = y^2 + cy^3$.

Пример 9. С помощью замены переменных или дифференцирования следующие уравнения привести к линейным и решить их.

1. $xdx = (x^2 - 2y + 1)dy$;
2. $(x+1)(yy' - 1) = y^2$;
3. $x(e^y - y') = 2$;
4. $(x^2 - 1)y' \sin y + 2x \cos y = 2x - 2x^3$;
5. $y(x) = \int\limits_0^x y(t)dt + x + 1$.

Ответы и указания: 1. $x^2 = 2y + Ce^{2y}$, подстановка $x^2 - 2y + 1 = t$;

2. $y^2 = C(x+1)^2 - 2(x+1)$, замена $y^2 = t$;

3. $x + Cx^2 = e^{-y}$, замена $e^y = t$;

4. $\cos y = (x^2 - 1)\ln C(x^2 - 1)$, замена $\cos y = t$;

5. $y = 2e^x - 1$.

Пример 10. Подобрать частное решение для уравнения Риккати.

1. $x^2 y' + xy + x^2 y^2 = 4$; $y_1 = \dfrac{2}{x}$;
2. $y' - y^2 - xy - x + 1 = 0$; $y_1 = -1$;
3. $y' - y^2 + y \sin x - \cos x = 0$; $y_1 = \sin x$;
4. $y' + 2y^2 - \dfrac{1}{x^2} = 0$; $y_1 = \dfrac{1}{x}$; $y_2 = -\dfrac{1}{2x}$;
5. $3y' + y^2 + \dfrac{2}{x^2} = 0$; $y_1 = \dfrac{1}{x}$;
6. $y' = 2xy + y^2 = 5 - x^2$; $y_1 = x + 2$;
7. $y' + 2ye^x - y^2 = e^{2x} + e^x$;
8. $y' = y^2 - xy - x$; $y_1 = x + 1$.

Пример 11. Преобразовать уравнение Риккати с помощью указанных подстановок и указать тип полученных уравнений.

1. $y` + y^2 - 2x^2 y + x^4 - 2x - 1 = 0$; $u(x) = y - x^2$.
2. $y` + y^2 + (xy - 1)f(x) = 0$; $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{u(x)}$.

3. $y` = (x+y)^2$; $u(x) = x + y$.

4. $y` - y^2 + (x^2+1)y - 2x = 0$; $u(x) = y - x^2 - 1$.

5. $y` + ay(y - x) = 1$; $u(x) = y - x$.

6. $y` + xy^2 - x^3 y - 2x = 0$; $u(x) = x^2 - y$.

7. $x^2(y` - y^2) - ax^2 y + ax + 2 = 0$; $u(x) = xy - 1$.

Ответы:

1. $u` + u - 1 = 0$ – уравнение с разделяющимися переменными.
2. $u` - u\left(xf(x) + \frac{2}{x}\right) = 1$ – линейное уравнение.
3. $u` = u^2 + 1$ – уравнение с разделяющимися переменными.
4. $u` - (x^2+1)u = u^2$ – уравнение Бернулли.
5. $u` + a(xu + u^2) = 0$ – уравнение Бернулли.
6. $u` + x^3 u = xu^2$ – уравнение Бернулли.
7. $xu` - (ax+3)u = u^2$ – уравнение Бернулли.

2.5. Уравнение в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель

Если в дифференциальном уравнении

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \tag{1}$$

левая часть есть полный дифференциал некоторой функции $u(x,y)$, то такое уравнение называется дифференциальным уравнением в полных дифференциалах. В этом случае дифференциальное уравнение (1) можно представить в виде

$$du(x,y) = 0, \tag{2}$$

а его общий интеграл

$$u(x,y) = c. \tag{3}$$

Отметим, что уравнение (1) особых решений не имеет.

Признак уравнения в полных дифференциалах устанавливается следующей теоремой.

Теорема 1. Если функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ непрерывны вместе с частными производными $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ в некоторой односвязной области D, то для того, чтобы уравнение (1) было уравнением в полных дифференциалах, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось тождество

$$\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{4}$$

Доказательство.

Необходимость. Пусть левая часть уравнения (1) есть полный дифференциал некоторой функции $u(x,y)$. Тогда

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = du(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$$

откуда и имеем

$$\begin{cases} P(x,y) = \dfrac{\partial u}{\partial x}, \\ Q(x,y) = \dfrac{\partial u}{\partial y}. \end{cases} \tag{5}$$

Дифференцируя первое из равенств (5) по y, а второе по x, получим

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}; \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}.$$

В силу равенства вторых смешанных производных, получаем тождество (4).

Достаточность. Пусть в области D справедливо тождество (4). Покажем, что существует функция $u(x,y)$ в области D такая, что

$$du(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

Фиксируя y в первом уравнении (5) и интегрируя по x, получим

$$u(x,y) = \int P(x,y)dx + \varphi(y). \tag{6}$$

В (6) роль произвольной постоянной выполняет $\varphi(y)$ – функция от y. Определим функцию $\varphi(y)$ в равенстве (6), и тем самым найдем решение дифференциального уравнения (1). Для этого продиффиринцируем равенство (6) по y и результат приравняем $Q(x,y)$ (второе уравнение (5)), получим

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \int \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}dx + \varphi'(y) = Q(x,y).$$

Откуда

$$\varphi'(y) = Q(x,y) - \int \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}dx. \tag{7}$$

Левая часть равенства (7) зависит от y. Докажем, что и правая часть равенства (7) зависит только от y (не зависит от x). Дифференцируя правую часть (7) по x, с учетом условия (4) получим

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(Q(x,y) - \int \frac{\partial P}{\partial y}dx\right) = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\int \frac{\partial P}{\partial y}dx\right) =$$

$$= \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\int P(x,y)dx\right)\right) = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0.$$

Так как производная по x тождественно равна нулю, то правая часть равенства (7) не зависит от x.

Интегрируя равенство (7) по y, получим

$$\varphi(y)=\int\left(Q(x,y)-\int\frac{\partial P}{\partial y}dx\right)dy.$$

Подставляя найденное значение $\varphi(y)$ в (6), получим

$$u(x,y)=\int P(x,y)dx+\int\left(Q(x,y)-\int\frac{\partial P}{\partial y}dx\right)dy$$

это искомая функция, такая, что $du(x,y)=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$.

Таким образом, в силу доказанной теоремы 1 решение дифференциального уравнения (1) строится следующим образом:

1. проверяем выполнение условия (4),
2. находим функцию $u(x,y)$ по методу, изложенному при доказательстве достаточного условия теоремы 1,
3. общее решение уравнения (1) имеет вид $u(x,y) = c$.

Пример 1. Решить уравнение

$$(2xy+3y^2)dx+(x^2+6xy-3y^2)dy=0.$$

Решение. В данном случае $P(x,y)=2xy+3y^2$ и $Q(x,y)=x^2+6xy-3y^2$, тогда $\dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=2x+6y$ и $\dfrac{\partial P}{\partial y}=2x+6y$. Таким образом $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$, и, следовательно, левая часть данного уравнения является полным дифференциалом некоторой функции $u(x,y)$, для которой имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x+3y^2; \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=x^2+6xy-3y^2.$$

Из первого уравнения получим $u(x,y)=x^2y+3xy^2+\varphi(y)$. Для определения $\varphi(y)$ дифференцируем последнее равенство по y и приравниваем к $\dfrac{\partial u}{\partial y}=x^2+6xy-3y^2$, т.е. $\dfrac{\partial u}{\partial y}=x^2+6xy+\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}=x^2+6xy-3y^2$, откуда $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}=-3y^2$, т.е. $\varphi(y)=-y^3$, поэтому $u(x,y)=x^2y+3xy^2-y^3+C_1$. Тогда решение исходного уравнения имеет вид

$$x^2y+3xy^2-y^3=C.$$

Замечание 1. Функцию $u(x,y)$ можно определить по ее полному дифференциалу

$$du = M(x,y)dx + N(x,y)dy.$$

Вычислим криволинейный интеграл второго рода между некоторой фиксированной точкой (x_0,y_0) и точкой с переменными координатами (x,y) по любому пути:

$$u(x,y) = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} M(x,y)dx + N(x,y)dy.$$

Удобнее в качестве пути интегрирования брать ломаную, составленную из двух звеньев, параллельных осям координат (рис. 1).

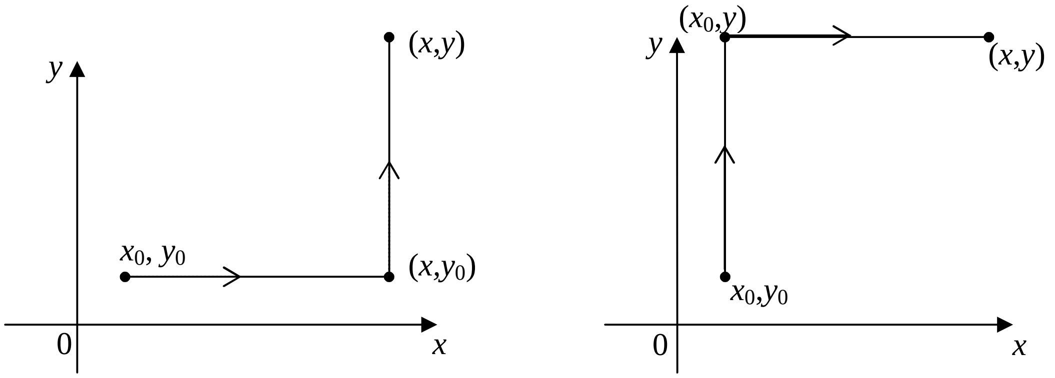

Рис. 1

В этом случае имеем

$$u(x,y) = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} M(x,y)dx + N(x,y)dy =$$

$$= \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y_0)} M(x,y_0)dx + \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} N(x,y)dy = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x_0,y)} N(x_0,y)dy + \int\limits_{(x_0,y)}^{(x,y)} M(x,y)dx.$$

Замечание 2. Если дифференциальное уравнение (1) является дифференциальным уравнением в полных дифференциалах, т.е. справедливо условие (4), то общий интеграл дифференциального уравнения (1) можно записать в виде

$$\int\limits_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy = C \qquad (8)$$

или

$$\int\limits_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x,y)dy = C, \qquad (9)$$

где (x_0,y_0) – точка, принадлежащая области D.

Решение задачи Коши с начальными данными (x_0,y_0), принадлежащими области D, и такими, что $P^2(x_0,y_0)+Q^2(x_0,y_0)\neq 0$, получается из общего интеграла (8) или (9) при $C = 0$.

$$\int_{x_0}^{x} P(x,y)dx+\int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy=0 \qquad (10)$$

или

$$\int_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx+\int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy=0 \qquad (11)$$

причем это решение единственное.

На примере дифференциального уравнения $(x+y+1)dx+(x-y^2+3)\,dy=0$ рассмотрим два способа интегрирования.

Левая часть уравнения является полным дифференциалом некоторой функции $u(x,y)$,т.к.

$$\frac{\partial(x+y+1)}{\partial y}=\frac{\partial(x-y^2+3)}{\partial x}=1.$$

1 способ:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=x+y+1; \qquad u(x,y)=\frac{x^2}{2}+xy+x+C(y); \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=x-C(y);$$

$$x+C`(y)=x-y^2+3; \qquad C`(y)=3-y^2; \qquad C(y)=3y-\frac{y^3}{3}+C;$$

$$u(x,y)=\frac{x}{2}+xy+x-\frac{y^3}{3}+3y+C.$$

Тогда общий интеграл имеет вид

$$3x^2+6xy+6x-2y^3+18y=C.$$

2 способ:

$$u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}(x+y+1)dx+(x-y^3+3)dy=\left[\begin{array}{l}\text{путь интегрирования}\\ \text{выберем}\\ (x_0,y_0)=(0;0)\to(x,0)\to(x,\ y)\end{array}\right]=$$

$$=\int_{(0,0)}^{(x,0)}(x+0+1)dx+\int_{(x,0)}^{(x,y)}(x-y^2+3)dy=\frac{x^2}{2}+x+xy-\frac{y^3}{3}+3y.$$

Тогда общий интеграл имеет вид

$$\frac{x^2}{2}+x+xy-\frac{y^3}{3}+3y=C.$$

Такой же результат, как и в первом случае.

Пример 2. Решить уравнение $e^{2x} - e^{x+y}(1+y') = 0$.

Решение. Запишем исходное уравнение в виде

$$(e^{2x} - e^{x+y})dx - e^{x+y}dy = 0$$

Так как для данного уравнения выполняется условие полного дифференциала
$\frac{\partial P}{\partial y} = -e^{x+y}$; $\frac{\partial Q}{\partial x} = -e^{x+y}$, т.е. $\frac{\partial P}{\partial Y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ и функции P, Q, $\frac{\partial P}{\partial y}$; $\frac{\partial Q}{\partial x}$ непрерывны во всей плоскости, тогда общий интеграл уравнения имеет вид

$$\int_0^x (e^{2x} - e^{x+y})dx + \int_0^y -e^{0+y}dy = C \quad \text{или} \quad \frac{1}{2}e^{2x} - e^{x+y} - e^{y} = C.$$

Пример 3. Найти интегральную кривую уравнения $(2xy-1)dx + (3y^2 + x^2)dy = 0$, проходящую через начало координат.

Решение. Так как $P(x,y)=2xy - 1$, при $x = 0$ и $y = 0$ равна $P(0;0) = -1 \neq 0$, то формула (10) $\int_0^x (2xy-1)dx + \int_0^y 3y^2 dy = 0$ или $x^2 y - x + y^3 = 0$ дает искомое решение задачи Коши, а именно равенства $x^2 y - x + y^3 = 0$ определяет x как функцию от y, т.е. $x = x(y)$, удовлетворяющую условию $x(0) = 0$ и искомому уравнению. Эта функция имеет вид

$$x = \frac{1 - \sqrt{1-4y^4}}{2y}.$$

Интегрирующий множитель

Если уравнение (1) не является уравнением в полных дифференциалах, но удается найти такую функцию $\mu = \mu(x, y)$, что

$$\mu \cdot P(x,y)dx + \mu \cdot Q(x,y)dy = 0. \qquad (12)$$

и $\frac{\partial(\mu \cdot P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu \cdot Q)}{\partial x}$.

Уравнение (12) – уравнение в полных дифференциалах, тогда $\mu = \mu(x, y)$ – интегрирующий множитель уравнения (1). Отметим, что если уравнение (1) – уравнение в полных дифференциалах, то интегрирующий множитель $\mu = 1$.

Если $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ непрерывно дифференцируемы и $|P(x,y)| + |Q(x,y)| \neq 0$ в области D, то интегрирующий множитель существует [6, С. 132, 338]. Если $\mu = \mu(x,y)$ непрерывно дифференцируемая функция, тогда из тождества $\frac{\partial(\mu \cdot P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu \cdot Q)}{\partial x}$ следует, что μ – решение следующего уравнения с частными производными

$$Q\frac{\partial\mu}{\partial x} - P\frac{\partial\mu}{\partial y} = \mu\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right). \qquad (13)$$

Уравнение (13) имеет решение $\mu = \mu(\omega)$, где $\omega = \omega(x,y)$, тогда находим

$$\frac{\partial\mu}{\partial x} = \frac{d\mu}{d\omega}\cdot\frac{\partial\omega}{\partial x}; \qquad \frac{\partial\mu}{\partial y} = \frac{d\mu}{d\omega}\cdot\frac{\partial\omega}{\partial y}$$

и получаем:

$$\left(Q\frac{\partial\omega}{\partial x} - P\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)\frac{d\mu}{d\omega} = \mu\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right).$$

Откуда следует, что если

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q\frac{\partial\omega}{\partial x} - P\frac{\partial\omega}{\partial y}} = \psi(\omega), \qquad (14)$$

то есть левая часть есть функция от ω, то существует интегрирующий множитель $\mu = \mu(\omega)$, который является решением уравнения

$$\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\omega} = \psi(\omega)\cdot\mu,$$

которое имеет вид

$$\mu = e^{\int\psi(\omega)d\omega} \qquad (c = 1). \qquad (15)$$

Условие (14) – необходимое и достаточное для того, чтобы уравнение (1) имело бы функцию $\mu = \mu(\omega(x, y))$ как интегрирующий множитель.

Если интегрирующий множитель зависит только от переменной x, то из (14) имеем

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} = \psi(x) \qquad \text{и} \qquad \mu = e^{\int\psi(x)dx}.$$

Если интегрирующий множитель зависит только от переменной y, то из (14) имеем

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{-P} = \psi(y) \qquad \text{и} \qquad \mu = e^{\int\psi(y)dy}.$$

Пример 4. Решить уравнение $(1-x^2y)dx + x^2(y-x)dy = 0$.

Решение. Это дифференциальное уравнение имеет интегрирующий множитель μ, зависящий от x, так как

$$\frac{\dfrac{\partial P}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial x}}{Q}=\frac{-x^2-2xy+3x^2}{x^2(y-x)}=-\frac{2}{x}=\psi(x)$$

Поэтому $\mu = e^{-\int \frac{2}{x}dx} = \dfrac{1}{x^2}$. Следовательно, уравнение $\dfrac{1}{x^2}(1-x^2y)dx + (y-x)dy = 0$ – уравнение в полных дифференциалах, которое проинтегрируем следующим образом

$$\frac{dx}{x^2} - ydx + ydy - xdy = 0.$$

Так как $\dfrac{dx}{x^2} = d\left(-\dfrac{1}{x}\right)$; $ydx + xdy = d(xy)$; $ydy = d\left(\dfrac{y^2}{2}\right)$, тогда данное уравнение можно записать в виде

$$d\left(-\frac{1}{x}\right) - d(xy) + d\left(\frac{y^2}{2}\right) = 0 \quad \text{или} \quad d\left(\frac{y^2}{2} - xy - \frac{1}{x}\right) = 0,$$

откуда

$$d\left(y^2 - 2xy - \frac{2}{x}\right) = 0,$$

тогда общий интеграл исходного дифференциального уравнения имеет вид

$$y^2 - 2xy - \frac{2}{x} = C.$$

Пример 5. Определить форму зеркала, которое все лучи, выходящие из заданной точки, отражает параллельно данному направлению.

Решение. Пусть точечный источник света расположен в начале координат, ось Ox направлена параллельно данному направлению. Точка $M(x,y)$ – произвольная точка зеркала. Рассмотрим сечение зеркала плоскостью xOy, проходящей через точку $M(x,y)$ и ось Ox. В полученной плоскости в точке $M(x,y)$ проведем касательную MN (рис. 2).

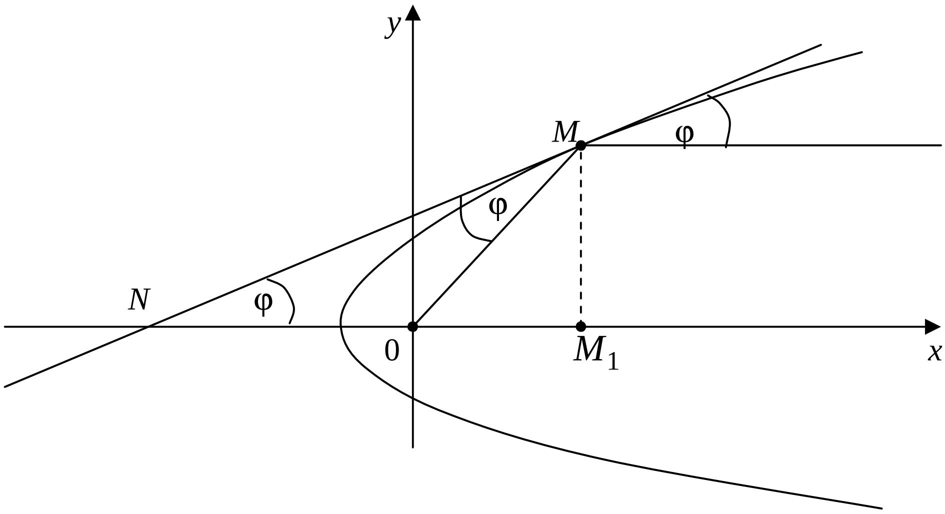

Рис. 2

В силу закона отражения (угол падения равен углу отражения) имеем, что ΔNOM – равнобедренный ($|NO| = |OM|$). $|MM_1| = y$; $|OM_1| = x$; $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{dy}{dx}$ и из ΔNMM_1 имеем

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{|MM_1|}{|NM_1|} = \frac{|MM_1|}{|NO| + |OM_1|} = \frac{MM_1}{\sqrt{(OM_1)^2 + (MM_1)^2} + |OM_1|}.$$

Тогда дифференциальное уравнение, описывающее формулу ($y = f(x)$) сечения зеркала плоскостью xOy имеет вид

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Это однородное уравнение, которое интегрируется с помощью замены $y = u \cdot x$.

Проинтегрируем полученное уравнение как уравнение в полных дифференциалах, используя интегрирующий множитель. Действительно, освободившись от иррациональности после разделения переменных, получим уравнение $xdx + ydy = \sqrt{x^2 + y^2}\,dx$.

Уравнение имеет интегрирующий множитель $\mu(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, поэтому $\dfrac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}} - dx = 0$, $\dfrac{d(x^2 + y^2)}{2\sqrt{x^2 + y^2}} - dx = 0$, $\sqrt{x^2 + y^2} = x + c$, $y^2 = 2cx + c^2$.

Следовательно, сечение зеркала – парабола, а поверхность зеркала – параболоид вращения.

Замечание 3. Если $\mu_0(x, y)$ – интегрирующий множитель уравнения (1) и $u_0(x, y)$ – интеграл этого же уравнения (1), тогда все интегрирующие множители уравнения (1) выражаются формулой $\mu(x, y) = \mu_0(x, y) \cdot \varphi(u_0(x, y))$, где $\varphi(t)$ – произвольная непрерывно дифференцируемая функция.

Используя это утверждение, в ряде случаев удается найти интегрирующий множитель следующим образом.

Уравнение (1) представим в виде

$$P_1(x, y)dx + Q_1(x, y)dy + P_2(x, y)dx + Q_2(x, y)dy = 0$$

и пусть $\mu_1(x,y)$ и $\mu_2(x,y)$ – интегрирующие множители, а $u_1(x,y)$ и $u_2(x,y)$ – интегралы соответственно уравнений $P_1(x, y)dx + Q_1(x, y)dy = 0$ и $P_2(x, y)dx + Q_2(x, y)dy = 0$. Следовательно, все интегрирующие множители первого из этих уравнений имеют вид $\mu(x, y) = \mu_1(x, y) \cdot \varphi_1(u_1(x, y))$, а второго – $\mu(x, y) = \mu_2(x, y) \cdot \varphi_2(u_2(x, y))$, где $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ – произвольные дифференцируемые функции. Если существуют функции $\varphi_1^*(t)$ и $\varphi_2^*(t)$ такие, что

$$\mu_1(x, y) \cdot \varphi_1^*(u_1(x, y)) = \mu_2(x, y) \cdot \varphi_2^*(u_2(x, y)),$$

то $\mu(x, y) = \mu_1(x, y) \cdot \varphi_1^*(u_1(x, y))$ – интегрирующий множитель уравнения (1).

Пример 6. Решить уравнение $(x^3 - xy^2 - y)dx + (x^2 y - y^3 + x)dy = 0$.

Решение. Запишем исходное уравнение в виде

$$x(x^2 - y^2)dx + y(x^2 - y^2)dy + xdy - ydx = 0.$$

Рассмотрим уравнение

$$x(x^2 - y^2)dx + y(x^2 - y^2)dy = 0. \tag{I}$$

Его интегрирующий множитель $\mu(x, y) = \dfrac{1}{x^2 - y^2}$, тогда $xdx + ydy = 0$ и, следовательно, $x^2 + y^2 = c$.

Поэтому все интегрирующие множители уравнения (I) выражаются формулой

$$\mu_1(x, y) = \frac{1}{x^2 - y^2}\varphi(x^2 + y^2),$$

где $\varphi(t)$ – произвольная дифференцируемая функция.

Уравнение

$$xdy - ydx = 0 \qquad \text{(II)}$$

имеет интегрирующий множитель $\mu(x,y) = \frac{1}{xy}$, значит $\frac{dy}{y} - \frac{dx}{x} = c$, т.е. $\frac{y}{x} = c$.

Поэтому все интегрирующие множители уравнения (II) определяются формулой

$$\mu_2(x,y) = \frac{1}{xy}\varphi_2(x,y),$$

где $\varphi_2(t)$ – произвольная дифференцируемая функция.

Так как, $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(\mathrm{t})$ – произвольные функции, подберем их так, чтобы было справедливо равенство $\frac{1}{x^2 - y^2}\varphi_1(x^2 + y^2) = \frac{1}{xy}\varphi_2\left(\frac{y}{x}\right)$.

Последнее имеет место, когда $\varphi_1(t) = 1,\quad \varphi_2(t) = \frac{t}{1 - t^2}$.

Выбрав указанным образом функции $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(\mathrm{t})$, найдем интегрирующий множитель исходного уравнения

$$\mu(x,y) = \mu_1(x,y) = \frac{1}{x^2 - y^2} = \mu_2(x,y) = \frac{1}{xy}\frac{\frac{y}{x}}{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2}.$$

Умножая обе части исходного уравнения на $\mu(x,y) = \frac{1}{x^2 - y^2}$, получим уравнение в полных дифференциалах

$$\left(x - \frac{y}{x^2 - y^2}\right)dx + \left(y + \frac{x}{x^2 - y^2}\right)dy = 0.$$

Решая его, получим $x^2 + y^2 - \ln\left|\frac{x - y}{x + y}\right| = 2c$.

Замечание 4. Уравнение с разделяющимися переменными $M(x) \cdot N(y)dx + M_1(x)N_1(y)dy = 0$ имеет интегрирующий множитель $\mu(x,y) = \frac{1}{N(y) \cdot M_1(x)}$.

Замечание 5. Однородное уравнение $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ имеет интегрирующий множитель $\mu(x,y)=\dfrac{1}{P\cdot x+Q\cdot y}$, $P\cdot x+Q\cdot y\neq 0$.

Замечание 6. Линейное уравнение $y'+P(x)y=Q(x)$ имеет интегрирующий множитель $\mu(x)=e^{\int P(x)dx}$, а уравнение Бернулли $y'+P(x)y=Q(x)y^n$ – $M(x)=y^{-n}\cdot e^{(1-n)\int P(x)dx}$.

2.6. Уравнение Лагранжа и Клеро

Уравнение Лагранжа и Клеро являются дифференциальными уравнениями типа $y=\varphi(x,y')$ или $x=\psi(y,y')$, неразрешенными относительно производной искомой функции.

Уравнение Лагранжа. Уравнение Лагранжа имеет вид

$$y=xf(y')+g(y'), \tag{1}$$

где $f(y')$ и $g(y')$ – известные функции от y'.

Дифференциальное уравнение (1) интегрируется с помощью подстановки

$$y'=p, \tag{2}$$

где p – параметр.

Тогда уравнение (1) имеет вид

$$y=f(p)x+g(p). \tag{3}$$

Дифференцируя (3) по переменной x, получим

$$\frac{dy}{dx}=f(p)+xf'(p)\frac{dp}{dx}+g'(p)\frac{dp}{dx},$$

то есть

$$p-f(p)=[xf'(p)+g'(p)]\frac{dp}{dx}$$

или

$$\frac{dx}{dp}-x\frac{f'(p)}{p-f(p)}=\frac{g'(p)}{p-f(p)}. \tag{4}$$

Это линейное дифференциальное уравнение относительно искомой функции x, общее решение которого

$$x=e^{\int\frac{f'(p)dp}{p-f(p)}}\left[C+\int\frac{g'(p)}{p-f(p)}e^{-\int\frac{f'(p)dp}{p-f(p)}}dp\right]. \tag{5}$$

Исключая из общего решения (5) и дифференциального уравнения (4) p, получим общее решение уравнения (1).

Если уравнение $p - f(p) = 0$ имеет действительные решения $p = p_i$ $(i = \overline{1, n})$, то, подставляя их в дифференциальное уравнение (1) и учитывая, что $f(p_i) = p_i$, получим

$$y = p_i x + g(p_i). \tag{6}$$

Эти прямые могут быть особыми решениями дифференциального уравнения (1).

Пример 1. Решить уравнение $y' + y = x(y')^2$.

Решение. Решим это уравнение относительно y: $y = x(y')^2 - y'$ – это уравнение Лагранжа. Поэтому $p = y'$, тогда $y = xp^2 - p$. Дифференцируя по x, получим $\frac{dy}{dx} = p^2 + 2px\frac{dp}{dx} - \frac{dp}{dx}$ или $p = p^2 + 2px\frac{dp}{dx} - \frac{dp}{dx}$, откуда имеем линейное уравнение $\frac{dx}{dp} + \frac{2}{p-1}x = \frac{1}{p(p-1)}$; решая его, находим $x = \frac{p - \ln p + c}{(p-1)^2}$.

Уравнение Клеро. Частным случаем уравнения Лагранжа является уравнение Клеро, которое имеет вид

$$y = xy' + g(y'). \tag{7}$$

Уравнение Клеро (7) отличается от уравнения Лагранжа (1) тем, что коэффициент при x в уравнении Клеро равен y', а в уравнении Лагранжа коэффициент при x – функция от y'.

Для решения (7) положим $y' = p$, тогда уравнение (7) примет вид

$$y = xp + g(p). \tag{8}$$

Дифференцируя по x уравнение (8), получим

$$p = p + x\frac{dp}{dx} + g'(p)\frac{dp}{dx} \quad \text{или} \quad (x + g'(p))\frac{dp}{dx} = 0.$$

Если $\frac{dp}{dx} = 0$, то $p = c$, тогда с учетом (8), уравнение (7) имеет общее решение

$$y = x \cdot c + g(c). \tag{9}$$

Уравнение $x+g'(p)=0$ и уравнение (8) образуют систему уравнений

$$\begin{cases} x+g'(p)=0, \\ y=xp+g(p). \end{cases} \qquad (10)$$

Исключая из этой системы p, находим особое решение.

Пример 2. Решить уравнение $y\cdot(y')^2+2xy'-y'=0$.

Решение. Это уравнение можно решить как уравнение Лагранжа. В этом случае решим уравнение проще, применяя подстановку $t=y^2$. Тогда $t'=2yy'$, следовательно, исходное уравнение примет вид $(t')^2+4xt'-4t=0$, т.е. исходное уравнение – уравнение Клеро. Решая его, найдем $t=-x^2$ и $t=Cx+\frac{c^2}{4}$, но так как $t=y^2$, то имеем $y^2=cx+\frac{c^2}{4}$.

Задачи для самостоятельной работы

1. Найти общее решение уравнения

1.1) $2xydx+(x^2-y^2)dy=0$.

Ответ: $3x^2y-y^3=C$.

1.2) $(2-9xy^2)xdx+(4y^2-6x^3)ydy=0$.

Ответ: $x^2-3x^3y^2+y^4=C$.

1.3) $e^{-y}dx-(2y+xe^{-y})dy=0$.

Ответ: $xe^{-y}-y^2=C$.

1.4) $\frac{x}{y}dx+(y^2+\ln x)dy=0$.

Ответ: $4y\ln x+y^4=C$.

1.5) $(2x-y+1)dx+(2y-x-1)dy=0$.

Ответ: $x^2+y^2-xy+x-y=C$.

1.6) $(x+e^{\frac{y}{x}})dx+e^{\frac{y}{x}}(1-\frac{x}{y})dy=0 \quad y(0)=2$.

Ответ: $x^2+2ye^{\frac{x}{y}}=4$.

2. Найти общее решение дифференциальных уравнений имеющих интегрирующий множитель

2.1) $\dfrac{(2x-y^3)}{x}-3y^2dy=0$.

Ответ: $x^2-xy^3=C$.

2.2) $ydx+(x+x^2y^2)dy=0$.

Ответ: $xy^2-1=Cxy$.

2.3) $(x^2+y)dx-xdy=0$.

Ответ: $x-\dfrac{y}{x}=C$.

2.4) $(y-\dfrac{1}{x})dx+\dfrac{dy}{y}=0$.

Ответ: $(x^2-C)y=2x$.

2.5) $(x^3+xy^2)dx+(x^2y+y^3)dy=0$.

Ответ: $(x^2+y^2)^2=C$.

2.6) $x\sin xdx+\cos^2 ydy=0$.

Ответ: $4\sin x-4x\cos x+2y+\sin 2y=0$.

2.7) $(x^2+y)dx-xdy=0$.

Ответ: $x-\dfrac{y}{x}=C$.

3. Найти кривую, у которой отрезок касательной в любой точке кривой, заключенный между точкой касания и осью абсцисс, равен расстоянию от точки пересечения касательной с осью абсцисс до точки $A(0;a)$.

Ответ: $2xydx+(y^2-x^2-a^2)dy=0$; $\mu(y)=\dfrac{1}{y^2}$; $x^2+y^2+a^2-Cy=0$.

4. Проинтегрировать дифференциальные уравнения Лагранжа и Клеро.

4.1) $2yy'=x((y')^2+4)$.

Ответ: $y=Cx^2+\dfrac{1}{C}$; $y=\pm 2x$.

4.2) $y+xy'=(y')^2$.

Ответ: $x=\dfrac{C}{p}-p$; $y=-xp+p^2$.

4.3) $y = y(y')^2 + 2xy'$.

Ответ: $3Cx = C^2 - y^2$.

4.4) $y = 2y'x + \dfrac{1}{y'}$.

Ответ: $x = \dfrac{1}{p^2}(\ln p + C)$; $y = 2px + \dfrac{1}{p}$.

4.5) $y = y' + \sqrt{1-(y')^2}$.

Ответ: $\begin{cases} x = \ln|p| - \arcsin p + C \\ y = p + \sqrt{1-p^2}. \end{cases}$

4.6) $y = xy' + \sqrt{1+(y')^2}$.

Ответ: $y = Cx + \sqrt{1+C^2}$; $x^2 + y^2 = 1$.

4.7) $xy' - y = \ln y'$.

Ответ: $y = Cx - \ln C$; $y = \ln x + 1$.

5. Найти кривую, касательные к которой отсекают на осях координат отрезки, сумма длин которых равна $2a$.

Ответ: $y = xy' + \dfrac{2ay'}{y'-1}$; $(y - x - 2a)^2 = 8ax$.

6. Найти кривую, проходящую через начало координат и такую, что отрезок нормали к ней, отсекаемый сторонами первого координатного угла, имеет постоянную длину, равную 2.

Ответ: $\begin{cases} x = \dfrac{p(p^2+2)}{(\sqrt{p^2+1})^3}, \\ y = \dfrac{p^2}{(\sqrt{p^2+1})^3}. \end{cases}$ $\begin{cases} x = \dfrac{p^2}{(\sqrt{p^2+1})^3}, \\ y = \dfrac{2p^2+1}{(\sqrt{p^2+1})^3}. \end{cases}$

7. Найти кривую, касательная к которой образует с осями координат треугольник площадью $2a^2$.

Ответ: $y = xy' + 2a\sqrt{-y'}$; $xy = a^2$.

2.7. Особые решения

Рассмотрим задачу Коши

$$y' = f(x, y), \tag{1}$$

$$y(x_0) = y_0. \tag{2}$$

Справедлива теорема о существовании и единственности решения задачи Коши.

Теорема 1. Если функция $f(x,y)$ и ее частная производная $f_y'(x, y)$ непрерывны в некоторой замкнутой области D плоскости O_{xy}, содержащей точку (x_0,y_0), то существует единственное решение $y = y(x)$ уравнения (1), определенное в интервале $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ и удовлетворяющее условию (2).

Другими словами: при любых начальных условиях в области D существует единственное решение, если только $f(x,y)$ удовлетворяет положенным условиям.

С геометрической точки зрения это означает, что через каждую внутреннюю точку (x_0,y_0) области D проходит единственная интегральная кривая дифференциального уравнения (1).

Точки плоскости xOy, через которые проходит более чем одна интегральная кривая дифференциального уравнения, называются особыми точками этого уравнения.

Интегральная кривая дифференциального уравнения первого порядка называется особой, а соответствующее ей решение – особым решением дифференциального уравнения, если через каждую ее точку проходит, по крайней мере, еще одна интегральная кривая этого уравнения.

Пример 1. Решить уравнение $\sqrt{1-y^2}dx - ydy = 0$.

Решение. Разделив переменные и интегрируя, получим

$$x = -\sqrt{1-y^2} + c \quad \text{или} \quad (x-c)^2 + y^2 = 1.$$

В общем интеграле $(x-c)^2 + y^2 = 1$ исходного дифференциального уравнения содержатся не все решения, т.к. при делении на $\sqrt{1-y^2}$ потеряны решения $y = \pm 1$, которые нельзя найти из общего интеграла. Интегральные кривые исходного уравнения – семейство окружностей радиусом 1 с центром в точках $(c;0)$ и прямые $y=\pm 1$. Но через каждую точку прямых $y=\pm 1$ проходит еще одна интегральная кривая (окружность) исходного дифференциального уравнения. Значит $y=\pm 1$ – особые решения данного уравнения.

Решение, в каждой точке которого нарушается единственность решения задачи Коши, называется особым. Если в дифференциальном уравнении (1) функция $f(x,y)$ непрерывна по переменным x и y и имеет частную производную по y (ограниченную или нет), то особыми решениями могут быть только те кривые $y=\varphi(x)$, во всех точках которых $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ обращается в бесконечность.

Если семейство кривых $\phi(x,y,c)=0$, являющихся интегральными кривыми уравнения $F(x,y,y')=0$ имеет огибающую $y=\varphi(x)$, то она представляет собой особую интегральную кривую этого же уравнения. Если функция $\phi(x,y,c)$ непрерывно дифференцируема, то огибающая входит в состав кривой, определяемой системой уравнений

$$\begin{cases} \phi(x,y,c)=0, \\ \dfrac{\partial\phi(x,y,c)}{\partial c}=0. \end{cases}$$

Пример 2. Найти особые решения уравнения $y'=\sqrt[3]{y^2}+1$.

Решение. Функция $f(x,y)=\sqrt[3]{y^2}+1$ всюду непрерывна, но $\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{\sqrt[3]{y}}$ не ограничена в окрестности точки $(x_0,0)$, следовательно, возможно существование особого решения $y=0$. Но $y=0$ – не решение исходного уравнения, значит, данное дифференциальное уравнение особых решений не имеет.

Пример 3. Найти особые решения уравнения $y'=\sqrt[3]{(y-2x)^2}+2$.

Решение. Правая часть уравнения всюду непрерывна, но частная производная по y

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{2}{3\sqrt[3]{y-2x}}$$

обращается в бесконечность в точках на прямой $y=2x$. Непосредственной проверкой устанавливает, что эта прямая – интегральная. Установим, что решение $y=2x$ – особое решение исходного уравнения. Найдем общее решение этого дифференциального уравнения. Полагая $y-2x=t$, получим $\frac{dt}{dx}=\sqrt[3]{t^2}$, т.е. $x+c=3\sqrt[3]{t}$ или, возвращаясь к переменным x и y, получим

$$27(y-2x)=(x+c)^3.$$

Кривые этого семейства касаются прямой $y = 2x$ при $x_0 = -c$, т.е. в каждой точке интегральной кривой $y = 2x$ нарушается единственность. Следовательно, решение $y = 2x$ – особое решение.

Пример 4. Пусть общее решение некоторого дифференциального уравнения первого порядка $y=\frac{x^2}{2}+cx+c^2$. Найдите особые решения того же уравнения.

Решение. Дискриминантную кривую найдем из системы уравнений

$$\begin{cases} y-\frac{x^2}{2}-cx+c^2=0 \\ -x-2c=0. \end{cases}$$

(второе уравнение получено дифференцированием по c первого уравнения). Исключив параметр c, получим $y=\frac{x^2}{4}$ – это кривая является огибающей, т.к. выполнены условия для огибающей. Действительно, если $\phi(x,y,c)=y-\frac{x^2}{2}-cx-c^2$, то $\frac{\partial\phi}{\partial x}=-(x+c)$; $\frac{\partial\phi}{\partial y}=1$.

Эти частные производные ограничены и одновременно не обращаются в нуль, значит $y=\frac{x^2}{4}$ – особое решение.

Замечание 1. В процессе интегрирования дифференциального уравнения приходится выполнять действия, которые могут нарушить равносильность уравнения (например, деление на выражения, содержащие переменные). В этих случаях требуется каждый раз проверять, не произойдет ли при этом потеря решений, которые могут оказаться особыми.

Пример 5. Решить уравнение $2x\sqrt{y}dx+(1-x^2)dy=0$.

Решение. Разделяя переменные, имеем

$$\frac{2x}{1-x^2}dx+\frac{dy}{\sqrt{y}}=0 \qquad (1-x^2=0;\ \ \sqrt{y}=0).$$

Общий интеграл $-\ln\left|1-x^2\right|+2\sqrt{y}=c$.

Из уравнения $1-x^2=0$ находим $x=\pm 1$. Функции $x = 1$ и $x = -1$ $(y\neq 0)$ – частные решения исходного уравнения. Уравнение $\sqrt{y}=0$ дает особое решение $y=0 \quad (x\neq \pm 1)$.

Пример 6. Решить уравнение $xdy+\left(x\sqrt{\frac{y}{x}-1}-y\right)dx=0$.

Решение. Данное уравнение однородное. Полагая $y=u\cdot t$, получим $xdt+\sqrt{t-1}dx=0$ – уравнение с разделяющимися переменными, которое имеет общее решение $2\sqrt{t-1}+\ln|x|=c$ и особое решение $t=1$, или, возвращаясь к искомой функции *y*, получим $2\sqrt{\frac{y}{x}-1}+\ln|x|=c$ – общее решение, а $y=x \quad (x\neq 0)$ – особое решение.

Замечание 2. Уравнение Бернулли $y'+p(x)y=g(x)y^n \quad (n\neq 0; n\neq 1)$ при $0 < n < 1$, имеет особое решение $y = 0$.

Замечание 3. Если $\mu=\mu(x,y)$ – интегрирующий множитель для дифференциального уравнения первого порядка, то кривые, в точках которых μ обращается в нуль или бесконечность, могут быть особыми решениями данного дифференциального уравнения.

2.8. Уравнения, не разрешенные относительно производной

Уравнение первого порядка, неразрешенное относительно производной, имеет следующий вид

$$F(x,y,y')=0. \tag{1}$$

Если уравнение (1) разрешимо в элементарных функциях относительно y', тогда получаем одно или несколько уравнений, разрешенных относительно y':

$$y'=f_k(x,y) \qquad (k=1,2,3,\ldots) \tag{2}$$

где $f_k(x,y)$ – вещественные функции от *x* и *y*.

Интегрирование уравнения (1) сводится к интегрированию уравнений (2).

Пример 1. Решить уравнение $(y')^2-4y=0$.

Решение. Данное уравнение распадается на два: $y'=2\sqrt{y}$ и $y'=-2\sqrt{y}$, тогда первое имеет решение $y=(x+c)^2; \quad (x\ge -c)$ и второе – $y=(x+c)^2; \quad (x\le -c)$.

Решением данного уравнения будет $y\equiv 0$.

Уравнение вида

$$F((x,y,y',(y')^2,...,(y')^n)=0 \tag{3}$$

дифференциальное уравнение первого порядка *n*-ной степени. Если уравнение разрешимо (в элементарных функциях) относительно y':

$$y'=f_k(x,y); \quad (k=1,2,...,m\le n), \tag{4}$$

то задача его интегрирования сводится к интегрированию уравнений (4).

Если каждое из уравнений (4) имеет общий интеграл

$$\varphi_k(x,y)=c; \quad (k=1,2,...,m\le n), \tag{5}$$

тогда общим интегралом уравнения (3) является совокупность общих интегралов (5). Общий интеграл (3) можно записать в виде одной формулы

$$(\varphi_1(x,y)-c)(\varphi_2(x,y)-c)...(\varphi_m(x,y)-c)=0.$$

Если хоть одно из уравнений (4) имеет особые решения, то оно будет особым решением и для уравнения (3).

Пример 2. Решить уравнение

$$2y(y')^3-(4xy+2y+1)(y')^2+(4xy+2x+1)y'-2x=0.$$

Решение. Решая кубическое уравнение относительно y', получим $y'=1; \quad y'=2x; \quad y'=\frac{1}{2y}$. Интегрируя эти уравнения, получим $y=x+c$; $y=x^2+c$; $y^2=x+c$, тогда общий интеграл данного дифференциального уравнения имеет вид $(y-x-c)(y-x^2-c)(y^2-x-c)=0$. Особых решений данное уравнение не имеет.

Пример 3. Решить уравнение $(y')^2-2y'+1-y+x=0$.

Решение. Решая квадратное уравнение относительно y', получим

$$y'=1+\sqrt{y-x}; \quad y'=1-\sqrt{y-x}.$$

Общее решение – $y = x + \dfrac{(x+c)^2}{4}$ и особое решение – $y = x$ – огибающая кривая общего решения.

Если дифференциальное уравнение содержит только y', т.е. имеет вид

$$F(y') = 0, \tag{6}$$

причем оно определяет хоть одно вещественное значение y', то можно найти все интегральные кривые этого уравнения без квадратур. Действительно, если

$$y' = a_k \quad (k = 1,\ 2,\ \ldots) \tag{7}$$

вещественные корни уравнения (6), тогда $F(a_k) = 0; \quad (k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$.

Из уравнения (7) находим $y = a_k x + c \quad (k = 1,\ 2,\ \ldots)$ или $a_k = \dfrac{y-c}{x}$, поэтому уравнение (6) имеет множество интегральных кривых

$$F\left(\frac{y-c}{x}\right) = 0. \tag{8}$$

Найденное множество – общий интеграл (6). Отметим, что общий интеграл (8) получается из дифференциального уравнения (6) заменой y' на $\dfrac{y-c}{x}$.

Пример 4. Решить дифференциальное уравнение $(y')^3 + (y')^2 - y' + 1 = 0$.

Решение. Общим интегралом данного уравнения будет

$$\left(\frac{y-c}{x}\right)^3 + \left(\frac{y-c}{x}\right)^2 - \left(\frac{y-c}{x}\right) + 1 = 0.$$

Если дифференциальное уравнение не содержит искомой функции, то есть оно имеет вид

$$F(x, y') = 0 \tag{9}$$

и разрешимо (в элементарных функциях) относительно y':

$$y' = f_k(x) \quad (k = 1,\ 2,\ \ldots), \tag{10}$$

тогда $y = \int f_k(x)dx + c$.

Отметим, что уравнения (10), а, следовательно, и (9) могут иметь решения вида

$$x = a, \tag{11}$$

которые могут быть особыми.

Пример 5. Решить уравнение $(y')^2 - \frac{1}{4x} = 0$.

Решение. Решая квадратное уравнение относительно y', получим $y' = \pm\frac{1}{2\sqrt{x}}$, интегрируя, имеем $y = \sqrt{x} + c$; $y = -\sqrt{x} + c$. Особое решение будет $y \equiv 0$.

Если уравнение (9) трудно разрешимо относительно y', то целесообразно ввести параметр t и заменить уравнение (9) двумя уравнениями: $x = \varphi(t)$ и $y' = \psi(t)$. Так как $dy = y'dx$, то в данном случае $dy = \psi(t)\cdot\varphi'(t)dt$, откуда

$$y = \int \psi(t)\cdot\varphi'(t)dt + C,$$

а, следовательно, интегральные кривые уравнения (9) определяются в параметрической форме следующими уравнениями:

$$x = \varphi(t),$$

$$y = \int \psi(t)\varphi'(t)dt + C.$$

Если уравнение (9) разрешимо относительно x, $x = \varphi(y')$, то почти всегда удобно в качестве параметра выбрать $y' = t$. Тогда $x = \varphi(t)$, $dy = y'dx = t\cdot\varphi'(t)dt,\ y = \int t\varphi'(t)dt + C$.

Пример 6. Решить уравнение $(y')^3 - y' - 1 - x = 0$.

Решение. Данное уравнение легко разрешимо относительно x, $x = (y')^3 - y' - 1$. Полагая $y' = t$, получим $x = t^3 - t - 1$, $dy = y'dx = t(3t^2 - 1)dt$, $y = \frac{3t^4}{4} - \frac{t^2}{2} + C$.

Тогда семейство искомых интегральных кривых данного дифференциального уравнения в параметрической форме определяется формулами

$$\begin{cases} x = t^3 - t - 1, \\ y = \dfrac{3t^4}{4} - \dfrac{t^2}{2} + C. \end{cases}$$

Пример 7. Решить уравнение $x\sqrt{1+(y')^2}=y'$.

Решение. Пусть $y'=\mathrm{tg}t,\ t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, тогда $x=\sin t$, $dy=y'dx=\mathrm{tg}t\cdot\cos tdt=\sin tdt$, $y=-\cos t+C$.

Исключая t из уравнений $x=\sin t$, $y=-\cos t+C$ получим $x^2+(y-c)^2=1$ семейство окружностей.

Если дифференциальное уравнение имеет вид

$$F(y,y')=0, \tag{12}$$

и оно трудно разрешимо относительно y', то, как и в предыдущем случае, целесообразно ввести параметр t и заменить уравнение (12) двумя уравнениями: $x=\varphi(t)$ и $y'=\psi(t)$.

Так как $dy=y'dx$, то

$$dx=\frac{dy}{y'}=\frac{\varphi'(t)dt}{\psi(t)} \quad \text{или} \quad x=\int\frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}dt+C.$$

Значит, искомые интегральные кривые дифференциального уравнения (12) определяются уравнениями

$$x=\int\frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}dt+C \quad \text{и} \quad y=\varphi(t).$$

В частности, если уравнение (12) легко разрешимо относительно y, то за параметр удобно взять y'. Действительно, если $y=\varphi(y')$, то, полагая $y'=t$, получим $y=\varphi(t),\ dx=\frac{dy}{y'}=\frac{\varphi'(t)dt}{t}$, а $x=\int\frac{\varphi'(t)dt}{t}+C$.

Пример 8. Решить уравнение $(y')^5+(y')^3+y'-y+5=0$.

Решение. Данное уравнение легко разрешимо относительно y: $y=(y')^5+(y')^3+y'+5$.

Полагая $y'=t$, получим $y=t^5+t^3+t+5$,

$$dx=\frac{dy}{y'}=\frac{5t^4+3t^2+1}{t}=\left(5t^3+3t^2+\frac{1}{t}\right)dt \quad , \quad x=\frac{5t^4}{4}+\frac{3t^2}{2}+\ln|t|+C \quad .$$

Уравнения $y=t^5+t^3+t+5$ и $x=\frac{5t^4}{4}+\frac{3t^2}{2}+\ln|t|+C$ являются параметрическими уравнениями семейства интегральных кривых.

Пример 9. Решить уравнение $y=\sqrt{1+(y')^2}$.

Решение. Пусть $y'=sht$, тогда $y=cht$

$$dx=\frac{dy}{y'}=\frac{sht}{sht}dt=dt,\quad x=t+C.$$

Исключая (это возможно) из $y=cht$ и $x=t+C$ параметр t, получим $y=ch(x-C)$.

Рассмотрим общий случай уравнения (1)

$$F(x,y,y')=0.$$

Заменим уравнение (1) его параметрическим представлением

$$x=\varphi(u,\sigma)\qquad y=\psi(u,\sigma)\qquad y'=\theta(u,\sigma) \tag{13}$$

Так как $dy=y'dx$, тогда имеем

$$\frac{\partial\psi}{\partial u}du+\frac{\partial\psi}{\partial\sigma}d\sigma=\theta(u,\sigma)\left[\frac{\partial\varphi}{\partial u}du+\frac{\partial\varphi}{\partial\sigma}d\sigma\right],$$

откуда, выражая производную $\dfrac{d\sigma}{du}$, получим

$$\frac{d\sigma}{du}=\frac{\theta(u,\sigma)\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}-\dfrac{\partial\psi}{\partial u}}{\dfrac{\partial\psi}{\partial\sigma}-\theta(u,\sigma)\dfrac{\partial\varphi}{\partial\sigma}} \tag{14}$$

уравнение первого порядка, уже разрешенное относительно производной, а значит можно искать решение, опираясь на методы, рассмотренные в предыдущих параграфах. Отметим, что уравнение (14) далеко не всегда будет интегрироваться в квадратурах.

Если уравнение (1) легко разрешимо относительно y, то за параметры u и σ удобно брать x и y'. Действительно, если уравнение (1) приводится к виду $y=f(x,y')$, то x и $y'=p$ – параметры, тогда получим

$y=f(x,p),\ \ dy=\dfrac{\partial f}{\partial x}dx+\dfrac{\partial f}{\partial p}dp$ или $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial p}\cdot\dfrac{dp}{dx}$, откуда

$$p=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial p}\cdot\frac{dp}{\partial x}. \tag{15}$$

Интегрируя уравнение (15) (если это удается) получим $\Phi(x,p,c)=0$. Совокупность уравнений $\Phi(x,p,c)=0$ и $y=f(x,p)$, где p – параметр, определяющий семейство интегральных кривых исходного дифференциального уравнения.

Отметим, что уравнение (15) может быть получено дифференцированием уравнения $y=f(x,y')$ по x.

Действительно, дифференцируя уравнение $y=f(x,y')$ по x и полагая $y'=p$, получим

$$p=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial p}\cdot\frac{dp}{dx},$$

а это уравнение (15). Поэтому этот метод называют интегрирование дифференциальных уравнений с помощью дифференцирования.

Если уравнение (1) легко разрешимо относительно x, т.е.

$$x=f(y,y'), \tag{16}$$

то выбрав за параметры y и $y'=p$ и используя зависимость $dy=y'dx$, получим

$$dy=p\left[\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial p}dp\right]$$

или

$$\frac{1}{p}=\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial p}\cdot\frac{dp}{dy}. \tag{17}$$

Интегрируя уравнение (17), получим

$$\Phi(y,p,c)=0.$$

Это уравнение и $x=f(y,p)$ определяют интегральные кривые исходного уравнения. Отметим, что уравнение (17) может быть получено из уравнения (16) дифференцированием по y.

Рассмотренным методом в п. 2.6 решены уравнения Лагранжа и Клеро.

2.9. Приближенные методы решения дифференциальных уравнений первого порядка

Выше были рассмотрены некоторые классы дифференциальных уравнений первого порядка и методы их решения. Если ни один из них не приводит к решению задачи или требует сложных преобразований и вычислений, тогда используют приближенные методы. Приближенные методы делятся на численные и аналитические. Численные методы не позволяют найти общее решение данного дифференциального уравнения, но с их помощью определяют только частное решение. Рассмотрим некоторые численные методы решения дифференциальных уравнений первого порядка.

1. **Метод Эйлера.** Требуется найти приближенное решение задачи Коши (1)-(2) на отрезке $[x_0; x_0+b]$

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y), \tag{1}$$

$$y(x_0) = y_0. \tag{2}$$

Разобьем отрезок $[x_0; x_0+b]$ на n равных частей точками $x_0, x_1 \ldots x_n = x_0 + b$ и обозначим длину частичного отрезка через h;

Считаем, что известно значение решения в точке x_n, укажем правило нахождения приближенного решения в точке $x_{n+1} = x_n + h$. Интегрируя уравнение (1) на отрезке $[x_n, x_{n+1}]$ получим

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x,y)dx. \tag{3}$$

Используя формулу левых прямоугольников

$$\int_a^b f(x)dx \approx f(a)\cdot(b-a),$$

основанную на приближенной замене площади криволинейной трапеции $aABb$ площадью прямоугольника $aACb$ (рис. 1).

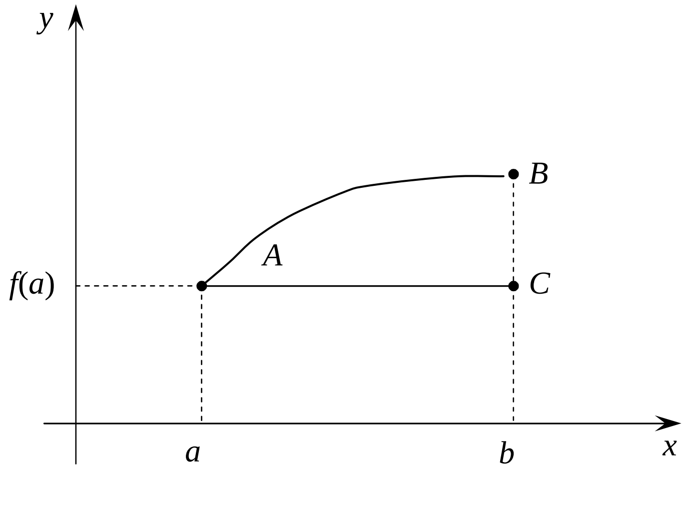

Рис. 1

Тогда равенство (3) запишем в виде

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + h \cdot f(x_n, y(x_n)).$$

При такой замене можно найти только приближенное значение функции $y(x)$ в точке x_{n+1}, то, обозначив это приближенное значение через y_{n+1}, получим расчетную формулу метода Эйлера

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n). \quad (4)$$

Полагая в формуле (4) последовательно $n = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$ и учитывая начальное условие (2), находим приближенные значения решения в точках $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Геометрический смысл метода Эйлера. Уравнение касательной к интегральной кривой $y(x)$ в точке (x_n, y_n) имеет вид

$$y - y_n = y'(x_n)(x - x_n). \quad (5)$$

Так как $y'(x_n) = f(x_n, y_n)$, то, полагая в (5) $x = x_{n+1}$, получаем

$$y(x_{n+1}) - y_n = f(x_n, y_n)(x_{n+1} - x_n). \quad (6)$$

Но так как $h = x_{n+1} - x_n$, то соотношение (6) совпадает с формулой (4), это означает, что в методе Эйлера интегральная кривая на отрезке $[x_n, x_{n+1}]$ заменяется касательной к ней в точке $(x_n, y(x_n))$ (рис. 2), а на отрезке $[x_0; x_0 + b]$ – ломанной (рис. 3), так как на каждом шаге касательная определяется заново. Поэтому метод Эйлера называется методом ломанных.

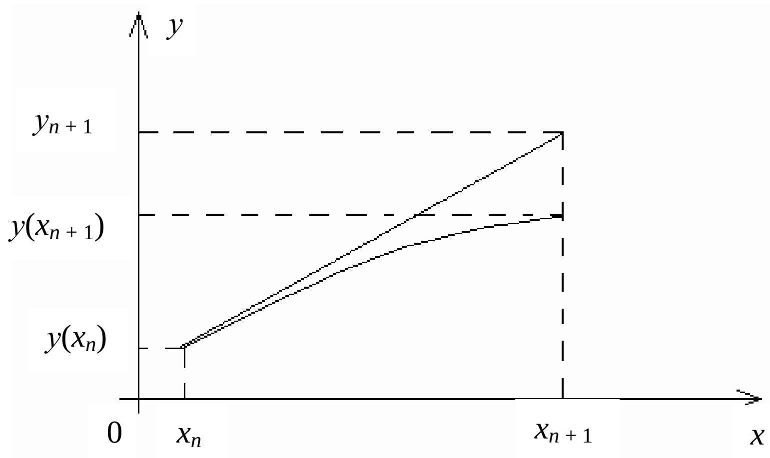

Рис. 2

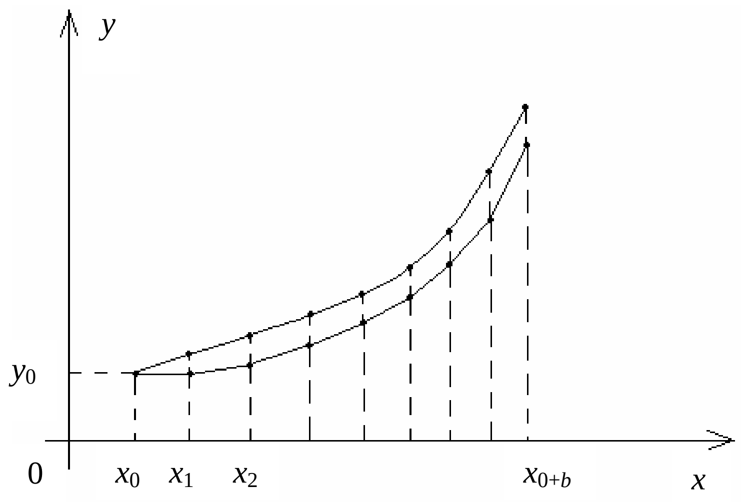

Рис. 3

Пример 1. Найти приближенное решение уравнения $y' = \frac{1}{2}xy$ на промежутке $[0,1]$ при начальных условиях $y(0) = 1$.

Решение. Промежуток $[0,1]$ разделим на 10 равных частей, h = 0,1 и по формуле (4) последовательно находим значения y, которые сведены в табл. 1).

Таблица 1

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_n	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
y_n	1	1,005	1,0151	1,0303	1,0509	1,0772	1,1095	1,1487	1,1946	1,2484
Истинное значение y	1,0025	1,010	1,0227	1,0408	1,0645	1,0942	1,1303	1,1735	1,2244	1,2840
Погрешность, %	0,25	0,49	0,74	1	1,28	1,56	1,84	2,11	2,43	2,77

Данное уравнение допускает точное решение

$$\int_0^y \frac{dy}{y} = \frac{1}{2}\int_0^x x dx \quad \text{или y = e}^{\frac{x^2}{4}}$$

Соответствующие значения y приведены в четвертой строке. В последней строке приведена погрешность – она последовательно возрастает и при x = 1 достигает значения в 2,77%.

Точность метода Эйлера невысока, поэтому чаще применяют модифицированный метод Эйлера.

2. **Модифицированный метод Эйлера**. Пусть требуется найти приближенное решение задачи (1)-(2).

Обозначая $x_n+\frac{h}{2}$ через $x_{n+\frac{1}{2}}$, а приближенное значение задачи (1)-(2) в точке $x_{n+\frac{1}{2}}$ через $y_{n+\frac{1}{2}}$, и применив для вычисления интеграла из равенства (3) формулу средних прямоугольников

$$\int_a^b f(x)dx \approx f(\frac{a+b}{2})\cdot(b-a),$$

основанную на приближенной замене площади криволинейной трапеции $aABb$ площадью прямоугольника $aCDb$ (рис. 4), получим

$$y(x_{n+1}) \approx y(x_n) + h\cdot f(x_{n+\frac{1}{2}}, y(x_{n+\frac{1}{2}})).$$

Правая часть этого приближенного равенства содержит неизвестную величину $y(x_{n+\frac{1}{2}})$, которую найдем, воспользовавшись формулой Эйлера (4), в данном случае имеющую вид

$$y_{n+\frac{1}{2}} = y_n + \frac{h}{2}\cdot f(x_n, y_n). \qquad (7)$$

Тогда

$$y(x_{n+1}) \approx y(x_n) + h\cdot f(x_{n+\frac{1}{2}}, y(x_{n+\frac{1}{2}})),\ \text{а}$$

$$y_{n+1} = y_n + h\cdot f(x_{n+\frac{1}{2}}, y_{n+\frac{1}{2}}). \qquad (8)$$

Формулы (7) и (8) являются расчетными формулами модифицированного метода Эйлера.

Пример 2. Модифицированным методом Эйлера найти приближенное решение уравнения $y' = \frac{1}{2}xy$ на отрезке $[0,1]$, удовлетворяющее начальному условию $y(0)=1$.

Решение. Как и в примере (1), разбиваем отрезок $[0;1]$ на 10 равных частей точками $x_n = n\cdot h$; $n=0,10$, $h=0{,}1$. Расчетные формулы (7) и (8) в данном случае имеют вид

$$y_{n+\frac{1}{2}} = y_n + \frac{h}{2}\cdot\frac{1}{2}x_n y_n, \quad y_{n+1} = y_n + h\cdot\frac{1}{2}x_{n+\frac{1}{2}}y_{n+\frac{1}{2}}.$$

При $n=0$ имеем

$$y_{\frac{1}{2}}=1+0,05\cdot\frac{1}{2}\cdot 0\cdot 1=1,\quad y_1=1+0,1\cdot\frac{1}{2}\cdot(0,05\cdot 1)=1,0025.$$

Аналогично при $n=1$

$$y_{\frac{3}{2}}=1,0025+0,05\cdot 0,1\cdot 1,0025\cdot\frac{1}{2}=1,005,\; y_2=1,0025+0,1\cdot\frac{1}{2}\cdot 0,15\cdot 1,005=1,010.$$

Результаты вычислений приведены в табл. 2.

Таблица 2

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_n	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
y_n	1,0025	1,010	1,0227	1,0407	1,0644	1,0940	1,1301	1,1732	1,2241	1,2836
Истинное значение y	1,0025	1,010	1,0227	1,0408	1,0645	1,0942	1,1303	1,1735	1,2244	1,2840
Погрешность, %	0	0	0	0,01	0,01	0,01	0,01	0,017	0,025	0,031

Точность модифицированного метода Эйлера выше, чем точность метода Эйлера, поэтому он находит широкое применение на практике.

3. **Метод Эйлера – Коши**. Применяя для вычисления интеграла в равенстве (3) формулу трапеций

$$\int_a^b f(x)dx\approx\frac{b-a}{2}(f(a)+f(b)),$$

основанную на приближенной замене площади криволинейной трапеции *aACBb* площадью трапеции (*aABb*) (рис. 4), получим

$$y(x_{n+1})\approx y(x_n)+\frac{h}{2}\cdot f(x_n,y(x_n))+f(x_{n+1},y(x_{n+1})). \tag{9}$$

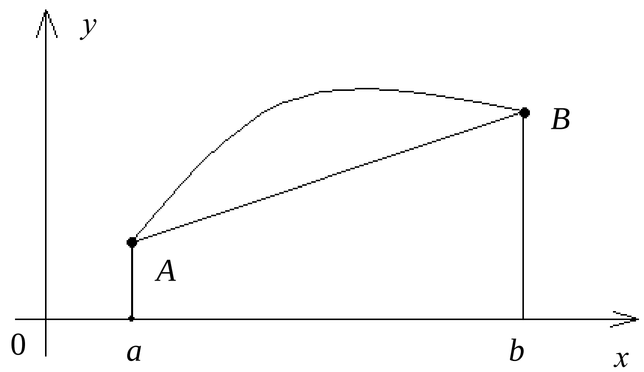

Рис. 4

В правой части равенства (9) находится искомая величина $y(x_{n+1})$, поэтому (9) можно рассматривать как уравнение для нахождения приближенного значения y_{n+1}

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\cdot(f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})). \qquad (10)$$

Если в правой части уравнения (10) y_{n+1} заменить приближенным значением

$$y*_{n+1} = y_n + h\cdot f(x_n, y_n), \qquad (11)$$

которое находим с помощью метода Эйлера, получим

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\cdot(f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_n + h\cdot f(x_n, y_n))). \qquad (12)$$

Формула (12) – расчетная формула метода Эйлера – Коши.

Точность метода Эйлера – Коши достаточно высока, то так как и модифицированный метод Эйлера, он находит широкое практическое применение.

Интегрирование дифференциальных уравнений с помощью рядов

Решение задачи Коши (1)-(2) будем искать в виде ряда по степеням $(x - x_0)$,т.е. в виде

$$y = y_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + ... + c_n(x - x_0)^n + ... \qquad (13)$$

Множители $c_1, c_2, ..., c_n$ находим по методу неопределенных коэффициентов или другими способами.

В противоположность, например методу Эйлера, дающему численное решение (таблица), здесь решение получаем в виде формулы, т.е. аналитически.

Но эта формула не пригодна вне промежутка сходимости ряда. Существуют теоретически возможности, что решение нельзя представить в виде ряда. Но, несмотря на эти ограничения, метод рядов имеет важное практическое значение.

Пример 3. Найти решение задачи Коши

$$y' = \frac{1}{2}xy, \qquad (14)$$

$$y(0) = 1. \qquad (15)$$

Решение. Согласно формуле (3) полагаем

$$y = 1 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + \ldots \qquad (16)$$

Коэффициенты $c_1, c_2, c_3 \ldots c_n$ пока неизвестны. Дифференцируя (16), находим

$$y' = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + 4c_4 x^3 + \ldots + n \cdot c_n x^{n-1} + \ldots \qquad (17)$$

Подставляя (16) и (17) в (14), получаем

$$c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + 4c_4 x^3 + \ldots + = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}c_1 x^2 + \frac{1}{2}c_2 x^3 + \ldots \qquad (18)$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых значениях x, получаем соотношения:

$$c_1 = 0, \quad 2c_2 = \frac{1}{2}, \quad 3c_3 = \frac{1}{2}c_1, \quad 4c_4 = \frac{1}{2}c_2, \ \ldots, \qquad (19)$$

откуда последовательно находим коэффициенты:

$$c_1 = 0, \quad c_2 = \frac{1}{4}, \quad c_3 = 0, \quad c_4 = \frac{1}{32}, \quad c_5 = 0, \ \ldots \qquad (20)$$

Тогда искомое решение имеет вид

$$y = 1 + \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{32} + \frac{x^6}{384} + \ldots \qquad (21)$$

Так при $x = 1$ получаем $y(1) \approx 1{,}2839$ (сравните значения для $x = 1$ из табл. 1 и 2).

Разложение (21) совпадает с разложением функции $y = e^{\frac{x^2}{4}}$ – точное решение задачи (14)-(15)

$$e^{\frac{x^2}{4}} = 1 + \frac{x^2}{4} + \frac{1}{2!}\left(\frac{x^2}{4}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{x^6}{6}\right) + \ldots \qquad (22)$$

Рассмотрим другое решение задачи (14)-(15) – методом последовательного дифференцирования.

Дифференцируя последовательно равенство (14) находим

$$y'' = \left(\frac{1}{2}xy\right)' = \frac{y}{2} + \frac{xy'}{2}, \qquad (23)$$

$$y''' = \left(\frac{y}{2} + \frac{xy'}{2}\right)' = y' + \frac{xy''}{2}, \qquad (24)$$

$$y'''' = \left(y' + \frac{xy''}{2}\right)' = \frac{3}{2}y'' + \frac{xy''}{2}, \ \ldots \qquad (25)$$

Подставляя в (14) $x_0 = 0, y_0 = 1,$ находим $y_0' = 0$, затем из (23), (24) и (25) получаем $y_0'' = \frac{1}{2}$; $y_0''' = 0$; $y_0^4 = \frac{3}{4}$ и т.д.

Подставим найденные значения в ряд Тейлора

$$y = y_0 + y_0' \cdot x + \frac{y_0'' \cdot x^2}{2!} + \frac{y_0''' \cdot x^3}{3!} + \ldots,$$

получим ряд $y = 1 + \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{32} + \ldots$ – аналогично ряду (21).

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти общие и особые решения уравнений:

1.1) $y^2\left((y')^2 + 1\right) = 4$.

Ответ: общее решение: $(x-c)^2 + y^2 = 4$; особые решения: $y = \pm 2$;

1.2) $(y')^2 - yy' + e^x = 0$.

Ответ: общее решение: $y = Ce^x + \frac{1}{C}$; особые решения: $y = \pm 2e^{\frac{x}{2}}$;

1.3) $y^2 \cdot (y'-1) = (2-y')^2$.

Ответ: общее решение: $y = x - c - \frac{1}{x-c}$; особого решения нет;

1.4) $4(y')^2 - 9x = 0$.

Ответ: общее решение: $(x+c)^2 = x^3$; особого решения нет;

1.5) $(y')^2 - xy' - y + \frac{x^2}{2} = 0$.

Ответ: общее решение: $y = \frac{x^2}{2} + Cx + C^2$; особое решение: $4y = x^2$;

1.6) $\left(1+y^2\right)dx + \left(1+x^2\right)dy = 0$.

Ответ: общее решение: $\mathrm{arctg}x + \mathrm{arctg}y = C$; особых решений нет.

1.7) $x\sqrt{1-y^2}dx + y\sqrt{1-x^2}dy = 0$.

Ответ: общее решение: $\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} = C$; особые решения: $y = \pm 1$, $x = \pm 1$;

1.8) $y' + 1 = e^y$.

Ответ: общее решение: $Ce^x + 1 = e^{-y}$; особых решений нет;

1.9) $y \cdot y' + \sqrt{1-y^2} = 0$.

Ответ: общее решение: $y^2 + (x-c)^2 = 1$; особые решения: $y = \pm 1$.

§3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

3.1. Основные определения. Задача Коши

Дифференциальное уравнение второго порядка в общем случае имеет вид

$$F(x; y; y'; y'') = 0, \tag{1}$$

или, если (1) разрешено относительно y'', то

$$y'' = f(x; y; y'). \tag{2}$$

Общим решением дифференциального уравнения (2) называется функция $y = \varphi(x, C_1, C_2)$ (C_1 и C_2 – произвольные постоянные), удовлетворяющая условиям:

1. $\varphi(x, C_1, C_2)$ – решение (2) при каждом фиксированном значении C_1 и C_2.

2. Каковы бы ни были начальные условия

$$y(x_0) = y_0; \quad y'(x_0) = y'_0, \tag{3}$$

существуют единственные значения постоянных $C_1 = C_1^0$ и $C_2 = C_2^0$ такие, что функция $y = \varphi(x, C_1^0, C_2^0)$ является решением уравнения (2) и удовлетворяет начальным условиям (3).

Всякое решение $y = \varphi(x, \overline{C_1}, \overline{C_2})$ уравнения (2), полученное из общего решения $y = \varphi(x, C_1, C_2)$ при фиксированных значениях постоянных $C_1 = \overline{C_1}$ и $C_2 = \overline{C_2}$, называется **частным решением**.

Решения дифференциального уравнения (2), записанные в виде $\Phi(x, y, C_1, C_2) = 0$; $\Phi(x, y, \overline{C_1}, \overline{C_2}) = 0$, называются общим и частным интегралом соответственно. График любого решения дифференциального уравнения (2) – интегральная кривая; общее решение (2) – множество интегральных кривых, а частное решение дифференциального уравнения (2) – одна интегральная кривая из данного множества, проходящая через точку (x_0, y_0) и имеющая в ней касательную с заданным угловым коэффициентом $y'(x_0) = k$.

С геометрической точки зрения дифференциальное уравнение второго порядка (1) устанавливает связь между координатами точки

(x, y) интегральной кривой, угловым коэффициентом $k = y'$ касательной к ней и кривизной $K = \dfrac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$ в точке (x, y), т.к.

$$F(x; y; y'; y'') = F\left(x; y; y' \frac{|y''|}{(1+(y')^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot (1+(y')^2)^{\frac{3}{2}}\right) = 0.$$

Задачей Коши называется задача нахождения решения дифференциального уравнения (2), удовлетворяющего заданным начальным условиям (3).

Справедлива следующая теорема о существовании и единственности решения задачи Коши для дифференциального уравнения второго порядка.

Теорема 1. Если в уравнении (2) функция $f(x; y; y')$ и ее частные производные $f'_y(x; y; y')$ и $f'_{y'}(x; y; y')$ непрерывны в некоторой области D изменения переменных x, y и y', то для любой точки $(x_0, y_0, y'_0) \in D$ существует единственное решение $y = \varphi(x)$ дифференциального уравнения (2), удовлетворяющее начальным условиям (3).

3.2. Дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижения порядка

Задача интегрирования дифференциальных уравнений второго порядка значительно сложнее задачи интегрирования дифференциальных уравнений первого порядка. Один из методов интегрирования, в частных случаях, дифференциальных уравнений второго порядка является **метод понижения порядка**, суть которого состоит в том, что с помощью замены переменной (подстановки) дифференциальное уравнение второго порядка сводится к дифференциальному уравнению первого порядка.

Рассмотрим некоторые типы дифференциальных уравнений второго порядка допускающих понижение порядка.

1. Уравнение вида $y'' = f(x)$. Так как $y'' = (y')'$ то, интегрируя левую и правую часть по переменной x уравнения $(y')' = f(x)$, получим $y' = \int f(x)dx + C_1$, откуда $y = \int\int [f(x)dx]dx + C_1 x + C_2$, где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

Пример 1. Найти решение дифференциального уравнения $y'' = \sin x + x$

Решение. Интегрируя по переменной x дважды, получим

$$y' = -\cos x + \frac{x^2}{2} + C_1$$

и

$$y = -\sin x + \frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2 .$$

2. Уравнения вида $y'' = f(x,y')$, не содержащие явно искомую функцию y. Полагая $y' = p(x)$, получим уравнение первого порядка $p' = f(x,p)$, интегрируя которое, получим $p(x) = \varphi(x,C_1)$; $y' = \varphi(x,C_1)$.
Откуда $y = \int \varphi(x, C_1)dx + C_2$.

Пример 2. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' + 2y' = e^x(y')^2.$$

Решение. Пусть $y' = p(x)$, тогда получим уравнение $p' + 2p = e^x p^2$ – это дифференциальное уравнение Бернулли. Отметим $p = 0$ – решение этого уравнения, т.е. $y = C$. Разделив обе части уравнения на $p^2 \neq 0$ и положив $p^{-1} = z$, относительно z получим линейное дифференциальное уравнение первого порядка $z' - 2z = -e^{-x}$, общее решение которого имеет вид $z = e^{2x}(C_1 + e^{-x})$. Используя замену, имеем

$$y = \int \frac{dx}{e^x + C_1 e^{2x}} + C_2 = \int \left[\frac{1}{e^{2x}} - \frac{C_1}{e^x} + \frac{C_1^2}{1 + C_1 e^x} \right] de^x =$$

$$= -e^x - C_1 x + C_1 \ln\left|1 + C_1 e^x\right| + C_2.$$

3. Уравнение вида $y'' = f(y, y')$, не содержащее явно независимой переменной x. Полагая $y' = p(y)$, тогда

$$y'' = \frac{d(y')}{dx} = \frac{d(y')}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}.$$

Подставив y' и y'', получим дифференциальное уравнение первого порядка $p\dfrac{dp}{dy} = f(y, p)$, где y – независимая переменная. Интегрируя, получим $p = \varphi(x,C_1)$ или, учитывая, что $p = \dfrac{dy}{dx}$, получим уравнение первого порядка $\frac{dy}{dx} = \varphi(y, C_1)$ – уравнение с разделяющимися переменными, общий интеграл которого имеет вид

$$x + C_2 = \int \frac{dy}{\varphi(y, C_1)}.$$

Пример 3. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y \cdot y'' - (y')^2 = 0.$$

Решение. В уравнение не входит явно x. Полагая $y' = p(y)$, получим $y'' = \frac{d(y')}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}$, тогда искомое уравнение примет вид $yp\frac{dp}{dy} - p^2 = 0$.

Решая его, получим $p = C_1 y$; значит $y' = C_1 y$ или $\frac{dy}{y} = C_1 dx$; $\ln|y| = C_1 x + \ln|C_2|$ и $y = C_2 e^{C_1 x}$.

При решении уравнения делили его на y и p, поэтому проверим нет ли потерь решений $y = 0$ и $p = 0$ т.е. $y = 0$; $y = c$. Эти решения содержатся в общем решении $y = C_2 e^{C_1 x}$, если $C_1 = 0$.

4. Уравнение $F(x, y, y', y'') = 0$, в котором левая часть является однородной относительно y, y', y'', допускает понижение порядка на единицу при помощи замены переменной $y = e^{\int z dx}$, $z = z(x)$ – новая неизвестная функция, тогда

$$y' = e^{\int z dx} \cdot z = y \cdot z, \text{ а } y'' = e^{\int z dx} \cdot z^2 + e^{\int z dx} \cdot \frac{dz}{dx} = y(z^2 + z').$$

Подставляя y, y', y'' в исходное уравнение и пользуясь однородностью функции F, получим

$$y \cdot F(x; 1; z, z^2 + z') = 0.$$

Сокращая на y ($y = 0$, решение данного уравнения), получим уравнение первого порядка $y \cdot F(x; 1; z, z^2 + z') = 0$, общее решение которого имеет вид $z = \varphi(x, C_1)$. Тогда интегрируя однородное уравнение $y' = \varphi(x, C_1)\, y$, получим общее решение исходного дифференциального уравнения.

Пример 4. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$x^2 \cdot y \cdot y'' - (y - xy')^2 = 0.$$

Решение. Левая часть данного дифференциального уравнения – однородная функция относительно переменных y, y', y'' с показателем однородности 2.

$$F(x, \lambda y, \lambda y', \lambda y'') = \lambda^2[x^2y \cdot y'' - (y - xy')^2] = \lambda^2 F(x, y, y', y'').$$

Полагая $y = e^{\int z dx}$, то $y' = y \cdot z$, $y'' = y[z^2 + z']$, где z – новая неизвестная функция.

Тогда $x^2y^2(z^2+z') - (y - xyz)^2 = 0$ или $y^2[x^2(z^2+z') - (1 - xz)^2] = 0$. Функция $y = 0$ – решение данного уравнения. При $y \neq 0$, имеем $x^2z^2 + x^2z' - 1 + 2xz - x^2z^2 = 0$, откуда $z' + \frac{2}{x}z = \frac{1}{x^2}$ – линейное неоднородное уравнение первого порядка, общее решение которого $z = \frac{C_1}{x^2} + \frac{1}{x}$. Согласно замене $y' = y \cdot z$ имеем $y = C_2 e^{\int\left(\frac{C_1}{x^2}+\frac{1}{x}\right)dx} = C_2 x \cdot e^{-\frac{C_1}{x}}$ – общее решение исходного уравнения.

Решение $y = 0$ получается при $C_2 = 0$.

5. Уравнение в точных производных.

Рассмотрим уравнения вида

$$F(x, y, y', y'') = 0, \tag{1}$$

левые части которых являются точными производными от некоторой функции $\Phi(x, y, y')$, т.е.

$$F(x, y, y', y'') = \frac{d}{dx}\left[\Phi(x, y, y')\right]. \tag{2}$$

Уравнения типа (1), удовлетворяющие условию (2), называют уравнениями в точных производных. Из (2) следует, что

$$\Phi(x, y, y') = C_1 \tag{3}$$

является первым интегралом дифференциального уравнения (1).

Уравнение (3) – уравнение первого порядка относительно искомой функции, т.е. уравнения в точных производных допускают понижение порядка на единицу.

Отметим, если исходное уравнение (1) не является уравнением в точных производных, то в некоторых случаях удается найти такую функцию $\mu = \mu(x, y, y', y'')$ (интегрирующий множитель), что после умножения на нее уравнение (1) – уравнение в точных производных.

Замечание 1. При решении задачи Коши для уравнений, допускающих понижение порядка произвольные постоянные целесообразно находить после каждого интегрирования.

Пример 5. Найти решение задачи Коши для дифференциального уравнения $xy'' - y' - x^2yy' = 0$; $y(1) = 0$; $y'(1) = 2$.

Решение. Разделим левую и правую часть уравнения на $x^2 \neq 0$, приведем его к уравнению в точных производных: $\dfrac{xy'' - y'}{x^2} - yy' = 0$ или $\left(\dfrac{y'}{x}\right)' - \left(\dfrac{y^2}{2}\right)' = 0$, $\left(\dfrac{y'}{x} - \dfrac{y^2}{2}\right)' = 0$. Откуда получаем, что $\dfrac{y'}{x} - \dfrac{y^2}{2} = C_1$.

Постоянную C_1 находим, учитывая начальные условия. Имеем $C_1 = 2 - \dfrac{0^2}{2} = 2$. Тогда $\dfrac{y'}{x} = \dfrac{y^2}{2} + 2$ – уравнение с разделяющимися переменными, интегрируя его $\int \dfrac{dy}{y^2+4} = \int \dfrac{x}{2} dx$, получим $\operatorname{arctg} \dfrac{y}{2} = \dfrac{x^2}{2} + C_2$. Учитывая начальные условия, находим $C_2 = -\dfrac{1}{2}$. Следовательно, решением задачи Коши является функция $y = 2 \cdot \operatorname{tg} \dfrac{x^2 - 1}{2}$.

3.3. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с переменными коэффициентами

Дифференциальное уравнение вида

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = 0, \tag{1}$$

где $p(x)$ и $q(x)$ – непрерывные функции на $(a; b)$, линейное относительно неизвестной функции y и ее производных y', y'', называется **линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с переменными коэффициентами**.

Теорема 1. Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – частные решения уравнения (1), то

$$y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x), \tag{2}$$

где C_1 и C_2 – произвольные действительные числа, также является решением этого уравнения.

Доказательство теоремы проводится непосредственной проверкой справедливости равенства (1) при подстановке (2).

Функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ **называются линейно зависимыми** на интервале $(a;\ b)$, если существуют числа α_1 и α_2, хотя бы одно из них отлично от нуля, такие, что

$$\alpha_1 y_1(x)+\alpha_2 y_2(x)=0,\ \ \forall x\in(a;b). \tag{3}$$

Отметим, что функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ **линейно зависимы** на $(a;\ b)$, если существует число $k\neq 0$, такое, что $y_1(x)=ky_2(x)$.

Функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ **называются линейно независимыми** на интервале $(a;\ b)$, если равенство (3) имеет место при $\alpha_1=\alpha_2=0$.

Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – две дифференцируемые функции, то определитель

$$W(x)=W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \tag{4}$$

называется **определителем Вронского** или **вронскианом функций** $y_1(x)$ и $y_2(x)$.

Два частных решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ уравнения (1) линейно независимы на интервале $(a;b)$, тогда и только тогда, когда определитель Вронского $W(x)\neq 0$ для $\forall x\in(a;b)$.

Теорема 2 (о структуре общего решения линейного однородного уравнения второго порядка).

Если $y_1(x)$, $y_2(x)$ – линейно независимые частные решения уравнения (1), то функция $y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$, где C_1 и C_2 – произвольные постоянные, является общим решением дифференциального уравнения (1).

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно показать:

1. Функция (2) $y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ является решением уравнения (1) при любых C_1 и C_2.

2. Из этой функции (2) можно получить частное решение, удовлетворяющее любым начальным условиям:

$$y(x_0)=y_0,\ \ y'(x_0)=y_0',\ \ x_0\in(a;b). \tag{5}$$

Первое утверждение вытекает из теоремы 1.

Доказательство второго утверждения следует из того, что система линейных алгебраических уравнений относительно C_1 и C_2

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) = y_0, \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) = y_0', \end{cases} \tag{6}$$

где x_0, y_0, y_0' – заданные начальные условия (5), имеет единственное решение, т.к. $W(y_1, y_2) \neq 0$.

Замечание 1. Из теоремы (2) имеем, что структура общего решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка (1) имеет вид $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$, где $y_1(x)$ и $y_2(x)$ два частных линейно независимых решения уравнения (1).

Формула общего интеграла линейно однородного уравнения второго порядка с переменными коэффициентами.

Для получения формулы общего интеграла линейного однородного уравнения второго порядка с переменными коэффициентами будем опираться на следующую теорему (доказательство которой содержится в более общих курсах анализа):

Теорема*: Если коэффициенты $p(x)$ и $q(x)$ уравнения (1) непрерывные функции на $(a;b)$, тогда всякое частное решение $y(x)$ этого уравнения будет непрерывным на $(a;b)$.

Теорема 3. Если известно одно частное решение уравнения (1) $y_1(x) \neq 0$, то нахождение общего решения уравнения (1) сводится к интегрированию функций $p(x)$ и $y_1(x)$.

Доказательство. Пусть $y_1(x)$ частное решение уравнения (1) $\left(y_1(x) \neq 0\right)$, а $y_2(x)$ – любое другое частное решение уравнения (1), тогда справедливы равенства

$$\frac{d^2 y_2}{dx^2} + p(x)\frac{dy_2}{dx} + q(x) y_2 = 0, \tag{6}$$

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} + p(x)\frac{dy_1}{dx} + q(x) y_1 = 0. \tag{7}$$

Умножая тождества (6) на y_1 и (7) на y_2, затем, вычитая, получим

$$y_1 \frac{d^2 y_2}{dx^2} - y_2 \frac{d^2 y_1}{dx^2} + p(x)\left[y_1 \frac{dy_2}{dx} - y_2 \frac{dy_1}{dx} \right] = 0. \tag{8}$$

Полагая

$$y_1\frac{dy_2}{dx}-y_2\frac{dy_1}{dx}=z, \tag{9}$$

тогда $\frac{dz}{dx}=\frac{dy_1}{dx}\cdot\frac{dy_2}{dx}+y_1\frac{d^2y_2}{dx^2}-\frac{dy_2}{dx}\cdot\frac{dy_1}{dx}-y_2\frac{d^2y_1}{dx^2}=y_1\frac{d^2y_2}{dx^2}-y_2\frac{d^2y_1}{dx^2}$,

а, следовательно, уравнение (8) примет вид $\frac{dz}{dx}+p(x)z=0$ – уравнение с разделяющимися переменными, интегрируя которое получим

$$z=C_2e^{-\int p(x)dx}. \tag{10}$$

С другой стороны, равенство (9) запишем в виде (разделим на y_1)

$$\frac{dy_2}{dx}+y_2\left(-\frac{1}{y_1}\frac{dy_1}{dx}\right)=\frac{z}{y_1}. \tag{11}$$

Это линейное уравнение первого порядка относительно y_2

$$p(x)=-\frac{y_1'}{y_1}=-(\ln y_1)'; \quad q(x)=\frac{z}{y_1}.$$

Тогда по формуле общего решения для дифференциального уравнения первого порядка имеем

$$y_2=e^{\int d(\ln y_1)}\cdot\left[\int\frac{z}{y_1}e^{-\int d\ln y_1}dx+C_1\right]=y_1\cdot\left[\int\frac{z}{y_1^2}dx+C_1\right]=$$

$$=C_1y_1+y_1\int\frac{z}{y_1^2}dx=C_1y_1+C_2y_1\int\frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2}dx.$$

Итак, общий интеграл однородного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами имеет вид

$$y=C_1y_1+C_2y_1\int\frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2}dx. \tag{12}$$

Формула (12) показывает, что нахождение общего решения уравнения (1) сводится к интегрированию функций $p(x)$ и $y_1(x)$.

Формула (12) называется формулой Абеля.

Пример 1. Решить задачу Коши

$$(2x-x^2)y''+(x^2-2)y'+2(1-x)y=0, \quad y(3)=1; \quad y'(3)=0.$$

Решение. Для решения данного однородного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами воспользуемся формулой Абеля. Для чего найдем хотя бы одно частное решение. Подбором устанавливаем, что $y_1 = e^x$ – частное решение данного уравнения, тогда второе частное решение для данного дифференциального уравнения

$$y_2 = e^x \cdot \int e^{-2x} \cdot e^{\int \frac{x^2-2}{x^2-2x}dx} dx = e^x \int (x^2 - 2x)e^{-x} =$$

$$= e^x \left[-e^{-x}(x^2 - 2x) - 2(x-1)e^{-x} - 2e^{-x} \right] = -x^2 + 2x - 2x + 2 - 2 = -x^2,$$

то есть

$$y_2 = -x^2.$$

Следовательно, общее решение исходного уравнения имеет вид $y = C_1 e^x + C_2 x^2$.

Используя начальные условия, получим частное решение

$$y = -2e^{x-3} + \frac{1}{3}x^2.$$

Теорема 4. Интегрирование линейного однородного уравнения второго порядка с переменными коэффициентами всегда можно привести к интегрированию линейного уравнения первого порядка – уравнению Риккати.

Доказательство. В дифференциальном уравнении

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{13}$$

положим

$$y = e^{\int z dx}; \quad z = z(x). \tag{14}$$

Тогда $y' = e^{\int z dx} \cdot z$, $y'' = e^{\int z dx} \cdot z^2 + e^{\int z dx} \cdot z'$ и подставляя в (13), после элементарных преобразований получим

$$z' + z^2 + p(x)z + q(x) = 0. \tag{15}$$

Уравнение (15) – уравнение Риккати.

Теорема 5. Интегрирование линейного однородного уравнения второго порядка с переменными коэффициентами можно привести к интегрированию уравнения вида

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + zy = 0.$$

Доказательство. В дифференциальном уравнении

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{16}$$

положим $y = u(x)\cdot z(x)$, тогда уравнение (16) имеет вид

$$u''\cdot z + 2u'z' + uz'' + p\cdot(u'z + uz') + q\cdot u\cdot z = 0. \qquad (17)$$

Выбирая теперь функцию u так, чтобы $2\dfrac{du}{dx} + p(x)u = 0$, и, интегрируя, получим $u = e^{-\int \frac{p}{2}dx}$.

Тогда уравнение (17) для функции $Z(x)$ имеет вид $z'' + I(x)z = 0$, где $I(x) = -\dfrac{p(x)}{2} - \dfrac{p^2(x)}{4} + q(x)$.

Замечание 2. Любое линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

можно привести к линейному однородному дифференциальному уравнению второго порядка с постоянными коэффициентами с помощью подстановки

$$t = C\cdot\sqrt{q(x)}dx.$$

Замечание 3. Дифференциальное уравнение Эйлера (линейное однородное с переменными коэффициентами)

$$a_0x^2y'' + a_1xy' + a_2y = 0,$$

где a_0, a_1, a_2 – постоянные числа, с помощью подстановки $x = e^t$ приводится к линейному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами. При этом имеем

$$y' = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{x'_t} = \frac{1}{e^t}\cdot\frac{dy}{dt},$$

$$y'' = \frac{d(y')}{dx} = \frac{d\left(\frac{1}{e^t}\cdot\frac{dy}{dt}\right)}{d(e^t)} = \frac{\frac{1}{e^t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)}{e^t} = \frac{1}{e^{2t}}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right).$$

Замечание 4. Обобщенное однородное дифференциальное уравнение Эйлера второго порядка вида

$$A_0(ax+b)^2y'' + A_1(ax+b)y' + A_2y = 0,$$

где A_0, A_1, A_2, a, b – постоянные числа, приводится к линейному дифференциальному уравнению второго порядка с постоянными коэффициентами с помощью подстановки $ax + b = t$.

При этом имеем

$$\frac{dy}{dx} = a \cdot e^{-t}\frac{dy}{dt}; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = a^2e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right).$$

Пример 2. Даны функции $y_1 = x + 2$ и $y_2 = x - 2$. Являются ли данные функции линейно зависимыми?

Решение. По определению функции y_1 и y_2 линейно зависимы, если равенство $C_1y_1 + C_2y_2 = 0$ выполняется хотя бы при одном $C_1 \neq 0$ (или $C_2 \neq 0$). Если данное равенство возможно только при $C_1 = C_2 = 0$, то функции y_1 и y_2 линейно независимы.

Для данных функций составим равенство $C_1(x+2) + C_2(x-2) = 0$ или $(C_1 + C_2)x + 2(C_1 - C_2) = 0$.

В левой части последнего равенства имеем многочлен первой степени, он тождественно равен нулю, тогда и только тогда, когда его коэффициенты равны нулю, т.е.

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ C_1 - C_2 = 0. \end{cases}$$

Эта система имеет решения $C_1 = 0$ и $C_2 = 0$, а это значит, что функции $y_1 = x + 2$ и $y_2 = x - 2$ линейно независимы.

Пример 3. Даны функции $y_1 = x$, $y_2 = 2x + 3$, $y_3 = 3x + 4$. Являются ли данные функции линейно зависимыми?

Решение. По определению функции y_1 и y_2 линейно зависимы, если равенство $C_1y_1 + C_2y_2 + C_3y_3 = 0$ выполняется хотя бы при одном $C_1 \neq 0$, или $C_2 \neq 0$, или $C_3 \neq 0$. Составим равенство $C_1x + C_2(2x+3) + C_3(3x+4) = 0$ или $x(C_1 + 2C_2 + 3C_3) + 3C_2 + 4C_3 = 0$. Откуда имеем систему линейных уравнений относительно C_1, C_2, C_3:

$$\begin{cases} C_1 + 2C_2 + 3C_3 = 0, \\ 3C_2 + 4C_3 = 0. \end{cases}$$

Это однородная система двух линейных уравнений с тремя неизвестными. Она имеет бесконечное множество решений, в том числе ненулевые. А это значит, что функции y_1, y_2, y_3 – линейно зависимые.

Замечание 5. Известно, что если система функций $y_1, y_2, ..., y_n$ линейно зависима на $[a;b]$, то определитель Вронского этих функций тождественно равен нулю на $[a;b]$. Обратное утверждение неверно, т.е. определитель Вронского может обращаться в нуль и в том случае, когда данные функции линейно независимы на некотором промежутке. Например, рассмотрим функции

$$y_1=\begin{cases}0, & 0\le x\le 1,\\ x-1, & 1<x\le 2.\end{cases} \quad \text{и} \quad y_2=\begin{cases}x-1, & 0\le x\le 1,\\ 0, & 1<x<2.\end{cases}$$

На отрезке $[0;2]$ функции y_1 и y_2 линейно независимы, т.к. равенство $C_1y_1+C_2y_2=0$ имеет место при $C_1=C_2=0$. В то же время определитель Вронского для функций y_1 и y_2 будет иметь вид: для $x\in[0;1]$ $W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix}0 & x-1\\ 0 & 1\end{vmatrix}\equiv 0$, а для $x\in(1;2]$ $W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix}x-1 & 0\\ 1 & 0\end{vmatrix}\equiv 0$, т.е. для любого $x\in[0;2]$ $W(y_1,y_2)\equiv 0$.

Пример 4. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y''+\frac{2}{x}\cdot y'+y=0.$$

Решение. Структура общего решения однородного уравнения второго порядка с переменными коэффициентами имеет вид

$$y=c_1\cdot y_1+c_2\cdot y_2,$$

где y_1 и y_2 – частные линейно независимые решения исходного однородного уравнения.

Подбором устанавливаем, что частным решением исходного уравнения является функция $y_1=\dfrac{\sin x}{x}$. (Непосредственно, проверкой убедитесь в этом). Полагая, $y=\dfrac{\sin x}{x}\int zdx$ последовательно находим y', y'', подставляем в исходное уравнение y, y' и y'' после преобразований получим уравнение $z'\sin x+2\cos xz=0$.

Откуда имеем $z=\dfrac{c_1}{\sin^2 x}$.

Тогда общее решение исходного уравнения

$$y=\frac{\sin x}{x}\int\frac{c_1}{\sin^2 x}=\frac{\sin x}{x}(c_2-c_1ctgx)=c_2\frac{\sin x}{x}-c_1\frac{\cos x}{x}.$$

Замечание 6. Подстановка $y = \frac{\sin x}{x}\int z dx$ дала возможность понизить порядок линейного дифференциального уравнения до дифференциального уравнения первого порядка линейного относительно новой функции.

Замечание 7. Отметим, что, зная одно частное решение y_1 линейного однородного уравнения, можно при помощи замены искомой функции $y = y_1\int z dx$ понизить его порядок, а, следовательно, и порядок соответствующего неоднородного уравнения на единицу. Полученное уравнение относительно z будет снова линейным.

Поэтому, если мы рассматриваем линейные дифференциальные уравнения второго порядка, то указанная замена приводит к линейному дифференциальному уравнению первого порядка, которое интегрируется в квадратурах.

Упражнение. Найти общее решение дифференциального уравнения

1. $y'' - \frac{y}{x} + \frac{y}{x_2} = 0$.

Ответ: частное решение $y_1 = x$; общее решение $y = \frac{x}{2}\ln^2 x + c_1 x\ln x + c_2 x$.

2. $y''\sin^2 x = 2y$.

Ответ: частное решение $y_1 = \mathrm{ctg}x$; общее решение $y = c_1\mathrm{ctg}x + c_2(1 - x\mathrm{ctg}x)$.

3.4. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с переменными коэффициентами

Дифференциальное уравнение вида

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = f(x) \tag{1}$$

(где $p(x)$, $q(x)$ и $f(x)$ – непрерывные функции от x) – линейное уравнение относительно функции y и y', y'', которое называется **линейным неоднородным дифференциальным уравнением второго порядка с переменными коэффициентами.**

Теорема 1 (о структуре общего решения неоднородного уравнения). Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами есть сумма любого его частного решения и общего решения соответствующего однородного уравнения.

Доказательство. Пусть y^* некоторое частное решение дифференциального уравнения (1) т.е.

$$\frac{d^2y^*}{dx^2}+p(x)\frac{dy^*}{dx}+q(x)y^*=f(x). \qquad (2)$$

Вычитая из уравнения (1) уравнение (2) получим

$$\frac{d^2(y-y^*)}{dx^2}+p(x)\frac{d(y-y^*)}{dx}+q(x)(y-y^*)=0. \qquad (3)$$

Это однородное дифференциальное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами, структура общего решения которого (п. 3.3, теорема 2) имеет вид

$$y-y^*=C_1y_1+C_2y_2, \qquad (4)$$

где y_1 и y_2 – суть частные линейно независимые решения соответствующего однородного уравнения (1).

Из равенства (4) следует, что общее решение неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами имеет вид

$$y=y^*+C_1y_1+C_2y_2, \qquad (5)$$

где y^* – любое частное решение дифференциального уравнения (1), а $C_1y_1+C_2y_2$ – общее решение соответствующего однородного дифференциального уравнения.

Из теоремы 1 следует, что для нахождения общего решения неоднородного уравнения нужно найти общее решение соответствующего однородного уравнения (см. п. 3.3, теорема 3) и любое y^* – частное решение неоднородного уравнения.

Функцию y^* можно определить методом вариации произвольных постоянных.

Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа)

Пусть дано неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами (1), соответствующее ему однородное уравнение

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0 \qquad (6)$$

имеет общее решение

$$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x), \qquad (7)$$

где y_1 и y_2 – частные линейно независимые решения уравнения (6).

Общее решение неоднородного дифференциального уравнения (1), согласно методу вариации произвольных постоянных, будем искать в виде общего решения (7) однородного уравнения (6), считая, что C_1 и C_2 – функции x, т.е.

$$y = C_1(x)\, y_1 + C_2(x)\, y_2. \tag{8}$$

Дифференцируя равенство (8), получим

$$\begin{aligned} y' &= C_1'(x)y_1 + C_1(x)y_1' + C_2'(x)y_2 + C_2(x)y_2' = \\ &= (C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2) + (C_1(x)y_1' + C_2(x)y_2'). \end{aligned} \tag{9}$$

Поскольку необходимо определить две функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$, то одно соотношение между ними можно выбрать произвольно. Пусть $C_1(x)$ и $C_2(x)$ такие, что справедливо равенство

$$C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0. \tag{10}$$

Тогда первая производная, определяемая формулой (9), упрощается и примет вид

$$y' = C_1(x)y_1' + C_2(x)y_2'. \tag{11}$$

Дифференцируя равенство (11), получим

$$y'' = C_1(x)y_1'' + C_2(x)y_2'' + C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2'. \tag{12}$$

Подставляя выражения (7), (11) и (12) в дифференциальное уравнение (1), получим

$$\begin{aligned} &C_1(x)y_1'' + C_2(x)y_2'' + C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' + \\ &+ p(x)[C_1(x)y_1' + C_2(x)y_2'] + q(x)[C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2] = f(x) \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} &C_1(x)[y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1] + \\ &+ C_2(x)[y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2] + C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = f(x). \end{aligned} \tag{13}$$

Так как функции $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$ есть решения линейного однородного уравнения (6), то выражения, заключенные в квадратные скобки, равны нулю. Тогда получаем еще одно условие

$$C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x). \tag{14}$$

Условия (10) и (14) образуют систему уравнений

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0, \\ C_1'(x)y'_1 + C_2'(x)y'_2 = f(x). \end{cases} \tag{15}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1y_2' - y_1'y_2 = \left(\ln\frac{y_2}{y_1}\right)' \cdot (y_1y_2)\,. \tag{16}$$

Решая систему алгебраических уравнений (15) относительно $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$, находим

$$C_1'(x) = -\frac{f(x)}{y_1\left(\ln\frac{y_2}{y_1}\right)'}; \quad C_2'(x) = \frac{f(x)}{y_2\left(\ln\frac{y_2}{y_1}\right)'}. \tag{17}$$

Интегрируя полученные дифференциальные уравнения (17), находим

$$C_1(x) = -\int\frac{f(x)dx}{y_1\left(\ln\frac{y_2}{y_1}\right)'} + C_1, \tag{18}$$

$$C_2(x) = \int\frac{f(x)dx}{y_2\left(\ln\frac{y_2}{y_1}\right)'} + C_2. \tag{19}$$

Подставляем (18) и (19) в равенство (7), получим общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения (1).

$$y = y_1\left(-\int\frac{f(x)dx}{y_1\left(\ln\frac{y_2}{y_1}\right)'} + C_1\right) + y_2\left(\int\frac{f(x)dx}{y_2\left(\ln\frac{y_2}{y_1}\right)'} + C_2\right) =$$

$$(C_1y_1 + C_2y_2) + \left(-y_1\int\frac{f(x)dx}{y_1\ln\left(\frac{y_2}{y_1}\right)'} + y_2\int\frac{f(x)dx}{y_2\left(\ln\frac{y_2}{y_1}\right)'}\right).$$

Заметим, что первое слагаемое (первая скобка) – это общее решение однородного уравнения (6), а второе слагаемое (вторая скобка) – это частное решение y^* неоднородного уравнения (1).

Замечание 1. Для линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x).$$

Соответствующая система уравнений для определения $C_1(x)$ и $C_2(x)$ имеет вид

$$\begin{cases} C_1^{'}(x)y_1 + C_2^{'}y_2(x) = 0, \\ C_1^{'}(x)y_1^{'} + C_2^{'}(x)y_2^{'}(x) = f(x). \end{cases}$$

Решением этой системы являются функции (можно методом Крамера найти $C_1^{'}(x)$ и $C_2^{'}$, а затем проинтегрировать)

$$C_1(x) = -\int \frac{y_2 \cdot f(x)}{W(y_1, y_2)}dx; C_2 = \int \frac{y_1 \cdot f(x)}{W(y_1, y_2)}dx.$$

Тогда частное решение неоднородного дифференциального уравнения будет иметь вид

$$y_r = -y_1 \cdot \int \frac{y_2 \cdot f(x)}{W(y_1, y_2)}dx + y_2 \int \frac{y_1 \cdot f(x)}{W(y_1, y_2)}dx,$$

где $W(y_1, y_2)$ – определитель Вронского для y_1 и y_2.

Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами запишем в виде

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + y_r = C_1y_1 + C_2y_2 - y_1\int \frac{y_2 \cdot f(x)}{W(y_1, y_2)}dx + \int \frac{y_1 \cdot f(x)}{W(y_1, y_2)}dx.$$

Так, например, найдем общее решение уравнения $(y^{''} + \frac{2}{x}y^{'} + y = 0)$

$$y^{'} = \frac{\sin x}{x}; y_2 = \frac{\cos x}{x}; W(y_1, y_2) = -\frac{1}{x^2}.$$

А частное решение неоднородного уравнения

$$y_1 = \frac{\sin(x)}{x}; \quad y_2 = \frac{\cos(x)}{x}; \quad W(y_1, y_2) = -\frac{1}{x^2},$$

тогда общее решение неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами имеет вид

$$y = C_1\frac{\sin x}{x} + C_2\frac{\cos x}{x} + \frac{\sin x}{x} \cdot \ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right|.$$

Замечание 2. Обратите внимание еще раз на то, что линейное неоднородное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами можно проинтегрировать в квадратурах, если известно одно частное решение $y_1(x)$ соответствующего однородного уравнения; общее решение неоднородного уравнения имеет вид $y_2 = C_1 y_1 + C_2 y_2 + y_r$, где y_2 определяется через y_1 по формуле

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2} dx, \text{ а } y_r = -y_1 \cdot \int \frac{y_2 \cdot f(x)}{W(y_1, y_2)} dx + y_2 \int \frac{y_1 \cdot f(x)}{W(y_1, y_2)} dx.$$

Пример 1. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$xy'' - y' = x^5 + 1.$$

Решение. Соответствующее однородное дифференциальное уравнение имеет вид

$$xy'' - y' = 0,$$

частными линейно независимыми его решениями будут функции $y_1 = x^2$; $y_2 = 1$.

Следовательно, общее решение однородного дифференциального уравнения имеет вид

$$y = C_1 x^2 + C_2 \cdot 1,$$

а общее решение неоднородного дифференциального уравнения будем искать в виде

$$y = C_1(x) x^2 + C_2(x) \cdot 1.$$

$C_1(x)$ и $C_2(x)$ – определяем из системы (15), которая в нашем случае имеет вид

$$\begin{cases} C_1'(x) \cdot x^2 + C_2'(x) \cdot 1 = 0, \\ C_1'(x) \cdot 2x + C_2'(x) \cdot 0 = x^5 + 1. \end{cases}$$

Откуда

$$C_1'(x) = \frac{x^4}{2} + \frac{1}{2x}, \quad C_2'(x) = -\frac{x^6}{2} - \frac{x}{2},$$

$$\text{а } C_1(x) = \frac{x^5}{10} + \frac{1}{2}\ln|x| + C_1, \quad C_2(x) = -\frac{x^7}{14} - \frac{x^2}{4} + C_2.$$

Тогда общее решение исходного неоднородного дифференциального уравнения имеет вид

$$y = \left(\frac{x^5}{10} + \frac{1}{2}\ln|x| + C_1 \right) x^2 + \left(-\frac{x^7}{14} - \frac{x^2}{4} + C_2 \right) \cdot 1.$$

При нахождении частных решений неоднородных уравнений имеет место следующая теорема.

Теорема 2. Если $y_1(x)$ решение линейного уравнения

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x), \tag{20}$$

а функция $y_2(x)$ – решение линейного уравнения

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_2(x), \tag{21}$$

то функция $y = y_1(x) + y_2(x)$ будет решением уравнения

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x) + f_2(x). \tag{22}$$

Доказательство. Подставляя значения y, y' и y'' в уравнение (22) и учитывая, что y_1 и y_2 – решения уравнений (20) и (21) соответственно получаем

$$y_1'' + y_2'' + p(x)(y_1' + y_2') + q(y_1 + y_2) =$$
$$= (y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1) + y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2 = f_1(x) + f_2(x).$$

3.5. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Уравнение вида

$$y'' + py' + q = 0, \tag{1}$$

где p, q – действительные числа, **называется линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами.**

Чтобы найти общее решение дифференциального уравнения (1), достаточно, как было доказано выше (п. 3.3, теорема 2), найти два линейно независимых частных решения.

Частные решения (1) будем искать в виде

$$y = e^{kx}, \quad k = \text{const}, \tag{2}$$

тогда

$$y' = ke^{kx}, \quad y'' = k^2e^{kx}. \tag{3}$$

Подставляя (2) и (3) в уравнение (1), получим

$$e^{kx}(k^2 + pk + q) = 0. \tag{4}$$

Так как $e^{kx} \neq 0$, то из (4) следует, что

$$k^2 + pk + q = 0. \tag{5}$$

Значит, если k будет удовлетворять уравнению (5), то e^{kx} будет частным решением уравнения (1).

Уравнение (5) называется характеристическим уравнением для дифференциального уравнения (1).

Характеристическое уравнение (5) есть квадратное уравнение, имеющее два корня:

$$k_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\,, \quad k_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\,.$$

Возможны следующие случаи:

1. Корни характеристического уравнения (5) действительны и различны:

$$k_1 \ne k_2\,, \text{ т.е. } D = \frac{p^2}{4} - q > 0\,.$$

В этом случае частными решениями, согласно формуле (2), будут функции

$$y_1 = e^{k_1 x} \text{ и } y_2 = e^{k_2 x}\,. \tag{6}$$

Эти решения линейно независимы, т.к.

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^{k_1 x}}{e^{k_2 x}} = e^{(k_1 - k_2)x} \ne \text{const}\,.$$

Значит, общее решение дифференциального уравнения (1) имеет вид

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}. \tag{7}$$

Пример 1. Найти общее решение уравнения $y'' - 2y' - 3y = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение для данного дифференциального уравнения имеет вид $k^2 - 2k - 3 = 0$, корни которого $k_1 = -1$ и $k_2 = 3$, действительные различные числа. Следовательно, общее решение исходного уравнения имеет вид

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}\,.$$

2. Корни характеристического уравнения (5) действительны и равны, т.е.

$$k_1 = k_2 = -\frac{p}{2}\,, \text{ т.к. } D = \frac{p^2}{4} - q = 0\,.$$

Одно частное решение в этом случае $y_1 = e^{k_1 x}$. Второе частное решение $y_2 = e^{k_2 x}$ – линейно зависимое с первым (функция $e^{k_2 x}$ тождественно равна $e^{k_1 x}$, и поэтому не может рассматриваться в качестве второго частного решения).

Второе частное решение – линейно независимое решение можно найти, используя теорему 3 (п. 3.3), по формуле $y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2} dx$.

В нашем случае имеем

$$y_2 = e^{-\frac{p}{2}x} \int \frac{e^{-\int p dx}}{e^{-px}} dx = e^{-\frac{p}{2}x} \int \frac{e^{-px}}{e^{-px}} dx = e^{-\frac{p}{2}x} \int dx = (x+c) e^{-\frac{p}{2}x}.$$

Полагая $c = 0$, получим другое частное линейно независимое решение с y_1:

$$y_2 = x e^{-\frac{p}{2}x}.$$

Тогда общее решение дифференциального уравнения (1) имеет вид

$$y = C_1 e^{-\frac{p}{2}x} + C_2 x e^{-\frac{p}{2}x}.$$

Пример 2. Найти общее решение уравнения $y'' - 6y' + 9y = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение для данного уравнения имеет вид $k^2 - 6k + 9 = 0$.

Его корни $k_1 = k_2 = 3$, тогда общее решение исходного дифференциального уравнения имеет вид $y = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}$.

Замечание 1. В случае, когда корни характеристического уравнения одинаковы, т.е. $k_1 = k_2 = -\frac{p}{2}$, то второе частное линейно независимое решение исходного уравнения можно искать в виде $y_2 = u(x) \cdot e^{-\frac{p}{2}x}$.

Дифференцируя, находим y_2' и y_2'', и подставляя в уравнение (1), после преобразований получим, что $u'' = 0$, т.е. $u(x) = Ax + B$. В частности, полагая $A = 1$ и $B = 0$, получим $u(x) = x$, а, следовательно, $y_2 = x e^{-\frac{p}{2}x}$.

3. Корни характеристического уравнения (5) комплексные, и так как коэффициенты p и q дифференциального уравнения (1) – действительные числа, то корни k_1 и k_2 квадратного уравнения (5) – сопряженные комплексные числа, т.е. имеют вид $k_1 = \alpha + i\beta$, $k_2 = \alpha - i\beta$, где $\alpha = -\frac{p}{2}$, $\beta = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$.

Тогда частные решения уравнения (1) можно записать в виде

$$y_1 = e^{(\alpha + i\beta)x}, \quad y_2 = e^{(\alpha - i\beta)x}. \tag{8}$$

А так как при действительном x, по формуле Эйлера имеем

$$e^{k_1 x} = e^{(\alpha + i\beta)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{i\beta x} = e^{\alpha x} \cdot (\cos\beta x + i\sin\beta x), \tag{9}$$

$$e^{k_2 x} = e^{(\alpha - i\beta)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{-i\beta x} = e^{\alpha x} \cdot (\cos\beta x - i\sin\beta x). \tag{10}$$

Тогда общее решение (1) будет иметь вид

$$y = \bar{C}_1 y_1 + \bar{C}_2 y_2 = \bar{C}_1 e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x) + \bar{C}_2 e^{\beta x}(\cos\beta x - i\sin\beta x) =$$

$$= e^{\alpha x}[(\bar{C}_1 + \bar{C}_2)\cos bx + i(\bar{C}_1 - \overline{C_2})\sin bx].$$

Полагая $C_1 = \bar{C}_1 + \bar{C}_2$ и $C_2 = (\bar{C}_1 - \bar{C}_2) \cdot i$, тогда общее решение уравнения (1) имеет вид $y = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x)$.

Из формулы общего решения следует, что

$$y_1 = e^{ax}\cos\beta x, \quad y_2 = e^{ax}\sin\beta x. \tag{11}$$

Это два действительные частные линейно независимые решения ($\frac{y_1}{y_2} = \mathrm{ctg}\beta x \neq \mathrm{const}$) уравнения (1), и общим действительным решением уравнения (1) будет

$$y = C_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2 e^{\alpha x}\sin\beta x, \tag{12}$$

где C_1 и C_2 – суть действительные произвольные постоянные.

Пример 3. Найти общее решение уравнения $y'' - 2y' + 5y = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение имеет вид

$$k^2 - 2k + 5 = 0.$$

Его корни $k_1 = 1 + 2i$ и $k_2 = 1 - 2i$ – сопряженные комплексные числа. Этим корням соответствуют частные линейно-независимые решения

$$y_1 = e^x \cos 2x \quad , \quad y_2 = e^x \sin 2x.$$

Поэтому общее решение имеет вид

$$y = C_1 e^x \cos 2x + C_2 e^x \sin 2x = e^x (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x).$$

3.6. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Дифференциальное уравнение вида

$$y'' + py' + qy = f(x), \tag{1}$$

где $p,\ q$ – действительные числа, $f(x)$ – непрерывная функция, **называется линейным неоднородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами.**

Общее решение дифференциального уравнения (1) согласно теореме 1 (п. 3.4) о структуре общего решения неоднородного дифференциального уравнения имеет вид

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + y^*, \tag{2}$$

где y^* – любое частное решение уравнения (1), а y_1 и y_2 – два частных линейно независимых решения соответствующего однородного уравнения для (1), т.е.

$$y'' + py' + qy = 0. \tag{3}$$

Так как уравнение (3) всегда решается (см. п. 3.5), то, определив частное решение уравнения (1), находим общее решение неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами (1).

Дифференциальное уравнение (1) можно решать методом вариации произвольной постоянной (см. п. 3.4), т.к. всегда можно найти общее решение соответствующего однородного уравнения (3).

Пример 1. Методом вариации произвольной постоянной найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - y = \dfrac{e^x}{1+e^x}$.

Решение. Характеристическое уравнение $k^2 - 1 = 0$ имеет корни $k_1 = 1$, $k_2 = -1$, поэтому общее решение соответствующего однородного уравнения имеет вид

$$y = C_1 e^x + C_2 \cdot e^{-x}.$$

Общее решение исходного неоднородного дифференциального уравнения будем искать в виде $y = C_1(x) e^x + C_2(x) e^{-x}$.

Функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ определим, решив систему уравнений

$$\begin{cases} C_1'(x)e^x + C_2'(x)e^{-x} = 0, \\ C_1'(x)e^x - C_2'(x)e^{-x} = \dfrac{e^x}{1+e^x}. \end{cases}$$

Откуда имеем

$$C_1'(x) = \frac{1}{2(1+e^x)}, \quad C_2'(x) = -\frac{e^{2x}}{1+e^x} \quad \text{или} \quad C_1(x) = \frac{1}{2}(x - \ln(1+e^x)) + C_1,$$

$$C_2(x) = -\frac{1}{2}(e^x+1) + \frac{1}{2}\ln(e^x+1) + C_2.$$

Тогда общее решение исходного уравнения имеет вид

$$y = e^x\left[\frac{1}{2}x - \ln(1+e^x) + C_1\right] + e^{-x}\cdot\left[-\frac{1}{2}(e^x+1+\ln(e^x+1)) + C_2\right] =$$

$$= C_1e^x + C_2e^{-x} + \frac{e^x}{2}\left[x - \ln(1+e^x)\right] - \frac{e^{-x}}{2}\left[e^x+1+\ln(e^x+1)\right],$$

где $y = C_1e^x + C_2e^{-x}$ – общее решение однородного уравнения, а

$$y^* = \frac{e^x}{2}\left[x - \ln(1+e^x)\right] - \frac{e^{-x}}{2}\left[e^x+1+\ln(e^x+1)\right]$$

есть частное решение исходного неоднородного уравнения.

Замечание 1. Частное решение y^* в общем случае для дифференциального уравнения (1) можно найти следующим образом. Обращаясь к методу Лагранжа (метод вариации произвольной постоянной (п. 3.4)), мы видим, что частное решение y^* уравнения (1) определяется формулой

$$y^* = C_1y_1 + C_2y_2, \tag{4}$$

где y_1 и y_2 – линейно независимые частные решения однородного уравнения (3), а C_1 и C_2 – функции от x, производные которых определяются по формуле (17) п. 3.4, и имеют вид

$$C_1' = -\frac{f(x)}{y_1\left(\ln\dfrac{y_2}{y_1}\right)'}, \quad C_2' = \frac{f(x)}{y_2\left(\ln\dfrac{y_2}{y_1}\right)'}. \tag{5}$$

Формулы эти имеют место и в случае, когда p и q – постоянные коэффициенты в уравнении (1) и принимают простой вид.

1. Корни k_1 и k_2 характеристического уравнения $k^2+pk+q=0$ – действительные и различные, тогда $y_1=e^{k_1x}$ и $y_2=e^{k_2x}$.

Откуда $\frac{y_2}{y_1}=e^{(k_2-k_1)x}$ и $\ln\frac{y_2}{y_1}=(k_2-k_1)x$.

Поэтому

$$\left(\ln\frac{y_2}{y_1}\right)'=k_2-k_1.$$

Подставляя в формулы (5) последнее равенство, получим

$$C_1'=-\frac{f(x)}{e^{k_1x}(k_2-k_1)},\quad C_2'=\frac{f(x)}{e^{k_2x}(k_2-k_1)}.$$

Откуда имеем

$$C_1=\frac{-1}{k_2-k_1}\int\limits_{x_0}^{x}f(t)e^{-k_1t}dt;\quad C_2=\frac{1}{k_2-k_1}\int\limits_{x_0}^{x}f(t)e^{-k_2t}dt.$$

Подставляя найденные C_1 и C_2 в формулу (4), находим:

$$y^*=\frac{-e^{k_1x}}{k_2-k_1}\int\limits_{x_0}^{x}f(t)e^{-k_1t}dt+\frac{e^{k_2x}}{k_2-k_1}\int\limits_{x_0}^{x}f(t)e^{-k_2t}dt$$

или, упрощая, получим

$$y^*=\frac{1}{k_2-k_1}\int\limits_{x_0}^{x}f(t)\left[e^{k_2(x-t)}-e^{k_1(x-t)}\right]dt. \qquad (6)$$

2. Корни k_1 и k_2 характеристического уравнения $k^2+pk+q=0$ – комплексные числа. В этом случае корни k_1 и k_2 – сопряженные числа, $k_1=\alpha-i\beta$, $k_2=\alpha+i\beta$, причем $k_2-k_1=2\beta i$, а

$$e^{k_2(x-t)}=e^{(\alpha+i\beta)(x-t)}=e^{\alpha(x-t)}\cdot e^{i\beta(x-t)}.$$

Тогда в силу формулы Эйлера имеем

$$e^{k_2(x-t)}=e^{\alpha(x-t)}\left[\cos\beta(x-t)+i\sin\beta(x-t)\right]. \qquad (7)$$

Так как k_1 отличается от k_2 только знаком мнимой части, то

$$e^{k_1(x-t)}=e^{\alpha(x-t)}\left[\cos\beta(x-t)-i\sin\beta(x-t)\right]. \qquad (8)$$

Вычитая из (7) равенство (8), находим

$$e^{k_2(x-t)} - e^{k_1(x-t)} = 2ie^{\alpha(x-t)}\sin(x-t)\,. \qquad (9)$$

Из равенства (9) в силу формулы (6) (действительная часть (9)) имеем, что частное решение в этом случае имеет вид

$$y^* = \frac{1}{\beta}\int_{x_0}^{x} f(t)e^{\alpha(x-t)}\sin\beta(x-t)dt\,. \qquad (10)$$

3. Характеристическое уравнение $k^2 + pk + q = 0$ имеет равные корни $k_1 = k_2 = -\frac{p}{2}$.

Чтобы получить формулу для частного решения y^*, будем рассматривать этот случай как предельный, т.е. когда оба корня k_1 и k_2 до предела различные, а в пределе равны.

Формулу (6) запишем в виде

$$y^* = \int_{x_0}^{x} f(t)\frac{e^{k_2(x-t)} - e^{k_1(x-t)}}{k_2 - k_1}dt$$

и отметим, что выражение под знаком интеграла есть отношение приращения функции $e^{k(x-t)}$ к приращению независимого переменного k, когда оно пробегает значения от k_1 до k_2. В силу теоремы Лагранжа о среднем, это отношение равно производной $\frac{d}{dk}\left(e^{k(x-t)}\right)$ для некоторого численного значения $k^* \in (k_1;k_2)$. Значит, до перехода к пределу имеем

$$y^* = \int_{x_0}^{x} f(t)\cdot(x-t)e^{k^*(x-t)}dt\,.$$

Если оба корня характеристического уравнения стремятся к фиксированному численному значению k, тогда и среднее $k^* \in (k_1;k_2)$ будет иметь пределом число k_1. Переходя к пределу, получаем формулу

$$y^* = \int_{x_0}^{x} f(t)\cdot(x-t)e^{-\frac{p}{2}(x-t)}dt \qquad (11)$$

частного решения y^* неоднородного уравнения (1) в случае равных корней характеристического уравнения.

3.7. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами и специальной правой частью

Рассмотрим линейное неоднородное уравнение

$$y''+py'+qy=f(x). \qquad (1)$$

Структура общего решения, методы решения уравнения (1) рассмотрены выше.

Для специального вида правых частей $f(x)$ уравнения (1) частное решение можно найти **методом неопределенных коэффициентов** (без применения операции интегрирования), а так как характеристическое уравнение – квадратное и частные решения, находящиеся также без применения операции интегрирования, то, следовательно, общее решение уравнения (1) находим **без операции интегрирования**.

Этот метод используется, если правая часть $f(x)$ уравнения (1) имеет **специальный вид**, т.е.

$$f(x)=e^{\alpha x}\left[P_n(x)\cos\beta x+R_m(x)\sin\beta x\right], \qquad (2)$$

где $P_n(x)$ и $R_m(x)$ – многочлены с действительными коэффициентами степени n и m соответственно, а α и β – действительные числа.

Получим вид частного решения для уравнения (1) когда

$$f(x)=P_n(x)e^{\alpha x}.$$

1. Пусть дано дифференциальное уравнение

$$y''+py'+qy=P_n(x)e^{\alpha x}. \qquad (3)$$

Частное решение уравнения (1) будем искать в виде

$$y^*=Q_n(x)e^{\alpha x}, \qquad (4)$$

где $Q_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_n$.

Числа $a_0,a_1,...,a_n$ – коэффициенты многочлена $Q_n(x)$ неизвестны, а коэффициенты многочлена $P_n(x)$ и число α известны (заданы по условию задачи). Так как (4) частное решения уравнения (3), то, дифференцируя равенство (4) дважды и подставляя в уравнение (3), будем иметь

$$(y^*)'=Q_n'(x)e^{\alpha x}+\alpha\cdot Q_n(x)e^{\alpha x},$$

$$(y^*)''=Q_n''(x)e^{\alpha x}+Q_n'(x)\cdot\alpha\cdot e^{\alpha x}+\alpha\cdot Q_n'(x)e^{\alpha x}+\alpha^2Q_n(x)e^{\alpha x},$$

$$e^{\alpha x}\cdot\Big[Q_n''(x)+2\alpha\cdot Q_n'(x)+\alpha^2Q_n(x)+p\big[Q_n'(x)+\alpha\cdot Q_n(x)\big]+qQ_n(x)\Big]=P_n(x)e^{\alpha x}$$

или, собирая подобные при производных от многочлена $Q_n(x)$, получим после сокращения на $e^{\alpha x}\neq 0$ равенство

$$Q_n''(x)+Q_n'(x)\big[2\alpha+p\big]+Q_n(x)\Big[\alpha^2+p\alpha+q\Big]=P_n(x). \qquad (5)$$

Проанализируем равенство (5): его правая часть – многочлен степени n с известными (заданными) коэффициентами, а его левая часть содержит, вообще говоря, многочлен степени n с неизвестными коэффициентами.

Определим эти коэффициенты, найдем частное решение по формуле (4) дифференциального уравнения (3). Решать эту задачу будем, используя понятие равенства двух многочленов (два многочлена равны тогда и только тогда, когда равны коэффициенты при одинаковых (равных) степенях в равенстве (5)).

1. Рассмотрим характеристическое уравнение для дифференциального уравнения (1).

Возможны следующие случаи в зависимости от α:

1.1. Число α не является корнем характеристического уравнения

$$k^2+pk+q=0 \qquad (6)$$

однородного дифференциального уравнения

$$y''+py'+qy=0 \qquad (7)$$

для данного неоднородного дифференциального уравнения (3).

Тогда в равенстве (5) левая часть является многочленом степени n (т.к. $2\alpha+p\neq 0,\ \alpha^2+p\alpha+q\neq 0$), и, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x многочленов, получим совместную систему линейных уравнений относительно коэффициентов многочлена $Q_n(x)$, решая которую находим коэффициенты многочлена $Q_n(x)$, а, следовательно, и частное решение уравнения (3), которое имеет вид, определяемый формулой (4).

1.2. Пусть $\alpha=k_1$ – корень характеристического уравнения (6), $k_1\neq k_2$, тогда в левой части равенства (5) коэффициент при $Q_n(x)$ равен нулю (α – корень характеристического уравнения (6)), а, следовательно, многочлен в левой части (5) – многочлен степени (n – 1), поэтому, чтобы степени многочленов в левой и правой частях (5) совпадали, требуется рассматривать функцию вида $(Ax + B)\ Q_n(x)$, а, тогда частное решение уравнения (3) примет вид

$$y^* = x \cdot Q_n(x) \cdot e^{k_1 x}. \qquad (8)$$

1.3. Пусть $k_1 = k_2 = \alpha = -\frac{p}{2}$**, т.е. корни характеристического уравнения (6)** совпадают, а это значит, что коэффициенты в левой части (5) при $Q_n(x)$ и $Q_n'(x)$ равны нулю, следовательно, многочлен в левой части (5) – многочлен степени (n – 2), поэтому, чтобы степени левой и правой части (5) совпадали требуется рассматривать функцию $(Ax^2 + Bx + C) \cdot Q_n(x)$, а следовательно, частное решения уравнения (3) имеет вид

$$y^* = x^2 \cdot Q_n(x) \cdot e^{\frac{p}{2}x}. \qquad (9)$$

Итак, для дифференциального уравнения (3) со специальной правой частью вида $P_n(x)e^{\alpha x}$ получено правило нахождения частного решения: *частное решение уравнения (3) получено в виде правой части –* $y = Q_n(x)e^{\alpha x}$ *с учетом совпадения числа α с корнями характеристического уравнения* $k^2 + pk + q = 0$, *а именно: если* α *совпадает с одним из корней характеристического уравнения, то частное решение* y^* *уравнения (1) имеем в виде (формула (8))*

$$y^* = xQ_n(x) \cdot e^{k_1 x},$$

если $\alpha = k_1 = k_2$, *т.е. оба корня характеристического уравнения совпадают с числом* α *уравнения (1), имеем в виде (формула (9))*

$$y^* = x^2 Q_n(x) \cdot e^{\alpha x}.$$

Рассмотрим частные случаи выражений вида (2) и, используя результат, полученный выше для уравнения (3), найдем вид частных решений для уравнения (1).

2. Правая часть уравнения (1) есть многочлен степени n**:**

$$f(x) = P_n(x). \qquad (10)$$

Оно получается из выражения (2) при $\alpha = 0$ и $\beta = 0$. Тогда возможны следующие три случая:

2.1. Число 0 не является корнем характеристического уравнения

$$k^2 + pk + q = 0. \qquad (11)$$

Тогда частное решение y^* неоднородного уравнения (1) имеет вид

$$y^* = Q_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_n, \qquad (12)$$

где коэффициенты $a_0, a_1, ..., a_n$ определяются методом, рассмотренным выше в п. 1.

2.2. Число 0 – простой (однократный) корень характеристического уравнения (12), что возможно только при $q = 0$. Опираясь на результат 1 п. 1, частное решение y^* будем искать в виде

$$y^* = xQ_n(x), \qquad (13)$$

где $Q_n(x)$ – многочлен степени n, определяется формулой (12).

2.3. Число 0 является двукратным корнем характеристического уравнения (11), то аналогично п. 1 (1.1) имеем, что частное решение будем искать в виде

$$y^* = x^2 Q_n(x). \qquad (14)$$

Пример 1. Найти общее решение уравнения $y'' - 2y' - 3y = 2x$.

Решение. Характеристическое уравнение имеет вид $k^2 - 2k - 3 = 0$, его корни $k_1 = -1$ и $k_2 = 3$. Общее решение соответствующего однородного уравнения

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}.$$

Так как число $\alpha = 0$ $(2x = 2 \cdot x \cdot e^{0x},\ \alpha = 0)$ не является корнем характеристического уравнения, то частное решение исходного дифференциального уравнения будем искать в виде

$$y^* = Ax + B, \quad (y^*)' = A, \quad (y^*)'' = 0.$$

Подставляя в исходное неоднородное дифференциальное уравнение, получим $-2A - 3B - 3Ax = 2x$.

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} -3A = 2, \\ -2A - 3B = 0, \end{cases}$$

решением которой являются $A = -\dfrac{2}{3}$, $B = \dfrac{4}{9}$, следовательно, частное решение данного уравнения

$$y^* = -\frac{2}{3}x + \frac{4}{9},$$

а общее решение исходного уравнения

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x} - \frac{2}{3}x + \frac{4}{9}.$$

Пример 2. Найти общее решение уравнения $y'' + 2y' + y = 4x \cdot e^x$.

Решение. Характеристическое уравнение имеет вид

$$k^2 - 2k + 1 = 0,$$

его корни $k_1 = k_2 = -1$. Общее решение соответствующего однородного уравнения $y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$.

Правая часть исходного уравнения $f(x) = xe^x$ – произведение многочлена первой степени на $e^x (\alpha = 1)$ и, так как $\alpha = 1 \neq k_1 = k_2 = -1$, поэтому частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде

$$y^* = (Ax + B) \cdot e^x.$$

Последовательно дифференцируя дважды y^*, и подставляя y^*, $(y^*)'$, $(y^*)''$ в исходное уравнение, после сокращения на $e^x \neq 0$, получим

$$Ax + 2A + B + 2(Ax + A + B) + Ax + B = 4x$$

или

$$4Ax + 4A + 4B = 4x.$$

Откуда имеем $A = 1, B = -1$. Следовательно, частное решение исходного уравнения принимает вид

$$y^* = (x - 1)e^x,$$

а его общее решение

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + (x - 1)e^x.$$

Пример 3. Найти общее решение уравнения $y'' - 2y' + y = xe^x$.

Решение. Характеристическое уравнение имеет вид $k^2 - 2k + 1 = 0$, его корни $k_1 = k_2 = 1$. Общее решение соответствующего однородного уравнения

$$y = C_1 e^x + C_2 x e^x.$$

Правая часть исходного уравнения $f(x) = xe^x$ – произведение многочлена первой степени на $e^x (\alpha = 1)$ и, так как $\alpha = 1 = k_1 = k_2$, поэтому частное решение неоднородного уравнения будет иметь вид

$$y^* = (Ax + B) \cdot x^2 \cdot e^x = (Ax^3 + Bx^2)e^x.$$

Последовательно дифференцируя дважды y^* получим

$$(y^*)' = (3Ax^2 + 2Bx)e^x + (Ax^3 + Bx^2)e^x,$$

$$(y^*)'' = 2 \cdot (3Ax^2 + 2Bx)e^x + (6Ax + 2B)e^x + (Ax^3 + Bx^2)e^x.$$

Подставляя y^*, $(y^*)'$, $(y^*)''$ в исходное уравнение после сокращения на $e^x \neq 0$, получим $6Ax + 2B = x$.

Откуда имеем $A = \frac{1}{6}$, $B = 0$. Следовательно, частное решение исходного уравнения $y^* = \frac{x^3}{6}e^x$, а его общее решение $y = C_1e^x + C_2xe^x + \frac{x^3}{6}e^x$.

3. Правая часть уравнения (1) имеет вид

$$f(x) = a_1 \cos \beta x + a_2 \sin \beta x.$$

Она получается из выражения (2) при $\alpha = 0$ и $P_n(x)$, $R_m(x)$ – постоянные числа a_1 и a_2.

3.1. Числа $0 \pm \beta i$ не являются корнями характеристического уравнения

$$k^2 + pk + q = 0.$$

Тогда частное решение исходного уравнения будем искать в виде

$$y^* = A_1 \cos \beta x + A_2 \sin \beta x. \tag{15}$$

Подставляя y^*, $(y^*)'$, $(y^*)''$ в исходное уравнение и приравнивая коэффициенты при $\cos \beta x$ и $\sin \beta x$, находим A_1 и A_2, и, тем самым, частное решение данного уравнения, а, следовательно, и его общее решение.

3.2. Одно из чисел $0 \pm \beta i$ корень характеристического уравнения

$$k^2 + pk + q = 0,$$

тогда частное решение исходного уравнения будем искать в виде

$$y^* = x \cdot (A_1 \cos \beta x + A_2 \sin \beta x).$$

Коэффициенты A_1 и A_2 определим аналогично, как и в п 3.1.

3.3. Характеристическое уравнение

$$k^2 + pk + q = 0$$

не может иметь кратных (комплексных) корней, поэтому для данной функции возможны только случаи пп. 3.1 и 3.2.

4. Правая часть уравнения (1) имеет вид

$$f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x + R_m(x)\sin\beta x).$$

4.1. Числа $\alpha \pm \beta i$ не являются корнями характеристического уравнения

$$k^2 + pk + q = 0,$$

тогда частное решение исходного уравнения (1) будем искать в виде

$$y^* = e^{\alpha x}[M_k(x)\cos\beta x + N_k(x)\sin\beta x], \qquad (16)$$

где $k = \max(m, n)$, $M_k(x)$ и $N_k(x)$ – многочлены с действительными коэффициентами, которые требуется найти.

4.2. Одно из чисел $\alpha \pm \beta i$ корень характеристического уравнения

$$k^2 + pk + q = 0,$$

тогда частное решение исходного уравнения (1) будем искать в виде

$$y^* = x \cdot e^{\alpha x}[M_k(x)\cos\beta x + N_k(x)\sin\beta x], \qquad (17)$$

где $M_k(x)$ и $N_k(x)$ – из формулы (16).

4.3. Характеристическое уравнение

$$k^2 + pk + q = 0$$

не может иметь кратных (комплексных) корней, поэтому для данной функции возможны только случаи пп. 3.1 и 3.2.

5. Если правая часть *f*(*x*) дифференциального уравнения (1) является суммой функций рассмотренных видов, то частное решение *y равно сумме соответствующих решений.**

Пример 4. Найти общее решение уравнения

$$y'' + 3y' + 2y = 4\sin 3x + 2\cos 3x.$$

Решение. Корни характеристического уравнения $k^2 + 2k + 3 = 0$ будут $k_1 = -2$ и $k_2 = -1$. Следовательно, общее решение однородного уравнения

$$y = C_1e^{-2x} + C_2e^{-x}.$$

Число $0 \pm \beta i = 3i$ не является корнем характеристического уравнения, поэтому частное решение неоднородного дифференциального уравнения будем искать в виде $y^* = A\sin 3x + B\cos 3x$.

Определим коэффициенты A и B, для этого найдем $(y^*)'$ и $(y^*)''$:

$$(y^*)' = 3A\cos 3x - 3B\sin 3x\,, \quad (y^*)'' = -9A\cos 3x - 9B\cos 3x\,.$$

Подставляя в исходное дифференциальное уравнение, получим

$$\begin{aligned}&-9A\sin 3x - 9B\cos 3x + 9A\cos 3x - 9B\sin 3x +\\ &+2A\sin 3x + 2B\cos 3x = 4\sin 3x + 2\cos 3x.\end{aligned}$$

Откуда

$$(-7A - 9B)\sin 3x + (9A - 7B)\cos 3x = 4\sin 3x + 2\cos 3x\,.$$

Приравнивая коэффициенты при $\sin 3x$ и $\cos 3x$, получим систему уравнений

$$\begin{cases}-7A - 9B = 4,\\ 9A - 7B = 2.\end{cases}$$

Откуда $A = -\dfrac{1}{13}$, $B = -\dfrac{5}{13}$, следовательно, $y^* = -\dfrac{1}{13}\sin 3x - \dfrac{5}{13}\cos 3x$.

Тогда общее решение неоднородного уравнения

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x} - \frac{1}{13}\sin 3x - \frac{5}{13}\cos 3x\,.$$

Пример 5. Найти общее решение уравнения $y'' + 9y = 6\cos 3x$.

Решение. Корни характеристического уравнения

$$k^2 + 9 = 0\,; \quad k_1 = 3i; \;\; k_2 = -3i\,.$$

Тогда общее решение однородного уравнения $y = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x$.

Число $3i = \beta i$ является простым корнем характеристического уравнения, поэтому

$$y^* = (A\sin 3x + B\cos 3x)\cdot x\,,$$

$$(y^*)' = A\sin 3x + B\cos 3x + x\cdot(3A\cos 3x + B\sin 3x)\,,$$

$$(y^*)'' = 6A\cos 3x - 6B\sin 3x + x\cdot(-9A\sin 3x - 9B\cos 3x)\,.$$

Подставляя $y^*, (y^*)', (y^*)''$ в исходное уравнение, получим

$$6A\cos 3x - 6B\sin 3x = 6\cos 3x + 0\cdot\sin 3x\,.$$

Откуда, приравнивая коэффициенты при $\sin 3x$ и $\cos 3x$, получим $A = 1$, $B = 0$.

Тогда частное решение $y^* = x\sin 3x$, а общее решение будет

$$y = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x + x\sin 3x.$$

Пример 6. Найти общее решение уравнения $y'' - 2y' + y = \sin x + e^{-x}$.

Решение. Характеристическое уравнение имеет вид $k^2 - 2k + 1 = 0$, его корни $k_1 = k_2 = 0$. Общее решение соответствующего однородного уравнения $y = C_1e^x + C_2xe^x$.

Так как правая часть уравнения состоит из суммы двух функций $\sin x$ и e^{-x}, то частное решение y^* будем искать в виде

$$y^* = y_1^* + y_2^*,$$

где y_1^* – частное решение уравнения $y'' - 2y' + y = \sin x$, а y_2^* – частное решение уравнения $y'' - 2y' + y = e^{-x}$.

Определим y_1^* для дифференциального уравнения $y'' - 2y' + y = \sin x$.

Число $\beta i = i$ не является корнем характеристического уравнения, поэтому частное решение y_1^* будем искать в виде

$$y_1^* = A\sin x + B\cos x.$$

Подставляя y_1^*, $(y_1^*)'$, $(y_1^*)''$ в исходное уравнение и приравнивая коэффициенты при $\sin x$ и $\cos x$, получим $A = 0,\ B = \frac{1}{2}$ и, следовательно, $y_1^* = \frac{1}{2}\cos x$.

Частное решение y_2^* для уравнения $y'' - 2y' + y = e^{-x}$ будем искать в виде $y = Ae^{-x}$.

Подставляя y_2^*, $(y_2^*)'$, $(y_2^*)''$ в уравнение $y'' - 2y' + y = e^{-x}$ находим $A = \frac{1}{4}$, а, следовательно $y_2^* = \frac{1}{4}e^{-x}$.

Таким образом, частное решение заданного дифференциального уравнения будет иметь вид

$$y^* = \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{4}e^{-x},$$

а его общее решение

$$y = C_1e^x + C_2xe^x + \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{4}e^{-x}..$$

§4. СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Системой дифференциальных уравнений называется система, связывающая независимую переменную, неизвестные функции этой переменной и производные функций по независимой переменной.

Если система дифференциальных уравнений разрешима относительно всех входящих в нее производных, то ее называют нормальной системой:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n), \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n), \\ ... \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n). \end{cases} \tag{1}$$

При этом предполагается, что число уравнений равно числу искомых функций.

Так уравнение второго (или более высокого) порядка можно привести к нормальной системе дифференциальных уравнений вида (1).

Уравнение второго порядка $y'' = f(x, y, y')$ путем замены $y' = p(x)$, $y'' = p'$ сводится к нормальной системе дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} y' = p, \\ p' = f(x, y, p), \end{cases}$$

а систему двух дифференциальных уравнений второго порядка

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = f_1(x, y, t, x', y'), \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = f_2(x, y, t, x', y'), \end{cases}$$

описывающую движение точки на плоскости, путем введения новых переменных $x' = u$, $y' = v$, приводим к нормальной системе.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = u, \\ \dfrac{dy}{dt} = v, \\ \dfrac{du}{dt} = f_1(x, y, t, u, v), \\ \dfrac{dv}{dt} = f_2(x, y, t, u, v). \end{cases}$$

Общим решением системы дифференциальных уравнений (1) в области D изменения переменных $x,\ y_1,\ y_2,\ y_n$ называется совокупность n функций

$$\begin{cases} y_1 = \varphi_1(x, C_1, C_2, ..., C_n), \\ y_2 = \varphi_2(x, C_1, C_2, ..., C_n), \\ ... \\ y_n = \varphi_n(x, C_1, C_2, ..., C_n), \end{cases} \tag{2}$$

имеющих частные производные по x, которая обладает следующими свойствами:

1) система уравнений (2) разрешима в области D относительно произвольных постоянных $C_1,\ C_2,\ ...,\ C_n$, т.е. все эти произвольные постоянные не могут быть исключены из системы;

2) функции системы (2) должны удовлетворять системе дифференциальных уравнений (1), т.е. являются решением этой системы при всех произвольных постоянных $C_1,\ C_2,\ ...,\ C_n$.

Механический смысл нормальной системы дифференциальных уравнений

Заменим нормальную систему дифференциальных уравнений (1) в виде

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = F_1(t, x_1, x_2, ..., x_n), \\ \dfrac{dx_2}{dt} = F_2(t, x_1, x_2, ..., x_n), \\ ... \\ \dfrac{dx_n}{dt} = F_n(t, x_1, x_2, ..., x_n), \end{cases} \tag{3}$$

где t – время; $x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n$ – прямоугольные координаты точки **фазового пространства**; n = 1 – это прямая R^1, n = 2 – это плоскость R^2, n = 3 – это пространство R^3.

Любое решение системы (3)

$$x_1 = x_1(t),\ \ x_2 = x_2(t),\ ...,\ x_n = x_n(t) \tag{4}$$

называется **движением**, определяемым системой (3), а путь, который описывает точка в фазовом пространстве, называется траекторией движения.

Система (3) задает **поле скоростей движений**, определяемых этой системой. Задача интегрирования данной системы состоит в восстановлении по этому полю движений системы.

Задача Коши для системы дифференциальных уравнений (3) формулируется следующим образом: найти решение (траекторию движения) (4), удовлетворяющее начальным условиям

$$x_1(t_0) = x_{10},\ x_2(t_0) = x_{20},\ ...,\ x_n(t_0) = x_{n0}, \qquad (5)$$

где $t,\ x_{10},\ x_{20},...,\ x_{n0}$ – заданные числа (начальные данные).

Другими словами, необходимо найти такую траекторию движения (4), при которой движущаяся точка находится в заданной точке $(x_{10},\ x_{20},\ ...,\ x_{n0})$, фазового пространства в заданный момент времени t_0.

4.1. Интегрирование систем дифференциальных уравнений

1. Метод сведения системы к однородному дифференциальному уравнению высшего порядка – метод исключения.

Суть данного метода интегрирования систем дифференциальных уравнений состоит в следующем: *последовательное дифференцированием одного из уравнений системы (1) и исключение всех неизвестных функций, кроме одной*. Полученное дифференциальное уравнение интегрируем и находим общее решение системы, не применяя интегрирования.

Дифференцируя по x первое уравнение системы (1), получим

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \cdot \frac{dy_1}{dx} + ... + \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \cdot \frac{dy_n}{dx}. \qquad (6)$$

Заменяя производные $\frac{dy_1}{dx}, \frac{dy_2}{dx}, ... \frac{dy_n}{dx}$ их выражениями $f_1, f_2, ... f_n$ из уравнения системы (1), получим уравнение второго порядка

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = F_2\left(x, y_1, y_2, ... y_n\right). \qquad (7)$$

Дифференцируя уравнение (7) по переменной x и заменяя производные $\frac{dy_1}{dx}, \frac{dy_2}{dx}, ... \frac{dy_n}{dx}$ их выражениями из системы (1), получим уравнение третьего порядка

$$\frac{d^3 y_1}{dx^3} = F_3\left(x, y_1, y_2, ..., y_n\right). \qquad (8)$$

Продолжая этот процесс далее (дифференцируем – подставляем – получаем) приходим к уравнению порядка n следующего вида

$$\frac{d^n y_1}{dx^n} = F_n\left(x, y_1, y_2, ..., y_n\right). \qquad (9)$$

После полученных преобразований приходим к следующей системе уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n), \\ \dfrac{d^2 y_1}{dx^2} = F_2(x, y_1, y_2, ..., y_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{d^n y_1}{dx^n} = F_n(x, y_1, y_2, ..., y_n). \end{cases} \qquad (10)$$

Из первых $(n - 1)$ уравнений системы (10) определяем $y_2, y_3, ..., y_n$, выразив их через x, функцию y_1 и её производные $y_1', y_1'', ..., y_1^{(n-1)}$.

$$\begin{cases} y_2 = \varphi_2(x, y_1, y_1', ..., y_1^{(n-1)}), \\ y_3 = \varphi_3(x, y_1, y_1', ..., y_1^{(n-1)}), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n = \varphi_n(x, y_1, y_1', ..., y_1^{(n-1)}). \end{cases} \qquad (11)$$

Подставляя $y_1, y_2, ..., y_n$ из (11) в последнее уравнение системы (10), получим уравнение n-ного порядка относительно y_1

$$\frac{d^n y_1}{dx^n} = \Phi(x, y_1, y_1', ..., y_1^{(n-1)}). \qquad (12)$$

Решая уравнение (12), получим

$$y_1 = \psi_1(x, C_1, C_2, ..., C_n). \qquad (13)$$

Дифференцируя (13) $n - 1$ раз и подставляя значения производных $y_1', y_1'', ... y_1^{(n-1)}$ в уравнения системы (11), находим функции $y_2, y_3, ..., y_n$:

$$\begin{cases} y_2 = \psi_2(x, C_1, C_2, ..., C_n), \\ y_3 = \psi_3(x, C_1, C_2, ..., C_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n = \psi_n(x, C_1, C_2, ..., C_n). \end{cases} \qquad (14)$$

Следовательно, функции, определяемые уравнениями (13) и (14), задают общее решение системы дифференциальных уравнений (1).

Замечание 1. При решении системы дифференциальных уравнений (1) методом сведения системы к одному дифференциальному уравнению предполагали, что из первых $(n-1)$ уравнений системы (10) можно найти функции $y_2, y_3, ..., y_n$. Если переменные $y_2, y_3, ..., y_n$ можно исключить из меньшего числа уравнений чем n, то для y получим уравнение, порядок которого ниже n.

Пример 1. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = y_2 + y_3, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = y_1 + y_3, \\ \dfrac{dy_3}{dx} = y_1 + y_2. \end{cases}$$

Решение. Дифференцируя по x первое уравнение системы, получим

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = \frac{dy_2}{dx} + \frac{dy_3}{dx} = (y_1 + y_3) + (y_1 + y_2) = 2y_1 + y_2 + y_3.$$

Исключая y_2 и y_3 из уравнений $\dfrac{dy_1}{dx} = y_2 + y_3$ и $\dfrac{d^2 y_1}{dx^2} = 2y_1 + y_2 + y_3$, получим уравнение второго порядка относительно y_1:

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} - \frac{dy_1}{dx} - 2y_1 = 0,$$

общее его решение $(k_1 = -1;\ k_2 = 2)$

$$y_1 = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x},$$

$$y_2 = \frac{dy_1}{dx} - y_3 = C_1 e^{-x} + 2C_2 e^{2x} - y_3.$$

Подставляя y_1 и y_2 в третье уравнение системы, получим уравнение

$$\frac{dy_3}{dx} + y_3 = 3C_2 e^{2x},$$

интегрируя которое, имеем

$$y_3 = C_3 e^{-x} + C_2 e^{2x}.$$

Тогда в силу уравнения (2) получим

$$y_2 = -(C_1 - C_3) e^{-x} + C_2 e^{2x}.$$

Выражения y_1, y_2, y_3 задают общее решение исходной системы дифференциальных уравнений.

Замечание 2. Если система дифференциальных уравнений (1) линейная относительно искомых функций $y_1, y_2, ..., y_n$, то и уравнение (12) будет линейным.

Замечание 3. Для того чтобы получить решение системы дифференциальных уравнений (1), удовлетворяющих начальным условиям

$$y_1(x_0) = y_1;\ y_2(x_0) = y_2, ..., y_n(x_0) = y_n, \tag{15}$$

требуется найти из уравнений (13), (14) значения постоянных $C_1, C_2, ..., C_n$.

Пример 2. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = y_1 + y_2 + x, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = -4y_1 - 3y_2 + 2x. \end{cases}$$

Решение. Дифференцируем по x первое уравнение данной системы, получим $\dfrac{d^2 y_1}{dx^2} = \dfrac{dy_1}{dx} + \dfrac{dy_2}{dx} + 1$.

Подставляя из системы $\dfrac{dy_1}{dx}$ и $\dfrac{dy_2}{dx}$ в последнее уравнение системы, получим $\dfrac{d^2 y_1}{dx^2} = (y_1 + y_2 + x) + (-4y_1 - 3y_2 + 2x) + 1$ или

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = -3y_1 - 2y_2 + 3x + 1. \tag{*}$$

Из первого уравнения данной системы имеем $y_2 = \dfrac{dy_1}{dx} - y_1 - x$ и, подставляя y_2 в уравнение (*), получим

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = -3y_1 - 2\left(\frac{dy_1}{dx} - y_1 - x\right) + 3x + 1$$

или

$$y_1'' + 2y_1' + y_1 = 5x + 1.$$

Это дифференциальное уравнение второго порядка неоднородное с постоянными коэффициентами, со специальной правой частью, общее решение которого имеет вид

$$y_1 = \left(C_1 + C_2 x\right)e^{-x} + 5x - 9.$$

Так как $y_2 = \dfrac{dy_1}{dx} - y_1 - x$, тогда

$$y_2 = \left(C_2 - 2C_1 - 2C_2 x\right)e^{-x} - 6x + 14.$$

Следовательно, общее решение данной системы определяет пара функций $\left(y_1, y_2\right)$.

Пример 3. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = y_1 + y_2 + x, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = -4y_1 - 3y_2 + 2x, \end{cases}$$

удовлетворяющую начальным условиям $y_1(1) = -3$ и $y_2(1) = 6$.

Решение. В примере 2 найдено общее решение, которое определяется функциями:

$$y_1 = \left(C_1 + C_2 x\right)e^{-x} + 5x - 9 \text{ и } y_2 = \left(C_2 - 2C_1 - 2C_2 x\right)e^{-x} - 6x + 14.$$

Для определения частного решения требуется определить постоянные C_1 и C_2. Они находятся из решения следующей системы линейных уравнений относительно C_1 и C_2

$$\begin{cases} \left(C_1 - C_2\right)e^{-1} + 5 - 9 = -3, \\ \left(C_2 - 2C_1 - 2C_2\right)e^{-1} - 6 + 14 = 6, \end{cases}$$

то есть $C_1 = e$, а $C_2 = 0$. Таким образом, решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям, имеет вид

$$y_1 = e^{1-x} + 5x - 9 \text{ и } y_2 = -2e^{1-x} - 6x + 14.$$

Пример 4. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x' = -2x + 2y + z, \\ y' = 2x + 2y + 2z, \\ z' = x - 2y - 2x. \end{cases}$$

Решение. Данную систему решим сведением к одному дифференциальному уравнению с одной неизвестной функцией. Продифференцируем первое уравнение системы, получим $x'' = -2x' + 2y' + z'$.

Входящие в это уравнение первые производные заменим их выражениями из системы, получим $x'' = 9x - 2y$.

Дифференцируя последнее уравнение ещё раз, заменяя первые производные неизвестных функций их выражениями из системы, получим $x''' = -22x + 14y + 5z$.

Таким образом, имеем систему трех уравнений, в которые входят производные функции

$$\begin{cases} x' = -9x + 2y + z, \\ x'' = 9x - 2y, \\ x''' = -22x + 14y + 5z. \end{cases}$$

Из первых двух уравнений выражаем y и z через x, x' и x'' и подставляем в третье уравнение системы, после приведения подобных получим уравнение третьего порядка

$$x''' + 2x'' - 5x' - 6x = 0.$$

Характеристическое уравнение

$$0 = k^3 + 2k^2 - 5k - 6 = (k^3 + 1) + 2(k^2 - 1) - 5(k + 1) =$$

$$= (k + 1)(k^2 + k - 6) = (k + 1)(k - 2)(k + 3).$$

Корни характеристического уравнения $k_1 = -1$, $k_2 = 2$, $k_3 = -3$, тогда общее решение имеет вид

$$x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t} + C_3 e^{-3t}.$$

Используя исходную систему уравнений, находим y и z и, тем самым, общее решение исходной системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t} + C_3 e^{-3t}, \\ y = 4C_1 e^{-t} + \dfrac{5}{2} C_2 e^{2t}, \\ z = -7C_1 e^{-t} - C_2 e^{2t} - C_3 e^{-3t}. \end{cases}$$

Пример 5. Вещество A, количество которого равно C, разлагается на два вещества A_1 и A_2. Скорость образования каждого из веществ пропорциональна количеству неразложившегося вещества. Найти закон изменения веществ A_1 и A_2, если $x(0) = 0$, $y(0) = 0$; $x(t) = \dfrac{3}{8}C$, $y(t) = \dfrac{1}{8}C$, где $x(t)$ и $y(t)$ – количества веществ A_1 и A_2 в момент времени t.

Решение. Скорость образования веществ A_1 и A_2 в момент времени t такова

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = K_1(C - x - y), \\ \dfrac{dy}{dt} = K_2(C - x - y). \end{cases}$$

Получили систему двух линейных уравнений первого порядка. Найдём решение данной системы. Дифференцируя первое уравнение системы и подставляя в полученное уравнение $\frac{dy}{dt}$ из второго уравнения системы, получим

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -K_1\left[\frac{dx}{dt} + K_2(C - x - y)\right].$$

Из первого уравнения системы выразим $(C - x - y)$ и подставим в последнее уравнение, получим однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами

$$\frac{d^2x}{dt^2} + (K_1 + K_2)\frac{dx}{dt} = 0.$$

Корни характеристического уравнения $\tau_1 = 0$ и $\tau_2 = -(K_1 + K_2)$, а общее решение имеет вид $x = C_1 + C_2e^{-(K_1+K_2)t}$.

Выражая из первого уравнения системы y и подставляя в него x и $\frac{dx}{dt}$, получим $y = C + \frac{K_2}{K_1}C_2e^{-(K_1+K_2)t} - C_1$.

Тогда общее решение исходной системы имеет вид

$$\begin{cases} x = C_1 + C_2e^{-(K_1+K_2)t}, \\ y = C + \dfrac{K_2}{K_1}C_2e^{-(K_1+K_2)t} - C_1. \end{cases}$$

Используя начальные условия $x(0) = 0$ и $y(0) = 0$, находим $C_1 + C_2$, решая систему уравнений:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ C_1 + \dfrac{K_2}{K_1}C_2 = C \end{cases}, \quad \begin{cases} C_1 = \dfrac{K_1C}{K_1 + K_2}, \\ C_2 = -\dfrac{K_1C}{K_1 + K_2}. \end{cases}$$

Подставляя C_1 и C_2 в общее решение системы, получим законы изменения величины x и y:

$$\begin{cases} x = \dfrac{K_1C}{K_1 + K_2}\left[1 - e^{-(K_1+K_2)t}\right], \\ y = -\dfrac{K_2C}{K_1 + K_2}\left[1 - e^{-(K_1+K_2)t}\right]. \end{cases}$$

Неизвестные коэффициенты K_1 и K_2 находим, используя условия $x(1) = \frac{3}{8}C$; $y(1) = \frac{C}{8}$, решая следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{3}{8}C = \frac{K_1 C}{K_1 + K_2}\left[1 - e^{-\left(K_1 + K_2\right)}\right] \\ \frac{C}{8} = \frac{K_2 C}{K_1 + K_2}\left[1 - e^{-\left(K_1 + K_2\right)}\right] \end{cases}$$

Откуда имеем $K_1 = \frac{3}{4}\ln 2$, $K_2 = \frac{1}{4}\ln 2$. Подставляя найденные значения K_1 и K_2, окончательно получим

$$x = \frac{3}{4}C(1 - 2^{-t}),\ \ y = \frac{C}{8}(1 - 2^{-t}).$$

2. Решение системы дифференциальных уравнений методом интегрируемых комбинаций (непосредственный метод)

Интегрируемой комбинацией называется дифференциальное уравнение, полученное как следствие решения уравнений системы

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, y_2, ..., y_n) \quad i = \overline{1, n},$$

которое сводится к интегрируемому типу дифференциального уравнения.

Суть метода интегрируемых комбинаций состоит в следующем: посредством арифметических операций сложения, вычитания, деления данных уравнений системы образуют интегрируемые комбинации, т.е. интегрируемые дифференциальные уравнения, полученные из данной системы вида

$$\varphi\left(x, u, \frac{du}{dx}\right) = 0. \tag{16}$$

В случае линейной однородной системы с постоянными коэффициентами интегрируемая комбинация – дифференциальные уравнения с разделенными переменными; в случае линейной неоднородной системы – линейное дифференциальное уравнение первого порядка. Каждая интегрируемая комбинация дает один первый интеграл. Если их число равно числу уравнений системы, то интегрирование закончено. В противном случае получим систему с меньшим числом неизвестных функций.

Нормальную систему дифференциальных уравнений (1) полезно записать в симметричной форме

$$\frac{dx}{1}=\frac{dy_1}{f_1(y_1,y_2,...,y_n)}=.....=\frac{dy_n}{f_n(y_1,y_2,...,y_n)}. \qquad (17)$$

При нахождении первых интегралов системы (1) используют свойство ряда равных отношений

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=...=\frac{a_n}{b_n}=\frac{k_1a_1+k_2a_2+...+k_na_n}{k_1b_1+k_2b_2+...+k_nb_n}. \qquad (18)$$

Отметим, что необязательно, чтобы все отношения участвовали в этой комбинации.

Множители k_i $(i=\overline{1,n})$ выбирают так, чтобы знаменатель равнялся нулю, а числитель был полным дифференциалом или же знаменатель не равнялся нулю, но числитель – дифференциал той комбинации переменных, которой выражается знаменатель.

Отметим, что все переменные входят равноправно в симметричную систему (17), а это может облегчить нахождение интегрируемых комбинаций.

Пример 6. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{dy_1}{dx}=y_2,\\ \dfrac{dy_2}{dx}=y_1.\end{cases}$$

Решение. Первую интегрируемую комбинацию находим почленным сложением уравнений данной системы, т.е. $\frac{dy_1}{dx}+\frac{dy_2}{dx}=y_1+y_2$.

Откуда имеем $\frac{d\left(y_1+y_2\right)}{dx}=y_1+y_2$ или $\frac{d\left(y_1+y_2\right)}{y_1+y_2}=dx$.

Интегрируя полученное дифференциальное уравнение, находим $\ln\left|y_1+y_2\right|=x+C$, откуда

$$y_1+y_2=e^{x+C_1}=C_1e^x \quad \text{или} \quad \frac{y_1+y_2}{e^x}=C_1.$$

Вторую интегрируемую комбинацию получаем, почленно вычитая из первого уравнения данной системы второе, т.е.

$$\frac{dy_1}{dx}-\frac{dy_2}{dx}=y_2-y_1=-\left(y_1-y_2\right),$$

$$\frac{d\left(y_1-y_2\right)}{dx}=-\left(y_1-y_2\right) \quad \text{или} \quad \frac{d\left(y_1-y_2\right)}{y_1-y_2}=-dx.$$

Интегрируя, получим $\ln\left|y_1-y_2\right|=-x+C$, откуда $\frac{y_1-y_2}{e^{-x}}=C_2$. Из полученных соотношений определяем решение данной системы

$$y_1=\frac{1}{2}\left(C_1e^x+C_2e^{-x}\right),\ y_2=\frac{1}{2}\left(C_1e^x-C_2e^{-x}\right).$$

Пример 7. Проинтегрировать систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=y, \\ \dfrac{dy}{dt}=-x. \end{cases}$$

Решение. Умножая почленно уравнения данной системы соответственно на x и y и складывая полученные уравнения, получим интегрируемую комбинацию $x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}=0$.

Интегрируя, получим первый интеграл $x^2+y^2=2c$. Выбирая положительное значение y, получим $y=\sqrt{2c-x^2}$. Подставляя данное значение y в первое уравнение исходной системы, получим $\frac{dx}{dt}=\sqrt{2c-x^2}$.

Интегрируя это уравнение, получим $\arcsin\frac{x}{\sqrt{2c}}=t+C$ или первый интеграл системы $\arcsin\frac{x}{\sqrt{2c}}-t=C_1$.

Первые интегралы независимы и, следовательно, их совокупность образует общий интеграл данной системы.

Пример 8. Проинтегрировать систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{x+y}.$$

Решение. Данная система записана в симметричной форме. Интегрируя первое уравнение системы $\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}$, приходим к равенству

$$\ln\left|C_1x\right|=\ln\left|y\right|,$$

откуда имеем первый интеграл системы $\frac{y}{x}=C_1$. На основании свойств ряда равных отношений составляем производную пропорцию и запишем в виде

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{x+y}=\frac{dx+dy}{x+y}.$$

Из последних двух отношений $\frac{dz}{x+y}=\frac{dx+dy}{x+y}$ получаем вторую интегрируемую комбинацию $dz=dx+dy$.

Интегрируя полученное уравнение, имеем

$$z=x+y+C_2$$

или $z-x-y=C_2$ – второй интеграл.

Интегралы независимы и, следовательно, их совокупность образует общий интеграл данной системы.

4.2. Линейные нормальные системы дифференциальных уравнений

Нормальная система дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} y_1'=a_{11}(x)y_1+a_{12}(x)y_2+...+a_{1n}(x)y_n+\varphi_1(x), \\ y_2'=a_{21}(x)y_1+a_{22}(x)y_2+...+a_{2n}(x)y_n+\varphi_2(x), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n'=a_{n1}(x)y_1+a_{n2}(x)y_2+...+a_{nn}(x)y_n+\varphi_n(x) \end{cases} \tag{19}$$

называется ***линейной.***

Систему (19) можно записать в матричной форме

$$y'=Ay+\varphi, \tag{20}$$

где $y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_n \end{pmatrix}$, $\varphi=\begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \\ ... \\ \varphi_n(x) \end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & ... & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & ... & a_{2n}(x) \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & ... & a_{nn}(x) \end{pmatrix}$

Если функции $\varphi_i(x)=0 \quad (i=\overline{1,n})$, то система (19) называется **однородной**, в противном случае – **неоднородной**.

Для линейных систем дифференциальных уравнений справедливы теоремы, аналогичные установленным ранее для линейных дифференциальных уравнений. Сформулируем их без доказательства.

Теорема 1. Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – решения линейной однородной системы $y' = Ay$, то сумма $C_1y_1(x) + C_2y_2$ – также решение системы, где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

Теорема 2. Если $\overline{y}(x)$ – решение линейной неоднородной системы (20), а $y(x)$ – решение соответствующей однородной системы $y' = Ay$, то сумма $y(x) + \overline{y}(x)$ будет решением неоднородной системы.

Определителем Вронского (вронскиан) системы функций $y_1(x),\ y_2(x),\ ...,\ y_n(x)$ называют определитель вида

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_{11}(x) & y_{12}(x) & ... & y_{1n}(x) \\ y_{21}(x) & y_{22}(x) & ... & y_{2n}(x) \\ ... & ... & ... & ... \\ y_{n1}(x) & y_{n2}(x) & ... & y_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

Теорема 3. Для того, чтобы система функций $y_1(x),\ y_2(x),\ ...,\ y_n(x)$, являющихся решениями линейной однородной системы дифференциальных уравнений $y' = Ay$, была линейно независимой на $[a;b]$, необходимо и достаточно, чтобы $W(x) \neq 0$ на $[a;b]$.

Теорема 4. (о структуре общего решения однородной системы). Общее решение однородной системы дифференциальных уравнений $y' = Ay$ имеет вид

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + ... + C_ny_n, \tag{21}$$

где $y_1,\ y_2,\ ...,\ y_n$ – решения однородной системы дифференциальных уравнений

$$y' = Ay. \tag{22}$$

Теорема 5. (о структуре общего решения неоднородной системы). Общее решение линейной неоднородной системы дифференциальных уравнений (20) имеет вид

$$y = y_{одн.} + y_{част.}, \tag{23}$$

где $y_{одн.}$ – общее решение (22), $y_{част.}$ – любое частное решение (20).

4.3. Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Система

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + ... + a_{1n}y_n, \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{2n}y_n, \\ \quad .... \\ y_n' = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + ... + a_{nn}y_n, \end{cases} \tag{24}$$

в которой a_{ij} – действительные числа $(i, j = \overline{1,n})$, называется нормальной линейной однородной системой дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Систему (24) запишем в матричной форме

$$y' = A \cdot y, \tag{25}$$

где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_n \end{pmatrix}$.

Решение системы (24) (или (25) будем искать в виде

$$y_i = \alpha_i \cdot e^{\lambda x} \quad (i = \overline{1,n}), \tag{26}$$

где α_i $(i = \overline{1,n})$ и λ – постоянные числа, которые требуется определить.

Подставляя (26) в (24) и сокращая на $e^{\lambda x} \neq 0$, получим систему n линейных однородных алгебраических уравнений с n неизвестными α_i $(i = \overline{1,n})$:

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + ... + a_{1n}\alpha_n = 0, \\ a_{11}\alpha_1 + (a_{22} - \lambda)\alpha_2 + ... + a_{2n}\alpha_n = 0, \\ \quad .... \\ a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + ... + (a_{nn} - \lambda)\alpha_n = 0. \end{cases} \tag{27}$$

Для того чтобы система (27) имела ненулевое решение, необходимо и достаточно, чтобы ее определитель был равен нулю:

$$\Delta = |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{28}$$

Равенство (28) – уравнение относительно λ, которое называется **характеристическим уравнением** системы (19). Уравнение (28) – многочлен степени n относительно λ с действительными коэффициентами, и поэтому данное уравнение имеет n корней с учетом их кратностей. Уравнение (28) есть характеристическое уравнение матрицы A, а его корни $\lambda_1,\ \lambda_2,\ ...,\lambda_n$ – собственные значения этой матрицы.

Рассмотрим следующие случаи нахождения общего решения системы (24) в зависимости от корней характеристического уравнения (23).

1. Корни характеристического уравнения $\lambda_1,\ \lambda_2,\ ...,\lambda_n$ – действительные и различные числа.

Подставляя последовательно $\lambda_1,\ \lambda_2,\ ...,\lambda_n$ в систему линейных уравнений (27), решая ее, находим n линейно независимых собственных векторов матрицы A:

$$\overline{\alpha}^1=\begin{pmatrix}\alpha_{11}\\ \alpha_{21}\\ \dots\\ \alpha_{n1}\end{pmatrix},\ \overline{\alpha}^2=\begin{pmatrix}\alpha_{12}\\ \alpha_{22}\\ \dots\\ \alpha_{n2}\end{pmatrix},\ \dots,\ \overline{\alpha}^n=\begin{pmatrix}\alpha_{1n}\\ \alpha_{2n}\\ \dots\\ \alpha_{nn}\end{pmatrix}. \qquad (29)$$

Полученным собственным векторам соответствует n векторов $\overline{y}_k\ (k=\overline{1,n})$, являющихся решениями системы (19):

$$\overline{y}_1=\begin{pmatrix}\alpha_{11}\\ \alpha_{21}\\ \dots\\ \alpha_{n1}\end{pmatrix}\cdot e^{\lambda_1 x},\ ...,\ \ \overline{y}_n=\begin{pmatrix}\alpha_{1n}\\ \alpha_{2n}\\ \dots\\ \alpha_{nn}\end{pmatrix}\cdot e^{\lambda_n x}. \qquad (30)$$

Система векторов (30) линейно независима, так как ее определитель Вронского

$$W(x)=\begin{vmatrix}\alpha_{11}e^{\lambda_1 x} & \alpha_{12}e^{\lambda_2 x} & \dots & \alpha_{1n}e^{\lambda_n x}\\ \alpha_{21}e^{\lambda_1 x} & \alpha_{22}e^{\lambda_2 x} & \dots & \alpha_{2n}e^{\lambda_n x}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \alpha_{n1}e^{\lambda_1 x} & \alpha_{n2}e^{\lambda_2 x} & \dots & \alpha_{nn}e^{\lambda_n x}\end{vmatrix}=e^{(\lambda_1+\lambda_2+...+\lambda_n)x}\cdot\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn}\end{vmatrix}$$

отличен от нуля для любых x, т.к. $e^{(\lambda_1+\lambda_2+...+\lambda_n)x}\neq 0$, а определитель, стоящий в правой части последнего равенства – это определитель матрицы линейно независимой системы векторов (30), не равен нулю. Тогда в силу теоремы 4 общее решение имеет вид

$$y=C_1\overline{y_1}+C_2\overline{y_2}+...+C_n\overline{y_n} \qquad (31)$$

или в координатной форме

$$\begin{cases} y_1 = C_1\alpha_{11}e^{\lambda_1 x} + C_2\alpha_{12}e^{\lambda_2 x} + \ldots + C_n\alpha_{1n}e^{\lambda_n x}, \\ y_2 = C_1\alpha_{21}e^{\lambda_1 x} + C_2\alpha_{22}e^{\lambda_2 x} + \ldots + C_n\alpha_{2n}e^{\lambda_n x}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n = C_1\alpha_{n1}e^{\lambda_1 x} + C_2\alpha_{n2}e^{\lambda_2 x} + \ldots + C_n\alpha_{nn}e^{\lambda_n x}. \end{cases} \tag{32}$$

Пример 1. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = y_1 + 2y_2, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = 4y_1 + 3y_2. \end{cases}$$

Решение. Частное решение заданной системы ищем в виде

$$y_1 = \alpha_1 e^{\lambda x}, \ y_2 = \alpha_2 e^{\lambda x}.$$

Составляем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \ \text{ или } \ \lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0,$$

корни которого $\lambda_1 = 5, \ \lambda_2 = -1$ – действительные и различные числа.

Построим частное решение, соответствующее корню $\lambda_1 = 5$. Согласно соотношениям (27) $\alpha_1^{(1)}$ и $\alpha_2^{(1)}$ будем искать из системы

$$\begin{cases} (1-5)\alpha_1^{(1)} + 2\alpha_2^{(1)} = 0, \\ 4\alpha_1^{(1)} + (3-5)\alpha_2^{(1)} = 0. \end{cases} \ \text{или} \ \begin{cases} -4\alpha_1^{(1)} + 2\alpha_2^{(1)} = 0, \\ 4\alpha_1^{(1)} - 2\alpha_2^{(1)} = 0. \end{cases},$$

$$\begin{cases} 2\alpha_1^{(1)} - \alpha_2^{(1)} = 0, \\ 2\alpha_1^{(1)} - \alpha_2^{(1)} = 0. \end{cases}, \qquad \begin{cases} \alpha_1^{(1)} = 1, \\ \alpha_2^{(1)} = 2. \end{cases}$$

Тогда частное решение, соответствующее корню $\lambda_1 = 5$, имеет вид

$$y_1^{(1)} = 1 \cdot e^{5x} \ \text{ и } \ y_2^{(1)} = 2e^{5x}.$$

Найдем частное решение, соответствующее корню $\lambda_2 = -1$. Согласно соотношениям (27)

$$\begin{cases} 2\alpha_1^{(2)} + 2\alpha_2^{(2)} = 0, \\ 4\alpha_1^{(2)} + 4\alpha_2^{(2)} = 0. \end{cases}, \ \text{откуда} \ \alpha_1^{(2)} = 1, \quad \alpha_2^{(2)} = -1.$$

Тогда частное решение, соответствующее корню $\lambda_2 = -1$, имеет вид

$$y_1^{(2)} = 1 \cdot e^{-x} \quad \text{и} \quad y_2^{(2)} = -1 \cdot e^{-x}.$$

Тогда общее решение исходной системы имеет вид

$$\begin{cases} y_1 = C_1 y_1^{(1)} + C_2 y_1^{(2)} = C_1 \cdot e^{5x} + C_2 e^{-x}, \\ y_2 = C_1 y_2^{(1)} + C_2 y_2^{(2)} = 2C_1 e^{5x} - C_2 e^{-x}. \end{cases}$$

Пример 2. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 - y_2 + y_3, \\ y_2' = y_1 + 2y_2 - y_3, \\ y_3' = y_1 - y_2 + 2y_3. \end{cases}$$

Решение. Характеристическое уравнение данной системы

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -41 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^3 - (2-\lambda) = (2-\lambda)(1-\lambda)(3-\lambda)$$

имеет корни $\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = 3$.

При $\lambda_1 = 1$ система (27) имеет вид

$$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 0, \\ \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 0, \\ \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 0, \end{cases}$$

решением которой являются числа $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \alpha_3$, полагая $\alpha_3 = 1$, получим

$$\overline{\alpha^1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Аналогичным образом при $\lambda_2 = 2$ получим

$$\overline{\alpha^2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

а при $\lambda_3 = 3$ получим

$$\overline{\alpha^3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда общее решение данной системы

$$y = C_1 \cdot \overline{\alpha^1} + C_2\overline{\alpha^2} + C_3\overline{\alpha^3} = C_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^x + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2x} + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3x}$$

или в координатной форме

$$\begin{cases} y_1 = C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x}, \\ y_2 = C_1 e^x + C_2 e^{2x}, \\ y_3 = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x}. \end{cases}$$

2. Корни $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ характеристического уравнения различные, причем среди них имеются комплексные числа.

Если $\lambda = \alpha + \beta i$ – комплексный корень характеристического уравнения, а коэффициенты искомой системы – действительные числа, то число $\alpha - \beta i$ (сопряженное число) тоже корень характеристического уравнения. Комплексно-сопряженным числам (собственным значения матрицы A) будут соответствовать собственные векторы с комплексно-сопряженными координатами

$$p \pm iq = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ ... \\ p_n \end{pmatrix} \pm i \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ ... \\ q_n \end{pmatrix}.$$

Тогда векторы

$$\begin{pmatrix} p_1 + iq_1 \\ p_2 + iq_2 \\ ... \\ p_n + iq_n \end{pmatrix} \cdot e^{(\alpha + \beta i)x} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} p_1 - iq_1 \\ p_2 - iq_2 \\ ... \\ p_n - iq_n \end{pmatrix} \cdot e^{(\alpha - \beta i)x}$$

будут частными решениями системы (24). Но, так как имеет место равенство

$$(p_k + iq_k)e^{(\alpha + i\beta)x} = e^{\alpha x}(p_k \cos\beta x - q_k \sin\beta x) + ie^{ax}(p_k \sin\beta x + q_k \cos\beta x),\ k = \overline{1, n},$$

то векторы

$$u(x) = \begin{pmatrix} p_1 \cos\beta x - q_1 \sin\beta x \\ p_2 \cos\beta x - q_2 \sin\beta x \\ .... \\ p_n \cos\beta x - q_n \sin\beta x \end{pmatrix} \cdot e^{ax} \quad \text{и} \quad \upsilon(x) = \begin{pmatrix} p_1 \cos\beta x + q_1 \sin\beta x \\ p_2 \cos\beta x + q_2 \sin\beta x \\ .... \\ p_n \cos\beta x + q_n \sin\beta x \end{pmatrix} \cdot e^{ax}$$

будут частными решениями системы (24).

Пример 3. Найти общее решение линейной системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y' = 2y - 3z, \\ z' = 3y + 2z. \end{cases}$$

Решение. Соответствующее характеристическое уравнение имеет вид

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -3 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \text{ или } \lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0.$$

Корни характеристического уравнения $\lambda_1 = 2+3i$, $\lambda_2 = 2-3i$. Частное решение, соответствующее корню $\lambda_1 = 2+3i$, будем искать в виде $y = \alpha_1 e^{(2+3i)x}$, $z = \alpha_2 e^{(2+3i)x}$. Числа α_1 и α_2 определяем из системы

$$\begin{cases} (2-2-3i)\alpha_1 - 3\alpha_2 = 0, \\ 3\alpha_1 + (2-2-3i)\alpha_2 = 0. \end{cases} \text{ или } \begin{cases} \alpha_1 i + \alpha_2 = 0, \\ \alpha_1 - i\alpha_2 = 0. \end{cases}$$

Умножая второе уравнение системы на i, получим два одинаковых уравнения, а, следовательно, система сводится к одному уравнению

$$\alpha_1 i + \alpha_2 = 0.$$

Полагая что $\alpha_1 = 1$, то $\alpha_2 = -i$ и, следовательно, частное решение будет иметь вид

$$y = e^{(2+3i)x} = e^{2x} \cdot e^{3ix} = e^{2x}(\cos 3x + i\sin 3x);$$

$$z = -ie^{(2+3i)x} = e^{2x}(-ie^{3ix}) = e^{2x}(-i(\cos 3x + i\sin 3x)) =$$

$$= e^{2x}(-i\cos 3x - i^2 \sin 3x) = e^{2x}(\sin 3x - i\cos 3x)$$

Отделяя действительные и мнимые части, получаем два действительных линейно независимых частных решения

$$\begin{cases} y_1 = e^{2x}\cos 3x, \quad z_1 = e^{2x}\sin 3x, \\ y_2 = e^{2x}\sin 3x, \quad z_2 = -e^{2x}\cos 3x. \end{cases}$$

Общее решение исходной системы линейных дифференциальных уравнений – линейная комбинация построенных линейно независимых решений, т.к.

$$\begin{cases} y = e^{2x}(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x), \\ z = e^{2z}(C_1\sin 3x - C_2\cos 3x). \end{cases}$$

3. Среди корней $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, ..., \lambda_n$ есть кратные. Корню λ_1 кратности k соответствует решение вида

$$y_1 = Q_1(x)e^{\lambda_1 x},\ y_2 = Q_2(x)e^{\lambda_1 x}, ..., y_n = Q_n(x)e^{\lambda_1 x},$$

где $Q_1(x), Q_2(x), ..., Q_n(x)$ – многочлены степени не выше $k - 1$ (они могут быть и постоянными числами). Среди коэффициентов этих многочленов k будут произвольными, а остальные выражаются через них. Один из произвольных коэффициентов полагаем поочередно равным единице, а остальные – равными нулю. Таким образом, строим k линейно независимых частных решений. Если λ_1 – действительное число, то частные решения тоже действительные. Если λ_1 – комплексный корень кратности k, равный $a + bi$, то сопряженный ему корень $a - bi$ также является корнем характеристического уравнения кратности k. Находим k линейно независимых комплексных частных решений, соответствующих корню $a + bi$. Отделяя в них действительные и мнимые части, получаем $2k$ линейно независимых действительных частных решений. Решения для корня $a - bi$ линейно независимы с решениями для корня $a + bi$.

В случае существования других кратных или простых корней (кроме λ_1) строим n линейно независимых действительных частных решений для всех корней и берем их линейную комбинацию с произвольными постоянными коэффициентами. В результате получаем общее решение однородной системы дифференциальных уравнений.

Пример 4. Найти общее решение линейной системы дифференциальных уравнений $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 3y. \end{cases}$

Решение. Характеристическое уравнение имеет вид

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0.$$

Корни характеристического уравнения кратные $k_1 = k_2 = 2$. Следовательно, решение будем искать

$$\begin{cases} x = (\alpha_1 + \beta_1 t)e^{2t}, \\ y = (\alpha_2 + \beta_2 t)e^{2t}. \end{cases}$$

Подставляя x и y в исходную систему, получим

$$2\alpha_1+\beta_1+2\beta_1 t=\alpha_1+\beta_1 t-\alpha_2-\beta_2 t.$$

Откуда имеем $\begin{cases}\beta_2=-\beta_1,\\ \alpha_2=-\alpha_1-\beta_1.\end{cases}$

Полагая, что $\alpha_1=C_1$, $\beta_1=C_2$, то общее решение исходной системы запишем в виде

$$\begin{cases}x=(C_1+C_2 t)e^{2t},\\ y=-(C_1+C_2+C_2 t)e^{2t}.\end{cases}$$

4.4. Линейные неоднородные системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Рассмотрим методы интегрирования неоднородных систем: метод вариации произвольных постоянных и метод Даламбера (интегрируемые комбинации).

1. Метод вариации произвольных постоянных (на примере системы трех уравнений).

Пусть дана система трех неоднородных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases}y_1'=a_1y_1+b_1y_2+d_1y_3+\varphi_1(x),\\ y_2'=a_2y_1+b_2y_2+d_2y_3+\varphi_2(x),\\ y_3'=a_3y_1+b_3y_2+d_3y_3+\varphi_3(x).\end{cases} \tag{33}$$

Считаем, что решение соответствующей однородной системы $(\varphi_1(x)=0;\ \varphi_2(x)=0;\ \varphi_3(x)=0)$ для (33) известно и имеет вид

$$y=C_1\overline{y_1}+C_2\overline{y_2}+C_3\overline{y_3} \tag{34}$$

или в координатной форме

$$\begin{cases}y_1=C_1y_{11}+C_2y_{12}+C_3y_{13},\\ y_2=C_1y_{21}+C_2y_{22}+C_3y_{23},\\ y_3=C_1y_{31}+C_2y_{32}+C_3y_{33}.\end{cases} \tag{35}$$

Решение неоднородной системы (33) будем искать в виде (35) – общее решение соответствующей однородной системы, считая, что $C_1,\ C_2,\ C_3$ – функции от x, т.е.

$$\begin{cases} y_1 = C_1(x)y_{11} + C_2(x)y_{12} + C_3(x)y_{13}, \\ y_2 = C_1(x)y_{21} + C_2(x)y_{22} + C_3(x)y_{23}, \\ y_3 = C_1(x)y_{31} + C_2(x)y_{32} + C_3(x)y_{33}, \end{cases} \tag{36}$$

где $C_1(x),\ C_2(x),\ C_3(x)$ – неизвестные функции.

Дифференцируя соотношения (36) и подставляя их в первое уравнение системы (33), собирая подобные при $C_1(x),\ C_2(x),\ C_3(x)$ получим

$$C_1'(x)y_{11} + C_2'(x)y_{12} + C_3'(x)y_{13} + C_1(x)(y_{11}' - a_1y_{11} - b_1y_{21} - d_1y_{31)} +$$
$$+C_2(x)(y_{12}' - a_1y_{12} - b_1y_{22} - d_1y_{32)} + C_3(x)(y_{13}' - a_1y_{13} - b_1y_{23} - d_1y_{33}) = \varphi_1(x).$$

Но так как $y_1,\ y_2,\ y_3$ – решения однородной системы, то все выражения, стоящие в скобках при $C_1(x),\ C_2(x)$ и $C_3(x)$ равны нулю.

Следовательно, имеем

$$C_1'(x)y_{11} + C_2'(x)y_{12} + C_3'(x)y_{13} = \varphi_1(x). \tag{37}$$

Таким же образом из второго и третьего уравнений системы (33) получим соответственно

$$C_1'(x)y_{21} + C_2'(x)y_{22} + C_3'(x)y_{23} = \varphi_2(x), \tag{38}$$

$$C_1'(x)y_{31} + C_2'(x)y_{32} + C_3'(x)y_{33} = \varphi_3(x). \tag{39}$$

Уравнения (37), (38) образуют линейную систему уравнений относительно $C_1'(x),\ C_2'(x),\ C_3'(x)$, определитель которой отличен от нуля в силу линейной независимости векторов $\overline{y_1}(x),\ \overline{y_2}(x)$ и $\overline{y_3}(x)$. Решая систему (37) – (39), находим искомые функции $C_1(x), C_2(x), C_3(x)$ и, следовательно, общее решение системы (33), подставляя $C_1(x), C_2(x)$ и $C_3(x)$ в соотношения (36).

Пример 1. Найти методом вариации произвольных постоянных общее решение неоднородной линейной системы дифференциальных уравнений $\begin{cases} y' = -2y + z - e^{2x}, \\ z' = -3y + 2z + 6e^{2x}. \end{cases}$

Решение. Соответствующая однородная система $\begin{cases} y' = -2y + z, \\ z' = -3y + 2z \end{cases}$ имеет характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 \\ -3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \text{ или } \lambda^2 - 1 = 0; \ \lambda_1 = 1, \ \lambda_2 = -1.$$

Находим частные решения для каждого из корней характеристического уравнения и затем строим общее решение однородной системы, которое имеет вид $\begin{cases} y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}, \\ z = 3C_1 e^x + C_2 e^{-x}. \end{cases}$

Общее решение неоднородной системы будем искать в виде

$$\begin{cases} y = C_1(x)e^x + C_2(x)e^{-x} \\ z = 3C_1(x)e^x + C_2(x)e^{-x}, \end{cases}$$

где $C_1(x)$ и $C_2(x)$ – подлежащие определению непрерывно дифференцируемые функции x.

Находим $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$ из системы $\begin{cases} C_1'(x)e^x + C_2'(x)e^{-x} = e^{-2x}, \\ 3C_1'(x)e^x + C_2'(x)e^{-x} = 6e^{2x}. \end{cases}$

Решая полученную систему, находим $C_1'(x) = \dfrac{7}{2}e^x, \ C_2'(x) = -\dfrac{9}{2}e^{3x}$.

Откуда, интегрируя, получим $C_1(x) = \dfrac{7}{2}e^x + C_1, \ C_2(x) = -\dfrac{3}{2}e^{3x} + C_2$.

Тогда общее решение заданной неоднородной системы имеет вид

$$\begin{cases} y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + 2e^{2x}, \\ z = 3C_1 e^x + C_2 e^{-x} + 9e^{2x}. \end{cases}$$

2. Метод Даламбера (метод интегрируемых комбинаций) – интегрирование линейных неоднородных систем дифференциальных уравнений.

Рассмотрим метод Даламбера для случая системы двух уравнений.

Пусть дана система вида

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_1 x + b_1 y + F_1(t), \\ \dfrac{dy}{dt} = a_2 x + b_2 y + F_2(t). \end{cases} \tag{40}$$

Пусть λ – множитель, на который надо умножить второе уравнение системы (40), чтобы получить интегрируемую комбинацию

$$\frac{d(x+\lambda y)}{dt}=(a_1+a_2\lambda)x+(b_1+b_2\lambda)y+F_1+\lambda F_2. \tag{41}$$

Цель будет достигнута, если $b_1+b_2\lambda=\lambda(a_1+a_2\lambda)$ или

$$a_2\lambda^2+(a_1-b_2)\lambda-b_1=0. \tag{42}$$

Тогда имеем следующую интегрируемую комбинацию $(U=x+\lambda y)$

$$\frac{dU}{(a_1+a_2\lambda)U+F_1+F_2\lambda}=dt. \tag{43}$$

Уравнение (43) – линейное дифференциальное уравнение первого порядка.

Пусть общий интеграл уравнения (43)

$$U=x+\lambda y=\Phi(t,\ \lambda,\ c). \tag{44}$$

Возможны следующие варианты:

а) корни квадратного уравнения (42) действительные и различные. Тогда имеем два интеграла системы (41):

$$\begin{cases} x+\lambda_1 y=\Phi(t,\ \lambda,\ c_1), \\ x+\lambda_2 y=\Phi(t,\ \lambda,\ c_2); \end{cases} \tag{45}$$

в) корни квадратного уравнения (42) кратные $(\lambda_1=\lambda_2)$. В этом случае получаем только один интеграл, который позволяет свести вопрос к интегрированию с одной неизвестной функцией;

с) корни квадратного уравнения (42) комплексные $(\lambda=\alpha\pm i\beta)$. Приравниваем действительные и мнимые составляющие обеих частей уравнения

$$x+(\alpha+i\beta)y=\Phi(t,\ \alpha+\beta i,\ A+Bi), \tag{46}$$

также получим два интеграла. Здесь A и B – произвольные постоянные.

Пример 2. Найти общий интеграл методом Даламбера для системы линейных дифференциальных уравнений $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=6x-y, \\ \dfrac{dy}{dt}=3x+2y. \end{cases}$

Решение. Умножая второе уравнение на λ и прибавляя первое, получим $\frac{dx}{dt}+\lambda\frac{dy}{dt}=(6+3\lambda)x+(2\lambda-1)y$ или

$$\frac{d(x+\lambda y)}{dt}=(6+3\lambda)x+(2\lambda-1)y.$$

Интегрируемая комбинация будет получена, если

$$2\lambda-1=\lambda(6+3\lambda) \text{ или } 3\lambda^2+4\lambda+1=0.$$

Корни квадратного уравнения $\lambda_1=-\frac{1}{3}$, $\lambda_2=-1$.

В первом случае интегрируемая комбинация имеет вид $U_1=x-\frac{1}{3}y$ или

$$\frac{d\left(x-\frac{y}{3}\right)}{5\left(x-\frac{y}{3}\right)}=dt.$$

Интегрируя это уравнение, получим $\ln\left|x-\frac{y}{3}\right|=5(t+C)$, откуда

$$x-\frac{y}{3}=e^{5t+5C}$$

или

$$(3x-y)\cdot e^{-5y}=C_1, \text{ где } C_1=e^{5C}.$$

Во втором случае $(\lambda_2=-1)$ интегрируемая комбинация имеет вид $U_2=x-y$ и

$$\frac{d(x-y)}{(6-3)(x-y)}=dt \text{ или } \frac{d(x-y)}{3(x-y)}=dt.$$

Интегрируя данное уравнение, получим

$$(x-y)e^{-3t}=C_2, \text{ где } C_2=e^{3C}.$$

Таким образом, общий интеграл системы имеет вид

$$\begin{cases}(3x-y)e^{-5t}=C_1,\\(x-y)e^{-3t}=C_2.\end{cases}$$

РЯДЫ

§1. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ. СУММА РЯДА

Пусть задана числовая последовательность $a_1,\ a_2,\ ...,\ a_n,\ ...$

Выражение вида

$$a_1 + a_2 + ... + a_n + ... = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \tag{1}$$

называется числовым рядом, числа $a_1, a_2, ..., a_n$ – членами числового ряда, а число a_n – n-ным или общим членом ряда.

Сумма конечного числа n первых членов ряда (1)

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

называется n-ной частичной суммой ряда (1).

Таким образом,

$S_1 = a_1$ – первая частичная сумма ряда (1);

$S_2 = a_1 + a_2$ – вторая частичная сумма ряда (1);

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$ – третья частичная сумма ряда (1);

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$ – n-ная частичная сумма ряда (1).

Если для последовательности $\{S_n\}$ частных сумм ряда (1) существует конечный предел S,

$$\lim_{n \to \infty} S_n = S, \tag{2}$$

то ряд (1) называется сходящимся, а число S – суммой данного ряда.

Если предел последовательности $\{S_n\}$ не существует или равен бесконечности, то ряд (1) называют расходящимся и суммы он не имеет.

Пример 1. Исследовать на сходимость ряд

$$a + aq + aq^2 + ... + a \cdot q^{n-1} ... \tag{3}$$

Решение. Данный ряд – геометрическая прогрессия с первым членом $a\left(a \neq 0\right)$ и знаменателем q. Пусть S_n – сумма для первых n членов прогрессии (3)

$$S_n = a + aq + ... + a \cdot q^{n-1}. \tag{4}$$

Умножая (4) на q, получим

$$S_n \cdot q = aq + aq^2 + ... + a \cdot q^n. \tag{5}$$

Вычитая почленно (5) из (4), получим $S_n(1-q) = a - aq^n$ или сумма n первых членов геометрической прогрессии равна $(q \neq 1)$

$$S_n = \frac{a - aq^n}{1-q} = \frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q}. \qquad (6)$$

1) Если $|q| < 1$, то $q^n \to 0$ при $n \to \infty$ и, значит

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q}\right) = \frac{a}{1-q}. \qquad (7)$$

И так, если $|q| < 1$, то ряд (3) сходится и его сумма равна $S = \dfrac{a}{1-q}$.

2) Если $|q| > 1$, то $\left|q^n\right| \to \infty$, при $n \to \infty$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не существует. Значит ряд (3) расходится и суммы не имеет.

3) Если $q = 1$, то ряд (3) имеет вид $a + a + \ldots + a + \ldots$ и $S_n = n \cdot a,\ \lim\limits_{n\to\infty} = \infty$, т.е. ряд (3) расходится.

4) Если $q = -1$, то ряд (3) имеет вид $a - a + a - a + \ldots$, тогда

$S_n = 0$, при n четном; $S_n = a$, при n нечетном;

следовательно, последовательность S_n не имеет предела, а значит ряд (3) расходится.

Пусть дан ряд (1), ряд $a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots$ называют n-ным остатком ряда (1).

Очевидно, m-ная часть частичная сумма n-ного остатка ряда равна разности $S_{n+m} - S_n$ частных сумм самого ряда. С другой стороны имеем $S_{n+m} = S_n + (S_{n+m} - S_n)$, откуда, переходя к пределу по $m(m \to \infty)$, получим

$$\lim_{m\to\infty} S_{m+n} = S_n + \lim_{m\to\infty}(S_{m+n} - S_n). \qquad (8)$$

Предел слева – есть сумма S исходного ряда, а предел справа – сумма r_n его n-ного остатка. Отметим, что из существования предела в левой части этого равенства следует существование предела в правой его части и наоборот. Поэтому, если сходится один из остатков ряда, то сходится и сам ряд. Также из сходимости ряда следует и сходимость каждого его остатка. Из формулы (8) следует, что частичная сумма сходящегося ряда отличается от его суммы остатка. Следовательно, чем меньше сумма остатка ряда, тем точнее описывает соответствующая частичная сумма ряда сумму всего ряда.

Теорема 1. Если ряд (1) сходится, то сумма r_n его n-ного остатка с ростом n стремится к нулю.

Доказательство. Так как равенство $S = S_n + r_n$ справедливо для любого n, то переходя к пределу при $n \to \infty$ получим $S = \lim\limits_{n\to\infty}\left(S_n + r_n\right) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n + \lim\limits_{n\to\infty} r_n$.

А для сходящегося ряда $\lim\limits_{x\to\infty} S_n = S$, откуда следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$.

Теорема 2. На сходимость данного ряда не влияет отбрасывания конечного числа его членов.

Доказательство. Пусть для ряда (1) S_n – сумма n первых членов ряда (1), C_k – сумма k отброшенных членов (при достаточно большом n все отброшенные члены содержатся в сумме S_n), T_{n-k} – сумма членов ряда, входящих в сумму S_n и не входящих в C_k. Тогда имеем $S_n = C_k + T_{n-k}$, где C_k – постоянное число, не зависящее от n.

Из последнего соотношения следует, что если существует $\lim\limits_{n\to\infty} T_{n-k}$, то существует и $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$; если существует $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$, то существует и $\lim\limits_{n\to\infty} T_{n-k}$, что и доказывает справедливость теоремы.

Пример 2. По заданным частным суммам рядов, написать эти ряды и найти их суммы:

1) $S_n = \dfrac{n+1}{n}$; 2) $S_n = \dfrac{2^n - 1}{2^n}$;

3) $S_n = \operatorname{arctg}(n)$; 4) $S_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$.

Ответ: 1) $2 - \sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n(n-1)}$; $S = 1$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2n}$; $S = 1$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}\dfrac{1}{n^2 - n + 1}$; $S = \dfrac{\pi}{2}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{2n-1}{n(n-1)} - 1$; $S = 0$.

Пример 3. Напишите бесконечную геометрическую прогрессию, сумма которой равна a, а первый член равен b. Когда это возможно?

Ответ: $a = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b\dfrac{(a-b)^n}{b^n}$; $0 < \dfrac{b}{a} < 2$.

Пример 4. Доказать, что если остатки ряда образуют геометрическую прогрессию, то и сам ряд является геометрической прогрессией.

Пример 5. Для данных числовых рядов найти S_n, S, r_n, r_5, r_{10}.

5.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{4}{(2n-1)(2n+1)}$;

5.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}$;

5.3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$;

5.4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2}{n(n+1)(n+2)}$;

5.5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+3)(n+6)}$;

5.6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} arctg\dfrac{1}{2n^2}$.

Решения и ответы:

5.1. Общий член исходного ряда разложим на простейшие дроби, пользуясь методом неопределенных коэффициентов,

$$\frac{4}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{A}{2n-1} + \frac{B}{2n+1} = \frac{2}{2n-1} - \frac{2}{2n+1}.$$

Тогда

$$S_n = \frac{4}{1\cdot 3} + \frac{4}{3\cdot 5} + \frac{4}{5\cdot 7} + \frac{4}{(2n-1)(2n+1)} =$$

$$= (2-\frac{2}{3}) + (\frac{2}{3}-\frac{2}{5}) + \ldots - \frac{2}{2n-1} + \frac{2}{2n-1} - \frac{2}{2n+1} = 2 - \frac{2}{2n+1}.$$

Таким образом, $S_n = 2 - \dfrac{2}{2n+1}$, следовательно,

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = 2;\quad r_n = \frac{2}{2n+1},\quad r_5 = \frac{2}{11};\quad r_{10} = \frac{2}{21}.$$

5.2. $S_n = \dfrac{1}{3}(1-\dfrac{1}{3n+1})$; $S = \dfrac{1}{3}$; $r_n = \dfrac{1}{3(3n+1)}$; $r_5 = \dfrac{1}{48}$; $r_{10} = \dfrac{1}{93}$.

5.3. $S_n = 1 - \dfrac{1}{(n+1)^2}$; $S = 1$; $r_n = \dfrac{1}{(n+1)^2}$; $r_5 = \dfrac{1}{36}$; $r_{10} = \dfrac{1}{121}$.

5.4. $S_n = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$; $S = \dfrac{1}{2}$; $r_n = \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$; $r_5 = \dfrac{1}{42}$; $r_{10} = \dfrac{1}{132}$.

5.5. $S_n = \dfrac{1}{18}\left[\dfrac{73}{60} - \left(\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \dfrac{1}{n+3} - \dfrac{1}{n+4} - \dfrac{1}{n+5} - \dfrac{1}{n+6}\right)\right]$;

$$S=\frac{73}{1080};\ r_n=\frac{1}{18}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+4}-\frac{1}{n+5}-\frac{1}{n+6}\right).$$

5.6. Воспользуемся тождеством (подобрав a и c)

$$\operatorname{arctg}\frac{c}{a+n-1}-\operatorname{arctg}\frac{c}{a+n}=\operatorname{arctg}\frac{c}{c^2+(a+n)(a+n-1)}$$

$$S_n=\operatorname{arctg}\frac{n}{n+1};\ S=\frac{\pi}{4};\ r_n=\operatorname{arctg}\frac{1}{2n+1}.$$

Теорема 3. Если ряды

$$a_1+a_2+\ldots+\ldots, \tag{9}$$

$$b_1+b_2+\ldots+\ldots \tag{10}$$

сходятся, и их суммы равны соответственно S и $\overline{S}$, то ряды

$$Ca_1+Ca_2+\ldots+Ca_n+\ldots, \tag{11}$$

$$(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+\ldots+(a_n+b_n)+\ldots, \tag{12}$$

$$(a_1-b_1)+(a_2-b_2)+\ldots+(a_n-b_n)+\ldots \tag{13}$$

также сходятся и их суммы соответственно равны $C\cdot S$, $S+\overline{S}$ и $S-\overline{S}$.

Доказательство. Пусть n-ная частичная сумма ряда (9) S_n, а ряда (11) T_n. Тогда

$$T_n=Ca_1+Ca_2+\ldots+Ca_n=C(a_1+a_2+\ldots+a_n)=C\cdot S_n.$$

Откуда имеем

$$\lim_{n\to\infty}T_n=\lim_{n\to\infty}CS_n=C\cdot\lim_{n\to\infty}S_n=C\cdot S.$$

Таким образом, ряд (11) сходится и его сумма равна $C\cdot S$. Аналогично доказываем теорему для ряда (12) и (13).

Замечание 1. Про ряд (11), (12) и (13) говорят, что они получены в результате почленного умножения на константу, почленного сложения или почленного вычитания рядов (9), (9) и (10), (9) и (10) соответственно.

§2. НЕОБХОДИМЫЙ И ДОСТАТОЧНЫЙ ПРИЗНАК СХОДИМОСТИ РЯДА

Теорема 1. Если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \qquad (1)$$

сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

Доказательство. Из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = S$, S – конечное число, сумма исходного ряда. Но вместе с тем $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}(S_{n-1} + u_n) = \lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} + \lim\limits_{n\to\infty} u_n$, т.е. $S = S + \lim\limits_{n\to\infty} u_n$, значит $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

Следствие 1. Если $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$, то данный ряд расходится.

Пример 1. Пусть дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{2n+1}$.

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{2n+1} = 1$, то согласно теореме 1 имеем, что данный ряд расходится.

Отметим, что рассмотренный в теореме 1 признак является только необходимым, но не является достаточным, т.е. из того, что $u_n \to 0$, еще не следует, что ряд сходится, следовательно, ряд может и расходится.

Пример 2. Исследовать сходимость гармонического ряда

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Решение. Для гармонического ряда $u_n = \dfrac{1}{n}$ имеем, что $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$. Но докажем, что данный ряд расходится, хотя $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

Предположим, что гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ сходится, S_n его n-ная частичная сумма, а S – сумма ряда, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$. Аналогично, имеем что $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = S$, тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\left(S_{2n} - S_n\right) = \lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} - \lim\limits_{n\to\infty} S_n = S - S = 0$.

Но так как

$$S_{2n}-S_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}\geq\left|\frac{1}{n+k}>\frac{1}{2n},\ k=\overline{1,n}\right|\geq n\cdot\frac{1}{2n}=\frac{1}{2},$$

то, переходя к пределу, получим $\lim\limits_{n\to\infty}\left(S_{2n}-S_n\right)=0>\frac{1}{2}$. Это противоречие приводит к тому, что предположение о сходимости гармонического ряда неверно, т.е. гармонический ряд расходится.

Пример 3. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ удовлетворяет необходимому признаку сходимости, но является расходящимся.

Решение. Необходимый признак сходимости выполняется, т.к.

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0.$$

Для доказательства расходимости данного ряда оценим его n-ную частичную сумму:

$$S_n=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}\geq\left|\begin{matrix}1>\frac{1}{\sqrt{n}};\ \frac{1}{\sqrt{2}}>\frac{1}{\sqrt{n}}\\ \frac{1}{\sqrt{k}}\geq\frac{1}{\sqrt{n}},\ k=\overline{1,n}\end{matrix}\right|\geq\underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}}_{n\ \text{раз}}=\frac{n}{\sqrt{n}}=\sqrt{n}.$$

Итак, имеем $S_n\geq\sqrt{n}$, а $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}=\infty$.

Значит, исходный ряд расходится.

В теореме 1 установлено, что если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ сходится, то справедливо $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$.

Отсюда следует, что если ряд (1) сходится, то справедливо

$$\lim_{n\to\infty}(u_n+u_{n+1}+\ldots+u_{n+k})=0, \tag{2}$$

где k – некоторое фиксированное число, так как в отдельности имеем

$$\lim_{n\to\infty}u_n=0,\quad \lim_{n\to\infty}u_{n+1}=0,\ \ldots..\quad \lim_{n\to\infty}u_{n+k}=0\ ,$$

сумма конечного числа (k) бесконечно малых величин есть величина бесконечно малая.

Очень важно заметить следующее: когда ряд (1) сходится, (2) справедливо не только для фиксированного k, но и для неограниченно возрастающего при $n\to\infty$.

Но еще более важно обратное утверждение, а именно, что равенство (2) справедливо при любом k, тогда ряд (1) сходится, т.е. имеет место следующая теорема.

Теорема 2. Необходимым и достаточным условием сходимости ряда (1) является справедливость равенства (2) при любом k.

Доказательство. Для того чтобы ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходился, необходимо и достаточно, чтобы последовательность частичных сумм $\{S_n\}$ имела бы пределом конечный предел S, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$. В силу критерия Коши для последовательностей необходимым и достаточным условием существования конечного предела S для последовательности $\{S_n\}$ является выполнение неравенства $\left|S_q - S_p\right| < \varepsilon$, где $q \geq N_\varepsilon$, $p \geq N_\varepsilon$ ($\varepsilon \geq 0$, произвольно малое, но самое главное ε – фиксированное число).

Если положить $p = n-1$, а $q = n+k$, то

$$S_p = u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1}, \quad S_q = u_1 + u_2 + \ldots + u_{n+k}.$$

Откуда имеем

$$\left|S_q - S_p\right| = \left|u_n + u_{n+1} + \ldots + u_{n+k}\right| < \varepsilon$$

для $n > N_\varepsilon$ и k – любое число.

А это означает, что для существования конечного предела у последовательности $\{S_n\}$, а, следовательно, и для сходимости ряда $\sum\limits_{u=1}^{\infty} u_n$ необходимо и достаточно, что бы равенство

$$\lim_{n\to\infty}(u_n + u_{n+1} + \ldots + u_{n+k}) = 0$$

было справедливо для любого k.

Что и требовалось доказать.

Заметим, что необходимый признак сходимости числового ряда $\sum\limits_{u=1}^{\infty} u_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ очень удобен для применения, а вот необходимый и достаточный признак (теорема 2) применить для практики практически невозможно. Поэтому, после проверки на практике необходимого признака, обращаются к достаточным признакам.

§3. РЯДЫ С ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ ЧИСЛАМИ

3.1. Признаки сходимости рядов

Существует довольно обширный класс приемов, дающих возможность установить сходимость или расходимость рядов. Эти приемы называют **признаками сходимости**. Современная теория рядов располагает значительным числом различных признаков сходимости. Некоторые из них мы уже применяли при исследовании сходимости рядов – составляя частичные суммы и находя предел этих частичных сумм. Этот прием (нахождения частичных сумм) является необходимым и достаточным признаком сходимости рядов. Стремление к нулю члена ряда по мере роста его номера тоже признак, сходимости ряда, но только необходимый.

К числу признаков сходимости относятся различные теоремы, которые дают возможность свести решение вопроса о сходимости данного ряда к аналогичному вопросу о другом ряде, который устроен более просто или более знаком. Эти теоремы состоят в сравнении членов исследуемого ряда с членами другого ряда, поведение которого выяснено. Поэтому их называют признаками сравнения.

3.2. Признаки сравнения

Пусть дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \geq 0$, тогда последовательность частичных сумм $\{S_n\}$ данного ряда является неубывающей. Необходимым и достаточным условием сходимости такой последовательности является ее ограниченность (монотонно возрастающая последовательность и ограниченная сверху всегда имеет предел).

Теорема 1. (первый признак сравнения). Пусть даны два ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n\,,\ U_n \geq 0, \tag{1}$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} G_n\,,\ G_n \geq 0, \tag{2}$$

причем, начиная с некоторого номера $k \in N$, справедливо неравенство для $n \geq k$

$$U_n \leq G_n \tag{3}$$

Тогда из сходимости ряда (2) следует сходимость ряда (1), а из расходимости ряда (1) следует расходимость ряда (2).

Доказательство. Так как отбрасывание конечного числа членов ряда не влияет на сходимость ряда, поэтому достаточно доказать теорему для случая, когда $k=1$. Пусть S_1, S_2, …, S_n и T_1, T_2, …, T_n… – последовательности частичных сумм рядов (1) и (2). Из выражения (3) имеем, что

$$S_n \le T_n \tag{4}$$

при любом $n \ge 1$.

Пусть ряд (2) сходится и T – его сумма. Так как ряд (2) содержит положительные члены, то $T_n < T$ при любом n. Это значит, что частичные суммы ряда (1) в совокупности ограничены, а, следовательно, ряд (1) сходится и пусть его сумма S. Переходя в неравенстве (4) к пределу, при $n \to \infty$ получаем $\lim\limits_{n\to\infty} S_n \le \lim T_n = T$ (т.к. ряд (1) сходится, то предел слева существует), т.е. $S \le T$.

Пусть теперь ряд (1) расходится. Это значит, что его частичные суммы $\{S_n\}$ неограниченно возрастают. Но тогда, в силу (4), неограниченно должны возрастать суммы $\{T_n\}$ ряда (2), который тем самым расходится.

Пример 1. Установить сходимость числового ряда $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}$.

Решение. Отбросив первый член ряда (это на сходимости не скажется), сравним его с рядом $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}$, который сходится, т.к.

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=\left(1\cdot\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}$$

и $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=1$.

Так как для $n \ge 1$, имеем $\frac{1}{(n+1)^2}<\frac{1}{n(n+1)}$ и в силу теоремы 1 (признак сравнения) имеем, что данный ряд сходится.

Пример 2. Рассмотрим ряд $\sin\frac{1}{1^2}+\sin\frac{1}{2^2}+\ldots+\sin\frac{1}{n^2}+\ldots$.

Решение. Так как справедливо неравенство $\sin\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n^2}$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится (пример 1), то исходный ряд также сходится.

Пример 3. Рассмотрим гармонический ряд $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

Решение. Докажем, что данный ряд является расходящимся. Для этого поступим следующим образом: заменим в гармоническом ряду третий и четвертый член на $\frac{1}{4}$, следующие четыре члена ряда – на $\frac{1}{8}$ каждый, следующие восемь – на $\frac{1}{16}$ каждый и т.д. В результате получим ряд

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}_{2\text{члена}}+\underbrace{\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}}_{4\text{члена}}+\underbrace{\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{16}}_{8\text{членов}}+\underbrace{\frac{1}{32}+\frac{1}{32}+\ldots+\frac{1}{32}}_{16\text{членов}}+\ldots$$

или

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ldots.$$

Члены этого ряда не превосходят соответствующих членов гармонического ряда, и этот ряд расходится, т.к.

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1+(n-1)\cdot\frac{1}{2}\right)=\infty,$$

следовательно, будет расходиться данный гармонический ряд.

Пример 4. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{tg}\frac{1}{n}$.

Решение. Так как справедливо неравенство $\operatorname{tg}\frac{1}{n}>\frac{1}{n}$, то в силу теоремы 1 получаем, что искомый рад является расходящимся.

Теорема 2 (второй признак сравнения). Пусть даны два ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}U_n\,,\ \ U_n\ge 0 \tag{5}$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty}G_n\,,\ \ G_n\ge 0\,, \tag{6}$$

причем, существуют такие постоянные m и M ($m>0$, $M>0$), что, начиная с некоторого $n\in N$,

$$m\le\frac{U_n}{G_n}\le M\,. \tag{7}$$

Тогда ряды (5) и (6) одновременно сходятся или одновременно расходятся.

Доказательство. Из неравенств (7) следует, что имеет место неравенство ($G_n > 0$)

$$mG_n \le U_n \le MG_n. \tag{8}$$

Если ряд (5) сходится, то из левого неравенства (8), по первому признаку сравнения, следует сходимость ряда $mG_1 + mG_2 + \ldots + mG_n$, а отсюда имеем, что сходится ряд (6).

Если сходится ряд (6), то сходится ряд $MG_1 + MG_2 + \ldots + MG_n + \ldots$, а, следовательно, по первому признаку сравнения, в силу правого неравенства (8) ряд (5) сходится. Таким образом, из сходимости ряда (5) следует сходимость ряда (6).

Пример 5. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2}{2n^2 - n}$.

Решение. Для решения данной задачи рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$, который сходится. Тогда отношение $\dfrac{2}{2n^2 - n} : \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{2n^2}{2n^2 - n} = \dfrac{2n}{2n-1} < 2$, поэтому из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ следует сходимость исследуемого ряда.

Пример 6. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\dfrac{1}{n}$.

Решение. Для решения данной задачи рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}\dfrac{1}{n}$. Он расходится, потому что $\dfrac{\sin\frac{1}{n}}{\operatorname{tg}\frac{1}{n}} = \cos\dfrac{1}{n}$. Так как при любом целом $n \ge 1$ $\dfrac{1}{2} < \cos\dfrac{1}{n} < 1$, то оба ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\dfrac{1}{n}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}\dfrac{1}{n}$ ведут себя одинаково, т.е. данный ряд расходится.

Следствие 1. Если для рядов (5) и (6) справедливо

$$\lim_{n\to\infty} \frac{U_n}{G_n} = l > 0, \tag{9}$$

то ряды (5) и (6) ведут себя одинаково, т.е. сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство. Равенство (9) означает, что, начиная с некоторого номера, все отношения $\frac{U_n}{G_n}$ будут достаточно близки к числу l, и в частности будем иметь

$$\frac{l}{2} \le \frac{U_n}{G_n} \le 2l .$$

Следовательно, в силу теоремы 2 имеем, что справедливо следствие 1.

Пример 7. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)$.

Решение. Рассмотрим гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, если $U_n = e^{\frac{1}{n}}-1$, а $G_n = \frac{1}{n}$ и находим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}} = \left(\frac{0}{0}\right) = \left|\text{по правилу Лопиталя}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{-\frac{1}{n^2}e^{\frac{1}{n}}}{-\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}} = 1.$$

Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится, то согласно признаку сравнения исходный ряд тоже расходится.

Теорема 3 (третий признак сравнения). Если для двух рядов с положительными членами

$$U_1 + U_2 + \ldots + U_n + \ldots \tag{10}$$

и

$$G_1 + G_2 + \ldots + G_n + \ldots, \tag{11}$$

начиная с некоторого n,

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} \le \frac{G_{n+1}}{G_n}, \tag{12}$$

то из сходимости ряда (11) следует сходимость ряда (10), а из расходимости ряда (10) – расходимость ряда (11).

Доказательство. Из неравенства (12) следует, что

$$\frac{U_{n+1}}{G_{n+1}} \le \frac{U_n}{G_n}, \tag{13}$$

начиная с некоторого $n = n_0$. Это значит, что отношения $\frac{U_n}{G_n}$, начиная с этого n_0, составляют убывающую последовательность. Поэтому, полагая $\frac{U_n}{G_n} = k$ из (13) следует, что при $n \ge n_0$ $\frac{U_n}{G_n} \le k$, и в силу второго признака сравнения следует требуемое утверждение.

Пример 8. Используя признаки сравнения установить сходимость или расходимость рядов:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\frac{\pi}{34}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}$; 5) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log_2 n)^p}$, $(p>0)$; 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$;

7) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log_2 n)^{\log_2 n}}$; 8) $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(\log_2 \log_2 n)^{\log_2 n}}$.

Ответы и решения:

1) сходиться, т.к. $\frac{(n!)^2}{(2n)!} = \frac{n!}{2^n(2n-1)!!} < \frac{1}{2n}$;

2) сходиться, т.к. $2^n \sin\frac{\pi}{3n} < \pi\left(\frac{2}{3}\right)^n$;

3) расходиться, т.к. $\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} > \frac{1}{n+1}$;

4) сходиться, т.к. $\frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}} < \frac{1}{n^{3/2}}$;

5) расходиться, т.к. $(\log_2 n)^p < n$ для достаточно больших n;

6) сходиться, т.к. $\frac{n!}{n^n} < \frac{2}{n^2}$, $n > 3$;

7) сходиться, т.к. $\frac{1}{(\log_2 n)^{\log_2 n}} = \frac{1}{n^{\log_2(\log_2 n)}} < \frac{1}{n^2}$;

8) сходиться, т.к. $\frac{1}{(\log_2 \log_2 n)^{\log_2 n}} = \frac{1}{n^{\log_2 \log_2(\log_2 n)}} < \frac{1}{n^2}$.

Пример 9. Доказать, что если:

1) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходиться, то и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ тоже сходиться, а обратное утверждение не верно;

2) $n \cdot a_n$, $(a_n \geq 0)$ ограниченное, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ сходиться;

3) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ сходиться, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$, $(a_n \geq 0)$ тоже сходиться;

4) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}}$, $(a_n \geq 0)$ сходиться, a_n монотонно убывает, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ является сходящимся.

3.3. Интегральный признак сходимости Маклорена – Коши

Теорема 1. Пусть дан ряд

$$U_1 + U_2 + \ldots + U_n + \ldots, \tag{1}$$

члены которого положительны и не возрастают

$$U_1 \geq U_2 \geq \ldots \geq U_n > \ldots,$$

а функция $f(x)$ определена для $x \geq 1$, непрерывна, не возрастает и

$$U_1 = f(1),\ U_2 = f(2),\ \ldots,\ U_n = f(n), \tag{2}$$

тогда для сходимости ряда (1) необходимо и достаточно, чтобы сходился (существовал) несобственный интеграл

$$\int\limits_1^{\infty} f(x)dx.$$

Доказательство. Рассмотрим ряд, членами которого являются интегралы

$$\int\limits_1^2 f(x)dx + \int\limits_2^3 f(x)dx + \ldots + \int\limits_n^{n+1} f(x)dx + \ldots \tag{3}$$

Частичными суммами ряда (3) будут интегралы

$$S_n = \int\limits_1^2 f(x)dx + \ldots + \int\limits_n^{n+1} f(x)dx = \int\limits_1^{n+1} f(x)dx.$$

Сходимость ряда (3) означает существование предела последовательности частичных сумм, т.е. сходимость (существование) несобственного интеграла

$$\int_{1}^{\infty} f(x)dx. \tag{4}$$

В силу того, что функция $f(x)$ монотонна и не возрастает, и из (2) следует, что для любого $x \in (n, n+1)$

$$U_{n+1} \le f(x) \le U_n. \tag{5}$$

Интегрируя (5) по x от n до $n+1$, получим

$$\int_{n}^{n+1} U_{n+1}dx \le \int_{n}^{n+1} f(x)dx \le \int_{n}^{n+1} U_n dx$$

или

$$U_{n+1} \le \int_{n}^{n+1} f(x)dx \le U_n. \tag{6}$$

Пусть ряд (1) сходится. В силу неравенства (6) (правая часть) и первого признака сравнения должен сходиться и ряд, составленный из интегралов ряда (3), а, следовательно, и несобственный интеграл (4).

Пусть теперь ряд (1) расходится, тогда будет расходиться и ряд

$$U_2 + U_3 + \ldots + U_{n+1} + \ldots,$$

полученный из данного отбрасыванием U_1.

В силу неравенства (6) (левая часть) и первого признака сравнения (что касается расходимости) получаем, что должен расходиться ряд интегралов (3), а, следовательно, и несобственный интеграл (4).

Пример 1. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n+1)\ln^3(n+1)}$

Решение. Функция $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)\ln^3(x+1)}$, $x \ge 1$ непрерывна и монотонно убывает, следовательно, при исследовании на сходимость можно воспользоваться интегральным признаком. Находим

$$\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{(x+1)\ln^3(x+1)} = \int_{1}^{\infty} \frac{d\ln(x+1)}{\ln^3(x+1)} = -\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\ln^2(x+1)}\Bigg|_1^n =$$

$$= -\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\ln^2(x+1)} - \frac{1}{\ln^2 2}\right) = \frac{1}{2\ln^2 2}.$$

Таким образом, данный несобственный интеграл сходится, значит и данный ряд тоже сходится.

Пример 2. Установить сходимость или расходимость рядов с помощью интегрального признака:

1. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$;
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)\ln\ln(n+1)}$;
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+1)}{(n+1)^2}$;
4. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\frac{n+1}{n-1}$;
5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+n^2}{1+n^3}\right)^2$;
6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n+1}}$;
7. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\ln(n+1)-\ln n}{\ln^2 n}$

Ответ: расходятся: 1, 2; сходятся: 3, 4, 5, 6, 7.

Пример 3. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p\ln^q n}$

Ответ: 1) сходятся при произвольном q, если $p > 1$; и при $q < 1$ если $p = 1$;

2) расходятся при произвольном q, если $p < 1$, и при $q \le 0$, если $p = 1$.

Отметим, что главное достоинство интегрального признака сходимости состоит в исключительно высокой его чувствительности – он четко проводит различие между сходящимся и расходящимся рядами, даже если члены одного из них лишь незначительно отличаются от членов другого.

3.4. Признак Даламбера

На основании третьего признака сравнения доказываются удобные признаки сходимости.

Теорема (признак Даламбера). Если для ряда

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \tag{1}$$

с положительными числами, начиная с некоторого номера

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \le q < 1, \tag{2}$$

то ряд (1) сходится; если же начиная с некоторого номера для ряда (1)

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1, \qquad (3)$$

то ряд (1) расходится.

Доказательство. Пусть для ряда (1) справедливо условие (2). В третьем признаке сравнения выбираем в качестве вспомогательного ряда $v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots$ сходящуюся геометрическую прогрессию $q + q^2 + \ldots + q^n + \ldots$.

В этом случае равенство (2) имеет вид

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{q^{n+1}}{q^n} = \frac{v_{n+1}}{v_n} \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{q^{n+1}}{q^n} = \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

А это значит, что, согласно третьему признаку сравнения ряд (1) сходится.

Пусть для ряда (1) выполняется условие (3). Выберем в третьем признаке сравнения в качестве ряда $u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$ расходящийся ряд вида 1 + 1 + 1 + … + 1 + …, а в качестве ряда $v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots$ исследуемый ряд (1). В этом случае неравенство (3) запишем в виде $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$ и ряд (1) расходится согласно третьему признаку сравнения.

Следствие 1. На практике бывает значительно удобнее пользоваться более слабым признаком Даламбера в предельной форме.

Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$, то при $l < 1$ ряд (1) сходится, при $l > 1$ ряд (1) расходится, при $l = 1$ нужны дополнительные исследования, т.е. ряд (1) может сходиться или расходится.

Пример 1. Исследовать на сходимость ряды:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^4}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + 2}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{4n^3 + 2n + 1}$; 5) $\sum\limits_{n-1}^{\infty} \mathrm{n}! \left(\frac{e}{n}\right)^n$.

Решение.

1) Вычислим предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)! \cdot n^n}{(n+1)^{n+1} \cdot n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} = e^{-1} < 1,$$

значит, данный ряд сходится.

2) Вычислим предел $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{n+1}\cdot n^4}{(n+1)^4\cdot 2^n}=2\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^4}=2$, так как $l=2>1$, то исходный ряд расходится.

3) Вычислим предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot\left(n^2+2\right)}{\left((n+1)^2+2\right)\cdot n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\cdot\left(1+\dfrac{2}{n^2}\right)}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^2+\dfrac{2}{n^2}}=1.$$

Так как $l=1$, то нужны дополнительные исследования. Применим признак сравнения, выбирая в качестве вспомогательного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ – расходящийся ряд. Предел $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\cdot n}{(n^2+1)\cdot 1}=1$, значит оба ряда ведут себя одинаково, следовательно, исходный ряд будет расходящимся.

4) Вычислим предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(2(n+1)+1\right)\cdot\left(4n^3+2n+1\right)}{\left(4(n+1)^3+2(n+1)+1\right)\cdot(2n+1)}=1.$$

Так как $l=1$, то, выбирая вспомогательный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ – сходящийся ряд. Предел $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+1)\cdot n^2}{4n^3+2n+1}=\dfrac{1}{2}$, значит оба ряда ведут себя одинаково, т.е. исходный ряд будет сходящимся.

5) Вычислим предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)!}{n!}\cdot\frac{e^{n+1}}{e^n}\cdot\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}\right)=$$

$$=e\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n}=e\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}=e\cdot\frac{1}{e}=1.$$

Предельная форма признака Даламбера ответа о сходимости ряда не дает. С другой стороны имеем

$$a_{n+1}=(n+1)!\cdot\left(\frac{e}{n+1}\right)^{n+1}=\frac{n!\cdot e^{n+1}}{(n+1)^n}=a_n\cdot e\cdot\frac{n^n}{(n+1)^n}=a_n\cdot\frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}>a_n,$$

так как $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e$.

Поэтому для любого n $\frac{a_{n+1}}{a_n}>1$, следовательно, по признаку Даламбера данный ряд расходится.

Пример 2. Сколько членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$ нужно взять, чтобы получить значение суммы ряда с точностью до 0,0001.

Решение. Используя признак Даламбера устанавливаем сходимость данного числового ряда. Тогда остаток ряда имеет вид

$$r_n=\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+...+\frac{1}{(n+k)!}+...=\frac{1}{(n+1)!}\left[1+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}+...\right].$$

Но так, как

$$1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}+...<1+\frac{1}{(n+2)}+\frac{1}{(n+2)^2}+\frac{1}{(n+2)^3}+...=\frac{1}{1-\frac{1}{n+2}}=\frac{n+2}{n+1}$$

Тогда $r_n\le\frac{n+2}{(n+1)!(n+1)}$.

Для определения n (количества членов ряда) требуется решить неравенство $\frac{n+2}{(n+1)!(n+1)}<\frac{1}{1000}$.

Решая это неравенство (т.к. $n\in N$, то можно обычным перебором), получим $n > 7$. Следовательно, для решения поставленной задачи достаточно взять 8 членов ряда.

Пример 3. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1000^n}{n!}=0$.

Решение. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1000^n}{n!}$. Согласно признаку Даламбера имеем $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1000}{n+1}=0$, а значит, ряд сходится. Следовательно, его общий член стремится к нулю, т.е. $\lim_{n\to\infty}\frac{1000^n}{n!}=0$.

3.5. Признак Коши

Сравнение рядов с геометрическими прогрессиями приводит к еще одному признаку сходимости – признаку Коши.

Теорема (признак сходимости Коши). Если для числового ряда

$$u_1+u_2+...+u_n+... \tag{1}$$

с положительными членами, начиная с некоторого N

$$\sqrt[n]{u_n}\le q<1, \tag{2}$$

то ряд (1) сходится, если же

$$\sqrt[n]{u_n}\ge 1 \ \ (n>N), \tag{3}$$

то ряд (1) расходится.

Доказательство. Рассмотрим ряд

$$u_N+u_{N+1}+.... \tag{4}$$

Из неравенства (2) имеем $u_N\le q^N$, $u_{N+1}\le q^{N+1}$, ..., т.е. члены ряда (1) меньше соответствующих членов геометрической прогрессии q^N, q^{N+1}, ..., которая сходится, т.к. $q<1$. В силу того, что отбрасывание конечного числа членов ряда не меняет его сходимость, и в силу первого признака сравнения имеем, что исходный ряд сходится.

Таким же образом устанавливаем расходимость ряда для условия 3.

Следствие. Признак Коши в предельной форме. Если для ряда (1)

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=q, \tag{5}$$

то при $q<1$ ряд (1) сходящийся; при $q>1$ ряд (1) расходящийся; при $q=1$ нужны дополнительные исследования, т.к. ряд (1) может сходиться или расходится.

Отметим, что признак Коши «сильнее» признака Даламбера, так как предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$ может существовать, а предел $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ – нет. Если же предел $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ существует, то существует и $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$, причём эти пределы равны. Отсюда следует, что признак Коши «сильнее» признака Даламбера.

Пример 1. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{3n}{n+1}\right)^n$.

Решение. Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\dfrac{3n}{n+1}\right)^n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n}{n+1} = 3 > 1$, значит, данный ряд расходится.

Пример 2. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(n+1)^{n^2}}{n^{n^2}\cdot 4^n}$.

Решение. Так как

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(n+1)^{n^2}}{n^{n^2}\cdot 4^n}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \frac{e}{4} < 1,$$

т.е. искомый ряд сходится.

Пример 3. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_0^{\infty}\sqrt{x}e^{-x}dx$.

Решение. Функция $f(x)=\sqrt{x}e^{-x}$ непрерывна и положительна для $x > 0$ и монотонно убывает для $x > 1$ $\left(f'(x)=\dfrac{e^{-x}(1-2x)}{2\sqrt{x}}\right)$.

Составим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{n}}{e^n}$, он сходится по признаку Даламбера, так как

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{e} < 1.$$

Из сходимости ряда следует сходимость данного интеграла.

Пример 4. Исследовать на сходимость несобственные интегралы:

4.1) $\int\limits_1^{\infty} \frac{x^2+\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+1)^6}dx$; 4.2) $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{(x\sqrt[4]{x^2+1})}$; 4.3) $\int\limits_0^{\infty} \frac{x\mathrm{arctg}^2 x}{\sqrt[5]{1+x^6}}dx$;

4.4) $\int\limits_1^{\infty} \sqrt[3]{x^2 \cdot 2^{-x}}dx$; 4.5) $\int\limits_1^{\infty} \mathrm{tg}\frac{1}{x^2}dx$.

Ответы: 4.1), 4.3) – расходятся; 4.2), 4.4), 4.5) – сходятся.

УПРАЖНЕНИЯ

1. С помощью признаков сравнения исследовать на сходимость следующие ряды:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{3n+1}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\frac{\pi}{4^n}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathrm{tg}^2 \frac{\pi}{4\sqrt{n}}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \mathrm{arctg}\frac{4}{3^n}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$; 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[n]{n!}}$

Ответы и указания: 1) расходится; 2) сходится; 3) расходится; 4) сходится; 5) расходится; 6) сходится (используя неравенства $\sqrt[n]{n!} > \sqrt{n}$ и $\frac{1}{n\sqrt[n]{n!}} \le \frac{1}{n\sqrt{n}}$.

2. Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n (a_n \ge 0)$ сходится. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} {a_n}^2$ сходится, а обратное утверждение неверно.

3. Доказать, что если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} {a_n}^2$ сходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ $(a_n \ge 0)$ тоже сходится.

4. Даны два расходящих ряда. Что можно утверждать о сходимости суммы и разности этих рядов.

5. Подобрать такие два ряда, чтобы их сумма сходилась, а разность расходилась.

6. С помощью признаков Даламбера и Коши исследовать на сходимость следующие ряды:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+2n+1}{2^{n+5}(n^2+1)}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}n^2\sin\frac{\pi}{n^2}$;

4) $\sum\left(\frac{2n^2+1}{n^2+1}\right)^{n^2}$ 5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln^n(n+1)}$; 6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^{n^2}}{n^{n^2}\cdot 3^n}$.

Ответы: 1, 2, 3, 5, 6 – ряды сходятся; 4 – расходится.

7. Исследовать на сходимость следующие ряды различными способами:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{\ln^n(n+1)}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{0,01}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-\ln^2 n}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+n}{n}\right)^{\frac{n}{3}}$;

5) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n\ln\ln n}$; 6) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+2n}+\ln n}$; 7) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$; 8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt{n}}$;

9) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$; 10) $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\ln\ln n}}$; 11) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2-2}}{n}$.

Ответы и указания: 1, 2 – ряд расходится; 3 – ряд сходится; 4, 5, 6 – ряд расходится; 7 – ряд сходится; 8 – ряд расходится; 9 – ряд сходится, т.к. $\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}=\frac{1}{n^{\ln\ln n}}<\frac{1}{n^2}$ при большом n; 10 – ряд расходится, т.к. $\frac{1}{(\ln n)^{\ln\ln n}}=\frac{1}{e^{(\ln\ln n)^2}}>\frac{1}{e^{\ln n}}=\frac{1}{n}$; 11 – ряд сходится.

8. Показать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}f(n)$ сходится или расходится одновременно с рядами: $\sum_{n=1}^{\infty}f(2n)$, $\sum_{n=1}^{\infty}nf(n^2)$, $\sum_{n=1}^{\infty}n^2f(n^3)$, $\sum_{n=1}^{\infty}2^nf(2^n)$, $\sum_{n=1}^{\infty}S^nf(S^n)$, $S>1$, натуральное число.

§4. ЗНАКОПЕРЕМЕННЫЕ РЯДЫ

4.1. Абсолютная сходимость и условная сходимость

Ряды, содержащие как положительные, так и отрицательные члены, называются **знакопеременными**. Примеры знакопеременных рядов:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n(n-1)}{2}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n}$.

Пусть задан некоторый знакопеременный ряд

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \tag{1}$$

Тогда ряд

$$|u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n| + \ldots, \tag{2}$$

членами которого являются абсолютные величины (модули) членов знакопеременного ряда (1), – ряд с положительными членами и поэтому его можно исследовать на основании тех свойств и приемов, которые установлены для числовых рядов с положительными членами. Между сходимостью ряда (1) и сходимостью ряда (2) существует известная связь.

Знакопеременный ряд (1) называется **абсолютно сходящимся**, если сходится ряд, составленный из абсолютных величин (2).

Знакопеременный ряд (1) называется **условно сходящимся**, если он сходится как знакопеременный ряд, но не сходится абсолютно.

Теорема 1. Всякий абсолютно сходящийся ряд сходится.

Доказательство. Пусть некоторый знакопеременный ряд (1) сходится абсолютно, т.е. сходится числовой ряд с положительными членами (2).

В силу неравенства, при любом n $0 \le u_n + |u_n| \le 2|u_n|$ и по первому признаку сравнения рядов имеем, что сходится ряд

$$(u_1 + |u_1|) + (u_2 + |u_2|) + \ldots + (u_n + |u_n|) + \ldots. \tag{3}$$

Учитывая, что сходится ряд (2), из (3) имеем, что сходится и ряд (1).

Теорема 2. Если ряд (1) абсолютно сходится и его сумма равна S, а сумма ряда (2) равна S_1, тогда $|S| \le S_1$.

Доказательство. Для некоторой n-ной частичной суммы S_n ряда (1) имеем

$$|S_n| \le |u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n|.$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, получим $|S| \le S_1$.

4.2. Признак сходимости Лейбница

Знакопеременный ряд называется **знакочередующимся**, если соседние члены имеют разные знаки, т.е. ряд имеет вид $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$.

Примерами знакочередующихся рядов могут служить геометрические прогрессии, имеющие отрицательные знаменатели.

Для знакочередующихся рядов имеется достаточно общий, «чувствительный» и «очень практичный» признак сходимости – признак Лейбница.

Теорема 1 (признак Лейбница). Если члены знакочередующегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ удовлетворяют условиям:

1) $u_n \geq u_{n+1} \quad \forall_n \in N$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$,

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ сходится, а его сумма S не превосходит первого члена, т.е. $S \leq u_1$.

Доказательство. Рассмотрим частичную сумму S_{2n} для ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$

$$S_{2n} = (u_1 + u_2) + (u_3 + u_4) + (u_{2n-1} + u_{2n}).$$

Так как все выражения в круглых скобках неотрицательны, то последовательность $\{S_{2n}\}$ частичных сумм данного ряда неубывающая. С другой стороны для S_{2n} имеем

$$S_{2n} = u_1 - (u_2 + u_3) - \ldots - (u_{2n-2} + u_{2n-1}) - u_{2n} < u_n. \tag{1}$$

Таким образом, для последовательности $\{S_{2n}\}$ имеем, что она не убывает и ограничена сверху, следовательно, она сходится, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = S$.

Из соотношения $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim\limits_{n\to\infty}(S_{2n} + u_{2n+1}) = \lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} + \lim\limits_{n\to\infty} u_{2n} = S$,

имеем, что сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ равна S. Из неравенства (1) следует, что $S \leq u_1$. Теорема доказана.

Следствие 1. Остаток ряда Лейбница $r_n = (-1)^n (u_{n+1} + u_{n+2} + ...)$ удовлетворяет неравенству $|r_n| \le u_{n+1}$.

Следствие 2. Признак Лейбница является не только достаточным, но и необходимым признаком сходимости рядов с монотонно убывающими членами: если $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \ne 0$, то на основании необходимого признака сходимости ряд $u_1 - u_2 + ... - u_n + ...$ сходиться не может.

Следствие 3. Для знакочередующегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot u_n$ при всех $n \in N$ справедливы неравенства $(u_n \ge 0)$

$$S_{2n} \le S \le S_{2n+1}; \quad |S - S_n| \le u_{n+1}.$$

Замечание 1. *Существенность условий признака сходимости для знакочередующихся рядов.*

В признаке сходимости Лейбница указаны три условия, которым должен удовлетворять ряд:

– знакочередуемость членов ряда;
– монотонность;
– сходимость к нулю их абсолютных величин.

Покажем, что каждое из приведенных условий является существенным.

Во-первых, в признаке сходимости Лейбница нельзя пренебречь (отбросить) условие знакочередуемости, т.к. можно построить пример ряда, у которого последовательность абсолютных величин членов монотонно стремится к нулю, но которые расходятся из-за того, что знаки членов ряда не чередуются, а имеют более сложное распределение. Например, рассмотрим следующий ряд $\frac{1}{1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} ...$, абсолютные величины членов данного ряда не возрастают и стремятся к нулю. Все частичные суммы ряда

$$S_{\frac{n(n+1)}{2}} = \begin{cases} 0, \ n - \text{четное} \\ 1, \ n - \text{нечетное,} \end{cases}$$

а остальные значения частичных сумм – промежуточные значения между [0;1]. Поэтому такая последовательность частных сумм предела не имеет, а, следовательно, ряд расходится.

Во-вторых, для сходимости знакочередующегося ряда важным является условие монотонности. Существуют расходящиеся ряды, для которых все условия теоремы Лейбница выполняются, кроме монотонности. Например, ряд знакочередующийся $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{n}-\frac{1}{2n}+\ldots$, но не выполняется монотонность. Данный ряд расходится. Действительно, если бы он сходился, то сходился бы и ряд $\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n}\right)+\ldots$, т.е.

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n}+\ldots=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots\right),$$

но ведь это гармонический ряд (в скобках), который расходится.

В-третьих, существенность условия $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=0$ следует из общего необходимого признака сходимости рядов.

Пример 1. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

Решение. Проверим выполнение теоремы Лейбница

1) $u_n=\frac{1}{n}$ и $1>\frac{1}{2}>\frac{1}{3}>\ldots>\frac{1}{n}>\frac{1}{n+1}$, последовательность $\{u_n\}$ монотонно убывает.

2) $\lim\limits_{n\to\infty} u_k=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

По теореме Лейбница данный ряд сходится как знакочередующийся. Проверим абсолютную сходимость данного ряда. Для этого составим ряд из абсолютных величин $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ – это гармонический ряд и он расходится. Следовательно, исходный ряд сходится условно.

Отметим, что для суммы ряда (следствие 3, теорема 3) при $n=1$ имеем $\frac{1}{2}\le S\le\frac{5}{6}$. В дальнейшем будет доказано, что $S=\ln 2$.

С рядами, условно сходящимися, можно работать, так как они все же сходятся, но делать это следует с большой осторожностью, так как они обладают свойствами, совершено непривычными для обычных сумм. Например, выше было установлено, что знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ сходится условно и его сумма S будет равна

$$S=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\ldots$$

В данном условно сходящемся знакочередующемся ряде переставим члены так, чтобы за всяким положительным его членом следовали два невыбранные ранее отрицательные члена:

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\ldots$$

При такой перестановке членов данного ряда ни один элемент исходного ряда не будет ни утерян, ни написан по нескольку раз, а только по одному разу, а его сумма будет равна $\frac{S}{2}$.

Для этого достаточно сложить каждый положительный элемент с непосредственно следующим за ним отрицательным, т.е. получим

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\ldots=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots\right)=\frac{S}{2}.$$

Этот результат кажется сначала странным. Но нужно заметить, что мы работаем с условно сходящимся рядом, а в таких числовых рядах сумма положительных элементов всегда равна $+\infty$, а сумма отрицательных элементов всегда равна $-\infty$.

Упражнение 1. С помощью критерия Коши доказать признак Лейбница.

§ 5. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

5.1. Определение функционального ряда

Пусть $u_1(x),\ u_2(x),\ ...,\ u_n(x)+...$ – последовательность функций, определенных на некотором множестве X. Выражение вида

$$u_1(x),\ u_2(x),\ ...,\ u_n(x)+... \qquad (1)$$

называется **функциональным рядом** относительно переменной x.

Каждому значению $x_0 \in X$ соответствует числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$, который может быть сходящимся или расходящимся. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ сходится, то x_0 называется **точкой сходимости функционального ряда** (1). Множество всех точек сходимости функционального ряда называется его **областью сходимости**. Сходимость функционального ряда в каждой точке $x \in D$ называется **поточечной сходимостью**.

Конечная сумма $S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + ... + u_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ называется n-ной частичной суммой ряда (1), а функция $S(x) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)$ – сумма ряда.

Функция $r_n(x)$, задаваемая формулой $r_n(x) = S(x) - S_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)$, называется n-ным остатком функционального ряда.

5.2. Равномерная сходимость функциональных рядов

Функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ называется **равномерно сходящимся** в некоторой области D к функции $S(x)$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ n_0(\varepsilon)$, не зависящий от x, такой, что $|r_n(x)| = |S(x) - S_n(x)| < \varepsilon \quad \forall n > n_0(\varepsilon),\ \forall x \in D$.

Различие определений точечной и равномерной сходимости функционального ряда состоит лишь в том, что номер n_0 зависит от ε и $x \in D$, т.е. $n_0 = n_0(\varepsilon, x)$, а во втором случае от ε, т.е. $n_0 = n_0(\varepsilon)$.

Теорема 1 (признак Вейерштрасса). Если члены ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \tag{2}$$

удовлетворяют неравенствам

$$|u_n(x)| \le a_n \quad \forall n \in N,\ \forall x \in D \tag{3}$$

и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n,\ a_n \ge 0$ сходится, то функциональный ряд (2) сходится равномерно в области D.

Доказательство. В силу того, что числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то его остаток $r_n \to 0$, т.е. $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0(\varepsilon) : |r_n| < \varepsilon,\ \forall n \ge n_0(\varepsilon)$.

В силу неравенства (3) имеем

$$|r_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)\right| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} |u_k(x)| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = r_n < \varepsilon,\ \forall n \ge n_0(\varepsilon),\ \forall x \in D. \tag{4}$$

Это означает равномерную сходимость ряда (2) в области D.

Числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, члены которого удовлетворяют неравенствам (3), называется **мажорантным рядом** для функционального ряда (2), который в этом случае называется **мажорируемым**.

Из теоремы 1 следует, что условие мажорируемости ряда является достаточным для равномерной сходимости.

5.3. Свойства равномерно сходящихся функциональных рядов

Теорема 2 (о непрерывности суммы функционального ряда). Если на множестве D функциональный ряд (2) с непрерывными членами сходится равномерно, то его сумма $S(x)$ непрерывна на D.

Доказательство. Так как ряд (2) равномерно сходится в области D, то $\forall \varepsilon > 0\ \ \exists n_0(x),\ \ \forall n \ge n_0(\varepsilon)\ \ |r_n(x)| = |S(x) - S_{n_0}(x)| < \frac{\varepsilon}{3}\ \ \forall x \in D$.

Так как функция $S_{n_0}(x) = \sum_{n=1}^{n_0} u_n(x)$ непрерывна в D, то $\forall x_0 \in D$ и выбранного $\varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$, такое, что $|S_{n_0}(x) - S_{n_0}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$ при $|x - x_0| < \delta,\ x \in D$.

Тогда при $\varepsilon > 0$ имеем

$$\left|S_{n_0}(x) - S_{n_0}(x_0)\right| = \left|S_{n_0}(x) + r_{n_0}(x) - S_{n_0}(x_0) - r_{n_0}(x)\right| \le$$

$$\le \left|S_{n_0}(x) - S_{n_0}(x_0)\right| + \left|r_{n_0}(x)\right| + \left|r_{n_0}(x)\right| \le \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

при $\left|x - x_0\right| < \delta$, что означает непрерывность функции $S(x)$ в произвольной точке $x_0 \in D$.

Из теоремы 2 следует, что если сумма $S(x)$ функционального ряда с непрерывными коэффициентами разрыва в области D, то сходимость этого ряда не может быть равномерной в области D.

Следствие 1. Если данный ряд сходится равномерно, то $\lim\limits_{x \to x_0} \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lim\limits_{x \to x_0} u_n(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x_0);\ \forall x_0 \in D$, т.е. в равномерно сходящемся функциональном ряду возможен почленный переход к пределу.

Пример 1. Найти $\lim\limits_{x \to 0} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{10^k}$.

Решение. Так как $\forall x \in R$ $\left|\frac{\cos kx}{10^k}\right| \le \frac{1}{10^k}$, а ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^k}$ сходится, то по признаку Даламбера, исходный функциональный ряд сходится равномерно для любого $x \in R$. Тогда в последствии из теоремы (2) имеем

$$\lim_{x \to 0} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{10^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^k} = \frac{1}{10}\left(1 - \frac{1}{10}\right) = \frac{1}{9}.$$

Теорема 3 (о почленном интегрировании функциональных рядов). Если функциональны ряд (2) с непрерывными членами сходится к функции $S(x)$ равномерно на $[ab]$, то ряд (2) можно почленно интегрировать на любом отрезке $[x_0, x] \in [ab]$, и справедливо равенство

$$\int_{x_0}^{x} S(t)dt = \int_{x_0}^{x} \left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)\right) dt = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{x_0}^{x} u_k(t)dt, \tag{4}$$

причем ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \int\limits_{x_0}^{x} u_k(t)dt$ сходится равномерно на отрезке $[ab]$.

Доказательство. В силу равномерной сходимости ряда (2) имеем $\forall\varepsilon>0\ \ \exists n_0(\varepsilon);\quad \left|S(x)-S_n(x)\right|<\dfrac{\varepsilon}{b-a}\quad \forall x\in[ab]$ и $\forall n>n_0(\varepsilon)$. Тогда

$$\left|\int_{x_0}^{x} S(t)dt-\sum_{k=1}^{n}\int_{x_0}^{x} u_k(t)dt\right|=\left|\int_{x_0}^{x}\left(S(t)-\sum_{k=1}^{n}u_k(t)\right)dt\right|\le$$

$$\le\left|\int_{x_0}^{x}\left|S(t)-S_n(t)\right|dt\right|\le\frac{\varepsilon}{b-a}\left|x-x_0\right|<\varepsilon,\ \forall x\in[ab],\ \forall n>n_0(\varepsilon).$$

Это значит, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\int\limits_{x_0}^{x}u_k(t)dt$ сходится равномерно к функции $\int\limits_{x_0}^{x}S(t)dt$ на отрезке $[ab]$, т.е. справедливо равенство (4).

Пример 2. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{n}$.

Решение. Введем в рассмотрение ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{x^2+n^2}$. Так как для $\forall x\in R$ справедливо неравенство $\dfrac{1}{n^2+x^2}<\dfrac{1}{n^2}$, а знакоположительный числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ сходится, то по признаку Вейерштрасса исходный ряд сходится равномерно для $\forall x\in R$. Интегрируя почленно на $[0;x]$, получим $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int\limits_{0}^{x}\dfrac{dx}{n^2+x^2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{n}$.

Теорема 4 (о почленном дифференцировании функционального ряда). Если ряд (2) с непрерывно дифференцируемыми на $[ab]$ членами сходится к функции $S(x)$, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n'(x)$ сходится равномерно на $[ab]$, а его сумма $S(x)$ – непрерывно дифференцируемая функция, то справедливо равенство

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x).$$

Пример 3. Вычислить сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \cdot x^{n-1}$.

Решение. Рассмотрим функциональный ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$, который сходится при $|x|<1$ (геометрическая прогрессия со знаменателем $|q|<1$), и сумма его $\dfrac{1}{1-x}$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \cdot x^{n-1}$ получим дифференцированием ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$, который сходится равномерно при $|x| \le q < 1$, на основании признака Вейерштрасса, т.к. он мажорируется числовым знакоположительным сходящимся рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \cdot q^{n-1}$ (по признаку сравнения или Даламбера). На основании теоремы 4 имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^{n-1} = \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Таким образом, для $x \in (-1;\ 1)$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \cdot x^{n-1} = \dfrac{1}{(1-x)^2}$.

Замечание. Теоремы 3 и 4 являются достаточными условиями для непрерывности суммы функционального ряда, почленной интегрируемости и дифференцируемости функциональных рядов.

§ 6. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

Ряд вида

$$a_0 + a_1(x - x_0) + ... + a_n(x - x_0)^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n, \qquad (1)$$

где a_n, x, x_0 – действительные числа, членами которого являются степенные функции, **называется степенным рядом по степеням** $x - x_0$, а числа a_n – коэффициентами степенного ряда.

Если $x_0 = 0$ получаем степенной ряд по степеням x

$$a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \qquad (2)$$

Заменой $x - x_0 = X$ ряд (1) можно привести к ряду (2). Степенной ряд (2) всегда сходится в точке $x = 0$.

Теорема 1 (Абеля). Если степенной ряд (2) сходится в точке $x_0 \neq 0$, то он сходится абсолютно в интервале $-|x_0| < x < |x_0|$ и сходится равномерно на отрезке $-q \le x \le q$, где $0 < q < |x_0|$.

Доказательство. По условию теоремы имеем, что числовой ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ сходится, то $\lim_{n \to 0} a_n x_0^n = 0$, и, следовательно, $\exists M > 0$, что $\forall n \in N$ $|a_n x_0^n| < M$.

Пусть $|x| < |x_0|$, тогда $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \le \sum_{n=0}^{\infty} M \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$.

Члены ряда $\sum_{n=0}^{\infty} M \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$ – геометрическая прогрессия со знаменателем $\left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$, что означает сходимость данного ряда.

Следовательно, ряд (2) в точке $x \neq 0$ сходится абсолютно.

Если же $-|x| \le q < |x_0|$, то $\left|\frac{x}{x_0}\right| \le \frac{q}{|x_0|} < 1$. Это значит, что ряд (2) мажорируется числовым рядом $\sum_{n=0}^{\infty} M \left(\frac{q}{|x_0|}\right)^n$, что означает равномерную сходимость ряда (2) на отрезке $[-q; q]$.

Следствие. Из теоремы Абеля следует, что всякая точка его сходимости расположена не дальше от точки $x=0$, чем всякая точка расходимости. Из нее следует также, что существует интервал $-R<x<R$, для всех точек x которого степенной ряд сходится, а для всех $|x|>R$ – расходится. Этот интервал называется **интервалом сходимости**, а число R – **радиусом сходимости степенного ряда** (2). Таким образом, неотрицательное число R, такое, что степенной ряд (2) сходится в $(-R;R)$ и расходится при $|x|>R$, называется **радиусом сходимости**, а интервал $(-R;R)$ – **интервалом сходимости степенного ряда** (2).

Если ряд (2) сходится только в точке $x=0$, то $R=0$; если ряд (2) сходится для всех $x\in R$, то $R=\infty$.

Исследовать степенной ряд на сходимость – значит найти его интервал сходимости и выяснить, сходится или расходится ряд в граничных точках интервала сходимости. Область сходимости степенного ряда всегда состоит из его интервала сходимости и, быть может, граничных точек этого интервала.

Для нахождения радиуса сходимости степенного ряда можно использовать признаки Даламбера и Коши. Так, если существует предел

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=L,$$

тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n x^n|}=L|x|$ и в силу признака Коши при $L|x|<1$, ряд сходится абсолютно, а при $L|x|>1$ расходится. Следовательно,

$$R=\frac{1}{L}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}. \tag{3}$$

Замечание. Условие $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=L>1$ влечет за собой расходимость как ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$, так и ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, так как нарушается необходимый признак его сходимости: т.е. из того, что $L>1\Rightarrow|a_n|\to\infty$, следует, что a_n не стремится к нулю.

Таким же образом, если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=L$, то согласно признаку Даламбера получим

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|. \tag{4}$$

Формулами (3) и (4) нельзя пользоваться в тех случаях, когда бесконечное число коэффициентов степенного ряда равно нулю или когда ряд содержит лишь четные или нечетные степени x.

Пример 1. Найти область (промежуток) сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$.

Решение. Найдем радиус сходимости данного ряда, применяя признак Даламбера $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)x^{n+1}}{n!x^n}\right| = |x|\cdot\lim_{n\to\infty}(n+1) = |x|\cdot L \quad |x|\cdot L<1 \Rightarrow \frac{1}{L}=R$. В нашем случае $L=\infty$, следовательно, $R=0$, т.е. данный ряд сходится только в точке $x=0$. В этом случае область сходимости – одна точка $x=0$.

Пример 2. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{3^n}$.

Решение. По признаку Коши имеем $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{x^{2n}}{3^n}} = \left|\frac{x^2}{3}\right| = \frac{x^2}{3} < 1; \quad x^2<3 \quad R=\sqrt{3}$. Исследуем на сходимость данный ряд в точках $x=\pm\sqrt{3}$. При $x=\sqrt{3}$ получаем числовой ряд вида $\sum_{n=0}^{\infty}(1)^n$, который расходится, т.к. $\lim_{n\to\infty}u_n = \lim_{n\to\infty}(1)^n \neq 0$.

При $x=-\sqrt{3}$ получим ряд $\sum_{n=0}^{\infty}(1)^n$, который тоже расходится. Таким образом, область сходимости данного ряда $(-\sqrt{3};\sqrt{3})$.

Пример 3. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$.

Решение. По признаку Даламбера находим радиус сходимости $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}\cdot n!}{(n+1)!x^n}\right| = |x|\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = |x|\cdot 0$. Таким образом, $R=\infty$, т.е. ряд сходится для любого $x\in R$, следовательно, область сходимости данного числового ряда R.

Пример 4. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n\cdot 5^n}$.

Решение. Определим радиус сходимости

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-3)^{n+1}\cdot n\cdot 5}{(n+1)5^{n+1}\cdot(x-3)^n}\right| = \frac{|x-3|}{5} < 1 \Rightarrow |x-3|<5.$$

Значит $R=5$, тогда $-2<x<8$. В точке $x=-2$ имеем условно сходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$, а в точке $x=8$ получаем гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, который является расходящимся. Следовательно, область сходимости ряда $[-2;8)$.

§ 7. СВОЙСТВА СТЕПЕННЫХ РЯДОВ

Пусть дан степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n . \qquad (1)$$

Свойство 1. Если $R \neq 0$ для ряда (1), то его сумма $S(x)$ есть функция непрерывная на интервале сходимости $(-R, R)$.

Доказательство. Пусть $x \in (-R, R)$, значит всегда существует число $q > 0$, что $|x| < q < R$. Тогда степенной ряд (1) сходится равномерно на отрезке $[-q, q] \in (-R, R)$ в силу теоремы Абеля. В этом случае $S(x)$ непрерывна на $[-q, q]$, а, следовательно, $S(x)$ непрерывна в точке x, а так как x выбрана произвольно, то функция $S(x)$ непрерывна и на $(-R, R)$.

Свойство 2. Операции почленного дифференцирования и интегрирования на любом промежутке $[x_0, x] \in (-R, R)$ степенного ряда (1) не изменяют его радиус сходимости.

Доказательство. Пусть для ряда (1) существует $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| = R$. Рассмотрим ряд, полученный дифференцированием ряда (1), и пусть R_1 – его радиус:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \text{ тогда } R_1 = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n a_n}{(n+1)a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = R .$$

Пусть R_2 – радиус сходимости ряда, полученного почленным интегрированием ряда (1):

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_{x_0}^{x} a_n t^n dt\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n+1}x^{n+1} - \frac{a_n}{n+1}x_0^{n+1}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x_0^{n+1} .$$

Числовой ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{a_n}{n+1}x_0^{n+1}$ сходится абсолютно по признаку сравнения и в силу неравенства $\left|\dfrac{a_n}{n+1}x_0^{n+1}\right| \le \left|a_n \cdot x_0^{n+1}\right|$ и сходимости ряда $|x_0| \cdot \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$, так как $x_0 \in (-R, R)$. Тогда

$$R_2 = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n(n+2)}{(n+1)a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = R .$$

Свойство 3. Если R – радиус сходимости ряда (1) $R \neq 0$, то данный ряд можно почленно дифференцировать на интервале сходимости (– R; R), а для суммы $S(x)$ справедливо равенство

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

Следствие 1. Степенной ряд (1) на интервале сходимости $(R \neq 0)$ можно почленно дифференцировать любое число раз.

Свойство 4. Степенной ряд (1) можно почленно интегрировать на любом отрезке $[x_0, x]$, принадлежащем интервалу сходимости.

Следствие 2. Степенной ряд (1) можно почленно интегрировать любое число раз на отрезке $[x_0, x] \in (-R, R)$

Пример 5. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

Решение. Для решения данной задачи рассмотрим ряд

$$1 - x^2 + x^4 - ... + (-1)^n x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}, \qquad (2)$$

который получен дифференцированием данного ряда.

Полученный ряд (2) – геометрическая прогрессия со знаменателем $(-x)^2$, а его сумма $S(x)$ $S(x)$ равна $S(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ $\quad |x| < 1$.

Интегрируя ряд (2), получаем

$$\text{arctg} x = \int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n y^{2n} dy = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x y^{2n} dy = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Таким образом, получаем $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} = \text{arctg} x \quad |x| < 1$.

Задачи для самостоятельной работы

1. Найти радиус сходимости и область сходимости следующих рядов:

1.1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n}$; 1.2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x-2)^n}{n^2}$; 1.3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n!(x-5)^n$;

1.4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$; 1.5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n}{2n-1} x^{5n}$; 1.6) $\sum \left(\dfrac{n+1}{2n+1}\right)^n (x-2)^{2n}$.

Ответы:

1.1) $R=1;\ x\in(-1;\ 1)$; 1.2) $R=1;\ x\in[1;\ 3]$; 1.3) $R=0;\ x=5$;

1.4) $R=\infty;\ x\in(-\infty;\ \infty)$; 1.5) $R=\frac{1}{2};\ x\in\left[\frac{1}{\sqrt[5]{2}};\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, положить $x^5=t$;

1.6) $R=\sqrt{2};\ x\in(2-\sqrt{2};\ \ =2+\sqrt{2})$.

2. Найти сумму следующих рядов:

2.1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$; 2.2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot x^{n-1}}{2^n}$; 2.3) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot 3^{n-1}}$;

2.4) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$; 2.5) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{2n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$; 2.6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{x^n}$;

2.7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)\cdot 3^{n-1}}$; 2.8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$.

Ответы:

2.1) $S(x)=-\ln(1-x);\ x\in[-1;\ 1)$; 2.2) $S(x)=\frac{2}{(2-x)^2}$, $|x|<2$;

2.3) $S(x)=3\ln\frac{3}{3-x}-x$, для $x\in[-3;\ 3)$; 2.4) $S(x)=\ln(1+x)$, $x\in(-1;\ 1]$;

2.5) $S(x)=\text{arctg}x$, $|x|\le 1$; 2.6) $S(x)=\frac{x}{(x-1)^2}$, $|x|>1$;

2.7) $S=\frac{\pi\sqrt{3}}{6}$, рассмотреть ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-)^{n-1}x^{2n-1}}{2n-1}$, при $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$;

2.8) $S=3$.

§ 8. РЯД ТЕЙЛОРА. ПРИЛОЖЕНИЯ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ

8.1. Формула Тейлора

Теорема 1. Если функция $f(x)$ имеет в некотором промежутке (x_0, x) непрерывные производные до $(n+1)$ порядка включительно, а точка a лежит внутри этого промежутка, тогда для любого x из этого промежутка имеет место **формула Тейлора**

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2!} + \ldots + \frac{f^{n}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x), \quad (1)$$

где $R_n(x)$ – остаточный член, который может быть записан в виде:

$$R_n(x) = f^{(n+1)}(c)(x-x_0)^{n+1}, \ \ c \in (x_0, x) \text{ – форма Лагранжа,} \quad (2)$$

$$R_n(x) = 0((x-x_0)^n), \ x \to x_0 \text{ – форма Пеано.} \quad (3)$$

Если функция $f(x)$ в некотором промежутке имеет производные всех порядков (т.к. они имеются все, то каждая из них будет дифференцируемой и поэтому непрерывной), то можно написать формулу Тейлора для любого значения n. Положим при любом $n = 1, 2, 3 \ldots$

$$S_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)(x-a)}{1!} + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)(x-a)}{n!} \quad (4)$$

и

$$f(x) - S_n(x) = R_n(x). \quad (5)$$

Если

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0, \quad (6)$$

то степенной ряд

$$f(a) + \frac{f(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!} + \ldots \quad (7)$$

сходится, и его суммой будет функция $f(x)$.

Представление функции $f(x)$ в виде ряда

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!} \quad (8)$$

называется **разложением функции в ряд Тейлора**.

В частности, при a = 0 разложение в ряд Тейлора называется **разложением в ряд Маклорена**

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots \qquad (9)$$

Обратите внимание, что остаточный член в формуле Тейлора (1) не обязательно является остатком ряда Тейлора (7) этой функции.

Пусть некоторая функция $f(x)$ бесконечно дифференцируема на интервале $x \in (-R, R)$ и ее ряд Тейлора сходится на этом интервале к функции $S(x)$. Будет ли справедливо равенство $f(x) = S(x)$?

Покажем, что ответ на этот вопрос отрицательный, т.е. существуют бесконечно дифференцируемые функции, ряды Тейлора которых сходятся в некотором интервале, но их сумма не равна этим функциям. Рассмотрим следующий пример

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Установим, что эта функция бесконечно дифференцируема на любом интервале, и найдем ее производные.

Если $x \neq 0$, то $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ и, дифференцируя сложную функцию, получим

$$f'(x) = \frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}},\ f''(x) = \left(\frac{4}{x^6} - \frac{6}{x^4}\right)\cdot e^{-\frac{1}{x^2}},\ f^{(n)}(x) = P_{3n}\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}},$$

где $P_{3n}\left(\frac{1}{x}\right)$ – многочлен степени $3n$ относительно $\frac{1}{x}$.

Отсюда следует, что $f^{(n)}(x)$ существует и конечна при любом $x \neq 0$. Определим $f^{(n)}(0)$ для любого n. Отметим, что для любого m справедливо $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^m} = \lim\limits_{t \to \infty} \frac{t^{\frac{m}{2}}}{e^t} = 0$, а значит для любого многочлена $P\left(\frac{1}{x}\right)$ имеем $\lim\limits_{x \to 0} P\left(\frac{1}{x}\right)\cdot e^{-\frac{1}{x}} = 0$.

Тогда по определению производной для $x = 0$ и, используя полученный выше результат, имеем $f(0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x} e^{-\frac{1}{x}} = 0$.

Покажем, что если $f^{(n-1)}(0) = 0$, то и значение производной порядка n при $x = 0$ тоже будет равно 0, т.е. $f^{(n)}(0) = 0$.

Действительно, по определению производной порядка n, имеем

$$f^{(n)}(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{f^{(n-1)}(x)}{x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{P_{3(n-1)}\left(\dfrac{1}{x}\right) \cdot e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x \to 0} P_{(3n-2)}\left(\frac{1}{x}\right) \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} = 0.$$

Таким образом, получим, что функция $f(x)$ непрерывна и имеет непрерывные производные любого порядка, при этом все производные при $x = 0$ равны нулю, т.е. $f(0) = f'(0) = f''(0) = \ldots = f^{(n)}(0) = 0$.

Тогда ряд Тейлора для этой функции имеет вид $0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + \ldots + 0 \cdot x^n + \ldots$, а его сумма тождественно равна нулю, но $f(x)$ не является тождественно равной нулю. В этом случае имеем $S(x) = 0$ и $f(x) \neq S(x)$. Отметим, что равенство $f(x) = S(x)$ может выполняться не на всей области существования $f(x)$. Так, пусть $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$; эта функция определена для всех $x \neq 1$. Но ряд Тейлора для $f(x)$ в окрестности точки $x = 0$ имеет вид $1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$, геометрическая прогрессия со знаменателем x, интервал сходимости $|x| < 1$ и внутри его $S(x) = \dfrac{1}{1-x}$. В этом случае $f(x) = S(x)$ не на всей области определения функции $f(x)$, а только при $|x| < 1$.

Следовательно, из сходимости **ряда Тейлора** для функции $f(x)$ еще не следует его сходимость именно к этой функции. Поэтому, при разложении функции в ряд Тейлора необходимо проверять соблюдение условия (6).

Отметим, что не всякая функция, даже если ее можно неограниченное число раз дифференцировать, разложима в ряд Тейлора. Однако, если разложение функции в какой-либо степенной ряд вообще возможно, то оно является разложением именно в ряд Тейлора.

Теорема 2. Пусть

$$f(x) = C_0 + C_1(x-a) + \ldots + C_n(x-a)^n + \ldots, \tag{10}$$

где стоящий справа ряд сходится на промежутке $(a - R,\ a + R)$ к функции $f(x)$. Тогда этот ряд является рядом Тейлора, т.е.

$$C_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}. \tag{11}$$

Доказательство. Применяя к равенству (10) n раз теорему о почленном дифференцировании степенного ряда, получим

$$f^{(n)}(x) = n!C_n + \frac{(n+1)!}{1!}C_{n+1}(x-a) + \ldots + \frac{(n+2)!}{2!}C_{n+2}(x-a)^2 + \ldots$$

Полагая в этом тождестве $x = a$, имеем, что все слагаемые в правой части, кроме первого, обращаются в нуль и, значит, получим

$$f^{(n)}(a) = n!C_n,$$

откуда следует (11). Что и требовалось доказать.

Следствие. Если имеются два разложения одной и той же функции $f(x)$ в одной и той же области в степенные ряды по степеням $(x-a)$, то эти два ряда – один и тот же ряд Тейлора.

Удобный для практических приложений признак разложимости функции $f(x)$ в ряд Тейлора.

Теорема 3. Если функция $f(x)$ имеет производные сколь угодно высоких порядков и существует такая постоянная $C > 0$, что при любых x и n $\left|f^{(n)}(x)\right| < C$, то функция $f(x)$ разлагается в ряд Тейлора (8) при любом a.

Доказательство. По условию для остаточного числа $R_n(x)$ для функции $f(x)$ в формуле Тейлора имеем

$$\left|R_n(x)\right| = \left|\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n\right| \le C\frac{\left|x-a\right|^n}{n!},$$

так что $\lim\limits_{n\to\infty}\left|R_n(x)\right| \le C \cdot \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left|x-a\right|^n}{n!} = 0$.

Что и требуется доказать.

8.2. Разложение элементарных функций в ряд Маклорена

1. $f(x)=e^x$. Так как $f^{(n)}(x)=e^x$ и $\left|f^{(n)}(x)\right|=\left|e^x\right|<e^A$ при $|x|<A$, $A>0$, то это значит, что данная функция e^x разложима в ряд Маклорена, сходящийся к ней при любом $x\in R$

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}, \tag{1}$$

т.к. $a_n=\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}=\dfrac{1}{n!}$.

Заменяя в (1) x на $-x$, получим

$$e^{-x}=1-\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}-...+(-1)^n\frac{x^n}{n!} \tag{2}$$

Область сходимости – вся числовая прямая.

2. $f(x)=\sin x$. Так как $f^{(n)}(x)=\sin^{(n)}x=\sin\left(x+n\dfrac{\pi}{2}\right)$ и $\left|f^{(n)}x\right|=\left|\sin\left(x+n\dfrac{\pi}{2}\right)\right|\le 1$, $\forall x\in R$, то

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+...+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+...=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}. \tag{3}$$

3. $f(x)=\cos x$. Так как $\cos x=(\sin x)'$ и, используя формулу (3), получим искомое разложение

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-...+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+...=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}. \tag{4}$$

4. $f(x)=\ln(1+x)$. В силу теоремы о почленном интегрировании степенного ряда и с учетом выражения для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии имеем

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+...+(-1)^n x^n.$$

Этот ряд сходится равномерно при $|x|<1$, поэтому

$$\ln(1+x)=\int_0^x\frac{dt}{1+t}=\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-t)^n dt\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1},\text{ то есть}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} \qquad (5)$$

для $x \in (-1;1]$.

5. $f(x) = (1+x)^{\alpha}$, $\alpha \in R$. Дифференцируя равенство $f(x) = (1+x)^{\alpha}$ n раз, получим $f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$, тогда $f^{(n)}(0) = (\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n+1)$.

Тогда рядом Маклорена для функции $f(x)$ будет ряд

$$1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + ... + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n + ... \qquad (6)$$

Если $\alpha = n$ (целое положительное), $n \in N$, то все коэффициенты ряда (6), начиная с номера $(n+1)$, обращаются в нуль, и степенной ряд становится биномом Ньютона (конечная сумма)

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)x^2}{n!} + ... + x^4 = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k \,. \qquad (7)$$

Если же α – число нецелое или целое, но отрицательное, то ни один из коэффициентов ряда в нуль не обращается, и, тем самым, мы имеем дело с бесконечным рядом, который называется **биноминальным**, а его коэффициенты – **биноминальными коэффициентами**. Для определения радиуса сходимости ряда (6) находим u_n и u_{n+1} и $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+}}{u_n}\right| = |x| \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha-n+2}{n+1}\right| = |x|$, т.е. $R = 1$.

Замечание. В области сходимости ряда (6) справедливы условия

$$(1+x)\cdot S'(x) = \alpha \cdot S(x) \qquad (8)$$

$S(0) = 1$, где $S(x)$ – сумма ряда (6) и

$$(1+x)\cdot f'(x) = \alpha \cdot f(x) \qquad (9)$$

$$f(0) = 1.$$

Так как задача Коши для дифференциального уравнения (8) или (9) имеет единственное решение, то найдется степенной ряд $1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, удовлетворяющий условиям (8) или (9), который будет искомым разложением для данной функции.

8.3. Методы разложения функций в ряд Тейлора

Непосредственное разложение функций в ряд Тейлора требует вычисления производных, исследования и решения вопросов о сходимости полученных рядов. Для более эффективного решения ряда вопросов, связанных с разложением в ряд Тейлора рассмотрим некоторые приемы.

Метод, основанный на использовании суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

Используя разложение в ряд $\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\ldots \quad |x|<1$ и теоремы о дифференцировании и интегрировании рядов, находим разложение функции в ряд Тейлора.

Пример 1. Разложить в ряд Тейлора функцию $f(x)=\frac{1}{1+x}$ в окрестности точки $x_0=2$.

Решение. В силу того, что $\frac{1}{1+x}=\frac{1}{1+(x+2)-2}=\frac{-1}{1-(x+2)}$, тогда при $|x+2|<1$ будем иметь

$$\frac{1}{1+x}=\frac{-1}{1-(x+2)}=-(1+(x+2)+(x+2)^2+\ldots+(x+2)^n)=-\sum_{n=0}^{\infty}(x+2)^n$$

для $x\in(-3;-1)$.

Метод подстановки

Суть метода подстановки при разложении в ряд Тейлора состоит в следующем: тождественными преобразованиями заданной функции в окрестности точки разложения приводим ее (после подходящей подстановки) к известному разложению соответствующих функций.

Пример 2. Разложить функцию $y=\sin\frac{\pi x}{4}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0=2$.

Решение. В силу равенства

$$\sin\frac{\pi}{4}x=\sin\frac{\pi}{4}(x-2+2)=\sin\left(\frac{\pi}{4}(x-2)+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\frac{\pi}{2}(x-2)=\left|t=\frac{\pi}{2}(x-2)\right|=\cos t$$

и используя разложение $\cos t$, после возвращения к переменной x, имеем

$$\cos\frac{\pi}{4}(x-2)=1-\frac{\pi^2(x-2)^2}{4^2\cdot 2!}+\frac{\pi^4(x-2)^4}{4^4\cdot 4!}+\ldots+\frac{\pi^{2k}(x-2)^{2k}}{4^{2k}\cdot(2k)!}.$$

Полученный ряд сходится к заданной функции при $-\infty < \frac{\pi}{4}(x-2) < \infty$, т.е. при любом $x \in R$. Таким образом, имеем

$$\sin\frac{\pi}{4}x = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2k}\frac{(x-2)^{2k}}{(2k)!}, \qquad -\infty < x < \infty.$$

Метод дифференцирования

Суть данного метода состоит в следующем: для искомой функции $f(x)$ требуется найти разложение в ряд Тейлора, для этого выбираем функцию $\varphi(x)$, для которой проще написать ряд Тейлора, тогда на области сходимости имеет место равенство $f(x) = (\varphi(x))'$.

Пример 3. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x) = \frac{2x}{(1-x^2)^2}$.

Решение. Так как имеет место соотношение $\frac{2x}{(1-x^2)^2} = \left(\frac{1}{1-x^2}\right)'$ и $\frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$, при $|x| < 1$.

Тогда $\frac{2x}{(1-x^2)^2} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}\right)' = (1 + x^2 + x^4 + ... + x^{2n})' = \sum_{n=1}^{\infty} 2nx^{2n-1}$, для $\forall x \in (-1;1)$.

Метод интегрирования

Суть данного метода состоит в следующем: для искомой функции $f(x)$ требуется найти разложение в ряд Тейлора, для этого выбираем функцию $\varphi(x)$, для которой проще написать ряд Тейлора и имеет место равенство $f(x) = \int_{x_0}^{x} \varphi(t)dt$ на области сходимости ряда для $\varphi(x)$.

Пример 4. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x) = \operatorname{arctg} x$.

Решение. Так как

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - ... + (-1)^n x^{2n-2} + ..., \ |x| < 1 \text{ и } \operatorname{arctg} 0 = 0,$$

тогда при $|x| < 1$ имеем

$$\operatorname{arctg} x = \int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = \int_0^x dx - \int_0^x x^2 dx + \int_0^x x^4 dx + ... = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - ... + (-1)\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + ...,$$

то есть $\operatorname{arctg} x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}, \quad |x| < 1$.

Отметим, что для разложения функций в ряд Тейлора используют методы, основанные на операциях умножения и деления рядов.

Пример 5. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x) = \ln\frac{1+x}{1-x}$.

Решение. I способ. Имеем $f(x) = \ln\frac{1+x}{1-x} = \ln(1+x) - \ln(1-x)$ и, используя разложения

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n},$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots - \frac{x^n}{n},$$

находим, что $\ln(1+x) - \ln(1-x) = \ln 1 + x 1 - x = 2x + \frac{2x^3}{3} + \ldots + \frac{2x^{2k-1}}{2k-1} + \ldots$

Итак, получим

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad \forall x \in (-1;1).$$

II способ. Применим метод интегрирования. Так как справедливы соотношения $\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\int_0^x \frac{dt}{1-t^2}$ и $\frac{1}{1-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} t^{2n}$ при $|t| < 1$, тогда имеем

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\int_0^x \left(\sum t^{2n}\right)dt = 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad \forall x \in (-1;\ 1).$$

8.4. Приложения степенных рядов

1. Приближенное вычисление значений функций

Для нахождения приближенного значения функции $f(x)$ в точке $x = x_0$ с заданной точностью поступают следующим образом: находим разложение функции $f(x)$ по степеням $(x - x_1)$ с интервалом сходимости, содержащим точку x_0, где x_1 – точка, в которой значения функции и ее производных вычисляются точно. Полагая $x = x_0$ в полученном числовом ряду $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x_0 - x_1)^n$, оставляем только члены, гарантирующие заданную точность вычислений. Минимальное число n_0 таких членов ряда определим из соответствующей оценки либо остатка $R_n(x_0)$ формулы Тейлора, либо остатка $r_n(x_0)$ ряда Тейлора, так как в случае сходимости степенного ряда функции $f(x)$ они равны между собой.

Пример 1. Вычислить $\ln 1{,}8$, взяв 10 членов ряда, и оценить погрешность.

Решение. $\ln 1{,}8 = \ln(1+0{,}8) \approx 0{,}8 - \frac{0{,}8^2}{2} + \ldots - \frac{0{,}8^{10}}{10} \approx 0{,}58$. Погрешность не превосходит (по теореме Лейбница для знакочередующихся рядов)

$$\frac{0{,}8^{11}}{11} \approx 0{,}0078.$$

Пример 2. Тяжелая нить (провод, цепь) под влиянием собственного веса провисает по цепной линии $y = \frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}) = a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$, где $a = \frac{H}{q}$, H – горизонтальное натяжение нити, q – вес единицы длины.

Какой более простой линией может быть заменена цепная линия, если x мало по отношению к a?

Решение. Напишем ряд Маклорена для функций $e^{\frac{x}{a}}$ и $e^{-\frac{x}{a}}$:

$$e^{\frac{x}{a}} = 1 + \frac{x}{a} + \frac{1}{2!}\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{x}{a}\right)^3 + \frac{1}{4!}\left(\frac{x}{a}\right)^4 + \ldots,$$

$$e^{-\frac{x}{a}} = 1 - \frac{x}{a} + \frac{1}{2!}\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \frac{1}{3!}\left(\frac{x}{a}\right)^3 + \frac{1}{4!}\left(\frac{x}{a}\right)^4 + \ldots$$

Откуда с точностью $0\left(\frac{x}{a}\right)^4$ имеем

$$y = a + \frac{x^2}{2a} \quad \text{или} \quad y = \frac{H}{q} + \frac{q}{2H}x^2.$$

Следовательно, при малых по отношению к a значениях x цепная линия может быть заменена параболой.

Пример 3. Вычислить $\sqrt[5]{35}$ с точностью до 0,0001.

Решение. В силу равенства

$$\sqrt[5]{35}=2\sqrt[5]{\frac{35}{32}}=2\left(1+\frac{3}{32}\right)^{\frac{1}{5}}=2\left(1+\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{32}-\frac{4\cdot 3^2}{21\cdot 5^2\cdot 32^2}\right)=2+\frac{3}{80}-\frac{9}{6400}=2{,}0361,$$

следующий член будет $\dfrac{4\cdot 9\cdot 3^3}{3!\cdot 5^3\cdot 32^3}\le\dfrac{1}{25000}=0{,}00004$.

2. Приближенное вычисление интегралов

Определенные интегралы можно вычислить с помощью рядов.

Пример 4. Вычислить приближенное значение интеграла $\int\limits_0^{0,25} e^{-x^2}dx$, взяв 3 члена разложения в ряд подынтегральной функции, найти погрешность вычисления.

Решение. Разложив подынтегральную функцию в степенной ряд, получим

$$e^{-x^2}=1-x^2+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\ldots,\text{ тогда}$$

$$\int\limits_0^{0,25} e^{-x^2}dx=\int\limits_0^{0,25}\left(1-x^2+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}\ldots\right)dx=\left[x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{2!\cdot 5}-\ldots\right]_0^{1/4}=$$

$$=\frac{1}{4}-\frac{1}{4^3\cdot 3}+\frac{1}{4^5\cdot 2!\cdot 5}-\ldots$$

Полученный ряд – знакопеременный.

Абсолютная погрешность будет меньше, чем первый отброшенный член, т.е. меньше, чем $\dfrac{1}{4^7\cdot 3!\cdot 7}<0{,}00001$. Поэтому, производя вычисления с точностью до 0,00001, будем иметь

$$0{,}250000-0{,}005208+0{,}000098=0{,}244890.$$

Следовательно, $\int\limits_0^{0,25} e^{-x^2}dx=0{,}24489$ (с точностью до 0,00001).

Пример 5. Вычислить интеграл $\mathrm{Si}x=\int\limits_0^x\dfrac{\sin x}{x}dx$.

Решение. Так как $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + ...$, откуда $\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - ... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$, тогда

$$\int_0^x \frac{\sin x}{x} dx = x - \frac{x^3}{3!\cdot 3} + ... + (-1)\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)}...$$

Подставляя в полученный ряд значения x, получим величину интеграла.

Пример 6. Вычислить $I(x) = \int_0^x \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$.

Решение. Полагая $\sqrt{x} = y$, приводим данный интервал к виду $I(x) = \int_0^y \frac{\sin y^2}{y} dy^2 = 2\int_0^y \sin y^2 dy$, откуда

$$I(x) = 2\int_0^y \left(y^2 - \frac{y^6}{3!} + ... + (-1)^n \frac{y^{4n+2}}{(2n+1)!} \right) dy.$$

Ряд, стоящий под знаком интеграла сходится при всех y, поэтому

$$I(x) = 2\left(\frac{y^3}{3} - \frac{y^7}{3!\cdot 7} + ... + (-1)^n \frac{y^{4n+2}}{(2n+1)!(4n+3)} \right)\Bigg|_0^y =$$

$$= 2\sqrt{x}\left(\frac{x}{3} - \frac{x^8}{3!\cdot 7} + ... + (-1)^n \left(\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!(4n+3)} \right) \right).$$

3. Нахождение сумм числовых рядов

Используя известные разложения в степенной ряд, свойства сходящихся рядов, операции интегрирования и дифференцирования находим значение определенной функции в заданной точке.

Пример 7. Найти сумму ряда:

1) $1 + 2x + 3x^2 + ... + (n+1)x^n + ...$;

2) $1\cdot 2 + 2\cdot 3x + ... + (n+1)(n+2)x^n + ...$

Решение. 1) В силу равенств

$$1 + x + x^2 + ... + x^n + ... = \frac{1}{1-x}, \quad |x| < 1,$$

$$x + x^2 + x^3 + ... + x^{n+1} = \frac{x}{1-x}, \quad |x| < 1,$$

$$(x+x^2+x^3+\ldots+x^{n+1})'=\left(\frac{x}{1-x}\right)', \quad |x|<1,$$

получим

$$1+2x+3x^2+\ldots+(n+1)x^n=\frac{1}{(1-x)^2}, \quad |x|<1.$$

2) В силу равенств

$$1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots=\frac{1}{1-x}, \quad |x|<1,$$

$$x^2+x^3+x^4+\ldots+x^{n+2}=\frac{x^2}{1-x}=-(1+x)+\frac{1}{1-x},$$

и, дважды дифференцируя последнее равенство, получим

$$1\cdot 2+3\cdot 2x+\ldots+(n+1)(n+2)x^n=\frac{2}{(1-x)^3}.$$

Пример 8. Найти сумму числового ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+3)}$.

Решение. Данный числовой знакочередующийся ряд сходится абсолютно (сравнить с числовым сходящимся рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$). Рассмотрим степенной ряд $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+3}}{(2n+1)(2n+3)}$; $S(0)=0$, который равномерно сходится при $x\in[-1;1]$.

Ряд $S'(x)=x\sum\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}=x\operatorname{arctg}x$ равномерно сходится при $x\in[0;1]$.

Решая задачу Коши $S'(x)=a\operatorname{arctg}x$, $S(0)=0$, получим $S(x)=\frac{1+x^2}{2}\operatorname{arctg}x-\frac{x}{2}$. Так как сумма исходного числового ряда равна $S(1)$, то имеем $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+3)}=\operatorname{arctg}1-\frac{1}{2}=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$.

Пример 9. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$.

Решение. Радиус сходимости данного ряда R = 1. Если $S(x)$ его сумма, то эта функция удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению $S''(x)=\dfrac{1}{1+x}$ с начальными условиями $S(0)=S'(0)=0$. Решая задачу Коши, получим, что $S(x)=(x+1)\ln(1-x)-(1+x)+1$.

Пример 10. Найти сумму ряда $1-\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{13}+\ldots+\dfrac{(-1)^{n+1}}{4n-3}+\ldots$

Решение. Данный знакочередующийся ряд является сходящимся. Рассмотрим геометрическую прогрессию

$$1-x^4+x^8-x^{12}+x^{16}-\ldots+(-1)^n x^{4n}+\ldots,$$

ее сумма равна $S(x)=\dfrac{1}{1+x^4}$ при $|x|<1$.

Интегрируя прогрессию, получим

$$x-\frac{x^5}{5}+\frac{x^9}{9}+\ldots\frac{(-1)^{n+1}x^{4n+3}}{4n+3}+\ldots+=\int_0^x\frac{dx}{1+x^4}.$$

Интегрируя и полагая в последнем равенстве $x=1$, находим сумму данного числового ряда

$$S=\frac{\sqrt{2}}{8}\ln(3+\sqrt{2})+\frac{\sqrt{2}}{8}\pi.$$

4. Решение дифференциальных уравнений с помощью рядов

В теоретических и прикладных исследованиях в качестве математических моделей реальных процессов часто используются такие дифференциальные уравнения, решения которых на основании общей теории дифференциальных существуют, но не являются элементарными функциями, или решение мы не можем найти. В этих случаях решения ищут в виде степенных рядов и некоторых элементарных функций. При таком подходе можно получить аналитические представления решений для широкого класса весьма сложных линейных и нелинейных дифференциальных уравнений, в том числе уравнений в частных производных. Процесс нахождения решения дифференциального уравнений с помощью степенных рядов обычно осуществляется в три этапа:

1) определяется вид степенного ряда;

2) определяем коэффициенты этого ряда (вычисляют их некоторым способом);

3) исследуют характеристики полученного ряда (прежде всего, радиус сходимости, область сходимости).

Отметим, что внутри области сходимости ряда решение $y(x)$ исходного дифференциального уравнения может быть вычислено с любой наперед заданной точностью (в виде частичной суммы ряда с соответствующим числом членов).

Может оказаться, что решение исходного дифференциального уравнения существует на промежутке более широком, чем область сходимости. Поэтому частичную сумму ряда можно использовать для нахождения приближенных значений $\overline{y(x)}$ решения $y(x)$ и за областью сходимости. Однако в этом случае к полученным значениям $\overline{y(x)}$ следует относиться с осторожностью, потому что их погрешность может оказаться неприемлемой, т.к. вне области сходимости нет общих способов оценки отбрасываемый остаток ряда.

Рассмотрим два основных метода нахождения решений дифференциальных уравнений в виде степенных рядов на примере обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка.

4.1. Метод последовательного дифференцирования

Данный метод применяется для решения линейных и нелинейных дифференциальных уравнений и базируется на следующей теореме.

Теорема 1. Если в задаче Коши для дифференциального уравнения второго порядка

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ y(x_0) = y_0;\ y'(x_0) = y'_0. \end{cases} \tag{1}$$

функция $f(x_0, y_0\ y')$ в некоторой окрестности точки $(x_0,\ y_0, y'_0)$ имеет ограниченные производные по x, y и y', то существует единственное решение задачи (1), которое можно представить в виде ряда Тейлора

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n}{n!}, \tag{2}$$

сходящегося в некотором интервале $|x - x_0| < R$.

Первые два коэффициента ряда (2) определяют по начальным условиям $a_0 = \dfrac{y(x_0)}{0!} = y_0;\ a_1 = \dfrac{y'(x_0)}{1!} = y'_0$, а остальные коэффициенты $a_n = \dfrac{y^{(n)}(x_0)}{n!}$ вычисляют в два этапа: сначала находят выражения для производных $y^{(n)}(x)$ (последовательным дифференцированием по x обеих частей исходного уравнения), а затем в полученные выражения подставляют $x = x_0$ и найденные значения $y(x_0), y'(x_0), y''(x_0) ... y^{(n)}(x_0)$ в ряд (2). Если удается получить $y^{(n)}(x)$ в общем виде – тогда находим точное решение $y(x)$, и найти область сходимости полученного ряда – где решение задачи Коши (1) в виде ряда существует. Если же коэффициенты ряда (2) в общем виде найти не удается, то выписывают несколько первых членов ряда Тейлора – частичную сумму, которую принимают за приближенное решение $\overline{y(x)}$ исходной задачи. В этом случае остаются неизвестными как область сходимости ряда, так и величина погрешности приближенного решения, допускаемая при отбрасывании остатка ряда.

Пример 11. Найти решение задачи Коши $\begin{cases} y'' = xy' + y \\ y(0) = y'(0) = 1. \end{cases}$

Решение. Так как первые и вторые частные и смешанные производные по x, y и y' от правой части уравнения равномерно ограничены в окрестности точки $(0, 1, 1)$, а все частные и смешанные производные более высоких порядков равны нулю, то по теореме 1 решение данной задачи в виде ряда Тейлора (2) существует в некоторой окрестности точки $x_0 = 0$. Из начальных условий имеем: $a_0 = y(0) = 1;$ $a_1 = y'(0) = 1.$

Для нахождения остальных коэффициентов последовательно дифференцируем по x обе части исходного уравнения.

$$\begin{aligned} & y'' = xy' + y \\ & y''' = xy'' + y' + y' = xy'' + 2y' \\ & y^{(IV)} = xy''' + 3y'' \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & y^{(n)} = xy^{(n-1)} + (n-1)y^{(n-2)} \end{aligned}$$

Подставляя в полученные выражения $x = 0,$ $y(0) = 1,$ $y'(0) = 1,$ находим $y''(0) = 1,$ $y'''(0) = 2 \cdot 1,$ $\ldots,$ $y^{(n)}(0) = (n-1) \cdot y^{(n-2)}(0)$.

При вычислении $y^{(n)}(0)$ рассмотрим два случая:

$$n = 2k \qquad y^{(2k)} = (2k-1)!!,$$

$$n = 2k+1 \qquad y^{(2k+1)} = (2k)!!.$$

Тогда значения искомых коэффициентов ряда

$$a_{2k} = \frac{y^{(2k)}(0)}{(2k)!} = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!},$$

$$a_{2k+1}=\frac{y^{(2k+1)}(0)}{(2k+1)!}=\frac{(2k)!!}{(2k+1)!}=\frac{1}{(2k+1)!!}.$$

Таким образом, решение задачи Коши имеет вид

$$y=1+x+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{2k}}{(2k)!!}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!!}.$$

Радиусы сходимости полученных рядов $R=\infty$, следовательно, полученное в виде ряда решение задачи Коши сходится на интервале $(-\infty;+\infty)$.

4.2. Метод неопределенных коэффициентов

Рассмотрим данный метод для нахождения общего решения линейного дифференциального уравнения второго порядка

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x), \tag{3}$$

а также для нахождения частных решений (задача Коши) для уравнения (3) при начальных условиях

$$y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_0'. \tag{4}$$

При этом степенной ряд с неопределенными коэффициентами подставляет в уравнение (3), а значит, исходя из соотношений, определяемых полученным равенством, определяют коэффициенты ряда. Вид и свойства полученного решения $y(x)$ в большей мере зависит от свойств $p(x),\ q(x)$ и $f(x)$.

Теорема 2. Если функции $p(x),\ q(x)$ и $f(x)$ разложимы в степенные ряды по степеням $(x-x_0)$

$$p(x)=\sum_{n=0}^{\infty}p_n(x-x_0)^n;\ q(x)=\sum_{n=0}^{\infty}q_n(x-x_0)^n;\ f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}f_n(x-x_0)^n, \tag{5}$$

сходящиеся в области $|x-x_0|<R$, то существует единственное решение задачи Коши (3) – (4), представимое в виде ряда Тейлора

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n,\ a_n=\frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}, \tag{6}$$

причем ряд (6) сходится, по крайней мере, на том же интервале (x_0-R,x_0+R), что и ряд (5).

Пример 12. Решить задачу Коши $y'' = xy$

$$y(0) = 1;\ y'(0) = 0.$$

Решение. Будем искать решение данной задачи Коши относительно x в виде степенного ряда $y = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n + ...$ при начальных условиях $a_0 = 1,\ a_1 = 0$.

Дифференцируя дважды этот ряд и подставляя в данное уравнение, приравняв коэффициенты при одинаковых степенях, получим

$$2a_2 = 0;\quad 6a_3 = 1;\quad 12a_4 = 0;\quad 20a_5 = a_2;\ ...$$

Замечаем, что в этом случае имеем

$$a_2 = a_5 = ... = a_{3n+2} = ... = 0,$$

$$a_4 = a_7 = ... = a_{3n+1} = ... = 0,$$

$$a_3 = \frac{1}{2 \cdot 3},\ \ a_6 = \frac{1}{5 \cdot 6},\ \ ...,\ \ a_{2n+3} = \frac{1}{(3n+2)(3n+3)},\ ...$$

Таким образом, коэффициенты в исходном ряде будут

$$a_0 = 1,\ \ a_3 = \frac{1}{3!},\ \ a_6 = \frac{1 \cdot 4}{6!},\ \ ...,\ a_{3n} = \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 ... (3n-2)}{(3n)!},$$

а остальные коэффициенты будут равны 0. Следовательно, получим ряд

$$y = 1 + \frac{x^3}{3!} + \frac{1 \cdot 4 x^6}{6!} + ... + \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 ... (3n-2) x^{3n}}{(3n)!},$$

который сходится везде.

§9. РЯДЫ ФУРЬЕ

В классе функциональных рядов важное значение имеют ряды Фурье, которые будут рассмотрены в этом параграфе.

9.1. Периодические процессы и периодические функции

Во всех случаях функцию, описывающую периодический процесс, представляют как сумму конечного или бесконечного числа простых периодических функций $A\cdot\sin(wx+\varphi_0)$, где A, w, φ_0 – постоянные величины. Такие функции называются **гармониками**, так как они описывают простейшее колебательное движение, называемое **гармоническим**. Постоянная $A>0$ называется **амплитудой колебания**, w – **частотой колебания**, $wx+\varphi_0$ – **фазой колебания**, φ_0 – **начальной фазой**.

Функция $y=f(x)$ называется **периодической**, если для нее существует такое число $T\neq 0$, что выполняются следующие условия:

1) при любом x из области определения функции числа $x-T$ и $x+T$ также принадлежат области определения;

2) $f(x)=f(x+T)=f(x-T)$.

Таким образом, функция $f(x)$ периодическая, тогда и только тогда, когда $\exists T\neq 0;\ \forall x\in D(f);\ (x\pm T)\in D(f);\ f(x\pm T)=f(x)$.

Число $T\neq 0$ называют **периодом данной функции**. Если T является периодом функции $f(x)$, то и $n\cdot T$ – период $f(x)$, $n\in N$.

Если существует наименьший положительный период функции, то его называют **основным периодом**. Например, функция $y=\sin x$ имеет период 2π, $y=\cos 2x$ – π; $\sin\dfrac{x}{5}$ – 10π.

Отметим, что если $f(x)$ имеет период T, то функция $f(w\cdot x)$ – тоже периодическая, но с периодом $\dfrac{T}{w}$.

Заметим, что функция $f(x)=c$, $c=\mathrm{const}$ с областью определения $D(f)=R$ – периодическая, с периодом $T=R$, где R – любое число. Но наименьшего (основного) периода функция не имеет.

Напомним свойства периодических функций:

1. Сумма, разность, произведение и частное периодических функций периода T есть периодическая функция периода T;

2. Если функция $y = f(x)$ имеет период T, то функция $y = f(ax)$ $(a \neq 0)$ имеет период $\dfrac{T}{|a|}$;

3. При любом x справедливо равенство $I = \int\limits_{x}^{x+T} f(t)dt = \int\limits_{0}^{T} f(t)dt$.

Действительно, так как (интеграл с переменным верхним пределом)

$$\frac{dI}{dx} = f(x+T)\frac{d(x+T)}{dx} - f(x)\frac{dx}{dx} = f(x+T) - f(x) = 0,$$

то $I(x) = C$, т.е. не зависит от x.

9.2. Тригонометрический ряд Фурье

Тригонометрическим рядом называется функциональный ряд вида

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx), \tag{1}$$

где a_0, a_n, b_n $(n = 1,\ 2\ \ldots)$ – действительные числа, называемые коэффициентами ряда.

Тригонометрической системой функций называется множество функций

$$1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x,\ \ldots,\ \cos nx,\ \sin nx,\ \ldots \tag{2}$$

Теорема 1. Основная тригонометрическая система функций (2) обладает следующими свойствами:

1) интеграл по отрезку $[-\pi;\pi]$ от произведения любых двух различных функций равен нулю, т.е.

$$\begin{gathered}
\int\limits_{-\pi}^{\pi} 1\cdot \sin mx dx = 0 \\
\int\limits_{-\pi}^{\pi} 1\cdot \cos mx dx = 0 \\
\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = 0 \quad (m \neq n) \\
\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx dx = 0 \quad (m \neq n) \\
\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \cos nx dx = 0 \quad (m, n = 1,\ 2,\ 3\ \ldots)
\end{gathered} \tag{3}$$

2) Интеграл по отрезку $[-\pi;\pi]$ от квадрата любой функции системы (2) отличен от нуля, причем

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1^2 dx = 2\pi; \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 mxdx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 mxdx = \pi. \tag{4}$$

Доказательство. Докажем некоторые из них:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nxdx = \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} \cos nxdnx = \frac{1}{n}\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mxdx = -\frac{1}{m}\cos mx\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nxdx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (\cos(m-n)x + \cos(m+n)x)dx = 0, \quad m \neq n$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 mxdx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-\cos 2mx}{2}dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dx - \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos 2mxdx = \pi.$$

Аналогичным образом доказываются и другие равенства.

Теорема 2. Если

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{5}$$

и ряд (5) сходится равномерно на $[-\pi;\pi]$, то его коэффициенты определяются по формулам

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx,$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx \ \ (n = 1,\ 2,\ 3\ ...). \tag{6}$$

Доказательство. Интегрируя почленно ряд (5) и учитывая формулы (3), находим

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \cos nxdx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \sin nxdx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dx = a_0 \cdot \pi,$$

то есть $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$.

Заметим, что при почленном умножении ряда (5) на $\sin kx$ или $\cos kx$ получаем ряд, равномерно сходящийся на отрезке $[-\pi;\pi]$, так как члены этого ряда по модулю не превосходят члены данного ряда ($|\sin kx| \le 1$, $|\cos kx| \le 1$ при любом k).

Умножая поочередно ряд (5) на $\sin kx$ и $\cos kx$, а затем, интегрируя почленно полученные ряды (принимая во внимание теорему 1), находим

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx = a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx dx = a_k \pi,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx = b_k \pi.$$

Тогда получим

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, \quad a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx \quad (k = 1,\ 2,\ 3\ \ldots).$$

Тригонометрический ряд (5), коэффициенты которого определяются по формулам (6), называется **рядом Фурье**, а числа a_n и b_n – **коэффициентами функции Фурье** $f(x)$.

Рассмотрим вопрос о сходимости ряда Фурье к функции, для которой он составлен.

Функция $f(x)$ называется кусочно-диффенренцируемой на отрезке $[ab]$, если этот отрезок можно разбить точками $a = x_0 < x_1 < x_2\ \ldots\ x_n = b$ так, что $f(x)$ и $f'(x)$ непрерывны на каждом интервале $(x_k,\ x_{k+1})$ $(k = \overline{0,\ n-1})$, и, кроме того, существуют конечные односторонние пределы $f(x)$ и $f'(x)$ на концах интервалов. Функция кусочно-дифференцируемая на $[ab]$ может быть непрерывной на нем или иметь конечное число точек разрыва первого рода.

Теорема 3. Если функция $f(x)$ кусочно-дифференцируема на отрезке $[-\pi;\pi]$, то ее ряд Фурье сходится в каждой точке $x_0 \in (-\pi;\pi)$ и имеет сумму

$$S(x_0) = \frac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2}, \tag{7}$$

в частности, если x_0 – точка непрерывности $f(x)$, то

$$f(x_0)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx_0+b_n\sin nx_0)\,. \qquad (8)$$

На концах отрезка $[-\pi;\pi]$ сумма ряда Фурье определяется формулой

$$S(\pm\pi)=\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}. \qquad (9)$$

9.3. Ряды Фурье для четных и нечетных функций

Если функция $f(x)$ четная, т.е. $\forall x\in[-a;a]$ $f(-x)=f(x)$, то график этой функции симметричен относительно оси Oy. А так как определенный интеграл можно рассматривать как площадь криволинейной трапеции, для четных функций имеем

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx=2\int_{0}^{a} f(x)dx\,. \qquad (10)$$

Для нечетных функций, т.е. таких, что $\forall x\in[-a;a]$ $f(-x)=-f(x)$, получаем

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx=\int_{-a}^{a} f(x)dx+\int_{0}^{a} f(x)dx=0\,. \qquad (11)$$

Из определения четных и нечетных функций следует, что

1) произведение двух четных или двух нечетных функций есть функция четная;

2) произведение четной и нечетной функции есть функция нечетная.

Тогда для $x\in[-\pi;\pi]$, если $f(x)$ – четная функция, то

$$\begin{gathered} a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nxdx, \\ b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx=0, \end{gathered} \qquad (12)$$

т.е. ряд Фурье для четной функции содержит только косинусы.

Если $f(x)$ – кусочно-дифференцируемая функция на отрезке $[-\pi;\pi]$, то для ее точек непрерывности $x\in(-\pi;\pi)$

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx. \qquad (13)$$

Если $f(x)$ – нечетная функция, то имеем

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx dx=0,$$
$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\sin nx dx, \qquad (14)$$

т.е. ряд Фурье для нечетной функции $f(x)$ содержит только синусы. Если функция $f(x)$ кусочно-дифференцируема на $[-\pi;\pi]$, то для точек непрерывности $x\in(-\pi;\pi)$

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx, \qquad (15)$$

где b_n – определяются по формулам (14).

Пример 1. Разложить в ряд Фурье периодическую с периодом 2π функцию $f(x)=\begin{cases}-1, -\pi\le x<0,\\ 1,\ 0\le x\le\pi.\end{cases}$

Решение. Построим график функции $f(x)$ (рис. 1).

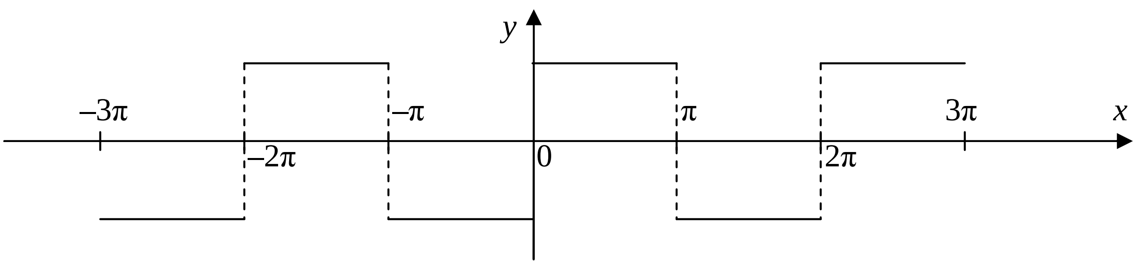

Рис. 1

Для функции $f(x)$ выполнены условия разложения в ряд Фурье, тогда определяем a_n и b_n – коэффициенты Фурье для $f(x)$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}(-1)dx+\int_{0}^{\pi}1dx\right)=0,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} -\cos nxdx + \int_{0}^{\pi}\cos nxdx\right) = 0,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left(\int_{\pi}^{0} -\sin nxdx + \int_{0}^{\pi}\sin nxdx\right) = \frac{1}{\pi}\left(\left.\frac{\cos n\pi}{n}\right|_{-\pi}^{0} - \left.\frac{\cos n\pi}{n}\right|_{0}^{\pi}\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi n}(1-(-1)^n) = \begin{cases} 0, & \text{если } n = 2k, \\ \dfrac{4}{\pi n}, & \text{если } n = 2k+1. \end{cases}$$

Тогда ряд Фурье для $f(x)$ имеет вид

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \ldots + \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1} + \ldots\right).$$

Рассмотрим геометрический смысл разложения данной функции в ряд Тейлора. Для этого найдем несколько частичных сумм полученного разложения и построим графики функций $f(x)$, $S_1(x)$, $S_2(x)$, $S_3(x)$.

Первая частичная сумма для ряда имеет вид $S_1(x) = \frac{4}{\pi}\sin x$, вторая – $S_2(x) = \frac{4}{\pi}\left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3}\right)$, третья – $S_3(x) = \frac{4}{\pi}\left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5}\right)$.

Строим графики $f(x)$, $S_1(x)$, $S_2(x)$ и $S_3(x)$ (рис. 2 – 4).

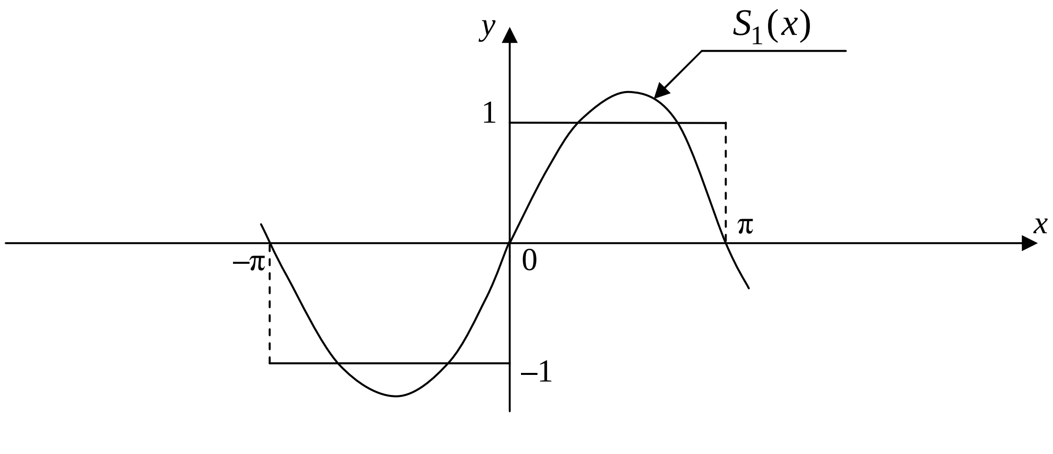

Рис. 2

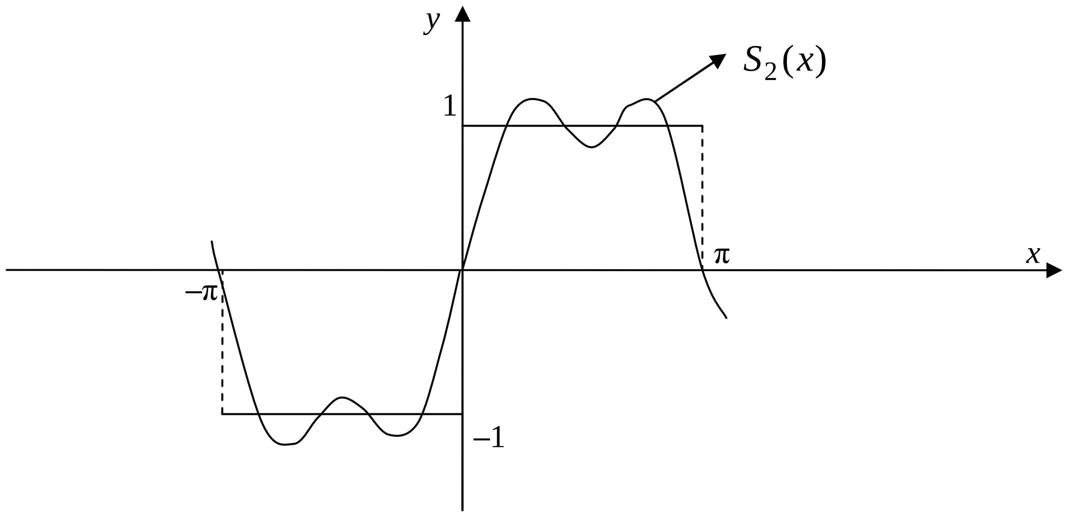

Рис. 3

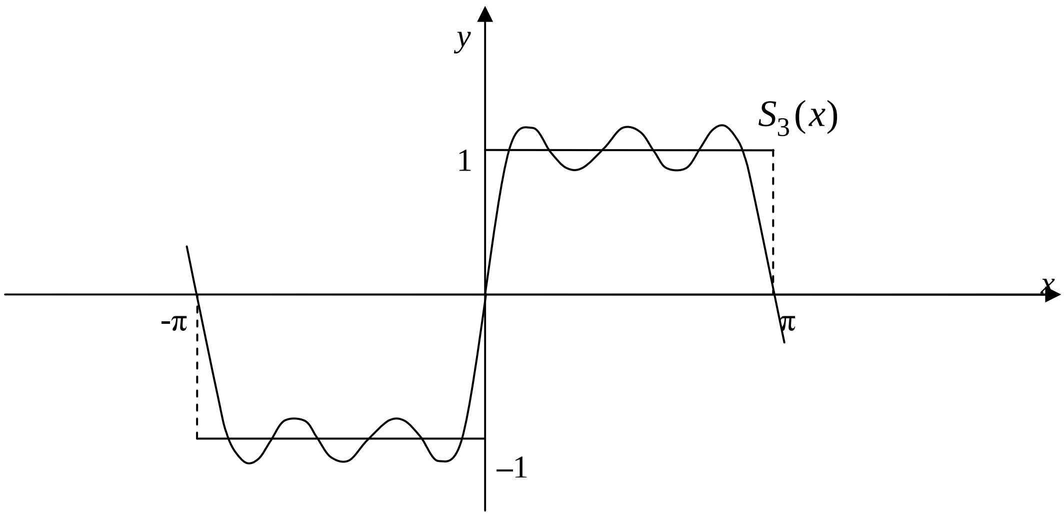

Рис. 4

На приведенных рис. 2 – 4 изображены графики частичных сумм $S_1(x)$, $S_2(x)$ и $S_3(x)$, которые являются тригонометрическими многочленами, отсюда видно, как частичные суммы $S_n(x)$ ряда Фурье все точнее представляют функцию $f(x)$ при $n \to \infty$.

Пример 2. Найти ряд Фурье для функции $f(x) = |x|$, $x \in [-\pi; \pi]$.

Решение. Так как функция $f(x) = |x|$ – четная, то все $b_n = 0$, а $a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x dx = \pi$; $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \cos nx dx$.

Интегрируя один раз по частям, после тождественных преобразований получим, что $a_n = \begin{cases} -\dfrac{4}{\pi n^2}, \text{ если } n = 2k, \\ 0, \text{ если } n = 2k+1. \end{cases}$

Следовательно, имеем

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \ldots + \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} + \ldots\right)$$

Полагая в последнем равенстве $x = 0$, получим $\dfrac{\pi^2}{8} = 1 + \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{5^2} + \dfrac{1}{7^2} + \ldots$

Полученный ряд можно использовать для вычисления суммы ряда

$$S = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

$$S = \left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \ldots\right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \ldots\right) =$$

$$= \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots\right) = \frac{\pi^2}{8} + \frac{S}{4}$$

Откуда $S = \dfrac{\pi^2}{6}$, т.е. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

9.4. Ряд Фурье для функции, заданной на отрезке $[-l,\ l]$

Полагая $t = \dfrac{\pi x}{l}$, получим $x = \dfrac{l \cdot t}{\pi}$; $dx = \dfrac{l}{\pi}dt$. Тогда, если $x \in [-l; l]$, то $t \in [-\pi; \pi]$, а, следовательно, $f(x) = f\left(\dfrac{lt}{\pi}\right) = \varphi(t)$, для которой в точках непрерывности $\varphi(t) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nt + b_n \sin t)$;

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \cos nt dt;$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \sin nt dt \qquad n = 0,\ 1,\ 2\ \ldots$$

В точках разрыва сумма ряда Фурье вычисляется по формуле (7). Возвращаясь к переменной x, получаем

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}, \tag{16}$$

где

$$\begin{aligned} a_n&=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx\\ b_n&=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx,\ \ n=0,\ 1,\ 2\ \ldots \end{aligned} \tag{17}$$

Ряд (16), коэффициенты a_n и b_n которого вычисляются по формуле (17), **называется рядом Фурье** функции $f(x)$, заданной на отрезке $[-l;l]$. Условия сходимости ряда Фурье к функции $f(x)$ выражаются теоремой 3. Равенство (16) выполняется в точках непрерывности $f(x)$. В точках разрыва сумма ряда Фурье определяется формулой (7).

9.5. О разложении в ряд Фурье непериодических функций

Если функция $f(x)$ не является периодической, то для того чтобы представить ее рядом Фурье, строят некоторую вспомогательную периодическую функцию $F(x)$, которая в области определения функции (например, на отрезке $[-l;l]$) совпадает с функцией $f(x)$. В этом случае говорят, что функцию $f(x)$ периодически продолжают на всю числовую ось.

Рассмотрим возможные случаи:

1. Если функция $f(x)$ задана на отрезке $[-l;l]$, то строят вспомогательную периодическую функцию $F(x)$ с периодом $T=2l$, которая на $[-l;l]$ совпадает с $f(x)$, а на остальной части числовой оси является периодическим продолжением.

2. Если функция $f(x)$ задана на произвольном отрезке $[a;a+2l]$ длиной $2l$, то строят вспомогательную периодическую функцию $F(x)$ с периодом $T=2l$, которая на отрезке $[a;a+2l]$ совпадает с функцией $f(x)$, а на остальной части числовой оси является ее периодическим продолжением. В этом случае тригонометрический ряд имеет вид, определяемый формулой (16), но его коэффициенты находятся по формулам

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{a}^{a+2l}f(x)dx,$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int\limits_a^{a+2l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx, \quad n \in N,$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int\limits_a^{a+2l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx, \quad n \in N.$$

Для определения коэффициентов Фурье было использовано следующее свойство интегрирования периодической функции. Значение интеграла от периодической функции с периодом $T = 2l$ по произвольному отрезку длиной $2l$ постоянно, поэтому, если кусочно-дифференцируемая функция $f(x)$ задана на отрезке $[0;l]$, то ее можно разложить в ряд Фурье только по косинусам или только по синусам, или и по косинусам, и по синусам.

Для разложения функции в ряд по косинусам ее продолжают на отрезок $[-l;0]$ четным образом, т.е. строят вспомогательную функцию

$$F(x) = \begin{cases} f(-x), & x \in [-l;0] \\ f(x), & x \in [0;l], \end{cases}$$

которую затем периодически продолжают на всю числовую ось. В этом случае ряд Фурье для $f(x)$ на отрезке $[0;l]$ содержит только косинусы

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l},$$

где $a_0 = \frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x)dx, \; a_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx, \; n \in N.$

Для разложения функции $f(x)$, заданной на отрезке $[0;l]$, в ряд по синусам ее продолжают на отрезок $[-l;0]$ нечетным образом, т.е. строят вспомогательную функцию

$$F(x) = \begin{cases} -f(x), & x \in [-l;0] \\ f(x), & x \in [0;l], \end{cases}$$

которую затем периодически продолжают на всю числовую ось. В этом случае ряд Фурье для $f(x)$ на отрезке $[0;l]$ содержит только синусы

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l},$$

где $\quad b_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx$.

Пример 3. Функцию $f(x) = |\sin x| \quad (0 \le x \le \pi)$ разложить по косинусам в ряд Фурье.

Решение. График функции с четным продолжением (в условии задачи разложение по косинусам) на $[-\pi;0]$ и последующим продолжением на всю числовую ось $0x$ имеет вид, как показано на рис. 5.

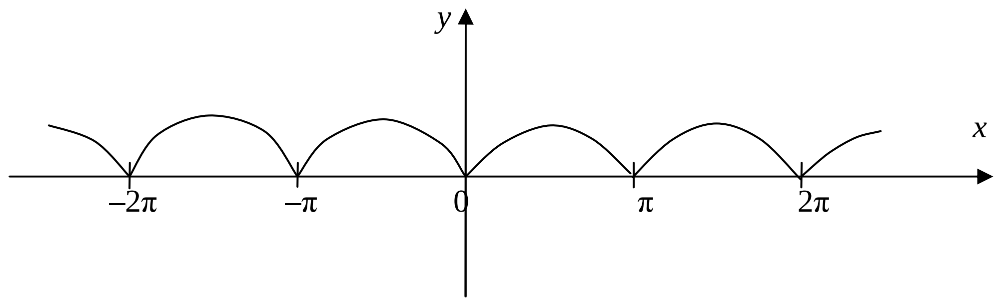

Рис. 5

Условия разложения в ряд Фурье для функции выполнены, и, т.к. функция четная, то

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi \sin x dx = \frac{4}{\pi},$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi \sin x \cos nx dx = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1+(-1)^n}{n^2-1} \quad (n \ne 1).$$

Если $n = 1$, то $a_1 = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi \sin x \cos x dx = \frac{2}{\pi}\frac{\sin^2 x}{2}\Big|_0^\pi = 0$.

Таким образом,

$$a_n = \begin{cases} 0, \ n = 2k+1, \\ -\frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{n^2-1}, \ n = 2k. \end{cases}$$

Тогда искомый ряд имеет вид

$$|\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos 2x}{3} + \frac{\cos 4x}{3\cdot 5} + \frac{\cos 6x}{5\cdot 7} + \ldots\right)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Арнольд, В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения / В.И. Арнольд. – М.: Наука, 1971.
2. Воробьев, Н.Н. Теория рядов / Н.Н. Воробьев. – М.: Наука, 1986.
3. Герасимович, А.И. Математический анализ. В 2 ч. Ч. 2 / А.И. Герасимович, Н.П. Кеда, М.Б. Суган. – Минск: Выш. шк., 1990.
4. Еругин, Н.П. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений / Н.П. Еругин. – Киев: Вищ. шк., 1974.
5. Ляшко, И.И. Дифференциальные уравнения / И.И. Ляшко. – Киев: Вищ. шк., 1981.
6. Матвеев, Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений / Н.М. Матвеев. – Минск: Выш. шк., 1970.
7. Пономарев, К.К. Составление дифференциальных уравнений / К.К. Пономарев. – Минск: Выш. шк., 1973.
8. Самойленко, А.М. Дифференциальные уравнения: примеры и задачи / А.М. Самойленко, С.А. Кривошея, Н.А. Перестюк. – М. : Высш. шк., 1989.
9. Филиппов, А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям / А.Ф. Филиппов. – М.: Наука, 1979.
10. Фихтенгольц, Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3 т. Т. 3 / Г.М. Фихтенгольц. – М.: Изд-во физ.-мат. лит., 1960.

Учебное издание

Цывис Николай Васильевич
Кулага Владимир Михайлович

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

РЯДЫ

Учебно-методический комплекс
для студентов технических специальностей

Редактор *О. П. Михайлова*
Дизайн обложки *И. С. Васильевой*

Подписано в печать 16.07.08. Формат 60×84 1/16. Гарнитура Таймс. Бумага офсетная.
Ризография. Усл. печ. л. 12,31. Уч.-изд. л. 11,84. Тираж 140 экз. Заказ № 1165.

Издатель и полиграфическое исполнение:
учреждение образования «Полоцкий государственный университет»

ЛИ 02330/0133020 от 30.04.04 ЛП № 02330/0133128 от 27.05.04

211440 г. Новополоцк, ул. Блохина, 29