Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Полоцкий государственный университет»

Ф. Ф. ЯСКО

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
РЯДЫ

Учебно-методический комплекс
для студентов технических специальностей

Новополоцк
ПГУ
2008

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73
Я81

Рекомендовано к изданию научно-методической комиссией
радиотехнического факультета в качестве
учебно-методического комплекса (протокол № 3 от 25.03.08)

РЕЦЕНЗЕНТЫ:

канд. физ.-мат. наук, доц., декан математического факультета
УО «Витебский государственный педагогический
университет им. П. М. Машерова» Н. Е. БОЛЬШАКОВ;
д-р физ.-мат. наук, проф. каф. высшей математики
УО «Полоцкий государственный университет» Э. М. ПАЛЬЧИК;
канд. пед. наук, доц. каф. высшей математики
УО «Полоцкий государственный университет» В. С. ВАКУЛЬЧИК

Яско, Ф.Ф.

Я81 Дифференциальные уравнения. Ряды : учеб.-метод. комплекс для студентов техн. спец. / Ф. Ф. Яско. – Новополоцк : ПГУ, 2008. – 324 с.
ISBN 978-985-418-762-4.

Изложены теоретические основы двух разделов курса высшей математики для студентов технических специальностей: «Дифференциальные уравнения» и «Ряды»; спроектированы основные этапы практических занятий; предложено соответствующее дидактическое обеспечение: графические схемы, информационные таблицы, обучающие задачи, трехуровневые тесты, вопросы к экзамену, глоссарий. Приведены примеры решения прикладных задач.

Предназначен для студентов и преподавателей технических специальностей высших учебных заведений.

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73

ISBN 978-985-418-762-4

© Яско Ф. Ф., 2008
© УО «Полоцкий государственный университет», 2008

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Данный учебно-методический комплекс (УМК) является частью серии учебно-методических пособий, разрабатываемых кафедрой высшей математики УО «ПГУ» по курсу «Высшая математика» для студентов технических специальностей под руководством кандидата педагогических наук, доцента В.С. Вакульчик. Теоретические и дидактические принципы разработки таких пособий изложены в нулевом учебном модуле [5].

В предлагаемом УМК, графическая схема которого представлена на рис. 1, автором предпринята попытка спроектировать процесс обучения математике как систему целей, содержания, форм, методов и средств обучения, обеспечивающих в своем взаимодействии организацию познавательной деятельности с учетом дифференциации студенческой аудитории. Дидактическую основу УМК составляет дифференцированный и деятельностный подход к обучению математике, а также дидактические принципы научности, системности, доступности. В применении к математике мы руководствуемся сформулированным А.А. Столяром исходным положением теории обучения математике: «Обучение математике есть дидактически целесообразное сочетание обучения математическим знаниям и математической деятельности». Под дифференцированным подходом к обучению математике понимается такая его организация, при которой каждый студент, овладевая некоторым минимумом математических знаний и их практических приложений, получает право и возможность расширять и углублять свои математические знания на более высоких уровнях усвоения. Отдельное внимание необходимо обратить на наличие в УМК таких дидактических средств как графические схемы, информационные таблицы, глоссарий, обобщенные планы, алгоритмические указания, алгоритмическое выделение этапов познавательной деятельности, которые позволяют организовать мыслительную деятельность по переработке математической информации, помогают обучающемуся в логической организации, структурировании, систематизации математических знаний. Поскольку УМК предназначен для студентов нематематических специальностей, то он имеет прикладную направленность, содержит практические задачи, решение которых требует моделирования с помощью изучаемого математического аппарата. УМК содержит в себе возможности самоконтроля, а также уровневого контроля знаний. Студенты, работающие на I уровне сложности, потенциально могут претендовать на получение на экзамене оценки «4» – «5»; работающие на II уровне – оценки «6» – «8»; работающие на III уровне – оценки «9» – «10». Информационное поле УМК позволяет студенту выбирать свою траекторию обучения в каждом модуле. Трехуровневая тестовая среда УМК создает условия для перехода студентов от заданий, требующих воспроизводящей мыслительной деятельности к заданиям, требующим познавательной деятельности преобразующе-воспроизводящего или творческого характера.

Считаем необходимым еще раз привести методические рекомендации работы в информационном поле модуля, изложенные в нулевом учебном модуле [5].

В самом общем виде процесс познания новой информации состоит из следующих этапов: первичное восприятие → изучение основных ее элементов → углубление, обобщение, систематизация полученной информации → включение познанного нового знания в систему имеющихся представлений, знаний, мировоззрения в целом. Исходя из этих психолого-методологических соображений, предлагается следующая последовательность этапов работы в информационном поле модуля.

0. С помощью методической карты изучить содержание разделов лекционного материала.

1. Вход в модуль целесообразно осуществить с помощью графической схемы и информационной таблицы. Граф-схема и информационная таблица определенного раздела математики представляют собой максимально сжатый, компактно составленный справочный материал. Справочный материал информационной таблицы раскрывает основные блоки графической схемы рассматриваемого раздела.

Предложенные методические средства помогают при изучении новой информации увязать различные понятия, теоремы, формулы в единое целое; позволяют проследить логику построения теорий; служат эффективному прохождению всех этапов восприятия, усвоения, обобщения, систематизации, и в конечном итоге, логической организации новой информации. Структурированная наглядность содержания представленной информации облегчает ее усвоение за счет целостности представления и восприятия изучаемого объекта, направляет избирательность внимания и памяти. Все это способствует более глубокому уровню усвоения предмета, помогает находить главное и производное в изучаемом материале, анализировать его, учит рационально работать с новой информацией любого содержания.

2. Изучение теоретической части модуля следует начинать с беглого чтения всей информации. На втором этапе этой познавательной дея-

тельности рекомендуется проработать каждый раздел, отдельные фрагменты при этом разумно параллельно проделать своей рукой. На третьем этапе, просмотрев еще раз графическую схему, отработав основные положения теоретической части модуля с помощью информационной таблицы, целесообразно прочитать еще раз весь теоретический материал с целью его целостного восприятия, большей систематизации, логической организации и обобщения.

3. Практическая часть модуля представляет собой методически спроектированные практические занятия. Отметим, что они содержат как методические рекомендации преподавателям, так и методические рекомендации студентам. В этой связи, обратим внимание на наличие обучающих задач, решение вариантов аудиторных и внеаудиторных контрольных работ. Все это дополняет задачи и примеры, приведенные в теоретической части модуля, и создает предпосылки для овладения соответствующим математическим аппаратом, по крайней мере, на уровне воспроизводящей познавательной деятельности, позволяет освоить обучающемуся практическую часть информации модуля либо самостоятельно, либо под руководством преподавателя.

4. На выходе из модуля следует еще раз провести обобщение, систематизацию полученных знаний путем повторного изучения графической схемы, информационной таблицы, глоссария и выводов. Кроме того, практическая часть содержит в себе возможности для проведения контроля и самоконтроля результатов обучения: тесты трех уровней сложности с ответами. Поэтому на выходе из модуля рекомендуется, как минимум, выполнить тест первого уровня сложности. Тесты первого уровня сложности рекомендуется выполнить и непосредственно при подготовке к экзамену, зачету либо коллоквиуму.

Желаем успехов!

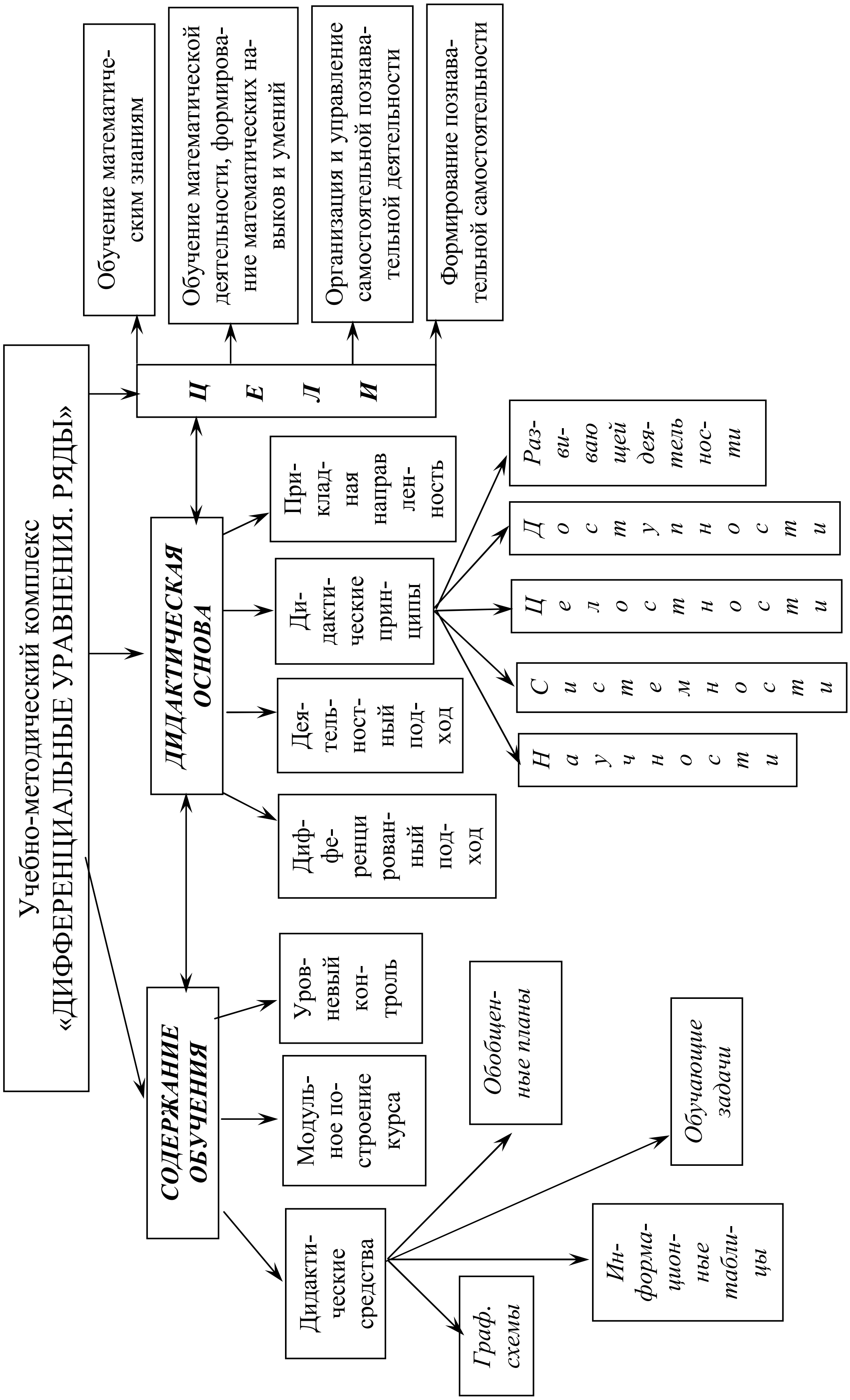

Учебно-методический комплекс «ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ. РЯДЫ»
ЦЕЛИ
Обучение математическим знаниям
Обучение математической деятельности, формирование математических навыков и умений
Организация и управление самостоятельной познавательной деятельности
Формирование познавательной самостоятельности
ДИДАКТИЧЕСКАЯ ОСНОВА
Прикладная направленность
Дидактические принципы
Деятельностный подход
Дифференцированный подход
Развивающей деятельности
Доступности
Целостности
Системности
Научности
СОДЕРЖАНИЕ ОБУЧЕНИЯ
Уровневый контроль
Модульное построение курса
Дидактические средства
Обобщенные планы
Обучающие задачи
Информационные таблицы
Граф. схемы

Рис. 1

УЧЕБНЫЙ МОДУЛЬ 9
«ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ»

Введение

В данном учебном модуле рассматриваются дифференциальные уравнения первого, второго и высшего порядка, методы их решения, а также системы дифференциальных уравнений и методы решения систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. К каждому виду дифференциальных уравнений приводятся прикладные задачи (как правило, одна задача геометрическая, вторая – техническая). Формулируются и решаются задача Коши и краевая задача. Приведены тесты трех уровней сложности с ответами.

ДИДАКТИЧЕСКИЕ ЦЕЛИ ОБУЧЕНИЯ

Студент должен знать	***Студент должен уметь***
– основные правила решения прикладных задач с получением дифференциальных уравнений; – основные определения, связанные с понятием дифференциальных уравнений 1-го порядка; – формулировку задачи Коши; – дифференциальные уравнения 1-го порядка, допускающие интегрирование; – основные понятия, связанные с дифференциальными уравнениями высших порядков, задачу Коши; – линейные однородные дифференциальные уравнения высших порядков, свойства их решений, определитель Вронского, условия линейной независимости решений, структуру общего решения; – структуру общего решения линейных неоднородных дифференциальных уравнений высших порядков, метод вариации произвольных постоянных нахождения частного решения; – системы дифференциальных уравнений, формулировку задачи Коши; – методы решения систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами	– строить модели прикладных задач с применением дифференциальных уравнений; – решать дифференциальные уравнения с разделенными и разделяющимися переменными и приводящиеся к ним; – решать однородные дифференциальные уравнения 1-го порядка и приводящиеся к ним; – решать линейные дифференциальные уравнения 1-го порядка и уравнения Бернулли; – решать дифференциальные уравнения в полных дифференциалах; – решать дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка; – решать линейные однородные дифференциальные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами; – находить частное решение линейного неоднородного уравнения методом вариации произвольных постоянных; – решать линейные неоднородные дифференциальные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами со специальной правой частью; – решать системы дифференциальных уравнений

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА МОДУЛЯ

Название вопросов, которые изучаются на лекции	Номер практического занятия	Методические пособия	Формы контроля знаний
1. Физические задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям. Основные понятия теории дифференциальных уравнений. Задача Коши. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными	I	6, 5, 7, 8	ПЛ, ВДЗ
2. Дифференциальные уравнения 1-го порядка: однородные и приводящиеся к однородным	II	3, 8, 9, 6	ПДЗ, ВДЗ
3. Линейные уравнения, уравнения Бернулли, уравнения в полных дифференциалах. Модели прикладных задач с применением дифференциальных уравнений	III, IV	3, 8, 9, 6,10	ПЛ, ПДЗ, тест
4. Дифференциальные уравнения высших порядков. Задача Коши. Понятие общего и частного решений. Уравнения, допускающие понижение порядка	V	5, 8, 9	ПЛ, ВДЗ
5. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков. Линейные однородные дифференциальные уравнения, свойства их решений. Определитель Вронского. Условия линейной зависимости и независимости решений. Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами	VI	5, 6, 8, 9	ПДЗ, ВДЗ
6. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Метод Лагранжа вариации произвольных постоянных	VII, VIII	5, 6, 8, 9	ПЛ, ПДЗ, ВДЗ
7. Системы дифференциальных уравнений. Решение систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами	IX	5, 6, 8, 9, 10	тест

Перечень тем практических занятий приведен в практической части модуля.

ГРАФИЧЕСКАЯ СХЕМА МОДУЛЯ

ИНФОРМАЦИОННАЯ ТАБЛИЦА «ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ»

1. $y' = f(x)\cdot g(x)$ или $X_1(x)\cdot Y_1(y)dx + X_2(x)\cdot Y_2(y)dy = 0$ – ***уравнения с разделяющимися переменными***. Решаются путем разделения переменных и интегрированием. Уравнение вида $y' = f(ax+by+c)$ подстановкой $z = ax+by+c$ сводится к дифференциальному уравнению (ДУ) с разделяющимися переменными.

2. ДУ $y' = f(x,y)$ называется ***однородным***, если $f(x,y)$ – однородная функция нулевого порядка $\left(f(tx,ty) = f(x,y)\ \forall t \neq 0\right)$. Сводится к ДУ с разделяющимися переменными с помощью замены $\boxed{y = ux,\quad y' = u'x + u}$. Уравнение вида $y' = f\left(\dfrac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right)$ заменой $x = u+\alpha$, $y = v+\beta$ сводится либо к однородному ДУ (когда $\dfrac{a}{a_1} \neq \dfrac{b}{b_1}$), либо к уравнению с разделяющимися переменными (если $\dfrac{a}{a_1} = \dfrac{b}{b_1}$).

3. $y' + p(x)y = g(x)$ – ***линейное ДУ* I *порядка***;

$y' + p(x)y = g(x)y^{\alpha}$ $(\alpha \neq 0,\ \alpha \neq 1)$ – ***ДУ Бернулли***.

Общее решение может быть получено с помощью подстановки $\boxed{y = uv,\ y' = u'v + uv'}$.

4. ДУ $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ называется ***уравнением в полных дифференциалах***, если $\exists\ u(x,y)$, что $du(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$. Необходимое и достаточное условие $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$. Общий интеграл $u(x,y) = C$, $u(x,y)$ можно найти по одной из формул: $u(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy$, $\quad u(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x,y)dy$.

$M_0(x_0,y_0)$ – любая точка из области существования решения, чаще всего $M_0(0, 0)$.

5. ***Уравнения, допускающие понижение порядка***

а) $y^{(n)} = f(x)$. Решается n-кратным интегрированием.

б) $F(x,y',y'') = 0$ – уравнения, явно не содержащие искомой функции $y(x)$. Полагая $y' = p(x)$, $y'' = p'(x)$, получим ДУ I порядка $F(x,p,p') = 0$.

в) $F(y,y',y'') = 0$ – уравнение, не содержащее явно x: полагая $y' = p(y)$, $y'' = \dfrac{dp}{dy}\cdot\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dp}{dy}\cdot p$, получим ДУ I порядка $F\left(y, p, p\cdot\dfrac{dp}{dy}\right) = 0$.

6. ДУ $y'' + py' + gy = 0$ называется ***линейным однородным ДУ* II *порядка с постоянными коэффициентами.***

$\boxed{y = C_1 y_1 + C_2 y_2}$ – структура общего решения, где

$y_1,\ y_2$ – линейно независимые решения, которые находятся, исходя из корней характеристического уравнения $k^2 + pk + g = 0$: (1)

if $D > 0,\ k_1,\ k_2$ – корни (1), то $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$;

if $D = 0,\ k_1 = k_2$ - корни (1), то $y = e^{k_1 x}\left(C_1 + C_2 x\right)$;

if $D < 0,\ k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ $\left(i = \sqrt{-1}\right)$ - корни (1), то $y = e^{\alpha x}\left(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x\right)$.

7. ДУ $y'' + py' + gy = f(x)$ называется ***линейным неоднородным ДУ* II *порядка с постоянными коэффициентами,*** $\boxed{y = y_{одн} + y_ч}$ – структура общего решения, где $y_{одн}$ – общее решение соответствующего однородного ДУ; $y_ч$ – частное решение неоднородного ДУ.

If функция $f(x)$ имеет специальный вид:

а) $f(x) = e^{ax} \cdot P_n(x)$, где $P_n(x)$ – многочлен степени n, то

1) $y_ч = e^{ax} Q_n(x)$, if $a \ne k_1,\ a \ne k_2$;

2) $y_ч = x \cdot e^{ax} Q_n(x)$, if $a = k_1$ или $a = k_2$;

3) $y_ч = x^2 \cdot e^{ax} Q_n(x)$, if $a = k_1 = k_2$.

б) $f(x) = e^{ax}\left[P_n(x)\cos bx + Q_m(x)\sin bx\right]$, то

1) $y_ч = e^{ax}\left[S_N(x)\cos bx + T_N(x)\sin bx\right]$, if $a + bi \ne k_1,\ a - bi \ne k_2$,

2) $y_ч = xe^{ax}\left[S_N(x)\cos bx + T_N(x)\sin bx\right]$, if $a + bi = k_1,\ a - bi = k_2$

$$N = \max(n, m)$$

8. Если известно общее решение линейного однородного ДУ $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$, то частное решение можно найти ***методом вариации*** произвольных постоянных: $y_ч = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2$. $\begin{cases} C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0, \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' = f(x) \end{cases}$ – система для нахождения C_1', C_2', а затем путем интегрирования $C_1(x)$ и $C_2(x)$.

9. ***Системы ДУ***. Могут решаться методом исключения неизвестных, т.е. приведением к ДУ высших порядков.

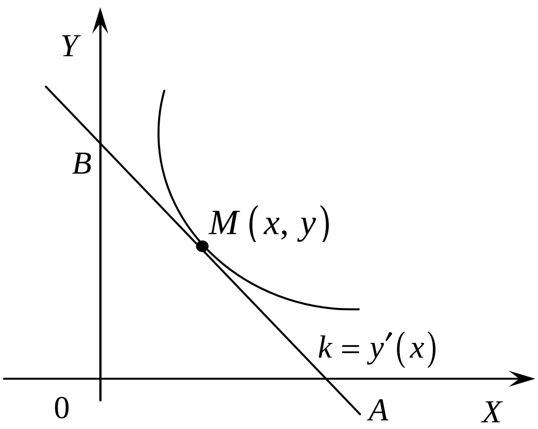
Линейная однородная система с постоянными коэффициентами $\begin{cases} y_1' = a_{11} y_1 + a_{12} y_2, \\ y_2' = a_{21} y_1 + a_{22} y_2 \end{cases}$ может также решаться составлением характеристического уравнения $\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0$, нахождением его корней и соответствующих собственных векторов.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА

9.1. Физические задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям

К дифференциальным уравнениям приводят многие задачи механики, физики, астрономии и других естественных наук, а также многие проблемы техники. Поясним на примерах, как возникают в исследованиях дифференциальные уравнения.

З а д а ч а 9.1.1. Найти уравнение кривой линии, у которой отрезок касательной, заключенный между осями координат, делится пополам в точке касания.



Решение. Пусть $M(x,\ y)$ точка касания. Так как $y'(x)$ равен тангенсу угла наклона к оси OX касательной, проведенной в точке $(x, y(x))$ кривой, то уравнение касательной будет следующим

$$Y - y = y'(X - x).$$

Положим $X = 0$, тогда $OB = Y = y - xy'$ и точка B имеет координаты $(0, y - xy')$. По условию точка касания делит отрезок AB пополам, поэтому $x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2}$, $y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2}$. Последнее равенство принимает вид

$$y = \frac{0 + y - xy'}{2} \Rightarrow 2y = y - xy' \Rightarrow y' = -\frac{y}{x},\ y = y(x). \qquad (9.1.1)$$

Соотношение (9.1.1) является примером дифференциального уравнения. Оно содержит наряду с неизвестной функцией y и ее производную y'.

Функцию $y = y(x) \neq 0$ из уравнения (9.1.1) легко найти:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x} \Leftrightarrow \ln|y| = -\ln|x| + \ln C,$$

где C – произвольная константа (постоянная интегрирования), удобно ее взять в виде $\ln C$. Тогда

$$y = \frac{C}{x}. \qquad (9.1.2)$$

Заметим, что уравнению (9.1.1) удовлетворяет целое семейство кривых (9.1.2), зависящих от параметра C. Чтобы выделить какую-то одну кривую из семейства (9.1.2), надо указать константу C. Для этого достаточно задать на плоскости XOY точку (x_0, y_0), через которую эта кривая проходит. Тогда постоянную C, соответствующую этой кривой, найдем, положив в равенстве (9.1.2) $y = y_0$ при $x = x_0$. Пусть $y = 2$ при $x = 1$, тогда

$$2 = \frac{C}{1} \quad \Rightarrow \quad C = 2.$$

Таким образом, искомая кривая семейства (9.1.2), проходящая через точку (1, 2), определяется равенством

$$y = \frac{2}{x}. \tag{9.1.3}$$

З а д а ч а 9.1.2. Тело брошено вертикально вверх с начальной скоростью v_0. Определить закон движения, предполагая, что тело движется только под влиянием силы тяжести.

Решение. Под влиянием силы тяжести тело движется с постоянным ускорением g. Ввиду того, что ускорение выражается производной второго порядка от пути по времени, из $F = ma \Rightarrow m\frac{d^2S}{dt^2} = -mg \Rightarrow$

$$\frac{d^2S}{dt^2} = -g. \tag{9.1.4}$$

Получили дифференциальное уравнение, содержащее производную 2-го порядка.

Интегрируя дважды, получим

$$\frac{dS}{dt} = -gt + C_1, \tag{9.1.5}$$

$$S = -g\frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2. \tag{9.1.6}$$

Постоянные C_1 и C_2 определим из начальных условий.

Так как отсчет пути ведется от начального момента, то при $t = 0$ $S = 0$ и, следовательно, $C_2 = 0$.

Так как при $t = 0$ начальная скорость $v_0 = \frac{dS}{dt}$, то из уравнения (9.1.5) получаем $C_1 = v_0$.

Итак, зависимость пройденного телом пути S от времени t

$$S = v_0 t - \frac{gt^2}{2}. \tag{9.1.7}$$

Задача 9.1.3. Скорость обесценивания оборудования вследствие его износа пропорциональна в каждый момент времени его фактической стоимости. Начальная стоимость равна A_0. Найти стоимость оборудования по истечении T лет.

Решение. Пусть $A = A(t)$ – стоимость оборудования в любой момент времени t. Тогда $\frac{dA}{dt}$ - скорость обесценивания оборудования вследствие его износа. Из условия задачи следует, что

$$\frac{dA}{dt} = -kA, \tag{9.1.8}$$

где k – коэффициент пропорциональности, взятый со знаком минус, так как стоимость убывает.

Из (9.1.8) следует $\frac{dA}{A} = -kdt \quad \Rightarrow \quad \ln|A| = -kt + \ln C \quad \Rightarrow$ $\ln|A| = \ln e^{-kt} + \ln C$. Потенцируя, получаем

$$A = C \cdot e^{-kt}. \tag{9.1.9}$$

Начальное условие: при $t = 0$ $A = A_0$, поэтому $A_0 = Ce^{-k\cdot 0}$, $C = A_0$. Подставляя $C = A_0$ в (9.1.9), получаем

$$A = A_0 e^{-kt}. \tag{9.1.10}$$

Чтобы найти стоимость оборудования по истечении T лет, подставляем в (9.1.10) $t = T$:

$$A = A_0 e^{-kT} = \frac{A_0}{e^{kT}}.$$

Как показано в рассмотренных примерах, если мы сумеем проинтегрировать полученное дифференциальное уравнение, то тем самым дадим ответы на вопросы задачи, которая привела нас к нему.

Поэтому основной задачей теории интегрирования дифференциальных уравнений является нахождение всех решений данного дифференциального уравнения и изучение свойств этих решений.

Заметим, что задачу интегрирования дифференциального уравнения можно понимать по-разному. В самой узкой постановке задачи ставится целью выражение искомых функций через элементарные функции. Эта задача, вообще говоря, не разрешима даже для самого простого уравнения $y' = f(x)$, ибо, как известно, не всегда первообразная для элементарной функции представляет собой тоже элементарную функцию. В качестве примера можно взять уравнение

$$y' = \frac{\sin x}{x}. \tag{9.1.11}$$

Несколько шире постановка задачи, при которой уравнение считается разрешенным, если оно приведено к квадратурам (т.е., к операциям взятия неопределенных интегралов). В этом смысле уравнение (9.1.11), очевидно, разрешимо. Все решения этого уравнения содержатся в формуле

$$y = \int \frac{\sin x}{x} dx + C.$$

Однако следует отметить, что уравнения, интегрируемые в квадратурах, составляют лишь незначительную часть всех дифференциальных уравнений. Так, например, очень важное во многих приложениях уравнение Бесселя

$$x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - n^2\right) y = 0$$

в общем случае не интегрируется в квадратурах.

Задача общей теории дифференциальных уравнений состоит в изучении свойств функций, определяемых дифференциальными уравнениями, непосредственно по виду любого заданного дифференциального уравнения, независимо от интегрируемости последнего в элементарных функциях или в квадратурах.

9.2. Основные понятия теории дифференциальных уравнений

Определение 9.2.1. *Дифференциальным уравнением* называется уравнение, связывающее независимую переменную x, неизвестную функцию $y = y(x)$ и ее производные $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ (наличие хотя бы одной производной обязательно).

Символически дифференциальное уравнение можно записать так

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0. \tag{9.2.1}$$

Если уравнение (9.2.1) можно записать в виде

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right), \tag{9.2.2}$$

то будем говорить, что дифференциальное уравнение разрешено относительно старшей производной. Оно называется *дифференциальным уравнением в нормальной форме*.

Дифференциальное уравнение, в котором неизвестная функция y зависит от одной переменной x, называется *обыкновенным*. Если же дифференциальное уравнение содержит неизвестную функцию нескольких переменных и ее частные производные, то оно называется *уравнением в частных производных*. В данном модуле мы будем изучать только обыкновенные дифференциальные уравнения и слово «обыкновенные» будем в дальнейшем опускать.

Определение 9.2.2. *Порядком* дифференциального уравнения называется наивысший порядок производной искомой функции, входящей в уравнение.

Так, соотношения (9.1.1) и (9.1.8) – дифференциальные уравнения первого порядка, уравнение (9.1.4) – второго порядка, а уравнение $y^{IY} + 6y^{II} + y^{I^3} - 2y = 0$ является дифференциальным уравнением четвертого порядка.

Определение 9.2.3. *Решением* (*или интегралом*) дифференциального уравнения называется всякая функция $y = f(x)$, которая, будучи подставлена в уравнение, превращает его в тождество.

Пример 9.2.1. Пусть дано уравнение $\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = 0$.

Функция $y = \sin x$, $y = 2\cos x$, $y = 3\sin x - \cos x$ и вообще функции вида $y = C_1 \sin x$, $y = C_2 \cos x$ или $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$ являются решениями данного уравнения при любом выборе постоянных C_1 и C_2; в этом легко убедиться, подставив указанные функции и их вторые производные в уравнение.

Всякому решению дифференциального уравнения (9.2.1) или (9.2.2) на плоскости отвечает некоторая кривая

$$y = y(x), \quad x \in (a, b),$$

которая называется *интегральной кривой* (*линией*) дифференциального уравнения.

Процесс нахождения решения дифференциального уравнения называется *интегрированием* этого уравнения.

Дифференциальное уравнение, как правило, имеет бесчисленное множество решений (задачи 9.1.1 – 9.1.3 и пример 9.2.1 подтверждают это). Чтобы выделить какое-то одно решение дифференциального уравнения, необходимо задание некоторых дополнительных условий. Таким условием для уравнения (9.1.1) является задание точки $(x_0,\ y_0)$ плоскости XOY, через которую должна проходить интегральная кривая этого уравнения. В задаче 9.1.2 для дифференциального уравнения (9.1.4) этими условиями явились начальный путь $S = 0$ при $t = 0$ и начальная скорость $v = v_0$ при $t = 0$. В задаче 9.1.3 – начальная стоимость оборудования $A = A_0$ при $t = 0$.

9.3. Дифференциальные уравнения первого порядка. Задача Коши

При $n = 1$ соотношение (9.2.1) определяет уравнение

$$F(x, y, y') = 0, \quad y = y(x), \tag{9.3.1}$$

называемое *дифференциальным уравнением первого порядка*.

Уравнение

$$y' = f(x, y), \tag{9.3.2}$$

где $f(x, y)$ – известная функция двух переменных x, y, называется дифференциальным уравнением первого порядка, разрешенным относительно производной y', или дифференциальным уравнением в нормальной форме.

Соотношение

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0, \tag{9.3.3}$$

где $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ – заданные функции, также называют дифференциальным уравнением первого порядка, записанным в дифференциальной форме.

Заметим, что уравнение (9.3.2) с учетом равенства $y' = \dfrac{dy}{dx}$ может быть записано в виде

$$f(x, y)dx - 1 \cdot dy = 0. \tag{9.3.4}$$

С другой стороны, если $Q(x, y) \neq 0$, то из соотношения (9.3.3) приходим к уравнению

$$y' = -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)} \text{ вида (9.3.2), где } f = -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}.$$

Уравнение $y' = f(x, y)$ имеет бесконечное число решений. Чтобы из этого множества выделить одно, так называемое, частное решение, надо задать некоторые дополнительные условия. Таким условием, определяющим частное решение, является начальное условие или условие Коши

$$y(x_0) = y_0 \quad (\text{или } y\big|_{x=x_0} = y_0). \tag{9.3.5}$$

Задача отыскания частного решения уравнения (9.3.2), удовлетворяющего начальному условию (9.3.5), называется *задачей Коши* для этого уравнения.

С геометрической точки зрения задача Коши для дифференциального уравнения (9.3.2) означает следующее: требуется из множества интегральных кривых выделить ту, которая проходит через заданную точку $M_0(x_0, y_0)$ (рис. 9.3.1).

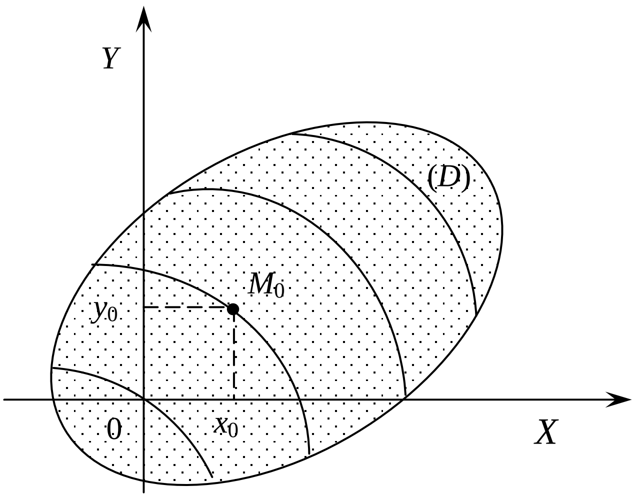


Рис. 9.3.1

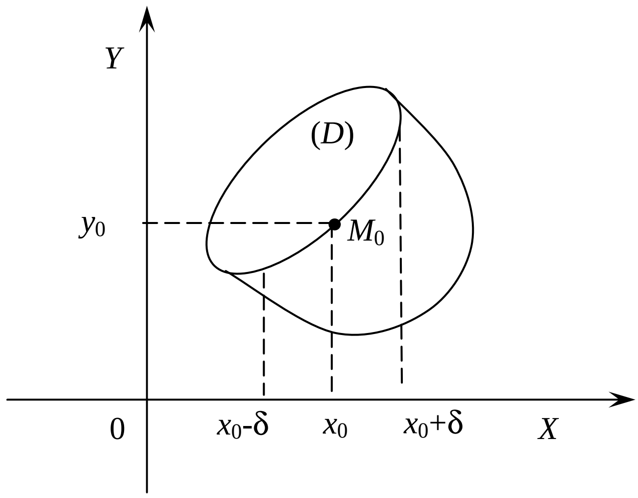


Рис. 9.3.2

Возникает вопрос, при каких условиях существует решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальному условию Коши, и если существует, то является ли оно единственным. Ответ на этот вопрос для уравнения (9.3.2) дает следующая теорема.

ТЕОРЕМА 9.3.1. (о существовании и единственности решения задачи Коши). Пусть функция $f(x, y)$ определена, непрерывна и имеет непрерывную частную производную $\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ в области D. Тогда найдется интервал $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$, на котором существует единственное решение $y = \varphi(x)$ дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$, удовлетворяющее условию $y(x_0) = y_0$ (рис. 9.3.2).

Доказательство теоремы опускаем. Сделаем лишь несколько замечаний. Единственность задачи Коши понимается в таком смысле: если условия теоремы выполнены и имеются два решения $y = \varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x)$ уравнения $y' = f(x, y)$ такие, что $\varphi_1(x_0) = \varphi_2(x_0)$, то существует интервал $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$, в каждой точке которого $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$. Теорема имеет локальный характер: она гарантирует существование решения и единственность его лишь на некотором интервале $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$.

Если условия теоремы не выполнены, то через точку $(x_0, y_0) \in D$ может проходить не одна, а несколько интегральных линий дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$.

Часто в теории дифференциальных уравнений вводятся понятия общего и частного решений.

Общим решением дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ в некоторой области D существования и единственности решения задачи Коши называется семейство функций вида $y = \varphi(x, C)$, зависящее от параметра C и удовлетворяющее условиям:

1) функции $y = \varphi(x, C)$ являются решением уравнения $y' = f(x, y)$ при любом допустимом значении параметра C;

2) при любом начальном условии $y(x_0) = y_0$ $(x_0, y_0 \in D)$ можно указать параметр C_0 такой, что функция $y = \varphi(x, C_0)$ удовлетворяет условию $\varphi(x_0, C_0) = y_0$.

Частным решением дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ называется решение, получаемое из общего решения, при конкретном значении параметра C. Частное решение определяется задачей Коши для этого уравнения.

Часто общее решение дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ получается в виде уравнения, не разрешенного относительно x и y,

$$\Phi(x, y, C) = 0. \tag{9.3.6}$$

Оно называется *общим интегралом* дифференциального уравнения.

При фиксированном значении $C = C_0$ общий интеграл (9.3.6) превращается в частный интеграл $\Phi(x, y, C_0) = 0$.

Решение дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$, в каждой точке которого из области существования решения нарушается свойство единственности, т.е. через каждую точку (x_0, y_0) проходит еще и другая интегральная линия этого уравнения, называется *особым*.

9.4. Дифференциальные уравнения с разделенными и разделяющимися переменными

Переходим к изучению дифференциальных уравнений первого порядка, для которых известны способы нахождения их решений или интегралов. Одним из таких являются дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными.

Дифференциальное уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x) f_2(y), \tag{9.4.1}$$

где правая часть есть произведение функции $f_1(x)$, зависящей только от x, на функцию $f_2(y)$, зависящую только от y, называют *уравнением с разделяющимися переменными*. Пусть $f_2(y) \neq 0$. Тогда по правилу пропорции, поменяв местами $f_2(y)$ и dx, получим

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx. \tag{9.4.2}$$

Интегрируя левую часть по y, а правую по x, получим общий интеграл данного уравнения $\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)dx + C$.

В дальнейшем дифференциальное уравнение вида

$$M(x)dx + N(y)dy = 0 \tag{9.4.3}$$

будем называть дифференциальным уравнением с разделенными переменными (при dx имеется функция, зависящая только от x, а при dy – функция, зависящая только от y).

Его общий интеграл: $\int M(x)dx + \int N(y)dy = C$.

Пример 9.4.1. Решить дифференциальное уравнение $xdx + ydy = 0$.

Решение. Это дифференциальное уравнение с разделенными переменными, поэтому $\int x\,dx + \int y\,dy = C_1 \Rightarrow \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C_1$. Пусть $C_1 = \frac{C^2}{2}$, тогда

$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}=\frac{C^2}{2} \Rightarrow x^2+y^2=C^2$. Получили общий интеграл, геометрически представляющий собой семейство окружностей радиуса C с центром в начале координат.

Уравнение вида

$$M_1(x)N_1(y)dx+M_2(x)N_2(y)dy=0 \tag{9.4.4}$$

называется дифференциальным уравнением первого порядка с разделяющимися переменными в симметричной форме.

Если $M_2(x)\neq 0$ и $N_1(y)\neq 0$ для любых x и y из области существования решения, то, разделив обе части уравнения (9.4.4) на $M_2(x)\cdot N_1(y)$, а именно: $\frac{M_1(x)N_1(y)}{M_2(x)N_1(y)}dx+\frac{M_2(x)N_2(y)}{M_2(x)N_1(y)}dy=0$, получим дифференциальное уравнение с разделенными переменными

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx+\frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy=0. \tag{9.4.5}$$

Используя свойство инвариантности дифференциала, проинтегрируем равенство (9.4.5). В результате получим выражение

$$\int\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx+\int\frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy=C, \tag{9.4.6}$$

являющееся общим интегралом дифференциального уравнения (9.4.5).

В тех точках, где $M_2(x)=0$ или $N_1(y)=0$, могут появиться другие решения уравнения (9.4.4). В самом деле, если $x = x_1$ – корень уравнения $M_2(x)=0$, то, положив в (9.4.4) $x = x_1$, получим тождество

$$M_1(x_1)N_1(y)dx_1+M_2(x_1)N_2(y)dy\equiv 0 \quad (0\equiv 0),$$

поскольку $dx_1=0$ и $M_2(x_1)=0$. Следовательно, $x = x_1$ – решение уравнения (9.4.4). Аналогично, если y_1 – корень уравнения $N_1(y)=0$, то $y = y_1$ – решение уравнения (9.4.4).

П р и м е р 9.4.2. Решить уравнение $xdy-2ydx=0$.

Решение. Разделим обе части на произведение $(x\cdot y)$. Тогда $\frac{xdy}{x\cdot y}-\frac{2ydx}{x\cdot y}=0 \Rightarrow \frac{dy}{y}-\frac{2dx}{x}=0 \Rightarrow \int\frac{dy}{y}-2\int\frac{dx}{x}=\ln C \Rightarrow \ln|y|-2\ln|x|=\ln C$

(в этом примере константу удобно выбрать в виде ln C). Отсюда получаем $\ln|y| = \ln C + \ln x^2$, тогда $y = C \cdot x^2$ – общее решение данного уравнения. Кроме него решениями этого уравнения являются функции $x = 0$ и $y = 0$.

К уравнениям с разделяющимися переменными приводятся уравнения вида

$$y' = f(ax + by + c). \tag{9.4.7}$$

Введем замену $ax + by + c = z$. Тогда $z' = a + by'$, а $y' = \dfrac{z' - a}{b}$ (предполагаем $b \neq 0$), и уравнение (9.4.7) принимает вид

$$\frac{z' - a}{b} = f(z) \Rightarrow z' = a + bf(z) \Rightarrow \frac{dz}{dx} = bf(z) + a \Rightarrow \frac{dz}{bf(z) + a} = dx \Rightarrow x = \int \frac{dz}{bf(z) + a} + C \cdot$$

После взятия интеграла необходимо вместо z подставить $ax + by + c$.

Если $b = 0$, получаем уравнение $y' = f(ax + c)$, которое является уравнением с разделенными переменными,

$$y = \int f(ax + c)\,dx + C.$$

9.5. Однородные дифференциальные уравнения и приводящиеся к ним

Определение 9.5.1. Функция $f(x, y)$ называется *однородной* n-ного порядка относительно переменных x и y, если при $\forall t \neq 0$ справедливо тождество

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y).$$

Пример 9.5.1. Функция $f(x, y) = xy - y^2$ есть однородная функция второго порядка, так как

$$f(tx, ty) = tx \cdot ty - (ty)^2 = t^2\left(xy - y^2\right) = t^2 f(x, y).$$

Пример 9.5.2. Функция $f(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{xy}$ есть однородная функция нулевого порядка, так как

$$f(tx, ty) = \frac{(tx)^2 - (ty)^2}{tx \cdot ty} = \frac{t^2\left(x^2 - y^2\right)}{t^2 xy} = t^0 f(x, y) = f(x, y).$$

Определение 9.5.2. Дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y) \tag{9.5.1}$$

называется *однородным*, если функция $f(x,y)$ есть однородная функция нулевого порядка относительно x и y.

По условию $f(tx,ty)=f(x,y)$. Положив в этом тождестве $t=\frac{1}{x}$, получим $f(x,y)=f\left(1,\frac{y}{x}\right)$, т.е. однородная функция нулевого порядка зависит только от отношения аргументов. Уравнение (9.5.1) принимает вид

$$\frac{dy}{dx}=f\left(1,\frac{y}{x}\right). \tag{9.5.2}$$

Сделаем подстановку $z=\frac{y}{x}$, т.е. $y = zx$. Тогда $\frac{dy}{dx}=z+\frac{dz}{dx}x$. Подставляя в (9.5.2), получим $z+\frac{dz}{dx}x=f(1,z)$.

Это уравнение с разделяющимися переменными.

$$\frac{dz}{dx}x=f(1,z)-z \Rightarrow \frac{dz}{f(1,z)-z}=\frac{dx}{x} \Rightarrow \int\frac{dz}{f(1,z)-z}=\int\frac{dx}{x}+C.$$

Подставляя после интегрирования $z=\frac{y}{x}$, получим общий интеграл уравнения (9.5.2), а значит, и уравнения (9.5.1).

Пример 9.5.3. Решить уравнение $\frac{dy}{dx}=\frac{xy}{x^2-y^2}$.

Решение. В правой части имеется однородная функция нулевого порядка, так как $\frac{tx\cdot ty}{(tx)^2-(ty)^2}=\frac{t^2xy}{t^2\left(x^2-y^2\right)}=\frac{xy}{x^2-y^2}$. Пусть $z=\frac{y}{x}$, $y = zx$, $\frac{dy}{dx}=z+x\frac{dz}{dx}$, и наше уравнение принимает вид

$$z+x\frac{dz}{dx}=\frac{x\cdot zx}{x^2-(zx)^2} \Rightarrow z+x\frac{dz}{dx}=\frac{zx^2}{\left(1-z^2\right)x^2} \Rightarrow x\frac{dz}{dx}=\frac{z}{1-z^2}-z \Rightarrow$$

$$x\frac{dz}{dx}=\frac{z-z+z^3}{1-z^2}\ \Rightarrow\ x\frac{dz}{dx}=\frac{z^3}{1-z^2}\ \Rightarrow\ \frac{1-z^2}{z^3}dz=\frac{dx}{x}.$$

Отсюда, интегрируя, получаем

$$\int z^{-3}dz-\int\frac{dz}{z}=\int\frac{dx}{x}+\ln|C|\ \Rightarrow\ -\frac{1}{2z^2}-\ln|z|=\ln|x|+\ln|C|\ \Rightarrow\ -\frac{1}{2z^2}=\ln|Cxz|.$$

Подставляя $z=\frac{y}{x}$, получим общий интеграл исходного уравнения $-\frac{x^2}{2y^2}=\ln|Cy|$.

З а м е ч а н и е. Дифференциальное уравнение вида

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0 \tag{9.5.3}$$

будет однородным в том и только том случае, когда $M(x,y)$ и $N(x,y)$ являются однородными функциями одного и того же порядка.

Действительно, из уравнения (9.5.3) получим $\frac{dy}{dx}=-\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$. Тогда $-\frac{M(tx,ty)}{N(tx,ty)}=-\frac{t^kM(x,y)}{t^kN(x,y)}=-\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$. Уравнение (9.5.3) можно решать подстановкой $y = zx$, $dy = zdx + xdz$, не приводя его к виду (9.5.1).

Рассмотрим далее дифференциальные уравнения, приводящиеся к однородным.

К однородным уравнениям сводятся уравнения вида

$$y'=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right), \tag{9.5.4}$$

где a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 – постоянные числа.

Для этого введем новые переменные t и S вместо x и y по формулам

$$x=t+\alpha,\qquad y=S+\beta, \tag{9.5.5}$$

где α и β – некоторые числа.

Тогда $dx= dt$, $dy = dS$, $y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dS}{dt}$, и уравнение (9.5.4) принимает вид

$$\frac{dS}{dt}=f\left(\frac{a_1(t+\alpha)+b_1(S+\beta)+c_1}{a_2(t+\alpha)+b_2(S+\beta)+c_2}\right)\ \Rightarrow$$

$$\frac{dS}{dt}=f\left(\frac{a_1t+b_1S+\left(a_1\alpha+b_1\beta+c_1\right)}{a_2t+b_2S+\left(a_2\alpha+b_2\beta+c_2\right)}\right). \tag{9.5.6}$$

Подберем числа α и β так, чтобы уравнение (9.5.6) стало однородным. Для этого достаточно потребовать выполнение системы равенств:

$$\begin{cases} a_1\alpha+b_1\beta+c_1=0, \\ a_2\alpha+b_2\beta+c_2=0. \end{cases} \tag{9.5.7}$$

Если определитель $\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\neq 0$ $\left(\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}\right)$, то система (9.5.7) имеет единственное решение α и β, при котором уравнение (9.5.6) становится однородным $\frac{dS}{dt}=f\left(\frac{a_1t+b_1S}{a_2t+b_2S}\right)$, и которое решается подстановкой $z=\frac{S}{t}$. После решения необходимо вернуться к x и y по формулам $t=x-\alpha$, $S=y-\beta$.

Если $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$ $\left(\Delta=0\right)$, то, положив $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=k$, получим $a_1=ka_2$, $b_1=kb_2$, и тогда исходное уравнение (9.5.4) принимает вид $y'=f\left(\frac{k\left(a_2x+b_2y\right)+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$, т.е. имеет вид $y'=\varphi\left(a_2x+b_2y\right)$ и подстановкой $z=a_2x+b_2y$ сводится к дифференциальному уравнению с разделяющимися переменными, как было показано в п. 9.4.

Если же $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}=k$, то $a_1=ka_2$, $b_1=kb_2$, $c_1=kc_2$, и уравнение (9.5.4) принимает вид

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{ka_2x+kb_2y+kc_2}{a_2x+b_2y+c_2}\right),\ \frac{dy}{dx}=f\left(\frac{k\left(a_2x+b_2y+c_2\right)}{a_2x+b_2y+c_2}\right),\ \frac{dy}{dx}=f\left(k\right),$$

где $f\left(k\right)=\text{const}$.

Тогда $y=\int f\left(k\right)dx+C$ – общее решение (9.5.4).

Примеры решения таких уравнений показаны в практической части модуля.

9.6. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Уравнение

$$y' + p(x)y = f(x), \tag{9.6.1}$$

линейное относительно неизвестной функции и ее производной y' (т.е. содержащее y и y' в первой степени), называется *линейным* дифференциальным уравнением первого порядка. Здесь $p(x)$ и $f(x)$ – непрерывные на $[a, b]$ функции, либо постоянные числа.

Если $f(x) \equiv 0$, то уравнение

$$y' + p(x)y = 0 \tag{9.6.2}$$

называется *линейным однородным* дифференциальным уравнением (левая часть этого уравнения является однородной функцией относительно y и y', так как $ty' + p(x)ty = t(y' + p(x)y)$). Если $f(x) \not\equiv 0$, то уравнение (9.6.1) называется *неоднородным*.

Существует несколько методов интегрирования линейных дифференциальных уравнений первого порядка. Рассмотрим некоторые из них.

Метод подстановки (Бернулли)

По этому методу искомое решение уравнения (9.6.1) будем искать в виде

$$y = u(x)v(x), \tag{9.6.3}$$

где $u = u(x)$ и $v = v(x)$ – некоторые непрерывно дифференцируемые функции. Подставляя $y = uv$ и $y' = u'v + uv'$ в (9.6.1), получаем

$$u'v + uv' + p(x)uv = f(x) \quad \text{или}$$

$$u'v + u(v' + p(x)v) = f(x). \tag{9.6.4}$$

Выберем функцию $v = v(x)$ таким образом, чтобы

$$v' + p(x)v = 0, \tag{9.6.5}$$

после чего от уравнения (9.6.4) остается

$$u'v = f(x). \tag{9.6.6}$$

В результате получаем систему двух уравнений

$$\begin{cases} v' + p(x)v = 0, \\ u'v = f(x). \end{cases} \tag{9.6.7}$$

Сначала решаем первое уравнение системы, которое является линейным однородным дифференциальным уравнением относительно v и v'. Покажем, что оно, в то же время, и уравнение с разделяющимися переменными.

$$\frac{dv}{dx}=-p(x)v \Rightarrow \frac{dv}{v}=-p(x)dx \Rightarrow \int\frac{dv}{v}=-\int p(x)dx+\ln C_1 \Rightarrow$$

$$\ln|v|=\ln e^{-\int p(x)dx}+\ln C_1 \Rightarrow \ln|v|=\ln C_1e^{-\int p(x)dx} \Rightarrow v=C_1e^{-\int p(x)dx}.$$

Подставляя функцию v во второе уравнение системы (9.6.7), получаем еще одно уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{du}{dx}\cdot C_1e^{-\int p(x)dx}=f(x) \Rightarrow du=\frac{1}{C_1}e^{\int p(x)dx}f(x)dx,$$

откуда

$$u=u(x)=\frac{1}{C_1}\int f(x)e^{\int p(x)dx}dx+C_2.$$

Таким образом, $y=u(x)v(x)$, т.е.

$$y=\left(\frac{1}{C_1}\int f(x)e^{\int p(x)dx}dx+C_2\right)C_1e^{-\int p(x)dx}=$$

$$=\left(\int f(x)e^{\int p(x)dx}dx+C_1C_2\right)e^{-\int p(x)dx}.$$

Так как C_1 и C_2 – произвольные постоянные, то произведение C_1C_2 – тоже произвольная постоянная, которую можно обозначить через C. В итоге получаем, что общим решением неоднородного дифференциального уравнения (9.6.1) будет

$$y=e^{-\int p(x)dx}\left(C+\int f(x)e^{\int p(x)dx}dx\right). \qquad (9.6.8)$$

Поскольку при перемножении функций $u(x)$ и $v(x)$ постоянная C_1 во втором слагаемом сократилась, то в качестве функции $v(x)$ можно было взять $v=e^{-\int p(x)dx}$ $(C_1=1)$.

Пример 9.6.1. Решить уравнение $y'-2xy=2xe^{x^2}$.

Решение. Пусть $y=uv$, $y'=u'v+uv'$. Тогда

$$u'v+uv'-2xuv=2xe^{x^2} \Rightarrow u'v+u(v'-2xv)=2xe^{x^2}.$$

Составим систему (9.6.7)

$$\begin{cases} v' - 2xv = 0, \\ u'v \qquad = 2xe^{x^2}. \end{cases}$$

Решаем первое уравнение $v' - 2xv = 0 \Rightarrow \dfrac{dv}{dx} = 2xv \Rightarrow \int \dfrac{dv}{v} = \int 2xdx$ $\Rightarrow \ln|v| = x^2 \Rightarrow v = e^{x^2}$ (постоянную здесь не берем).

Подставляем $v = e^{x^2}$ во второе уравнение системы $u'v = 2xe^{x^2} \Rightarrow$ $\dfrac{du}{dx}e^{x^2} = 2xe^{x^2} \Rightarrow \dfrac{du}{dx} = 2x \Rightarrow du = 2xdx \Rightarrow u = x^2 + C$.

В итоге находим, что общее решение данного уравнения

$$y = u(x)v(x), \qquad y = \left(x^2 + C\right)e^{x^2}.$$

Метод вариации произвольного постоянного (метод Лагранжа)

Найдем общее решение однородного дифференциального уравнения (9.6.2). Разделив в нем переменные, получим

$$y' + p(x)y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -p(x)y \Rightarrow \frac{dy}{y} = -p(x)dx \Rightarrow$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int p(x)dx + \ln C \Rightarrow \ln|y| = \ln C + \ln e^{-\int p(x)dx} \Rightarrow$$

$$y = C \cdot e^{-\int p(x)dx}, \tag{9.6.9}$$

где C – произвольная постоянная.

По методу вариации (в переводе на русский язык – изменения) произвольной постоянной общее решение неоднородного уравнения (9.6.1) ищем в виде

$$y = C(x)e^{-\int p(x)dx}, \tag{9.6.10}$$

в котором $C = C(x)$ – неизвестная дифференцируемая функция.

Найдем $y' = C'(x)e^{-\int p(x)dx} + C(x)e^{-\int p(x)dx}\left(-\int p(x)dx\right)' =$

$$= C'(x)e^{-\int p(x)dx} + C(x)e^{-\int p(x)dx}\left(-p(x)\right).$$

Подставляя y и y' в (9.6.1), получаем

$$C'(x)e^{-\int p(x)dx} - p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx} + p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx} = f(x),$$

откуда $\quad C'(x)e^{-\int p(x)dx} = f(x) \Rightarrow C'(x) = f(x)e^{\int p(x)dx} \Rightarrow$

$$C(x) = \int f(x)e^{\int p(x)dx}dx + C. \qquad (9.6.11)$$

Итак, функция $C(x)$ найдена. Подставляя ее в (9.6.10), находим общее решение уравнения (9.6.1)

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left(\int f(x)e^{\int p(x)dx}dx + C\right),$$

совпадающее с решением (9.6.8).

Пример 9.6.2. Найти частное решение дифференциального уравнения $y' - \frac{y}{x} = -\frac{2}{x^2}$, удовлетворяющее начальному условию $y(1) = 1$.

Решение. В начале решаем соответствующее однородное уравнение $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int\frac{dy}{y} = \int\frac{dx}{x} + \ln C \Rightarrow \ln|y| = \ln|x| + \ln C \Rightarrow y = Cx$.

В соответствии с методом Лагранжа общее решение ищем в виде $y = C(x)x$. Находим $y' = C'(x)x + C(x)$. Тогда $C'(x)x + C(x) - \frac{C(x)x}{x} = -\frac{2}{x^2} \Rightarrow xC'(x) + C(x) - C(x) = -\frac{2}{x^2} \Rightarrow$ $C(x) = -\int\frac{2}{x^3} + C_1 \Rightarrow C(x) = \frac{1}{x^2} + C_1$ и $y = \left(\frac{1}{x^2} + C_1\right)x$ или $y = C_1x + \frac{1}{x}$ будет общим решением данного уравнения. Из условия $y(1) = 1$ имеем $1 = C_1 + 1 \Rightarrow C_1 = 0$.

Итак, искомым частным решением данного уравнения, удовлетворяющим начальному условию $y(1) = 1$, является функция $y = \frac{1}{x}$.

Общее решение уравнения (9.6.1) можно сразу найти по формуле (9.6.8), подставив туда $p(x)$ и $f(x)$ и взяв три интеграла.

Замечание. В приложениях часто встречаются линейные уравнения с постоянными коэффициентами

$$\frac{dy}{dx} + ay = b, \qquad (9.6.12)$$

где a и b – постоянные.

Его можно решить путем разделения переменных:

$$\frac{dy}{dx} = b - ay \Rightarrow \frac{dy}{b - ay} = dx \Rightarrow x = \int\frac{dy}{b - ay} + C.$$

9.7. Уравнение Бернулли

Рассмотрим уравнение вида

$$y' + p(x)y = f(x) \cdot y^n, \qquad (9.7.1)$$

где $p(x)$ и $f(x)$ – непрерывные функции от x (или постоянные), а $n \neq 0$ и $n \neq 1$ (в противном случае получилось бы линейное уравнение). Это уравнение, называемое *уравнением Бернулли*, приводится к линейному следующим преобразованием.

Разделив обе части уравнения (9.7.1) на y^n, получим

$$\frac{y'}{y^n} + \frac{p(x)y}{y^n} = f(x), \text{ или } y^{-n} \cdot y' + p(x)y^{-n+1} = f(x). \qquad (9.7.2)$$

Сделаем, далее, замену $z = y^{-n+1} \Rightarrow z' = (-n+1)y^{-n} \cdot y'$.

Умножим обе части уравнения (9.7.2) на $(-n+1)$.

$$(-n+1)y^{-n} \cdot y' + (-n+1) \cdot p(x)y^{-n+1} = (-n+1) \cdot f(x) \Rightarrow$$

$$z' + (-n+1)p(x)z = (-n+1)f(x), \qquad (9.7.3)$$

т.е. получили линейное дифференциальное уравнение относительно z и z'. Найдя его общий интеграл и подставив $z = y^{-n+1}$, получим общий интеграл уравнения Бернулли.

Пример 9.7.1. Найти общее решение дифференциального уравнения $xy' - 2x^2\sqrt{y} = 4y$.

Решение. Предполагая $x \neq 0$, разделим обе части дифференциального уравнения на x, тогда $y' - \frac{4}{x}y = 2x\sqrt{y}$ является уравнением Бернулли, где $n = \frac{1}{2}$. Умножим обе части уравнения на $y^{-\frac{1}{2}}$, в результате имеем $y^{-\frac{1}{2}}y' - \frac{4}{x}y^{\frac{1}{2}} = 2x$.

Сделаем подстановку $z = y^{\frac{1}{2}} \Rightarrow z' = \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}} \cdot y'$. Умножая обе части последнего дифференциального уравнения на $\frac{1}{2}$, получим $\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}y' - \frac{2}{x}y^{\frac{1}{2}} = x$,

$z' - \frac{2}{x} z = x$, а это уже линейное дифференциальное уравнение относительно z и z'. Найдем его общее решение по формуле (9.6.8), взяв $p(x) = -\frac{2}{x}$, $f(x) = x$,

$$z = e^{-\int p(x)dx}\left(C + \int f(x) e^{\int p(x)dx} dx\right) = e^{\int \frac{2}{x}dx}\left(C + \int x e^{-\int \frac{2}{x}dx} dx\right) =$$

$$= e^{2\ln|x|}\left(C + \int x e^{-2\ln|x|} dx\right) = x^2\left(C + \int x \cdot x^{-2} dx\right) = x^2\left(C + \int \frac{dx}{x}\right) = x^2\left(C + \ln|x|\right).$$

Так как $z = y^{\frac{1}{2}}$, то $y^{\frac{1}{2}} = x^2\left(C + \ln|x|\right) \Rightarrow y = x^4\left(C + \ln|x|\right)^2$ – искомое общее решение.

Замечание. Дифференциальное уравнение (9.7.1) можно сразу решать методом Бернулли или Лагранжа, не сводя его к линейному.

Пример 9.7.2. Решить уравнение $y' + \frac{y}{x} = x^2 y^4$.

Решение. Это уравнение Бернулли. Решение будет искать в виде $y = u(x) \cdot v(x) \Rightarrow y' = u'v + uv'$. Исходное уравнение принимает вид

$$u'v + uv' + \frac{1}{x} uv = x^2 (uv)^4 \Rightarrow u'v + u\left(v' + \frac{1}{x} v\right) = x^2 u^4 v^4.$$

Выберем функцию $v(x)$ таким образом, чтобы $v' + \frac{1}{x} v = 0$. В результате получаем систему: $\begin{cases} v' + \frac{1}{x} v = 0, \\ u'v = x^2 u^4 v^4. \end{cases}$

Решим первое уравнение системы $\frac{dv}{dx} = -\frac{v}{x} \Rightarrow \frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x} \Rightarrow$ $\int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|v| = -\ln|x| \Rightarrow v = \frac{1}{x}$. Тогда второе уравнение системы $u'v = x^2 u^4 v^4$ принимает вид $u' = x^2 u^4 v^3 \Rightarrow \frac{du}{dx} = x^2 \cdot u^4 \cdot \frac{1}{x^3} \Rightarrow \frac{du}{u^4} = \frac{dx}{x} \Rightarrow$ $\int \frac{du}{u^4} = \int \frac{dx}{x} - \ln|C| \Rightarrow -\frac{1}{3u^3} = \ln|x| - \ln|C| \Rightarrow \frac{1}{u^3} = 3\left(\ln|C| - \ln|x|\right) \Rightarrow$

$u=\sqrt[3]{\dfrac{1}{3\ln\left|\dfrac{C}{x}\right|}}$. Итак, $y=u(x)v(x)$, т.е. $y=\dfrac{1}{x\cdot\sqrt[3]{3\ln\left|\dfrac{C}{x}\right|}}$ будет общим решением исходного уравнения.

9.8. Дифференциальные уравнения в полных дифференциалах

Напомним, что полным дифференциалом функции двух переменных $u=u(x,y)$ называется выражение

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy. \tag{9.8.1}$$

Уравнение

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0 \tag{9.8.2}$$

называется *дифференциальным уравнением в полных дифференциалах,* если его левая часть представляет собой полный дифференциал некоторой функции $u(x,y)$, т.е. $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=du(x,y)$. В этом случае уравнение можно записать в виде $du(x,y)=0$, откуда следует, что соотношение

$$u(x,y)=C \tag{9.8.3}$$

является его общим интегралом.

ТЕОРЕМА 9.8.1. Пусть $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ – функции, непрерывные в некоторой односвязной (не имеющей «дырок» внутри себя) области D плоскости XOY и имеющие в ней непрерывные частные производные $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$. Тогда, для того чтобы выражение

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy \tag{9.8.4}$$

было полным дифференциалом некоторой функции $u(x,y)$, необходимо и достаточно, чтобы во всех точках области D было выполнено условие

$$\frac{\partial P}{\partial y}\equiv\frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{9.8.5}$$

Доказательство.

Необходимость. Пусть выражение (9.8.4) является полным дифференциалом некоторой функции $u(x,y)$, т.е.

$du=\dfrac{\partial u}{\partial x}dx+\dfrac{\partial u}{\partial y}dy=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$, отсюда

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y), \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y). \tag{9.8.6}$$

Дифференцируя первое из этих равенств по y, а второе – по x, получим $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, откуда по теореме о равенстве смешанных производных получаем $\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}$.

Достаточность. Покажем, что при выполнении условия (9.8.5) выражение $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ есть полный дифференциал некоторой функции $u(x, y)$.

Из соотношения $\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y)$ находим

$$u(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(x, y)dx + \varphi(y),$$

где x_0 – абсцисса любой точки из области существования решения.

При интегрировании по x мы считаем y постоянным, и поэтому произвольная постоянная интегрирования может зависеть от y. Подберем $\varphi(y)$ так, чтобы выполнялось второе из соотношений (9.8.6). Для этого продифференцируем обе части последнего равенства по y и результат приравняем $Q(x, y)$:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial P}{\partial y} dx + \varphi'(y) = Q(x, y).$$

Но, так как $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, то $\int_{x_0}^{x} \frac{\partial Q}{\partial x} dx + \varphi'(y) = Q(x, y)$, т.е.

$$Q(x, y)\Big|_{x_0}^{x} + \varphi'(y) = Q(x, y), \quad \text{или} \quad Q(x, y) - Q(x_0, y) + \varphi'(y) = Q(x, y).$$

Следовательно, $\varphi'(y) = Q(x_0, y)$, или $\varphi(y) = \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)dy + C_1$.

Таким образом, функция $u(x, y)$ будет иметь вид

$$u(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(x, y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)\,dy + C_1, \tag{9.8.7}$$

где $M_0(x_0, y_0)$ – точка, в окрестности которой существует решение уравнения (9.8.2).

Если при построении функции $u(x, y)$ брать за исходное второе из равенств (9.8.6), то получим, что

$$u(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(x, y_0)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x, y)\,dy + C_2. \qquad (9.8.8)$$

В формулах (9.8.7) и (9.8.8) нижние пределы интегрирования нужно выбирать так, чтобы получающиеся интегралы имели смысл. Удачный выбор x_0 и y_0 во многих случаях облегчает задачу интегрирования уравнения.

Напомним, что общим интегралом уравнения (9.8.2) будет $u(x, y) = C$ (произвольные постоянные C_1 или C_2 можно включить в постоянную C).

П р и м е р 9.8.1. Решить уравнение $\dfrac{2x}{y^3}dx + \dfrac{y^2 - 3x^2}{y^4}dy = 0$.

Решение. Проверяем, не есть ли это уравнение в полных дифференциалах. Пусть $P(x, y) = \dfrac{2x}{y^3}$, $Q(x, y) = \dfrac{y^2 - 3x^2}{y^4} = \dfrac{1}{y^2} - \dfrac{3}{y^4}x^2$, тогда $\dfrac{\partial P}{\partial y} = 2x\left(y^{-3}\right)'_y = -6xy^{-4} = -\dfrac{6x}{y^4}$; $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = 0 - \dfrac{3}{y^4}\cdot 2x = -\dfrac{6x}{y^4}$. Условие (9.8.5) при $y \neq 0$ выполняется. Значит, левая часть данного уравнения есть полный дифференциал некоторой неизвестной функции $u(x, y)$. Найдем эту функцию.

Так как $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{2x}{y^3}$, то $u = \int \dfrac{2x}{y^3}dx + \varphi(y) = \dfrac{x^2}{y^3} + \varphi(y)$, где $\varphi(y)$ – не определенная пока функция от y.

Дифференцируя это соотношение по y и учитывая, что $\dfrac{\partial u}{\partial y} = Q = \dfrac{y^2 - 3x^2}{y^4}$, получаем $\dfrac{-3x^2}{y^4} + \varphi'(y) = \dfrac{1}{y^2} - \dfrac{3x^2}{y^4} \Rightarrow \varphi'(y) = \dfrac{1}{y^2} \Rightarrow$ $\varphi(y) = -\dfrac{1}{y} + C_1$. Следовательно, $u(x, y) = \dfrac{x^2}{y^3} - \dfrac{1}{y} + C_1$.

Таким образом, общий интеграл исходного уравнения

$$\frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} = C.$$

З а м е ч а н и е. Неизвестную функцию $u(x, y)$ можно сразу находить по одной из формул (9.8.7) или (9.8.8).

П р и м е р 9.8.2. Дано уравнение $xydx+\left(\frac{x^2}{2}+\frac{1}{y}\right)dy=0 \quad (y>0)$.

Решение. Условие (9.8.5) выполнено. Применим формулу (9.8.7), положив $x_0=0$, $y_0=1$. Получим $\int\limits_0^x xydx+\int\limits_1^y\left(\frac{0}{2}+\frac{1}{y}\right)dy=C \quad \Rightarrow$

$\left.\frac{x^2y}{2}\right|_0^x+\ln y\big|_1^y=C \Rightarrow \frac{x^2y}{2}+\ln y=C$ – общий интеграл. Нельзя полагать $y_0=0$, так как $y=0$ не принадлежит области определения коэффициентов.

Если $\frac{\partial P}{\partial y}\neq\frac{\partial Q}{\partial x}$, то уравнение $Pdx+Qdy=0$ уже не является уравнением в полных дифференциалах. Его можно превратить в уравнение в полных дифференциалах умножением обеих частей на подходящим образом подобранную функцию $\mu(x, y)$, которая называется интегрирующим множителем. В некоторых частных случаях интегрирующий множитель можно найти. Более подробно этот вопрос можно найти в любом учебнике, содержащем дифференциальные уравнения.

9.9. Особые решения дифференциальных уравнений первого порядка

Из геометрического смысла дифференциального уравнения $y'=f(x, y)$ следует, что его интегральная кривая в каждой своей точке имеет касательную, совпадающую с направлением поля, порожденного этим уравнением. Отсюда вытекает, что все интегральные кривые дифференциального уравнения (если они существуют), проходящие через точку, должны касаться друг друга.

Теперь можно определить особое решение дифференциального уравнения с геометрической точки зрения. Решение дифференциального уравнения $y'=f(x, y)$ называется *о с о б ы м*, если через любую точку соответствующей ему интегральной кривой проходит, кроме нее, еще и другая касающаяся ее интегральная кривая данного уравнения.

Кривая, через каждую точку которой проходит хотя бы еще одна кривая некоторого семейства, имеющая ту же касательную в данной точке, что и кривая семейства, называется *огибающей* данного семейства.

Из сказанного следует, что особое решение дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ является огибающей семейства интегральных кривых $\Phi(x, y, C) = 0$ (общего интеграла) этого уравнения.

Пример 9.9.1. Найти особое решение уравнения $y^2\left(1+y'^2\right)=R^2$.

Решение. Разрешим уравнение относительно y'.

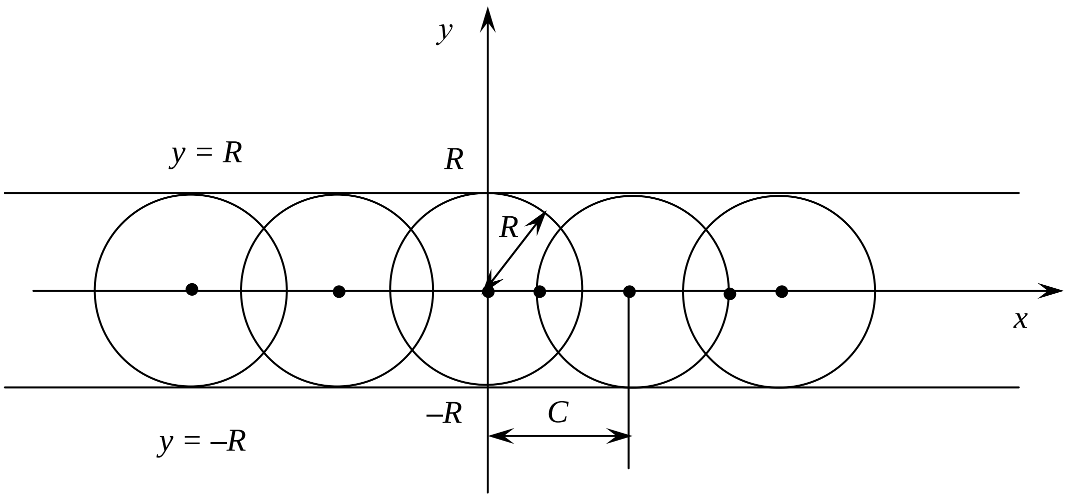
$$\frac{dy}{dx}=\pm\frac{\sqrt{R^2-y^2}}{y} \Rightarrow$$

$$\frac{ydy}{\pm\sqrt{R^2-y^2}}=dx \Rightarrow \mp\frac{1}{2}\int\left(R^2-y^2\right)^{-\frac{1}{2}}d\left(R^2-y^2\right)=\int dx-C \Rightarrow$$

$$\pm\sqrt{R^2-y^2}=x-C \Rightarrow R^2-y^2=\left(x-C\right)^2 \Rightarrow$$

$$\left(x-C\right)^2+y^2=R^2 \text{ – общий интеграл данного уравнения.}$$

Легко видеть, что семейство интегральных линий представляет собой семейство окружностей радиуса R с центром на оси абсцисс. Огибающей семейства кривых будет пара прямых $y=\pm R$.



Функции $y=\pm R$ удовлетворяют исходному дифференциальному уравнению $\left(y'=0,\quad R^2=R^2\right)$. Следовательно, $y=\pm R$ – особые решения данного уравнения.

9.10. Модели прикладных задач с применением дифференциальных уравнений

Составление дифференциальных уравнений является важным и вместе с тем трудным вопросом. Универсального метода, пригодного во всех случаях, указать нельзя. Необходимо приобретение опыта и определенных навыков в решении различных задач, что достигается разбором большого количества задач и самостоятельным решением аналогичных примеров. Необходимо также знание данной прикладной дисциплины.

Составление дифференциального уравнения по условию задачи (механической, физической, химической, технической или любой другой) состоит в определении математической зависимости между переменными величинами и их приращениями, которые сразу же заменяются соответствующими дифференциалами.

В большинстве случаев модель прикладных задач с применением обыкновенных дифференциальных уравнений сводится к следующему:

1) подробный разбор условий задачи и составление чертежа, поясняющего его суть;
2) составление дифференциального уравнения рассматриваемого процесса;
3) интегрирование этого уравнения и определение его общего решения;
4) определение частного решения задачи на основании данных начальных условий;
5) определение по мере необходимости вспомогательных параметров (например, коэффициента пропорциональности и т.д.) с использованием для этой цели дополнительных условий задачи;
6) вывод общего закона рассматриваемого процесса и числовое определение искомых величин;
7) анализ ответа и проверка исходного положения задачи.

В качестве примера рассмотрим задачу о радиоактивном распаде.

З а д а ч а 9.10.1. Скорость распада радия прямо пропорциональна наличной его массе. Определить, какой процент массы m_0 радия распадется через 200 лет, если известно, что период полураспада радия (период времени, по истечении которого распадается половина наличной массы радия) равен 1590 лет.

Решение. Скорость распада радия измеряется его количеством, распавшимся в единицу времени. За малый промежуток времени Δt, истекший с некоторого момента времени t, количество распавшегося радия равно $km\Delta t$, где m – количество радия в данный момент времени, k – коэффициент пропорциональности. Это же количество, взятое с отрицательным знаком (масса убывает), равно приращению массы за время Δt:

$$\Delta m = -km\Delta t. \qquad (9.10.1)$$

Обе части равенства (9.10.1) делим на Δt и переходим к пределу при $\Delta t \to 0$. Тогда $\lim\limits_{\Delta t \to} \dfrac{\Delta m}{\Delta t} = -km \quad \Rightarrow \quad \dfrac{dm}{dt} = -km$.

Разделяем переменные:

$$\frac{dm}{m} = -kdt. \qquad (9.10.2)$$

Интегрируя уравнение (9.10.2), находим $\ln m = -kt + \ln C$ или после потенцирования

$$m = Ce^{-kt}. \qquad (9.10.3)$$

Начальное условие: $m = m_0$ при $t = 0$.

$$m_0 = Ce^{-k \cdot 0} \quad \Rightarrow \quad C = m_0.$$

Таким образом,

$$m = m_0 e^{-kt}.$$

Коэффициент k определяем из дополнительного условия:

при $t = 1590$ $\quad m = \dfrac{m_0}{2}$.

$$\frac{m_0}{2} = m_0 e^{-1590k} \quad \Rightarrow -1590k = -\ln 2,$$

$$k = \frac{\ln 2}{1590} = 0{,}00044.$$

Искомая функция $\quad m(t) = m_0 e^{-0{,}00044t}$.

Количество радия, не распавшегося через 200 лет, $m(200) = m_0 e^{-0{,}00044 \cdot 200} = m_0 e^{-0{,}088} = 0{,}915 m_0$ (что составляет 91,5 %).

Следовательно, через 200 лет распадется лишь 8,5 % радия.

Для интересующихся моделями прикладных задач, решаемых с помощью дифференциальных уравнений, рекомендуем учебное пособие [14].

9.11. Дифференциальные уравнения высших порядков. Задача Коши. Понятие общего и частного решений

Уравнение вида $F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$, где $n > 1$, называется *дифференциальным уравнением n-ного порядка*. Уравнение

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right) \tag{9.11.1}$$

называется уравнением n-ного порядка, разрешенным относительно старшей производной $y^{(n)}$. Всякому решению дифференциального уравнения n-ного порядка (как и уравнению первого порядка) на плоскости XOY соответствует интегральная кривая. Общее решение дифференциального уравнения n-ного порядка зависит от n произвольных постоянных C_1, C_2, …, C_n. Оно имеет вид $y = \varphi\left(x, C_1, C_2, \ldots, C_n\right)$, где φ – n раз дифференцируемая функция. Если решение дифференциального уравнения n-ного порядка удается получить в неявном виде

$$\Phi\left(x, C_1, C_2, \ldots, C_n\right) = 0,$$

то оно называется *общим интегралом* этого уравнения.

Геометрически общее решение (или общий интеграл) дифференциального уравнения n-ного порядка представляет собой семейство интегральных кривых на плоскости XOY, зависящее от n параметров C_1, C_2, …, C_n. Для выделения конкретного (частного) решения из общего необходимо иметь, помимо дифференциального уравнения, некоторые дополнительные условия, позволяющие определить значения произвольных постоянных C_1, C_2, …, C_n. Одним из таких условий является задание значений неизвестной функции и ее первых $n-1$ производных в некоторой точке x_0 интервала (a, b), на котором определено решение уравнения:

$$y\left(x_0\right) = y_0,\ y'\left(x_0\right) = y_0',\ y''\left(x_0\right) = y_0'', \ldots,\ y^{(n-1)}\left(x_0\right) = y_0^{(n-1)}, \tag{9.11.2}$$

где $y_0, y_0', y_0'' \ldots, y_0^{(n-1)}$ – заданные числа.

Условия (9.11.2) называются *начальными условиями* или *условиями Коши*.

Задача отыскания частного решения уравнения n-ного порядка, удовлетворяющего начальным условиям (9.11.2), называется *задачей Коши* для этого уравнения.

ТЕОРЕМА 9.11.1 (о существовании и единственности решения задачи Коши). Пусть дано уравнение (9.11.1) и начальные условия (9.11.2). Если функция $f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right)$ непрерывна в окрестности точки $\left(x_0, y_0, y'_0, y''_0, \ldots, y_0^{(n-1)}\right) \in \mathbb{R}^{n+1}$ и имеет непрерывные производные $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y'}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$, то существует единственное решение уравнения, определенное в некотором интервале (a, b), содержащем точку x_0, и удовлетворяющее заданным начальным условиям.

9.12. Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка

Задача интегрирования дифференциальных уравнений высших порядков является значительно более сложной, чем задача интегрирования дифференциальных уравнений первого порядка. Одним из основных методов (для некоторых частных видов) интегрирования дифференциальных уравнений высших порядков является понижение порядка уравнения, т.е. сведение его с помощью соответствующей замены к уравнению более низкого порядка.

Рассмотрим некоторые виды дифференциальных уравнений, допускающих понижение порядка.

I. *Уравнение вида*

$$y^{(n)} = f(x). \tag{9.12.1}$$

Порядок этого уравнения понижается всякий раз на единицу путем последовательного интегрирования:

$$y^{(n-1)} = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx + C_1,$$

$$y^{(n-2)} = \int_{x_0}^{x}\left(\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx\right)dx + C_1(x - x_0) + C_2,$$

$$y^{(n-3)} = \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx\,dx\,dx + C_1\frac{(x-x_0)^2}{2!} + C_2(x - x_0) + C_3,$$

…………………………………………………………………….,

$$y = \int_{x_0}^{x}\ldots\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx\ldots dx + C_1\frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!} + C_2\frac{(x-x_0)^{n-2}}{(n-2)!} + \ldots + C_{n-1}(x - x_0) + C_n.$$

Запись общего решения в виде определенного интеграла позволяет легко решить задачу Коши по заданным начальным условиям $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=y'_0$, $y''(x_0)=y''_0, \ldots,$ $y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}$. Подставляя эти условия снизу вверх, получим (так как $\int\limits_{x_0}^{x_0}=0$)

$$C_n=y_0,\ C_{n-1}=y'_0,\ \ldots,\ C_1=y_0^{(n-1)}.$$

Пример 9.12.1. Найти частное решение уравнения $y'''=\sin(kx)$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=0$, $y'(0)=1$, $y''(0)=2$.

Решение. Так как $x_0 = 0$, $y''=\int\limits_0^x \sin(kx)\,dx+C_1 \Rightarrow$

$y''=-\dfrac{1}{k}\cos kx\Big|_0^x+C_1 \Rightarrow y''=-\dfrac{1}{k}\cos kx+\dfrac{1}{k}+C_1$. Подставляем начальное условие $y''(0)=2$. $2=-\dfrac{1}{k}+\dfrac{1}{k}+C_1 \Rightarrow C_1=2$, т.е. $y''=-\dfrac{1}{k}\cos kx+\dfrac{1}{k}+2 \Rightarrow$

$y'=-\dfrac{1}{k}\int\limits_0^x \cos kx\,dx+\left(\dfrac{1}{k}+2\right)\int\limits_0^x dx+C_2 \Rightarrow y'=-\dfrac{1}{k^2}\sin kx\Big|_0^x+\left(\dfrac{1}{k}+2\right)x\Big|_0^x+C_2$, то есть $y'=-\dfrac{1}{k^2}\sin kx+\left(\dfrac{1}{k}+2\right)x+C_2 \Rightarrow 1=C_2$ (так как $y'(0)=1$). И, наконец,

$$y=-\frac{1}{k^2}\int\limits_0^x \sin kx\,dx+\left(\frac{1}{k}+2\right)\int\limits_0^x x\,dx+\int\limits_0^x dx+C_3 \Rightarrow$$

$$y=\frac{1}{k^3}\cos kx\Big|_0^x+\left(\frac{1}{k}+2\right)\frac{x^2}{2}\Big|_0^x+x\Big|_0^x+C_3 \Rightarrow$$

$$y=\frac{1}{k^3}\cos kx-\frac{1}{k^3}+\left(\frac{1}{k}+2\right)\frac{x^2}{2}+x+C_3.$$

Подставляя последнее начальное условие $y(0)=0$, получаем $0=C_3$. Таким образом, искомое частное решение

$$y=\frac{1}{k^3}\cos kx+\left(\frac{1}{k}+2\right)\frac{x^2}{2}+x-\frac{1}{k^3}.$$

Как и в общем случае, получилось, что $C_3=y_0$, $C_2=y'_0$, $C_1=y''_0$.

З а м е ч а н и е. Можно было брать неопределенные интегралы, но тогда для определения произвольных постоянных C_1, C_2 и C_3 пришлось бы решать систему трех алгебраических уравнений с тремя неизвестными.

II. *Дифференциальное уравнение, не содержащее явно искомую функцию* y.

Предположим, что уравнение не содержит явно неизвестную функцию y и ее производные до порядка $(k-1)$ включительно

$$F\left(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}\right)=0. \qquad (9.12.2)$$

Введем новую неизвестную функцию $p(x)=y^{(k)}$. Тогда $y^{(k+1)}=p'$, $y^{(k+2)}=p''$, …, $y^{(n)}=p^{(n-k)}$ и уравнение (9.12.2) сводится к уравнению $F\left(x, p, p', \ldots, p^{(n-k)}\right)=0$, порядок которого $(n-k)$. Решив его, найдем функцию $p(x)=y^{(k)}$, т.е. получим уравнение вида (9.12.1).

П р и м е р 9.12.2. Решить уравнение $xy'''-y''=x^2+1$.

Решение. В уравнении нет неизвестной функции y. Введем замену $y''=p(x)$, тогда $y'''=p'$ и уравнение принимает вид $xp'-p=x^2+1$ или $p'-\frac{1}{x}p=\frac{x^2+1}{x}$. Таким образом, получено линейное неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка. Решим его методом Бернулли.

$$p=uv, \quad p'=u'v+uv' \;\Rightarrow\; u'v+uv'-\frac{1}{x}uv=\frac{x^2+1}{x} \;\Rightarrow$$

$$u'v+u\left(v'-\frac{1}{x}v\right)=\frac{x^2+1}{x} \;\Rightarrow\; \begin{cases} v'-\dfrac{1}{x}v=0, \\ u'v=\dfrac{x^2+1}{x}. \end{cases}$$

Решаем первое уравнение системы $\frac{dv}{dx}-\frac{v}{x}=0 \Rightarrow \frac{dv}{v}=\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|v|=\ln|x|$ $(C=0)$ $\Rightarrow$ $v=x$. Подставляя $v=x$ во второе уравнение системы, получим $\frac{du}{dx}\cdot x=\frac{x^2+1}{x} \;\Rightarrow\; du=\frac{x^2+1}{x^2}dx \;\Rightarrow\; u=\int\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx+C_1$, т.е. $u=x-\frac{1}{x}+C_1$.

Тогда $p = uv$, $p = x\left(x - \frac{1}{x} + C_1\right)$. Так как $p = y''$, то $y'' = x^2 + C_1 x - 1$. $\Rightarrow$

$y' = \frac{x^3}{3} + C_1\frac{x^2}{2} - x + C_2 \;\Rightarrow\; y = \frac{x^4}{12} + C_1\frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$ – искомое общее решение.

В случае дифференциального уравнения второго порядка

$$y'' = f(x, y')$$

замена $y' = p(x)$, $y'' = p$ приводит к дифференциальному уравнению первого порядка $p' = f(x, p)$.

III. *Дифференциальные уравнения, не содержащие явно независимую переменную* x.

Рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка

$$y'' = f(y, y'), \tag{9.12.3}$$

не содержащее в явном виде x (x, вообще говоря, присутствует в уравнении, так как y, y', y'' являются функциями от x).

Для решения этого уравнения снова положим

$$\frac{dy}{dx} = p,$$

но теперь мы будем считать $p = p(y)$ – функция от y (а не от x, как в предыдущем случае). Тогда по правилу дифференцирования сложной функции

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy}\cdot p.$$

Подставляя в уравнение (9.12.3) выражения y' и y'', получим дифференциальное уравнение первого порядка относительно вспомогательной функции p

$$p\frac{dp}{dy} = f(y, p).$$

Интегрируя его, найдем p как функцию от y и произвольной постоянной C_1:

$$p = p(y, C_1).$$

Но $p = \frac{dy}{dx}$, поэтому

$$\frac{dy}{dx} = p(y, C_1) \;\Rightarrow\; \frac{dy}{p(y, C_1)} = dx \;\Rightarrow\; x = \int\frac{dy}{p(y, C_1)} + C_2.$$

Пример 9.12.3. Решить задачу Коши: $y''=2yy'$, $y(0)=y'(0)=1$.

Решение. В уравнении нет x. Введем замену $y'=p=p(y)$, тогда $y''=\dfrac{dp}{dy}p$ и уравнение принимает вид

$$\frac{dp}{dy}p=2y\cdot p \;\Rightarrow\; p\left(\frac{dp}{dy}-2y\right)=0.$$

Отсюда, или p = 0, или $\dfrac{dp}{dy}-2y=0$. В первом случае p = 0 $\Rightarrow$ $y'=0$ $\Rightarrow$ $y = C$. Но это решение не удовлетворяет начальным условиям (если $y = C$, $y'=0$, т.е. $y'(0)=0\neq 1$). Во втором случае

$$\frac{dp}{dy}=2y \;\Rightarrow\; dp=2ydy \;\Rightarrow\; p=y^2+C_1, \text{ то есть } y'=y^2+C_1.$$

Подставляя начальные условия $y(0)=y'(0)=1$, получаем $1 = 1 + C_1$, т.е. C_1 = 0, так что $y'=y^2 \;\Rightarrow\; \dfrac{dy}{dx}=y^2 \;\Rightarrow\; \dfrac{dy}{y^2}=dx \;\Rightarrow\; \int dx+C_2=\int y^{-2}dy$ $\Rightarrow\; -\dfrac{1}{y}=x+C_2 \;\Rightarrow\; y=-\dfrac{1}{x+C_2}$. Из начального условия $y(0)=1$ находим C_2: $1=-\dfrac{1}{0+C_2} \;\Rightarrow\; C_2 = -1$. Таким образом, $y=\dfrac{1}{1-x}$ – искомое частное решение.

В уравнении общего вида $F\left(y,y',y'',\ldots,y^{(n)}\right)=0$ замена $y'=p(y)$ понижает его порядок на единицу.

9.13. Понятие о краевых задачах для обыкновенных дифференциальных уравнений

Кроме задачи Коши, важными в теории дифференциальных уравнений являются краевые задачи, в которых условия, наложенные на решение, задаются не в одной точке $x_0\in[a;b]$, а на концах отрезка $[a;b]$, внутри которого ищется искомое решение. Геометрически в краевых задачах речь идет об отыскании интегральной кривой дифференциального уравнения, концы которой находятся в точках с абсциссами $x = a$ и $x = b$.

Пусть, например, $y = y(x)$ является интегральной кривой некоторого дифференциального уравнения второго порядка. Тогда для него простейшие краевые (граничные) условия имеют вид

$$y(a) = A, \qquad y(b) = B,$$

где A и B – заданные числа.

Более общими граничными условиями являются соотношения:

$$\left.\begin{aligned} \alpha\, y(a) + \alpha_1\, y'(a) = A \\ \beta\, y(b) + \beta_1\, y'(b) = B, \end{aligned}\right\}$$

связывающие значения искомой функции и ее производной $y'(x)$ в точках a и b. Здесь α, α_1, β, β_1 – заданные действительные числа, причем α и α_1; β и β_1 одновременно не равны нулю.

Краевая задача может иметь единственное решение, либо бесконечное множество решений, либо не иметь решения.

Пример 9.13.1. Решить краевую задачу $y'' = x$, $y(0) = 0$, $y'(1) = 1$.

Решение. $y' = \dfrac{x^2}{2} + C_1$, $y = \dfrac{x^3}{6} + C_1 x + C_2$,

$$\left.\begin{aligned} y(0) = 0 \ &\Rightarrow\ 0 = C_2, \\ y'(1) = 1 \ &\Rightarrow\ 1 = \frac{1}{2} + C_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} C_2 = 0, \\ C_1 = \dfrac{1}{2}, \end{cases}$$

то есть $y = \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{1}{2}x$ – искомое единственное решение.

9.14. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков

Определение 9.14.1. Дифференциальное уравнение n-го порядка называется *линейным*, если оно первой степени относительно искомой функции y и ее производных $y', \ldots, y^{(n)}$, т.е. имеет вид

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f(x), \qquad (9.14.1)$$

где $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$, $f(x)$ – заданные функции от x или постоянные, причем $a_0 \neq 0$ для всех значений x из той области, в которой мы рассматриваем уравнение (9.14.1).

В дальнейшем будем предполагать, что функции $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ и $f(x)$ непрерывны при всех значениях x и что коэффициент $a_0 = 1$ (если он не равен 1, мы можем все члены уравнения поделить на него). Функцию $f(x)$, стоящую в правой части уравнения, будем называть правой частью уравнения.

Если $f(x) \not\equiv 0$, то уравнение называется *линейным неоднородным*. Если же $f(x) \equiv 0$, то уравнение имеет вид

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0 \qquad (9.14.2)$$

и называется *линейным однородным* (левая часть этого уравнения является однородной функцией первого порядка относительно $y, y', y'', \ldots, y^{(n)}$, так как $ty^{(n)} + a_1 t y^{n-1} + \ldots + a_n t y = t\left(y^{(n)} + a_1 y^{n-1} + \ldots + a_n y\right) \quad \forall t \neq 0$).

9.15. Линейные однородные дифференциальные уравнения, свойства их решений. Определитель Вронского. Условия линейной зависимости и независимости решений

Установим некоторые основные свойства линейных однородных уравнений на примере уравнений второго порядка.

ТЕОРЕМА 9.15.1. Если y_1 и y_2 – два частных решения линейного однородного уравнения второго порядка

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0, \qquad (9.15.1)$$

то $y_1 + y_2$ будет решением этого уравнения.

Доказательство. Так как y_1 и y_2 – решения (9.15.1), то

$$y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1 = 0, \qquad y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2 = 0.$$

Подставим $y_1 + y_2$ в левую часть (9.15.1):

$$(y_1 + y_2)'' + a_1(y_1 + y_2)' + a_2(y_1 + y_2) =$$
$$= (y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1) + (y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2) = 0 + 0 = 0,$$

то есть $y_1 + y_2$ тоже решение уравнения (9.15.1).

ТЕОРЕМА 9.15.2. Если y_1 – решение уравнения (9.15.1) и C – постоянная, то Cy_1 будет тоже решением этого уравнения.

Доказательство.

$$(Cy_1)'' + a_1(Cy_1)' + a_2(Cy_1) = C(y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1) = C \cdot 0 = 0.$$

Определение 9.15.1. Два решения уравнения (9.15.1) y_1 и y_2 будем называть *линейно независимыми* на отрезке $[a;b]$, если их отношение на этом отрезке не является постоянным, то есть если $\dfrac{y_1}{y_2} \neq \text{const}$. В противном случае решения называются *линейно зависимыми*.

Иными словами, два решения y_1 и y_2 называются линейными зависимыми на $[a;b]$, если $\exists \lambda = \text{const}$, что $\dfrac{y_1}{y_2} = \lambda$ при $a \leq x \leq b$. В этом случае $y_1 = \lambda y_2$.

Пример 9.15.1. Пусть дано уравнение $y'' - y = 0$. Легко проверить, что функции e^x, e^{-x}, $3e^x$, $5e^{-x}$ будут решениями этого уравнения. При этом функции e^x и e^{-x} линейно независимы на любом отрезке, так как $\dfrac{e^x}{e^{-x}} = e^{2x} \neq \text{const}$ при изменении x. Функции же e^x и $3e^x$ линейно зависимы, так как $\dfrac{3e^x}{e^x} = 3 = \text{const}$.

Определение 9.15.2. Если y_1 и y_2 – функции от x, то определитель

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_1' y_2$$

называется *определителем Вронского* или *вронскианом* данных функций.

Для трех функций вронскиан имеет вид $W(y_1, y_2, y_3) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix}$ и т.д.

ТЕОРЕМА 9.15.3. Если функции y_1 и y_2 линейно зависимы на отрезке $[a;b]$, то определитель Вронского на этом отрезке тождественно равен нулю.

Доказательство. Действительно, если $y_2 = \lambda y_1$, где $\lambda = \text{const}$, то $y_2' = \lambda y_1'$ и

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & \lambda y_1 \\ y_1' & \lambda y_1' \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} y_1 & y_1 \\ y_1' & y_1' \end{vmatrix} = 0.$$

ТЕОРЕМА 9.15.4. Если решения y_1 и y_2 уравнения (9.15.1) линейно независимы на отрезке $[a;b]$, то определитель Вронского $W(y_1, y_2)$ не обращается в нуль ни в одной точке указанного отрезка.

Заметим, что теорема верна для дифференциального уравнения любого порядка до n включительно. Доказательство теоремы не приводим.

ТЕОРЕМА 9.15.5. (о структуре общего решения однородного уравнения). Если y_1 и y_2 – два линейно независимых решения уравнения (9.15.1), то

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2, \tag{9.15.2}$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные, есть его общее решение.

Доказательство. Из теорем 9.15.1 и 9.15.2 следует, что функция $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ будет решением (9.15.1) при любых значениях C_1 и C_2.

Докажем далее, что каковы бы ни были начальные условия $y\big|_{x=x_0} = y_0$, $y'\big|_{x=x_0} = y'_0$, можно так подобрать значения произвольных постоянных C_1 и C_2, чтобы соответствующее частное решение $C_1 y_1 + C_2 y_2$ удовлетворяло этим начальным условиям.

Подставляя начальные условия в $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ и $y' = C_1 y'_1 + C_2 y'_2$, будем иметь

$$\begin{cases} y_0 = C_1 y_1\big|_{x=x_0} + C_2 y_2\big|_{x=x_0}, \\ y'_0 = C_1 y'_1\big|_{x=x_0} + C_2 y'_2\big|_{x=x_0}. \end{cases} \tag{9.15.3}$$

Из системы (9.15.3) можно найти $C_1 = C_1^0$ и $C_2 = C_2^0$ единственным образом, так как определитель этой системы $\Delta = \begin{vmatrix} y_1\big|_{x=x_0} & y_2\big|_{x=x_0} \\ y'_1\big|_{x=x_0} & y'_2\big|_{x=x_0} \end{vmatrix} = W(y_1, y_2)\big|_{x=x_0} \neq 0$ в силу линейной независимости y_1 и y_2. Частное решение $C_1^0 y_1 + C_2^0 y_2$ будет удовлетворять начальным условиям. Теорема доказана.

Для уравнения (9.14.2) общее решение имеет вид

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n,$$

где y_1, y_2, …, y_n – линейно независимые на $[a;b]$ функции, т.е. $W(y_1, y_2, \ldots, y_n) \neq 0$.

Не существует общих методов для нахождения в конечном виде общего решения линейного уравнения (однородного и неоднородного) с переменными коэффициентами. Для уравнений с постоянными коэффициентами такие методы существуют. Мы их сейчас и рассмотрим.

9.16. Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

Рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка

$$y'' + py' + qy = 0, \tag{9.16.1}$$

где p и q – постоянные действительные числа.

Чтобы найти общее решение этого уравнения надо найти два его линейно независимых частных решения.

Будем искать частные решения в виде

$$y = e^{kx}, \quad \text{где} \quad k = \text{const}, \tag{9.16.2}$$

тогда $y' = ke^{kx}$, $y'' = k^2 e^{kx}$. Подставим y, y', y'' в (9.16.1): $k^2 e^{kx} + pke^{kx} + qe^{kx} = 0 \Rightarrow e^{kx}\left(k^2 + pk + q\right) = 0$. Так как $e^{kx} \neq 0$, то

$$k^2 + pk + q = 0. \tag{9.16.3}$$

Если k будет удовлетворять уравнению (9.16.3), то e^{kx} будет решением уравнения (9.16.1). Уравнение (9.16.3) называется *характеристическим уравнением,* соответствующим уравнению (9.16.1).

В зависимости от дискриминанта $\left(D = \dfrac{p^2}{4} - q\right)$ приведенного квадратного уравнения (9.16.3) рассмотрим три случая.

I. Корни характеристического уравнения действительны и различны $(D > 0)$: $k_{1,2} = -\dfrac{p}{2} \pm \sqrt{\dfrac{p^2}{4} - q}$, $k_1 \neq k_2$. В этом случае частными решениями будут функции $y_1 = e^{k_1 x}$ и $y_2 = e^{k_2 x}$, причем они линейно независимы, так как

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{e^{k_2 x}}{e^{k_1 x}} = e^{(k_2 - k_1)x} \neq \text{const} \quad \text{при} \quad k_1 \neq k_2.$$

Следовательно, общее решение

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}. \tag{9.16.4}$$

П р и м е р 9.16.1. Решить уравнение $y'' + y' - 2y = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение имеет вид $k^2 + k - 2 = 0$ $\Rightarrow$ $k_1 = 1$, $k_2 = -2$. Тогда $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-2x}$ – общее решение.

II. Корни характеристического уравнения действительны и равны $(D=0)$: $k_1=k_2$.

Одно частное решение $y_1=e^{k_1x}$. Будем искать второе частное решение в виде $y_2=u(x)e^{k_1x}$, где $u(x)$ – неизвестная функция, подлежащая определению.

Дифференцируя, находим

$$y_2{}'=u'e^{k_1x}+k_1u\,e^{k_1x}=e^{k_1x}(u'+k_1u),$$

$$y_2{}''=u'e^{k_1x}+2k_1u'e^{k_1x}+k_1^2ue^{k_1x}=e^{k_1x}\left(u''+2k_1u'+k_1^2u\right).$$

Подставляя y_2, y_2', y_2'' в (9.16.1), получим

$$e^{k_1x}\left(u''+(2k_1+p)u'+\left(k_1^2+pk_1+q\right)u\right)=0. \qquad (9.16.5)$$

Так как k_1 – корень (9.16.3), то $k_1^2+pk_1+q=0$. Кроме того, $k_{1,2}=-\dfrac{p}{2}\pm\sqrt{\dfrac{p^2}{4}-q}=-\dfrac{p}{2}\pm\sqrt{0}=-\dfrac{p}{2}$, так как дискриминант $D=0$. Из $k_1=-\dfrac{p}{2}\ \Rightarrow\ 2k_1=-p\ \Rightarrow\ 2k_1+p=0$.

Таким образом, от уравнения (9.16.5) остается $\left(e^{kx}\neq 0\right)$ $u''=0\ \Rightarrow$ $u'=C_1\ \Rightarrow\ u=C_1x+C_2$. Так как мы ищем частное решение $y_2=u(x)e^{k_1x}$, то можно положить $C_1=1$, $C_2=0$, т.е. $u(x)=x$. Итак, $y_2=xe^{k_1x}$. Это решение линейно независимо с первым, так как

$$\frac{y_2}{y_1}=\frac{xe^{k_1x}}{e^{k_1x}}=x\neq\text{const}.$$

Поэтому общим решением (9.16.1) будет функция

$$y=C_1e^{k_1x}+C_2xe^{k_2x},\ \text{ или }\ y=e^{k_1x}(C_1+C_2x). \qquad (9.16.6)$$

Пример 9.16.2. Дано уравнение $y''-4y'+4y=0$.

Решение. Запишем характеристическое уравнение $k^2-4k+4=0$, $D=0$, $k_{1,2}=-\dfrac{p}{2}=2$, т.е $k_1=k_2=2$. (В данном случае в левой части мы имеем полный квадрат $(k-2)^2=0\ \Rightarrow\ (k-2)(k-2)=0\ \Rightarrow\ k-2=0$, $k_1=2$; $k-2=0$, $k_2=2$). Общим решением будет функция $y=e^{2x}(C_1+C_2x)$.

III. Корни характеристического уравнения комплексные $(D<0)$.

Из известной формулы решения приведенного характеристического уравнения получаем

$$k_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}\cdot\sqrt{-1}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}\,i\quad\left(i=\sqrt{-1}\right).$$

Пусть действительная часть $\alpha=-\dfrac{p}{2}$, а мнимая $\beta=\sqrt{q-\dfrac{p^2}{4}}$ $\left(D=\dfrac{p^2}{4}-q<0\;\Rightarrow\; q-\dfrac{p^2}{4}>0\right)$, тогда

$$k_1=\alpha+i\beta,\qquad k_2=\alpha-i\beta,$$

и частные решения можно записать в виде

$$y_1=e^{(\alpha+i\beta)x},\quad y_2=e^{(\alpha-i\beta)x}. \tag{9.16.7}$$

Это комплексные функции действительного аргумента, и они нас не очень то устраивают.

Докажем, что если функция $y=u(x)+iv(x)$ удовлетворяет уравнению (9.16.1), то этому уравнению удовлетворяют и функции $u(x)$ и $v(x)$.

$$\left(u(x)+iv(x)\right)''+p\left(u(x)+iv(x)\right)'+q\left(u(x)+iv(x)\right)\equiv 0,\text{ или}$$
$$\left(u''(x)+pu'(x)+qu(x)\right)+i\left(v''(x)+pv'(x)+qv(x)\right)\equiv 0+i\cdot 0.$$

Но комплексная функция равна нулю, если равны нулю действительная и мнимая части, т.е.

$$u''(x)+pu'(x)+qu(x)=0,\qquad v''(x)+pv'(x)+qv(x)=0\quad\Rightarrow$$

$u(x)$ и $v(x)$ являются решениями (9.16.1).

Функции (9.16.7) представим по формуле Эйлера

$$y_1=e^{\alpha x}\cos\beta x+ie^{\alpha x}\sin\beta x,\qquad y_2=e^{\alpha x}\cos\beta x-ie^{\alpha x}\sin\beta x.$$

По доказанному частными решениями уравнения будут функции $\bar{y}_1=e^{\alpha x}\cos\beta x$ и $\bar{y}_2=e^{\alpha x}\sin\beta x$, которые линейно независимы, так как $\dfrac{\bar{y}_2}{\bar{y}_1}=\dfrac{e^{\alpha x}\sin\beta x}{e^{\alpha x}\cos\beta x}=\operatorname{tg}\beta x\neq\text{const}$.

Следовательно, общее решение уравнения (9.16.1)

$$y=C_1\bar{y}_1+C_2\bar{y}_2=C_1e^{\alpha x}\cos\beta x+C_2e^{\alpha x}\sin\beta x,\qquad\text{или}$$
$$y=e^{\alpha x}\left(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x\right), \tag{9.16.8}$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

П р и м е р 9.16.3. Найти частное решение уравнения $y'' + 9y = 0$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$.

Решение. Характеристическое уравнение $k^2 + 9 = 0 \Rightarrow k^2 = -9 \Rightarrow$ $k_{1,2} = \pm\sqrt{-9} = \pm 3i$, т.е. $\alpha = 0$, $\beta = 3$. Тогда $y = e^{0x}\left(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x\right)$, т.е. $y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x$ – общее решение данного уравнения.
Найдем $y' = -3C_1 \sin 3x + 3C_2 \cos 3x$.

$$\begin{matrix} y(0) = 0 & \Rightarrow \\ y'(0) = 3 & \Rightarrow \end{matrix} \begin{cases} 0 = C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0, \\ 3 = -3C_1 \cdot 0 + 3C_2 \cdot 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 0, \\ C_2 = 1, \end{cases}$$

т.е. частное решение имеет вид $y = \sin 3x$.

Используя формулы (9.16.4), (9.16.6) и (9.16.8), можно решать линейные однородные дифференциальные уравнения высших порядков.

Рассмотрим в общем виде уравнение третьего порядка

$$y''' + a_1 y'' + a_2 y' + a_3 y = 0, \qquad (9.16.9)$$

где a_1, a_2, a_3 – постоянные действительные числа. Соответствующее характеристическое уравнение, очевидно, имеет вид

$$k^3 + a_1 k^2 + a_2 k + a_3 = 0.$$

Рассмотрим следующие случаи:

1) $k_1 \neq k_2 \neq k_3$ – действительные числа. Тогда общее решение

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} + C_3 e^{k_3 x};$$

2) $k_1 \neq k_2 = k_3$ – действительные числа. Тогда

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} + C_3 x e^{k_2 x};$$

3) $k_1 = k_2 = k_3$ – действительные числа. Тогда

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 x e^{k_1 x} + C_3 x^2 e^{k_1 x};$$

4) k_1 – действительный корень, $k_{2,3} = \alpha \pm \beta i$ – комплексные корни.

$$y = C_1 e^{k_1 x} + e^{\alpha x}\left(C_2 \cos \beta x + C_3 \sin \beta x\right)$$

(все остальные случаи входят в рассмотренные).

П р и м е р 9.16.4. Найти общее решение уравнения $y^{IV} - y = 0$.

Решение. Составляем и решаем характеристическое уравнение

$$k^4 - 1 = 0 \Rightarrow \left(k^2 - 1\right)\left(k^2 + 1\right) = 0 \Rightarrow k^2 - 1 = 0 \Rightarrow k_{1,2} = \pm 1;$$

$$k^2 + 1 = 0 \Rightarrow k^2 = -1 \Rightarrow k_{3,4} = \pm\sqrt{-1} = \pm i \quad (\alpha = 0, \ \beta = 1).$$

Поэтому $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x$ – искомое общее решение.

9.17. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения. Метод вариации произвольных постоянных

Рассмотрим сначала линейное неоднородное уравнение второго порядка

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x), \tag{9.17.1}$$

где a_1, a_2, $f(x)$ – либо непрерывные функции, либо постоянные числа.

Структура общего решения такого уравнения определяется следующей теоремой.

ТЕОРЕМА 9.17.1. Общее решение неоднородного уравнения (9.17.1) представляет собой сумму какого-нибудь частного решения этого уравнения $y_ч$ и общего решения $y_{одн}$ соответствующего однородного уравнения

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0. \tag{9.17.2}$$

Из теоремы следует, что $y = y_{одн} + y_ч$.

Таким образом, если известно общее решение соответствующего однородного уравнения, то основная задача решения неоднородного уравнения состоит в нахождении какого-либо его частного решения.

Укажем общий метод нахождения частного решения неоднородного уравнения.

Метод вариации произвольных постоянных (Лагранжа)

Предположим известно общее решение однородного уравнения

$$y_{одн} = C_1 y_1 + C_2 y_2, \tag{9.17.3}$$

где y_1 и y_2 – линейно независимые частные решения однородного уравнения.

Будем искать частное решение неоднородного уравнения в виде

$$y_ч = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2, \tag{9.17.4}$$

рассматривая C_1 и C_2 как некоторые пока неизвестные функции.

Продифференцируем равенство (9.17.4):

$$y_ч' = C_1' y_1 + C_1 y_1' + C_2' y_2 + C_2 y_2'.$$

Подберем искомые функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ так, чтобы

$$C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0. \tag{9.17.5}$$

Тогда $y_ч' = C_1 y_1' + C_2 y_2' \Rightarrow y_ч'' = C_1' y_1' + C_1 y_1'' + C_2' y_2' + C_2 y_2''$.

Подставляя $y_ч$, $y_ч'$, $y_ч''$ в (9.17.1), получим

$$C_1 y_1'' + C_1' y_1' + C_2' y_2' + C_2 y_2'' + a_1\left(C_1 y_1' + C_2 y_2'\right) + a_2\left(C_1 y_1 + C_2 y_2\right) = f(x)$$

или

$$C_1\left(y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1\right) + C_2\left(y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2\right) + C_1' y_1' + C_2' y_2' = f(x).$$

Выражения, стоящие в первых двух скобках, обращаются в нуль, так как y_1 и y_2 – решения однородного уравнения. Следовательно, последнее равенство имеет вид

$$C_1' y_1' + C_2' y_2' = f(x). \qquad (9.17.6)$$

Объединяя уравнения (9.17.5) и (9.17.6), получаем для определения производных от неизвестных функций $C_1(x)$ и $C_2(x)$ систему:

$$\begin{cases} C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0, \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' = f(x). \end{cases} \qquad (9.17.7)$$

Определитель этой системы $\Delta = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = W(y_1, y_2) \neq 0$, так как y_1 и y_2 – линейно независимые решения. Поэтому система (9.17.7) имеет единственное решение. Решая ее, найдем

$$\begin{cases} C_1'(x) = \varphi(x), \\ C_2'(x) = \psi(x). \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1(x) = \int \varphi(x)\,dx, \\ C_2(x) = \int \psi(x)\,dx \end{cases}$$

(так как мы ищем частное решение, то постоянные интегрирования не берем).

Подставляя полученные функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ в (9.17.4), получим частное решение.

Если же взять $C_1(x) = \int \varphi(x)\,dx + C_3$, $C_2(x) = \int \psi(x)\,dx + C_4$ и подставить в (9.17.4), то получим сразу общее решение уравнения (9.17.1).

Пример 9.17.1. Найти общее решение уравнения $y'' - \dfrac{y'}{x} = x$.

Решение. Найдем общее решение однородного уравнения

$$y'' - \frac{y'}{x} = 0 \;\Rightarrow\; y'' = \frac{y'}{x} \;\Rightarrow\; \frac{y''}{y'} = \frac{1}{x} \;\Rightarrow\; \ln|y'| = \ln|x| + \ln C_1 \;\Rightarrow\; y' = C_1 x \;\Rightarrow$$

$$y_{одн} = C_1 \frac{x^2}{2} + C_2.$$

Частное решение неоднородного уравнения ищем в виде

$$y_ч = C_1(x)\frac{x^2}{2} + C_2(x)\cdot 1$$

($y_1 = \frac{x^2}{2}$, $y_2 = 1$ – частные решения однородного уравнения).

Составляем систему (9.17.7)

$$\begin{cases} C_1' \cdot \frac{x^2}{2} + C_2' \cdot 1 = 0, \\ C_1' \cdot x + C_2' \cdot 0 = x. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1' = 1, \\ C_2' = -\frac{x^2}{2}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1(x) = x, \\ C_2(x) = -\frac{x^3}{6}. \end{cases}$$

Тогда $y_ч = C_1(x)\frac{x^2}{2} + C_2(x) = x \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} = \frac{x^3}{3}$, а общее решение

$$y = C_1\frac{x^2}{2} + C_2 + \frac{x^3}{3}.$$

При отыскании частных решений иногда полезно использовать следующую теорему.

Т Е О Р Е М А 9.17.2. Частное решение уравнения

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f_1(x) + f_2(x), \tag{9.17.8}$$

где правая часть есть сумма двух функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$, можно представить в виде суммы $y_ч = y_{ч1} + y_{ч2}$, $y_{ч1}$ и $y_{ч2}$ – частные решения, уравнений:

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f_1(x),$$

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f_2(x).$$

У п р а ж н е н и е. Доказать теорему самостоятельно.

Для уравнения третьего порядка

$$y_{одн} = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3,$$

$$y_ч = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2 + C_3(x) y_3,$$

а система (9.17.7) выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} C_1' y_1 + C_2' y_2 + C_3' y_3 = 0, \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' + C_3' y_3' = 0, \\ C_1' y_1'' + C_2' y_2'' + C_3' y_3'' = f(x). \end{cases}$$

Аналогично можно найти частное решение и для уравнений более высокого порядка.

9.18. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

Рассмотрим дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами

$$y'' + py' + qy = f(x), \qquad (9.18.1)$$

где p и q – постоянные действительные числа.

В предыдущем разделе был указан общий метод нахождения частного решения неоднородного уравнения (метод вариации). В случае уравнения с постоянными коэффициентами частное решение иногда (для так называемых «специальных» правых частей) бывает возможным найти проще, *не прибегая к интегрированию*.

Рассмотрим такие случаи для уравнения (9.18.1).

I. Пусть правая часть этого уравнения представляет собой произведение показательной функции на многочлен, т.е.

$$f(x) = e^{\alpha x} \cdot p_n(x), \qquad (9.18.2)$$

где $p_n(x)$ – известный многочлен n-ной степени. Тогда возможны следующие случаи:

а) Число α не является корнем характеристического уравнения $k^2 + pk + q = 0$.

В этом случае частное решение нужно искать в виде

$$y_ч = e^{\alpha x} Q_n(x), \qquad (9.18.3)$$

где $Q_n(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_n$ – многочлен тоже степени n (как и многочлен $p_n(x)$) с неизвестными коэффициентами $A_0, A_1, \ldots, A_n$. Тогда

$$y_ч' = \alpha e^{\alpha x} Q_n(x) + e^{\alpha x} \cdot Q_n'(x),$$

$$y_ч'' = \alpha^2 e^{\alpha x} Q_n(x) + \alpha e^{\alpha x} Q_n'(x) + \alpha e^{\alpha x} Q_n'(x) + e^{\alpha x} \cdot Q_n''(x).$$

Подставляя $y_ч$, $y_ч'$ и $y_ч''$ в (9.18.1), получаем

$$\alpha^2 e^{\alpha x} Q_n(x) + 2\alpha e^{\alpha x} Q_n'(x) + e^{\alpha x} Q_n''(x) + \alpha e^{\alpha x} p Q_n'(x) + q e^{\alpha x} Q_n(x) = f(x).$$

Сокращая на $e^{\alpha x}$ и группируя, имеем

$$Q_n''(x) + (2\alpha + p) Q_n' + \left(\alpha^2 + p\alpha + q\right) Q_n(x) = p_n(x), \qquad (9.18.4)$$

где $Q_n(x)$ – многочлен n-ной степени, $Q_n'(x)$ – многочлен степени (n–1), $Q_n''(x)$ – многочлен степени (n–2).

Таким образом, слева и справа от знака равенства в (9.18.4) стоят многочлены n-ной степени. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x (число неизвестных коэффициентов равно $n+1$), получим систему из $(n+1)$ уравнений. Решив эту систему, найдем неизвестные коэффициенты $A_0, A_1, \ldots, A_n$.

б) Число α есть простой (однократный) корень характеристического уравнения, т.е. $\alpha^2 + p\alpha + q = 0$.

Если в этом случае частное решение искать в виде (9.18.3), то в равенстве (9.18.4) слева получится многочлен $(n-1)$ степени, так как $\alpha^2 + p\alpha + q = 0$, и слагаемое с $Q_n(x)$ вообще исчезает. Следовательно, ни при каких $A_0, A_1, \ldots, A_n$ равенство (9.18.4) не будет тождеством. Поэтому частное решение надо искать в виде многочлена $(n+1)$ степени, но без свободного члена (который исчез бы при дифференцировании). Степень многочлена увеличим на 1 умножением на x, т.е.

$$y_ч = xe^{\alpha x}Q_n(x).$$

в) Число α есть двукратный корень характеристического уравнения $\left(\alpha = k_1 = k_2 = -\frac{p}{2} \Rightarrow \alpha = -\frac{p}{2} \Rightarrow 2\alpha + p = 0\right)$. Тогда в равенстве (9.18.4) $\alpha^2 + p\alpha + q = 0$ и $2\alpha + p = 0$, и оно примет вид

$$Q_n''(x) = P_n(x),$$

т.е. в левой части многочлен $(n-2)$ степени, поэтому степень многочлена $Q_n(x)$ надо увеличить на 2, это можно сделать умножением на x^2 (свободный член и коэффициент при x исчезают при двукратном дифференцировании), т.е.

$$y_ч = x^2 e^{\alpha x}Q_n(x).$$

Все три случая можно объединить одной формулой $y_ч = x^e e^{\alpha x}Q_n(x)$, где e – кратность α как корня характеристического уравнения.

Пример 9.18.1. Найти общее решение уравнения

$$y'' + 9y = \left(x^2 + 1\right)e^{3x}.$$

Решение. Характеристическое уравнение для соответствующего однородного уравнения $y'' + 9y = 0$ имеет вид $k^2 + 9 = 0 \Rightarrow k^2 = -9 \Rightarrow k_{1,2} = \pm\sqrt{-9} = \pm 3i$. $\alpha = 0$, $\beta = 3$, и поэтому общее решение

$$y_{одн} = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x.$$

Правая часть $f(x)=e^{3x}\left(x^2+1\right)=e^{\alpha x}P_2(x)$, где $\alpha = 3$ не является корнем характеристического уравнения. Поэтому частное решение неоднородного уравнения ищем в виде

$$y_ч=e^{\alpha x}Q_2(x), \quad \text{или} \quad y_ч=e^{3x}\left(Ax^2+Bx+C\right) \Rightarrow$$

$$y_ч'=3e^{3x}\left(Ax^2+Bx+C\right)+e^{3x}(2Ax+B),$$

$$y_ч''=9e^{3x}\left(Ax^2+Bx+C\right)+3e^{3x}(2Ax+B)+3e^{3x}(2Ax+B)+e^{3x}\cdot 2A.$$

Подставляя $y_ч$, $y_ч'$, $y_ч''$ в исходное уравнение, получим

$$9e^{3x}\left(Ax^2+Bx+C\right)+6e^{3x}(2Ax+B)+e^{3x}\cdot 2A+9e^{3x}\left(Ax^2+Bx+C\right)=e^{3x}\left(x^2+1\right).$$

Сокращая на e^{3x} обе части уравнения и приводя подобные члены, имеем

$$18Ax^2+18Bx+18C+12Ax+6B+2A=x^2+1.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x слева и справа от знака равенства, получим систему для определения неизвестных коэффициентов A, B, C:

$$\begin{array}{l} x^2: \\ x\;: \\ x^0: \end{array}\begin{cases} 18A=1, \\ 18B+12A=0, \\ 18C+6B+2A=1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\dfrac{1}{18}, \\ B=-\dfrac{2}{3}A=-\dfrac{1}{27}, \\ C=\dfrac{1-2A-6B}{18}=\dfrac{5}{81}. \end{cases}$$

Следовательно, частное решение $y_ч=e^{3x}\left(\dfrac{1}{18}x^2-\dfrac{1}{27}x+\dfrac{5}{81}\right)$, а общее решение $y=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x+e^{3x}\left(\dfrac{1}{18}x^2-\dfrac{1}{27}x+\dfrac{5}{81}\right)$.

Пример 9.18.2. Решить уравнение $y''-7y'+6y=e^x(x-2)$.

Решение. $k^2-7k+6=0 \Rightarrow k_1=1$, $k_2=6$ и $y_{одн}=C_1e^x+C_2e^{6x}$.

$f(x)=e^x(x-2)=e^{\alpha x}p_1(x)$, где $\alpha = 1$ является однократным корнем характеристического уравнения $(\alpha=k_1=1)$, поэтому $y_ч=xe^{\alpha x}Q_1(x)$, т.е

$$y_ч=xe^x(Ax+B) \Rightarrow y_ч=e^x\left(Ax^2+Bx\right),$$

$$y_ч' = e^x\left(Ax^2 + Bx\right) + e^x\left(2Ax + B\right),$$

$$y_ч'' = e^x\left(Ax^2 + Bx\right) + 2e^x\left(2Ax + B\right) + e^x \cdot 2A.$$

Подставим $y_ч$, $y_ч'$ и $y_ч''$ в исходное уравнение

$$e^x\left(Ax^2 + Bx\right) + 2e^x\left(2Ax + B\right) + e^x \cdot 2A - 7e^x\left(Ax^2 + Bx\right) -$$

$$-7e^x\left(2Ax + B\right) + 6e^x\left(Ax^2 + Bx\right) = e^x\left(x - 2\right).$$

Сокращая на e^x обе части и приводя подобные члены, получим

$$-5\left(2Ax + B\right) + 2A = x - 2. \Rightarrow \begin{cases} x\ : -10A = 1, \\ x^0 : -5B + 2A = -2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -0{,}1; \\ B = \dfrac{2 + 2A}{5} = 0{,}36. \end{cases}$$

Следовательно, $y_ч = x\left(-0{,}1x + 0{,}36\right)e^x$, а общее решение

$$y = C_1e^x + C_2e^{6x} + x\left(-0{,}1x + 0{,}36\right)e^x.$$

II. Пусть правая часть имеет вид

$$f\left(x\right) = e^{\alpha x}P\left(x\right)\cos\beta x + e^{\alpha x}Q\left(x\right)\sin\beta x,$$

где $P\left(x\right)$ и $Q\left(x\right)$ – многочлены от x.

Составим комплексно-сопряженные числа $\alpha \pm i\beta$, где α берется из показателя $e^{\alpha x}$, а β из аргумента $\cos\beta x$ и $\sin\beta x$, и рассмотрим два случая:

а) если числа $\alpha \pm i\beta$ не являются корнями характеристического уравнения, то частное решение неоднородного уравнения следует искать в виде

$$y_ч = e^{\alpha x}u\left(x\right)\cos\beta x + e^{\alpha x}v\left(x\right)\sin\beta x, \qquad (9.18.5)$$

где $u(x)$ и $v(x)$ – многочлены, степень которых равна наивысшей степени многочленов $P\left(x\right)$ и $Q\left(x\right)$.

б) если числа $\alpha \pm i\beta$ являются корнями характеристического уравнения, то

$$y_ч = x\left(e^{\alpha x}u\left(x\right)\cos\beta x + e^{\alpha x}v\left(x\right)\sin\beta x\right). \qquad (9.18.6)$$

При этом указанные формы частных решений (9.18.5) и (9.18.6) сохраняются в полном виде и в том случае, когда в правой части один из многочленов $P\left(x\right)$ или $Q\left(x\right)$ отсутствует.

П р и м е р 9.18.3. Решить уравнение $y'' - y = 3e^{2x}\cos x$.

Решение. $k^2 - 1 = 0 \Rightarrow k_{1,2} = \pm 1 \Rightarrow y_{одн} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{x}$. Правая часть $f(x) = 3e^{2x}\cos x = e^{\alpha x} P_0(x)\cos\beta x + e^{\alpha x}\cdot 0\cdot\sin\beta x$, где $\alpha = 2$, $\beta = 1$, $P_0(x) = 3$, $Q_0(x) \equiv 0$.

$\alpha \pm i\beta = 2 \pm i\cdot 1$ не являются корнями характеристического уравнения, поэтому $y_ч = e^{\alpha x} u_0(x)\cos\beta x + e^{\alpha x} v_0(x)\sin\beta x$, т.е.

$$y_ч = e^{2x} A\cos x + e^{2x} B\sin x \quad \text{или} \quad y_ч = e^{2x}\left(A\cos x + B\sin x\right) \Rightarrow$$

$$y_ч' = 2e^{2x}\left(A\cos x + B\sin x\right) + e^{2x}\left(-A\sin x + B\cos x\right),$$

$$y_ч'' = 4e^{2x}\left(A\cos x + B\sin x\right) + 2e^{2x}\left(-A\sin x + B\cos x\right) +$$

$$+ 2e^{2x}\left(-A\sin x + B\cos x\right) + e^{2x}\left(-A\cos x - B\sin x\right).$$

Подставляем $y_ч$, $y_ч'$ и $y_ч''$ в исходное уравнение

$$4e^{2x}\left(A\cos x + B\sin x\right) + 4e^{2x}\left(-A\sin x + B\cos x\right) -$$

$$-e^{2x}\left(A\cos x + B\sin x\right) - e^{2x}\left(A\cos x + B\sin x\right) = 3e^{2x}\cos x.$$

Сокращая обе части на e^{2x} и приводя подобные члены, получим

$$2\left(A\cos x + B\sin x\right) + 4\left(-A\sin x + B\cos x\right) = 3\cos x \quad \text{или}$$

$$2A\cos x + 2B\sin x - 4A\sin x + 4B\cos x = 3\cos x.$$

Приравнивая коэффициенты при $\cos x$ и $\sin x$ в левой и правой части равенства, имеем

$$\begin{matrix}\cos x: \\ \sin x:\end{matrix}\begin{cases} 2A + 4B = 3, \\ 2B - 4A = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = 2A, \\ 2A + 8A = 3. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 0{,}3; \\ B = 0{,}6. \end{cases}$$

Следовательно, частное решение $y_ч = e^{2x}\left(0{,}3\cos x + 0{,}6\sin x\right)$, а общее $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{x} + e^{2x}\left(0{,}3\cos x + 0{,}6\sin x\right)$.

III. Рассмотрим далее важный частный случай. Пусть правая часть имеет вид:

$$f(x) = M\cos\beta x + N\sin\beta x,$$

где M и N – постоянные числа.

а) Если $\pm\beta i$ ($\alpha = 0$) не являются корнями характеристического уравнения, то частное решение следует искать в виде

$$y_ч = A\cos\beta x + B\sin\beta x.$$

б) Если $\pm\beta i$ являются корнями характеристического уравнения, то частное решение следует искать в виде

$$y_ч = x\left(A\cos\beta x + B\sin\beta x\right).$$

Пример 9.18.4. Найти общее решение $y'' + 2y' + 5y = 2\cos x$.

Решение. Характеристическое уравнение $k^2 + 2k + 5 = 0$ имеет корни $k_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-5} + = -1 \pm 2i$.

$\pm\beta i = \pm i$ не являются корнями характеристического уравнения, поэтому частное решение ищем в виде $y_ч = A\cos x + B\sin x$, где A и B – неизвестные коэффициенты, подлежащие определению.

$y_ч' = -A\sin x + B\cos x$, $y_ч'' = -A\cos x - B\sin x$. Подставляя $y_ч$, $y_ч'$ и $y_ч''$ в исходное уравнение получим

$$-A\cos x - B\sin x + 2\left(-A\sin x + B\cos x\right) + 5\left(A\cos x + B\sin x\right) = 2\cos x.$$

Приравнивая коэффициенты при $\cos x$ и $\sin x$, получим

$$\left.\begin{array}{l} \cos x: -A + 2B + 5A = 2, \\ \sin x: -B - 2A + 5B = 0. \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} 2A + B = 1, \\ 2B - A = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 2B, \\ 5B = 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 0,4; \\ B = 0,2. \end{cases}$$

Общее решение $y = y_{одн} + y_ч$, т.е.

$$y = e^{-x}\left(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x\right) + 0,4\cos x + 0,2\sin x.$$

Пример 9.18.5. Указать вид частного решения уравнения

$$y'' + 4y = \cos 2x.$$

Решение. $k^2 + 4 = 0 \Rightarrow k^2 = -4$, $k_{1,2} = \pm 2i$. Из $\cos 2x$ $\beta = 2$, $\pm\beta i = \pm 2i$ совпадают с корнями характеристического уравнения, поэтому частное решение исходного уравнения следует искать в виде

$$y_ч = x\left(A\cos 2x + B\sin 2x\right).$$

В случае неоднородных дифференциальных уравнений высшего порядка с постоянными коэффициентами со специальной правой частью частные решения находятся аналогично.

Пример 9.18.6. Решить уравнение $y^{IV} - y = x^3 + 1$.

Решение. Характеристическое уравнения $k^4 - 1 = 0 \Rightarrow$ $\left(k^2 - 1\right)\left(k^2 + 1\right) = 0 \Rightarrow k^2 - 1 = 0$, $k_{1,2} = \pm 1$; $k^2 + 1 = 0$, $k^2 = -1$ $k_{3,4} = \pm i$.

Из правой части $\alpha = 0$ $\left(f(x) = e^{0\cdot x} P_3(x)\right)$ и не является корнем характеристического уравнения, поэтому $y_ч = e^{0\cdot x} Q_3(x)$, т.е. $y_ч = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$.

Тогда $y_ч{}' = 3Ax^2 + 2Bx + C$, $y_ч{}'' = 6Ax + 2B$, $y_ч{}''' = 6A$, $y_ч{}^{IY} = 0$.

$$0 - Ax^3 - Bx^2 - Cx - D = x^3 + 1 \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} x^3 &: -A = 1, \\ x^2 &: -B = 0, \\ x &: -C = 0, \\ x^0 &: -D = 1. \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} A = -1, \\ B = 0, \\ C = 0, \\ D = -1. \end{cases} \Rightarrow$$

$y_ч = -x^3 - 1$, а общее решение

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x - x^3 - 1.$$

Пример 9.18.7. Указать вид частного решения уравнения

$$y^{IY} - y = 5\cos x.$$

Решение. $k^4 - 1 = 0 \Rightarrow k_{1,2} = \pm 1$, $k_{3,4} = \pm i$. Из правой части $\pm\beta i = \pm i$ являются корнями характеристического уравнения, поэтому частное решение ищем в виде $y_ч = x\left(A\cos x + B\sin x\right)$.

9.19. Системы дифференциальных уравнений. Решение систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

При решении многих задач требуется найти функции $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$, …, $y_n = y_n(x)$, которые удовлетворяют системе дифференциальных уравнений, содержащих аргумент x, искомые функции $y_1, y_2, \ldots, y_n$ и их производные.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений первого порядка.

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, ..., y_n), \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, ..., y_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, ..., y_n), \end{cases} \tag{9.19.1}$$

где $y_1, y_2, \ldots, y_n$ – искомые функции, x – аргумент.

Такая система, когда в левой части уравнений стоят производные первого порядка, а правые части не содержат производных, называется *нормальной*.

Проинтегрировать систему – значит определить функции $y_1, y_2, \ldots, y_n$, удовлетворяющие системе уравнений (9.19.1) и данным начальным условиям

$$y_1(x_0) = y_{10},\ \ y_2(x_0) = y_{20},\ \ldots,\ y_n(x_0) = y_{n0}. \tag{9.19.2}$$

В дифференциальные уравнения системы могут входить производные высших порядков. В этом случае получается система дифференциальных уравнений высших порядков.

Рассмотрим систему линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n, \end{cases} \tag{9.19.3}$$

где коэффициенты a_{ij} $\left(i = \overline{1,n};\ \ j = \overline{1,n}\right)$ – постоянные числа.

Будем искать частные решения системы в следующем виде

$$x_1 = \alpha_1 e^{kt},\ \ x_2 = \alpha_2 e^{kt},\ \ldots,\ x_n = \alpha_n e^{kt}. \tag{9.19.4}$$

Требуется определить постоянные $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ и k так, чтобы функции $\alpha_1 e^{kt}$, $\alpha_2 e^{kt}$, …, $\alpha_n e^{kt}$ удовлетворяли системе (9.19.3). Подставляя их в систему, получим

$$\begin{cases} k\alpha_1 e^{kt} = \left(a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \ldots + a_{1n}\alpha_n\right)e^{kt}, \\ k\alpha_2 e^{kt} = \left(a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \ldots + a_{2n}\alpha_n\right)e^{kt}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ k\alpha_n e^{kt} = \left(a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \ldots + a_{nn}\alpha_n\right)e^{kt}. \end{cases}$$

Сократим на e^{kt} обе части уравнений. Перенося все члены в одну сторону и собирая коэффициенты при $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, получим систему:

$$\begin{cases} \left(a_{11}-k\right)\alpha_1 + & a_{12}\alpha_2 + & \ldots + & a_{1n}\alpha_n = 0, \\ a_{21}\alpha_1 + & \left(a_{22}-k\right)\alpha_2 + & \ldots + & a_{2n}\alpha_n = 0, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}\alpha_1 + & a_{n2}\alpha_2 + & \ldots + & \left(a_{nn}-k\right)\alpha_n = 0. \end{cases} \tag{9.19.5}$$

Система (9.19.5) – это система линейных однородных алгебраических уравнений относительно $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Выпишем определитель этой системы

$$\Delta(k) = \begin{vmatrix} a_{11}-k & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-k & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-k \end{vmatrix}.$$

Если k таково, что $\Delta \neq 0$, то система (9.19.5) имеет только нулевые решения $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, …, $\alpha_n = 0$, а формулы (9.19.4) дают только тривиальные решения: $x_1(t) = x_2(t) = \ldots = x_n(t) = 0$.

Таким образом, нетривиальные решения мы получим только при таких k, при которых определитель $\Delta = 0$, т.е.

$$\begin{vmatrix} a_{11}-k & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-k & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-k \end{vmatrix} = 0. \tag{9.19.6}$$

Это уравнение называется характеристическим уравнением системы (9.19.3), оно является алгебраическим уравнением n-ного порядка для определения k.

Рассмотрим только случай, когда корни характеристического уравнения действительные и различные: $k_1 \neq k_2 \neq \ldots \neq k_n$. Для каждого корня $k_i \quad \left(i=\overline{1,n}\right)$ напишем систему (9.19.5) и определим числа $\alpha_1^{(i)}$, $\alpha_2^{(i)}$, …, $\alpha_n^{(i)}$.

Таким образом, получаем

для корня k_1 $\qquad x_1^{(1)}=\alpha_1^{(1)}e^{k_1t}$, $x_2^{(1)}=\alpha_2^{(1)}e^{k_1t}$, …, $x_n^{(1)}=\alpha_n^{(1)}e^{k_1t}$;

для корня k_2 $\qquad x_1^{(2)}=\alpha_1^{(2)}e^{k_2t}$, $x_2^{(2)}=\alpha_2^{(2)}e^{k_2t}$, …, $x_n^{(2)}=\alpha_n^{(2)}e^{k_2t}$;

……………………………………………………………………..

для корня k_n $\qquad x_1^{(n)}=\alpha_1^{(n)}e^{k_nt}$, $x_2^{(n)}=\alpha_2^{(n)}e^{k_nt}$, …, $x_n^{(n)}=\alpha_n^{(n)}e^{k_nt}$.

Путем непосредственной подстановки в уравнения системы (9.19.3) можно убедиться, что система функций:

$$\begin{cases} x_1=C_1\alpha_1^{(1)}e^{k_1t}+C_2\alpha_1^{(2)}e^{k_2t}+\ldots+C_n\alpha_1^{(n)}e^{k_nt}, \\ x_2=C_1\alpha_2^{(1)}e^{k_1t}+C_2\alpha_2^{(2)}e^{k_2t}+\ldots+C_n\alpha_2^{(n)}e^{k_nt}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n=C_1\alpha_n^{(1)}e^{k_1t}+C_2\alpha_n^{(2)}e^{k_2t}+\ldots+C_n\alpha_n^{(n)}e^{k_nt}, \end{cases} \qquad (9.19.7)$$

где C_1, C_2, …, C_n – произвольные постоянные, тоже является решением этой системы.

В случае комплексных корней $\alpha+i\beta$ применяются формулы Эйлера $e^{(\alpha+i\beta)t}=e^{\alpha t}\left(\cos\beta t+i\sin\beta t\right)$, тогда частными решениями будут $e^{\alpha t}\cos\beta t$ и $e^{\alpha t}\sin\beta t$. Соответствующий пример рассматривается в практической части модуля.

Пример 9.19.1. Решить систему $\begin{cases} y_1'=3y_1-y_2+y_3, \\ y_2'=-y_1+5y_2-y_3, \\ y_3'=y_1-y_2+3y_3. \end{cases}$

Решение. Характеристическое уравнение $\begin{vmatrix} 3-k & -1 & 1 \\ -1 & 5-k & -1 \\ 1 & -1 & 3-k \end{vmatrix}=0 \Rightarrow$

$$\left(3-k\right)\begin{vmatrix} 5-k & -1 \\ -1 & 3-k \end{vmatrix}-\left(-1\right)\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 3-k \end{vmatrix}+1\begin{vmatrix} -1 & 5-k \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow$$

$$\left(3-k\right)\left(\left(5-k\right)\left(3-k\right)-1\right)+\left(-1\left(3-k\right)+1\right)+\left(1-\left(5-k\right)\right)=0 \quad \Rightarrow$$

$$(3-k)\left(15-3k-5k+k^2-1\right)+(-3+k+1)+(1-5+k)=0 \ \Rightarrow$$

$$(3-k)\left(k^2-8k+14\right)+(k-2)+(k-4)=0 \ \Rightarrow$$

$$3k^2-k^3-24k+8k^2+42-14k+k-2+k-4=0 \ \Rightarrow$$

$$k^3-11k^2+36k-36=0.$$

Легко угадать один корень $k_1=2$. Разделив по правилу деления многочленов $k^3-11k^2+36k-36$ на $(k-2)$, получим $\left(k^2-9k+18\right) \Rightarrow$ $k^2-9k+18=0 \Rightarrow k_2=3,\ k_3=6$.

Для $k_1=2$ система (9.19.5) имеет вид

$$\left.\begin{aligned} (3-2)\alpha_1 \quad -\alpha_2 \quad +\alpha_3&=0,\\ -\alpha_1+(5-2)\alpha_2 \quad -\alpha_3&=0,\\ \alpha_1 \quad -\alpha_2+(3-2)\alpha_3&=0.\end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1-\alpha_2+\alpha_3=0,\\ -\alpha_1+3\alpha_2-\alpha_3=0,\\ \alpha_1-\alpha_2+\alpha_3=0.\end{cases}$$

Решим эту систему методом Гаусса. Имеем (третье уравнение совпадает с первым и мы его отбрасываем): $\left.\begin{aligned}\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3&=0,\\ 2\alpha_2 &=0.\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned}\alpha_2&=0,\\ \alpha_1&=-\alpha_3.\end{aligned}\right\}$

Положим $\alpha_3=-1$, тогда $\alpha_1=1$, т.е. $\alpha_1^{(1)}=1$, $\alpha_2^{(1)}=0$, $\alpha_3^{(1)}=-1$.

Точно так же для $k_2=3$ получим $\alpha_1^{(2)}=1$, $\alpha_2^{(2)}=1$, $\alpha_3^{(2)}=1$, а для $k_3=6$ – $\alpha_1^{(3)}=1$, $\alpha_2^{(3)}=-2$, $\alpha_3^{(3)}=1$. Таким образом,

для $k_1=2$ $\quad y_1^{(1)}=e^{2x}$, $\quad y_2^{(1)}=0$, $\quad y_3^{(1)}=-e^{2x}$;

для $k_2=3$ $\quad y_1^{(2)}=e^{3x}$, $\quad y_2^{(2)}=e^{3x}$, $\quad y_3^{(2)}=e^{3x}$;

для $k_3=6$ $\quad y_1^{(3)}=e^{6x}$; $\quad y_2^{(3)}=-2e^{6x}$; $\quad y_3^{(3)}=e^{6x}$.

Тогда $\begin{cases} y_1=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}+C_3e^{6x},\\ y_2=C_2e^{3x}-2C_3e^{6x},\\ y_3=-C_1e^{2x}+C_2e^{3x}+C_3e^{6x}.\end{cases}$ – общее решение исходной системы.

Системы дифференциальных уравнений можно решать сведением к одному дифференциальному уравнению высшего порядка. Покажем, как это делается, на примере.

П р и м е р 9.19.2. Решить задачу Коши для системы

$$\begin{cases} y' = 4y - 5z + 4x + 1, \\ z' = y - 2z + x. \end{cases} \qquad y(0) = z(0) = 0.$$

Решение. Из второго уравнения $y = z' + 2z - x \;\Rightarrow\; y' = z'' + 2z' - 1$. y и y' подставляем в первое уравнение, тогда

$z'' + 2z' - 1 = 4(z' + 2z - x) - 5z + 4x + 1 \Rightarrow z'' + 2z' - 1 - 4z' - 8z + 5z = 4x + 1 - 4x$

$\Rightarrow\; z'' - 2z' - 3z = 2$, т.е. получили линейное неоднородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами. Его общее решение $z = z_{одн} + z_ч$.

Составляем и решаем характеристическое уравнение $k^2 - 2k - 3 = 0$ $\Rightarrow\; k_1 = -1,\; k_2 = 3 \;\Rightarrow\; z_{одн} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}$.

$f(x) = 2$, т.е. $f(x) = e^{\alpha x} \cdot p_0(x)$, где $\alpha = 0$ не является корнем характеристического уравнения, поэтому частное решение ищем в виде

$$z_ч = e^{\alpha x} Q_0(x), \text{ т.е. } z_ч = A \;\Rightarrow\; z_ч'' = z_ч' = 0 \text{ и } -3A = 2 \;\Rightarrow\; A = -\frac{2}{3}, \text{ а}$$

$$z = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x} - \frac{2}{3} \;\Rightarrow\; z' = -C_1 e^{-x} + 3C_2 e^{3x} \text{ и}$$

$$y = z' + 2z - x = -C_1 e^{-x} + 3C_2 e^{3x} + 2C_1 e^{-x} + 2C_2 e^{3x} - \frac{4}{3} - x = C_1 e^{-x} + 5C_2 e^{3x} - x - \frac{4}{3}.$$

Таким образом,

$$\begin{cases} y = C_1 e^{-x} + 5C_2 e^{3x} - x - \dfrac{4}{3}, \\ z = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x} - \dfrac{2}{3}. \end{cases} \text{ – общее решение данной системы.}$$

Используя начальные условия $y(0) = z(0) = 0$, получаем

$$\begin{cases} 0 = C_1 + 5C_2 - \dfrac{4}{3}, \\ 0 = C_1 + C_2 - \dfrac{2}{3}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + 5C_2 = \dfrac{4}{3}, \\ C_1 + C_2 = \dfrac{2}{3}. \end{cases} \Rightarrow\; 4C_2 = \frac{2}{3} \;\Rightarrow\; C_2 = \frac{1}{6},\; C_1 = \frac{1}{2}.$$

Искомое решение задачи Коши имеет вид

$$\begin{cases} y = \dfrac{1}{2} e^{-x} + \dfrac{5}{6} e^{3x} - x - \dfrac{4}{3}, \\ z = \dfrac{1}{2} e^{-x} + \dfrac{1}{6} e^{3x} - \dfrac{2}{3}. \end{cases}$$

Вопросы к экзамену по модулю 9

1. Физические задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям.
2. Основные понятия теории дифференциальных уравнений. Задача Коши.
3. Дифференциальные уравнения I порядка. Теорема Коши.
4. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными и приводящиеся к ним.
5. Однородные дифференциальные уравнения и приводящиеся к ним.
6. Линейные дифференциальные уравнения I порядка и уравнения Бернулли.
7. Дифференциальные уравнения в полных дифференциалах.
8. Модели решения прикладных задач с применением дифференциальных уравнений.
9. Дифференциальные уравнения высших порядков. Задача Коши. Понятие общего и частного решений.
10. Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка.
11. Линейные однородные дифференциальные уравнения высших порядков (общая теория, понятие линейной зависимости и независимости решений, вронскиана).
12. Линейные однородные дифференциальные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами.
13. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения высших порядков (структура общего решения, теорема о «накладке» решений).
14. Метод вариации произвольных постоянных нахождения частного решения.
15. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами и со «специальной» правой частью.
16. Системы дифференциальных уравнений. Нормальная система дифференциальных уравнений. Метод исключения неизвестных при решении систем дифференциальных уравнений.
17. Решение систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами с помощью характеристического уравнения.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ПРОВЕДЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

Учебно-информационный блок для проведения практических занятий

Тема занятия	Тип занятия	Кол-во часов
I. Основные понятия теории дифференциальных уравнений. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными	Усвоение и закрепление изученного на лекции нового материала.	2
II. Однородные дифференциальные уравнения 1-го порядка и приводящиеся к ним	Повторение и контроль материала предыдущего семестра. Углубление и расширение полученных знаний. Усвоение и закрепление нового материала. Текущий контроль	2
III. Линейные дифференциальные уравнения 1-го порядка и уравнения Бернулли	Углубление и расширение полученных знаний. Решение прикладных задач, приводящих к линейным дифференциальным уравнениям и уравнениям Бернулли. Текущий контроль	2
IV. Дифференциальные уравнения в полных дифференциалах. Решение задач прикладного содержания	Обобщение, систематизация и применение полученных знаний к решению задач прикладного содержания. Итоговый контроль по дифференциальным уравнениям первого порядка	2
V. Дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка	Усвоение и закрепление изученного на лекции материала. Углубление и расширение полученных знаний. Текущий контроль	2
VI. Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами	Углубление и расширение полученных знаний. Решение прикладных задач. Текущий контроль	2
VII. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Метод вариации произвольных постоянных	Углубление и расширение полученных знаний. Решение прикладных задач. Текущий контроль	2
VIII. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами и со специальной правой частью	Усвоение и закрепление изученного на лекции материала. Решение прикладных задач. Формулировка и решение краевых задач. Текущий контроль	
IX. Решение систем дифференциальных уравнений	Углубление и расширение полученных знаний. Итоговый контроль по дифференциальным уравнениям высших порядков и системам дифференциальных уравнений	2

Основная и дополнительная литература

1. Бугров, Я.С. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. – М.: Наука, 1980.
2. Гусак, А.А. Справочник по высшей математике / А.А. Гусак, Г.М. Гусак – Минск: Навука и тэхника, 1991.
3. Жевняк, Р.М. Высшая математика. В 3 ч. Ч. 3 / Р.М. Жевняк, А.А. Карпук. – Минск: Выш. шк., 1985.
4. Матвеев, Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений / Н.М. Матвеев. – Минск: Выш. шк., 1974.
5. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. В 2 т. Т. 2 / Н.С. Пискунов. – М.: Наука, 1978.
6. Пономарев, К.К. Составление дифференциальных уравнений / К.К. Пономарев – Минск: Выш. шк., 1973.
7. Берман, Г.М. Сборник задач по курсу математического анализа / Г.М. Берман. – М.: Наука, 1985.
8. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 3 ч. Ч. 2 / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – М.: Высш. шк., 1980.
9. Сборник задач по математике для втузов: Специальные разделы математического анализа / под ред. А.В. Ефимова и Б.П. Демидовича. – М.: Наука, 1981.
10. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике. В 2 ч. Ч. 2 / под общ. ред. А.П. Рябушко. – Минск: Выш. шк., 1991.

I. Основные понятия теории дифференциальных уравнений. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

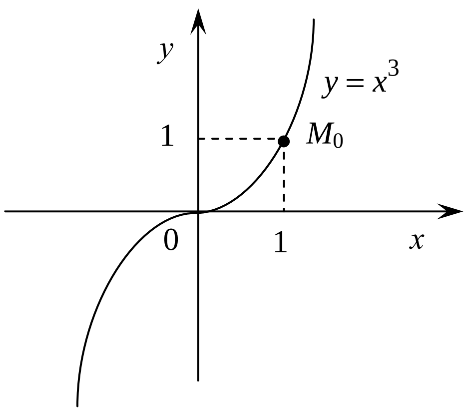
1. Краткий теоретический обзор с использованием лекционного материала, графической схемы, информационной таблицы. Основной акцент ставится на понятие решения (интеграла), общего решения (общего интеграла), частного решения (частного интеграла). Дается понятие интегрирования дифференциальных уравнений в квадратурах.

2. Обучающая задача 1 (решает преподаватель у доски). Проверить подстановкой, что функция $\frac{\sin x}{x}$ есть решение дифференциального уравнения $xy' + y = \cos x$.

Решение. Имеем $y = \frac{\sin x}{x}$, $y' = \frac{\cos x \cdot x - \sin x}{x^2} = \frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2}$. Умножив y и y', соответственно на 1 и x, и сложив полученные выражения, получим $xy' + y = \cos x - \frac{\sin x}{x} + \frac{\sin x}{x} = \cos x$, что и требовалось доказать.

Обучающая задача 2. Показать, что функция $y = Cx^3$ есть общее решение дифференциального уравнения $xy' - 3y = 0$. Найти частное решение, удовлетворяющее условию $y(1) = 1$. Нарисовать интегральную линию, проходящую через точку $M_0(1;1)$.

Решение. Найдя $y' = 3Cx^2$ и подставив y и y' в дифференциальное уравнение, при любом значении C получим тождество $3Cx^3 - 3Cx^3 \equiv 0$. Это означает, что $y = Cx^3$ будет общим решением данного дифференциального уравнения. Положив $x = 1$, $y = 1$, получим $C = 1$, т.е. $y = x^3$ – искомое частное решение. Иначе говоря, интегральной кривой, проходящей через точку $M_0(1;1)$, является кубическая парабола $y = x^3$.



3. Студенты самостоятельно решают примеры: являются ли функции $y=(x,C)$, где C – произвольная постоянная, решением (интегралом) данного дифференциального уравнения:

а) $y=x^2\left(1+Ce^{\frac{1}{x}}\right)$, $\quad x^2y'+(1-2x)y=x^2$. $\quad$ *Ответ*: да;

б) $y=Ce^x-e^{-x}$, $\quad xy''+2y'-xy=0$. $\quad$ *Ответ*: нет.

4. Обучающая задача 3 (решает преподаватель у доски). Найти частное решение дифференциального уравнения $(x+xy)dy+(y-xy)dx=0$, $y(1)=1$.

Решение. Вынесем общие множители при dy и dx, тогда в левой части уравнения $x(1+y)dy+y(1-x)dx=0$ при dy и dx стоят произведения функций, зависящих только от x, на функции, зависящие только от y, т.е. уравнение вида $M_1(x)N_1(y)dx+M_2(x)N_2(y)dy=0$. Для того чтобы разделить переменные, разделим обе части уравнения на $x\cdot y$ (предполагая $x,y\neq 0$), так как x не нужен при dy, а y не нужен при dx. Тогда $\dfrac{x(1+y)dy+y(1-x)dx}{x\cdot y}=0$. Отсюда, разделив почленно, получаем дифференциальное уравнение $\dfrac{1+y}{y}dy+\dfrac{1-x}{x}dx=0$ с разделенными переменными. Тогда $\int\left(\dfrac{1}{y}+1\right)dy+\int\left(\dfrac{1}{x}-1\right)dx=C \;\Rightarrow\; \ln|y|+y-x+\ln|x|=C$. Подставляя начальные условия $y = 1$ при $x = 1$, получим $C = 0$.

Ответ: $\quad y-x+\ln|xy|=0$ – искомый частный интеграл.

Замечание. $x = 0$ и $y = 0$ тоже будут решениями данного уравнения, но они не удовлетворяют заданному начальному условию.

5. Два студента у доски (параллельно) решают примеры:

1) $ydx+\left(\sqrt{xy}-\sqrt{x}\right)dy=0$; $\quad$ *Ответ*: $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\ln C\sqrt{y}$ $(C>0)$;

2) Найти общий интеграл уравнения $y'=\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}y$.

Ответ: $\sin y\cdot\cos x=C$;

3) Решить дифференциальное уравнение $y'=2x+3y-1$, приводящееся к дифференциальному уравнению с разделяющимися переменными, подстановкой $z=2x+3y-1$.

Ответ: $\ln|6x+9y-1|=3x+C$.

6. Обучающая задача 4 (напомнив о задачах, приводящих к дифференциальным уравнениям, рассмотренных в теоретической части модуля, преподаватель решает сам у доски). Скорость движущегося тела возрастает обратно пропорционально пройденному пути. В начальный момент движения тело находилось на расстоянии 5 м от начала отсчета пути и имело скорость $v_0 = 20$ м/с. Определить пройденный путь и скорость тела через 10 с после начала движения.

Решение. Пусть t – время, S – путь, пройденный телом. Из механического смысла производной следует, что скорость движения есть производная пути по времени. Тогда по условию задачи

$$\frac{dS}{dt} = \frac{k}{S},$$

где k – коэффициент пропорциональности.

Разделяя переменные и интегрируя, получим

$$SdS = kdt \;\Rightarrow\; \int SdS = \int kdt + C \;\Rightarrow\; \frac{S^2}{2} = kt + C \;\Rightarrow\; S^2 = 2(kt + C) \;\Rightarrow$$

$$S = \sqrt{2}\sqrt{kt + C}\,.$$

Используем начальное условие $S(0) = 5$:

$$5 = \sqrt{2}\sqrt{C} \;\Rightarrow\; 25 = 2C \;\Rightarrow\; C = \frac{25}{2}.$$

Используем второе начальное условие $v(0) = 20$:

$$v = S' = \sqrt{2}\frac{1\cdot k}{2\sqrt{kt + \frac{25}{2}}};\;\; 20 = \frac{k}{\sqrt{2}\sqrt{\frac{25}{2}}} \;\Rightarrow\; 20\cdot\sqrt{25} = k \;\Rightarrow\; k = 100.$$

Таким образом, $S = \sqrt{2}\sqrt{100t + \frac{25}{2}} \;\Rightarrow\; S = \sqrt{200t + 25}$,

$$v = S' = \frac{1\cdot 200}{2\sqrt{200t + 25}} = \frac{100}{\sqrt{200t + 25}}.$$

Тогда через 10 сек. $S = \sqrt{2000 + 25} = 45$ (м),

$$v = \frac{100}{\sqrt{2000 + 25}} = \frac{100}{45} = \frac{20}{9} \text{ (м/с)}.$$

7. Студент у доски (с помощью преподавателя) решает задачу. Составить дифференциальное уравнение и найти общее решение (интеграл) семейства кривых, у которых отрезок любой касательной, заключенный

между осями координат, делится точкой касания $M(x;y)$ в отношении $|AM|:|MB|=2:1$, где A – точка пересечения касательной с *Oy*, B – с *Ox*.

Ответ: $xy'+2y=0$, $y=\dfrac{C}{x^2}$.

Домашнее задание

1. Подготовка теоретического материала по теме «Однородные дифференциальные уравнения первого порядка и приводящиеся к ним».

2. Является ли функция $y=\dfrac{C}{x}+\dfrac{1}{C}$ решением дифференциального уравнения $xy'-y+\dfrac{1}{y}=0$? *Ответ*: нет.

3. Является ли функция $y=y(x)$, заданная неявно уравнением $e^{\frac{y}{x}}=Cy$, интегралом дифференциального уравнения $xyy'-y^2=x^2y'$?

Ответ: да.

4. Решить уравнения:

а) $\ln\cos y dx+x\operatorname{tg} y dy=0$. *Ответ*: $y=\arccos e^{Cx}$;

б) $\dfrac{yy'}{x}+e^y=0$, $y(1)=0$. *Ответ*: $2e^{-y}(y+1)=x^2+1$;

в) $y'=e^{x+y}+e^{x-y}$, $y(0)=0$. *Ответ*: $y=\ln\operatorname{tg}\left(e^x+\dfrac{\pi}{4}-1\right)$;

г) $y'=\dfrac{\cos y-\sin y-1}{\cos x-\sin x+1}$. *Ответ*: $\operatorname{tg}\dfrac{y}{2}=C\left(1+\operatorname{tg}\dfrac{y}{2}\right)\left(1-\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right)$;

д) $y'=(2x+3y-1)^2$. *Ответ*: $\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{6}(2x+3y-1)}{2}=\sqrt{6}x+C$.

5. Решить задачу: В цеху, где температура 20°C, некоторое тело остыло за 20 мин от 100 до 60°C. Найти закон охлаждения тела, а также через сколько минут оно остынет до 30°C? Повышением температуры в цеху пренебречь.

Указание. В силу закона Ньютона (скорость охлаждения пропорциональна разности температур) $\dfrac{dT}{dt}=k(T-20)$, где T – температура тела в любой момент времени t. Из условия задачи следует, если $t=0$, то $T=100$°C; если $t=20$, то $T=60$°C.

Ответ: $T=20+80\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}}$, тело остынет до 30°C через $t=60$ мин.

6. Повторить к следующему занятию таблицу производных и таблицу неопределенных интегралов.

II. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка и приводящиеся к ним

1. Мини-контрольная работа (на 10 мин) по таблице неопределенных интегралов.

2. Краткий теоретический обзор с использованием лекционного материала, графической схемы, информационной таблицы. Подчеркнуть, что однородное дифференциальное уравнение первого порядка $y' = f(x, y)$, где $f(tx, ty) = f(x, y) \quad \forall\, t \neq 0$, подстановкой $y = zx$, $y' = z'x + z$, всегда приводится к дифференциальному уравнению с разделяющимися переменными. Отметить, что дифференциальное уравнение вида

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

будет однородным, если $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ – однородные функции одного порядка, т.е. $P(tx, ty) = t^k P(x, y)$ и $Q(tx, ty) = t^k Q(x, y)\ \forall\, t \neq 0$.

3. Обучающая задача 1. Найти общее решение (интеграл) уравнения $\left(x^2 + 2xy\right)dx + xydy = 0$.

Решение. Здесь $P(x, y) = x^2 + 2xy$, $Q(x, y) = xy$. Обе функции – однородные функции второго порядка, так как $P(tx, ty) = (tx)^2 + 2tx \cdot ty =$ $= t^2\left(x^2 + 2xy\right) = t^2 P(x, y)$, $\quad Q(tx, ty) = tx \cdot ty = t^2(xy) = t^2 Q(x, y)$. Сделаем подстановку $y = zx$, откуда $dy = xdz + zdx$. Тогда уравнение принимает вид $\left(x^2 + 2x^2 z\right)dx + z \cdot x^2(xdz + zdx) = 0$ или $\left(x^2 + 2x^2 z + z^2 x^2\right)dx + zx^3 dz = 0 \quad \Rightarrow$ $(1 + z)^2 dx + zxdz = 0$. Разделяя переменные и интегрируя, имеем $\displaystyle\int \frac{dx}{x} + \int \frac{zdz}{(1+z)^2} = C$, $\displaystyle\int \frac{dx}{x} + \int \frac{(z+1) - 1}{(z+1)^2}dz = C \quad \Rightarrow \quad \ln|x| + \ln|z + 1| + \frac{1}{z+1} = C$ $\displaystyle\Rightarrow \quad \ln\left|x(z+1)\right| + \frac{1}{z+1} = C$. Возвращаясь к прежней неизвестной функции y $\displaystyle\left(z = \frac{y}{x}\right)$, получаем общий интеграл $\displaystyle\ln|x + y| + \frac{x}{x+y} = C$.

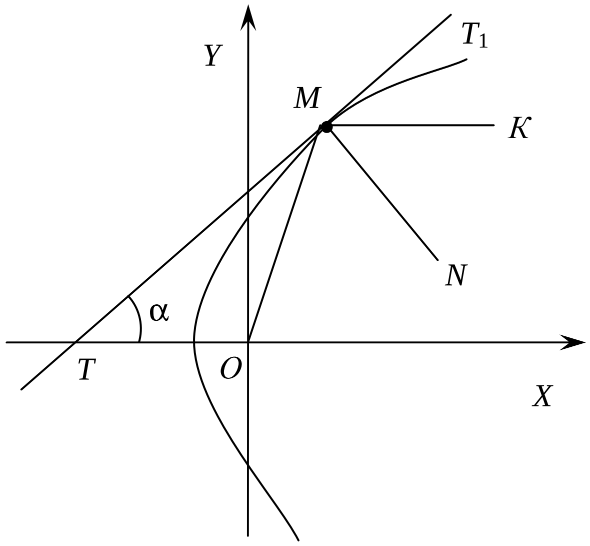
4. Два студента у доски (параллельно) решают пример.

Найти частное решение уравнения $y' = \frac{y}{x} + \sin\frac{y}{x}$, $y(1) = \frac{\pi}{2}$.

Ответ: $y = 2x \cdot \operatorname{arctg} x$.

5. Обучающая задача 2 (решает преподаватель у доски). Найти форму зеркала, собирающего все параллельные лучи в одну точку.

Решение. Очевидно, что зеркало должно иметь форму поверхности вращения, ось которой параллельна направлению падающих лучей. Примем эту ось за ось Ox и найдем уравнение кривой $y = f(x)$, вращением которой образуется искомая поверхность.



Начало координат поместим в точку, в которой собираются отраженные лучи. Обозначим падающий луч через KM, а отраженный – через MO. Проведем касательную TT_1 и нормаль MN в точке $M(x, y)$ искомой кривой. Тогда $\triangle OMT$ – равнобедренный с вершиной в точке O (так как $\angle OMT = \angle KMT_1 = \angle OTM = \alpha$).

Следовательно, $|OM| = |OT|$, но $|OM| = \sqrt{x^2 + y^2}$, а $|OT|$ найдем из уравнения касательной $Y - y = y'(X - x)$, полагая $Y = 0$; имеем $X = x - \frac{y}{y'}$, откуда $|OT| = |X| = -X = -x + \frac{y}{y'}$.

Таким образом, получаем дифференциальное уравнение $\sqrt{x^2 + y^2} = -x + \frac{y}{y'}$, или $\sqrt{x^2 + y^2} + x = \frac{y}{y'}$ $\Rightarrow$ $y' = \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}$, а это однородное дифференциальное уравнение, т.к. $f(tx, ty) = \frac{ty}{tx + \sqrt{t^2x^2 + t^2y^2}} = f(x, y)$.

Так как $y' = \frac{1}{x'}$, то уравнение принимает вид $x' = \frac{x + \sqrt{x^2 + y^2}}{y}$ $\Rightarrow$ $x' = \frac{x}{y} + \sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1}$ и его удобнее решать подстановкой $z = \frac{x}{y}$ $\Rightarrow$ $x = zy$,

$x' = z'y + z$. Тогда имеем $z'y + z = z + \sqrt{z^2+1} \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{dy}y = \sqrt{z^2+1} \quad \Rightarrow$ $\frac{dz}{\sqrt{z^2+1}} = \frac{dy}{y} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dz}{\sqrt{z^2+1}} = \int \frac{dy}{y} - \ln C \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = \ln\left|z+\sqrt{z^2+1}\right| + \ln C$. Отсюда $y = C\left(z+\sqrt{1+z^2}\right)$ или, возвращаясь к первоначальным переменным x и y, $y = C\left(\frac{x}{y}+\sqrt{1+\frac{x^2}{y^2}}\right) \quad \Rightarrow \quad x+\sqrt{x^2+y^2} = \frac{y^2}{C}$.

Преобразуем последнее уравнение

$$\sqrt{x^2+y^2} = \frac{y^2}{C} - x \;\Rightarrow\; C\sqrt{x^2+y^2} = y^2 - Cx \;\Rightarrow$$

$$C^2\left(x^2+y^2\right) = \left(y^2-Cx\right)^2 \;\Rightarrow\; C^2x^2 + C^2y^2 = y^4 - 2Cxy^2 + C^2x^2 \;\Rightarrow$$

$$C^2y^2 + 2Cxy^2 = y^4 \;\Rightarrow\; y^2 = 2Cx + C^2 \;\Rightarrow\; y^2 = 2C\left(x+\frac{C}{2}\right).$$

Искомая кривая является параболой, а зеркало имеет форму параболоида вращения.

6. Обучающая задача 3. Найти общий интеграл уравнения

$$\left(2x+y+1\right)dx + \left(x+2y-1\right)dy = 0.$$

Решение. Это дифференциальное уравнение, приводящееся к однородному. Пусть $x = u + \alpha$, $y = v + \beta \Rightarrow dx = du$, $dy = dv$. Тогда уравнение $y' = -\frac{2x+y+1}{x+2y-1}$ принимает вид $\frac{dv}{du} = -\frac{2(u+\alpha)+v+\beta+1}{u+\alpha+2(v+\beta)-1}$ или $\frac{dv}{du} = -\frac{2u+v+(2\alpha+\beta+1)}{u+2v+(\alpha+2\beta-1)}$.

Для того чтобы уравнение стало однородным, положим $\begin{cases} \alpha+2\beta-1=0, \\ 2\alpha+\beta+1=0. \end{cases}$ Так как $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$, то система имеет единственное решение: $\alpha = -1$, $\beta = 1$. Тогда $x = u - 1$, $y = v + 1$, а уравнение $\frac{dv}{du} = -\frac{2u+v}{u+2v}$ является однородным, так как $f(tu,tv) = -\frac{2tu+tv}{tu+2tv} = f(u,v)$.

Пусть $z=\dfrac{v}{u}$ $\Rightarrow$ $v = zu$, $v'=z'u+z$ и $z'u+z=-\dfrac{2u+zu}{u+2zu}$ $\Rightarrow$

$$z'u+z=-\frac{2+z}{1+2z} \Rightarrow z'u=-\frac{2+z}{1+2z}-z \Rightarrow \frac{dz}{du}u=-\frac{2+z+z+2z^2}{1+2z} \Rightarrow$$

$$\frac{1+2z}{2\left(z^2+z+1\right)}dz=-\frac{du}{u} \Rightarrow \frac{1}{2}\int\frac{d\left(z^2+z+1\right)}{z^2+z+1}=-\int\frac{du}{u}+\ln C \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}\ln\left(z^2+z+1\right)=\ln C-\ln|u| \Rightarrow \sqrt{z^2+z+1}=\frac{C}{u} \Rightarrow u\sqrt{z^2+z+1}=C \Rightarrow$$

$u^2\left(z^2+z+1\right)=C^2$. Так как $z=\dfrac{v}{u}$, то $u^2\left(\dfrac{v^2}{u^2}+\dfrac{v}{u}+1\right)=C^2$ $\Rightarrow$

$v^2+uv+u^2=C^2$. Возвращаясь к x и y ($u = x+1$, $v = y - 1$), получим $(x+1)^2+(x+1)(y-1)+(y-1)^2=C^2$ – общий интеграл исходного уравнения.

7. Решить самостоятельно следующие примеры:

1) $(x+y+2)dx+(2x+2y-1)dy=0$.

Ответ: $x+2y+5\ln|x+y-3|=C$.

2) Найти интегральную кривую дифференциального уравнения $y'=\dfrac{x+y-2}{y-x-4}$, проходящую через точку $M_0(1,1)$.

Ответ: $x^2-y^2+2xy-4x+8y-6=0$.

Домашнее задание

1. Подготовка теоретического материала по теме «Линейные дифференциальные уравнения первого порядка и уравнение Бернулли».

2. Решить уравнения:

а) $xy'\sin\dfrac{y}{x}+x=y\sin\dfrac{y}{x}$. *Ответ*: $Cx=e^{\cos\frac{y}{x}}$;

б) $xy'-y=x\,\mathrm{tg}\dfrac{y}{x}$, $y(1)=\dfrac{\pi}{2}$. *Ответ*: $y=x\cdot\arcsin x$;

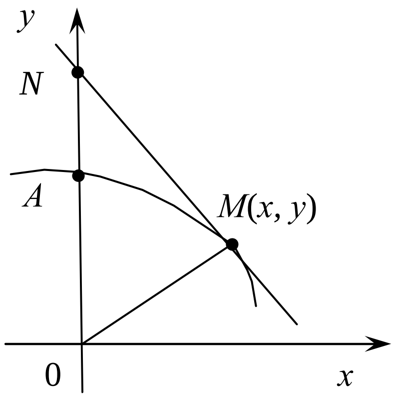
в) $(x-y+4)dy+(x+y-2)dx=0$.

Ответ: $x^2+2xy-y^2-4x+8y=C$;

г) $2(x+y)dy+(3x+3y-1)dx=0$, $y(0) = 2$.

Ответ: $3x+2y-4+2\ln|x+y-1|=0$.

3. Решить задачу: Найти кривую, проходящую через точку $A(0,\ 1)$, для которой треугольник, образованный осью Oy, касательной к кривой в произвольной ее точке и радиус-вектором точки касания, – равнобедренный (причем, основанием его служит отрезок касательной от точки касания до оси Oy).



Указание: Согласно условию

$$|ON| = |OM|.$$

Ответ: $x^2 = 4(1 - y)$.

III. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка и уравнение Бернулли

1. Краткий теоретический обзор с использованием лекционного материала, графической схемы, информационной таблицы. Обратить внимание, что линейные дифференциальные уравнения и уравнения Бернулли можно решать одним и тем же методом: либо методом подстановки (Бернулли), либо методом вариации произвольного постоянного (Лагранжа).

$y' + p(x)y = f(x)$ – линейное дифференциальное уравнение первого порядка,

$y' + p(x)y = f(x)y^n$ $(n \neq 0,\ 1)$ – дифференциальное уравнение Бернулли.

2. Обучающая задача 1 (решает преподаватель у доски). В любой момент времени t скорость v точки превышает среднюю скорость за время t с начала движения на величину t^2. Найти закон движения, если при $t = 0$ $S = S_0$, $v = 0$.

Решение. Скорость в момент времени t будет $v = \dfrac{dS}{dt}$. Средняя скорость за время t с начала движения $v_{cp} = \dfrac{S - S_0}{t}$. По условию задачи $v - v_{cp} = t^2$. Отсюда дифференциальное уравнение движения

$$\frac{dS}{dt} - \frac{S - S_0}{t} = t^2 \quad \text{или} \quad \frac{dS}{dt} - \frac{1}{t}S = t^2 - \frac{S_0}{t}.$$

Получили линейное дифференциальное уравнение первого порядка $\left(S' + p(t)S = q(t)\right)$. Решим его методом вариации произвольного постоянного (Лагранжа). Для этого сначала решим однородное дифференциальное уравнение, соответствующее полученному, т.е. уравнение $\frac{dS}{dt}-\frac{1}{t}S=0$.

Так как линейное однородное дифференциальное уравнение в то же время является уравнением с разделяющимися переменными, легко получаем $\frac{dS}{dt}=\frac{S}{t} \Rightarrow \frac{dS}{S}=\frac{dt}{t} \Rightarrow \int\frac{dS}{S}=\int\frac{dt}{t}+\ln C \Rightarrow \ln|S|=\ln|t|+\ln|C| \Rightarrow$ $S=Ct$ – общее решение однородного уравнения. Применяя метод вариации произвольного постоянного, общее решение неоднородного уравнения ищем в виде $S=C(t)t$, тогда $S'=C'(t)t+C(t)$ и

$$C'(t)t+C(t)-\frac{1}{t}C(t)t=t^2-\frac{S_0}{t} \Rightarrow t\cdot C'(t)=t^2-\frac{S_0}{t} \Rightarrow$$

$$\int dC(t)=\int tdt-S_0\int\frac{dt}{t^2}+C_1 \Rightarrow C(t)=\frac{t^2}{2}+\frac{S_0}{t}+C_1.$$

Общим решением неоднородного дифференциального уравнения будет функция $\left(S=C(t)t\right)$

$$S=\left(\frac{t^2}{2}+\frac{S_0}{t}+C_1\right)t \quad \text{или} \quad S=\frac{1}{2}t^3+C_1t+S_0.$$

Начальное условие: $t=0$, $v=\frac{dS}{dt}=0$. Дифференцируя общее решение, получаем $\frac{dS}{dt}=\frac{3}{2}t^2+C_1$, откуда $0=\frac{3}{2}\cdot 0^2+C_1 \Rightarrow C_1=0$.

Таким образом, $S=S_0+\frac{1}{2}t^3$ – искомый закон движения.

Обучающая задача 2. Проинтегрировать уравнение

$$y=xy'+y'\ln y.$$

Решение. Это уравнение не является линейным относительно y и y'. Но его легко решить, если поменять в нем ролями x и y: принять за аргумент y, а за неизвестную функцию x. Так как $y'=\frac{1}{x'}$, то $y=\frac{1}{x'}(x+\ln y)$ $\Rightarrow x'=\frac{x+\ln y}{y} \Rightarrow x'-\frac{1}{y}x=\frac{\ln y}{y}$ – линейное дифференциальное уравнение относительно x и x'. Решим его методом подстановки Бернулли, т.е.

общее решение ищем в виде $x=u(y)\cdot v(y) \quad\Rightarrow\quad x'=u'v+uv'$. Тогда $u'v+uv'-\frac{1}{y}uv=\frac{\ln y}{y} \;\Rightarrow\; u'v+u\left(v'-\frac{1}{y}v\right)=\frac{\ln y}{y}$.

Выберем $v(y)$ таким образом, чтобы $v'-\frac{1}{y}v=0$. В результате получаем систему: $\begin{cases} v'-\dfrac{v}{y}=0, \\ u'v=\dfrac{\ln y}{y}. \end{cases}$

Решая первое уравнение, получим $\frac{dv}{dy}=\frac{v}{y} \quad\Rightarrow\quad \frac{dv}{v}=\frac{dy}{y} \quad\Rightarrow$ $\int\frac{dv}{v}=\int\frac{dy}{y}$ (берем $C = 0$) $\Rightarrow$ $\ln|v|=\ln|y|$ $\Rightarrow$ $v = y$.

Подставим $v = y$ во второе уравнение системы $\frac{du}{dy}\cdot y=\frac{\ln y}{y} \quad\Rightarrow$

$$du=\frac{\ln y}{y^2} \quad\Rightarrow\quad u=\int\frac{\ln y}{y^2}dy+C=\left|\begin{matrix} u_1=\ln y; & dv_1=\dfrac{dy}{y^2} \\ du_1=\dfrac{dy}{y}; & v_1=-\dfrac{1}{y} \end{matrix}\right|=-\frac{1}{y}\ln y+\int\frac{dy}{y^2}+C=$$

$=-\frac{1}{y}\ln y-\frac{1}{y}+C$ (применена формула интегрирования по частям $\int udv=uv-\int vdu$).

Так как $x=u(y)\cdot v(y)$, то $x=y\left(C-\frac{1}{y}\ln y-\frac{1}{y}\right)$, т.е. $x=Cy-1-\ln y$ – искомое общее решение.

3. Два студента у доски (параллельно) решают (первый пример – методом Бернулли, второй – методом Лагранжа):

а) $y'-y\cdot\operatorname{th}x=\operatorname{ch}^2 x$. *Ответ*: $y=\operatorname{ch}x(\operatorname{sh}x+C)$;

б) $y'\cos^2 x+y=\operatorname{tg}x$, $y(0) = 0$. *Ответ*: $y=\operatorname{tg}x+e^{-\operatorname{tg}x}-1$.

4. Решить самостоятельно следующие два примера (желательно разными методами):

а) $\left(1+x^2\right)y'+y=\operatorname{arctg}x$. *Ответ*: $y=\operatorname{arctg}x+Ce^{-\operatorname{arctg}x}-1$;

б) $y'\left(x+y^2\right)=y$. *Ответ*: $x=Cy+y^2$.

5. Обучающая задача 3 (начинает решать ее преподаватель у доски). Решить уравнение $y'+\frac{1}{x}y=x^2y^4$.

Решение. Это уравнение Бернулли ($y'+p(x)y=q(x)y^n$), где n = 4. Разделим обе части уравнения на y^4 или умножим на y^{-4}: $y^{-4}\cdot y'+\frac{1}{x}\cdot y^{-3}=x^2$.

Пусть $z=y^{-3} \Rightarrow z'=-3y^{-4}\cdot y'$ (так как $y=y(x)$ – функция). Умножив обе части последнего уравнения на (–3), получим: $-3y^{-4}\cdot y'-3\frac{1}{x}y^{-3}=-3x^2 \Rightarrow z'-\frac{3}{x}z=-3x^2$ является линейным дифференциальным уравнением относительно z и z'.

Далее студенты решают это уравнение самостоятельно, не забывая вернуться к неизвестной функции y, подставляя вместо $z=y^{-3}$.

Ответ: $y=1\Big/ x\sqrt[3]{3\ln\frac{C}{x}}$.

6. Решить дифференциальное уравнение $y'-\frac{2xy}{1+x^2}=4\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{1+x^2}}\operatorname{arctg}x$ (один студент у доски решает это уравнение методом Лагранжа, второй – методом Бернулли, не сводя его к линейному).

Ответ: $y=\left(1+x^2\right)\left(\operatorname{arctg}^2 x+C\right)^2$ – общее решение.

Домашнее задание

1. Подготовка теоретического материала по теме «Дифференциальные уравнения в полных дифференциалах».
2. Решить уравнения:

а) $y'\sqrt{1-x^2}+y=\arcsin x$, $y(0)=0$. *Ответ*: $y=e^{-\arcsin x}+\arcsin x-1$;

б) $(2xy+3)dy-y^2dx=0$. *Ответ*: $x=Cy^2-\frac{1}{y}$;

в) $ydx+\left(x+x^2y^2\right)dy=0$. *Ответ*: $x=\frac{1}{y(y+C)}$.

3. Решить задачу: Скорость v, путь S и время t связаны уравнением $v\cos t + S\sin t = 1$. Найти закон движения, если при $t = 0$, $S = 2$.

Ответ: $S = \sin t + 2\cos t$.

4. Решить задачу, приводящую к уравнению Бернулли. Среднее геометрическое координат точки касания равно отношению отрезка, отсекаемого касательной на оси ординат, к удвоенной ординате точки касания. Найти уравнение кривой, если она проходит через точку $(1,1)$.

Ответ: дифференциальное уравнение имеет вид $\sqrt{xy} = \dfrac{y - x \cdot y'}{2y}$, его частное решение $xy = 1$ и $x - y(x-2)^2 = 0$.

IV. Дифференциальные уравнения в полных дифференциалах. Решение задач прикладного содержания

1. Краткое повторение теоретического материала. Дифференциальное уравнение вида $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ называется дифференциальным уравнением в полных дифференциалах, если существует функция двух переменных $u(x,y)$, что ее полный дифференциал $du(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$. Тогда уравнение принимает вид $du(x,y) = 0 \Rightarrow u(x,y) = C$ – его общий интеграл.

Необходимым и достаточным условием $\exists\, u(x,y)$ является тождество $\dfrac{\partial P}{\partial y} \equiv \dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

Неизвестную функцию $u(x,y)$ можно найти по одной из двух формул:

$$u(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy,$$

$$u(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x,y)dy,$$

где точка $M_0(x_0,y_0)$ – произвольная точка из области существования решения данного дифференциального уравнения, чаще всего $M_0(0,0)$.

Обучающий пример 1. Найти общий интеграл уравнения

$$(x + y - 1)dx + \left(e^y + x\right)dy = 0.$$

Решение. Здесь $P(x,y)=x+y-1$, $Q(x,y)=e^y+x$, $\dfrac{\partial P}{\partial y}=1$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=1$, следовательно, данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах.

$$u(x,y)=\int_0^x(x+y-1)dx+\int_0^y\left(e^y+0\right)dy=\left.\left(\frac{x^2}{2}+(y-1)x\right)\right|_0^x+\left.e^y\right|_0^y=$$

$$=\frac{x^2}{2}+(y-1)x+e^y-1.$$

Можно сделать проверку правильности нахождения функции $u(x,y)$. $du=(x+y-1)dx+\left(e^y+x\right)dy$, т.е.

$$du(x,y)=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy=(x+y-1)dx+\left(e^y+x\right)dy.$$

Должны выполняться равенства $\dfrac{\partial u}{\partial x}=x+y-1$ и $\dfrac{\partial u}{\partial y}=e^y+x$. Проверим, так ли это?

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\left(\frac{x^2}{2}+(y-1)x+e^y-1\right)'_x=x+y-1;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\left(\frac{x^2}{2}+(y-1)x+e^y-1\right)'_y=x+e^y.$$

Значит, функция $u(x,y)$ найдена верно, и $\dfrac{x^2}{2}+(y-1)x+e^y=C$ есть общий интеграл данного уравнения.

Дифференциальное уравнение в полных дифференциалах можно решить и другим способом, рассмотрим его на примере.

Обучающий пример 2. Найти общий интеграл уравнения

$$\left(e^x+y+\sin y\right)dx+\left(e^y+x+x\cos y\right)dy=0.$$

Решение. Здесь $P(x,y)=e^x+y+\sin y$, $Q(x,y)=e^y+x+x\cos y$, $\dfrac{\partial P}{\partial y}=1+\cos y$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=1+\cos y$. Следовательно, левая часть есть полный дифференциал некоторой функции $u(x,y)$, т.е.

$$\frac{\partial u}{dx}=e^x+y+\sin y;\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=e^y+x+x\cos y.$$

Проинтегрируем $\dfrac{\partial u}{dx}$ по x:

$u=\int\left(e^x+y+\sin y\right)dx+C(y)=e^x+yx+x\sin y+C(y)$ ($C(y)$ может зависеть от y, так как $\dfrac{\partial C(y)}{\partial x}=0$). Из последнего выражения находим частную производную $\dfrac{\partial u}{\partial y}=x+x\cos y+C'(y)$ и приравниваем ее к $\dfrac{\partial u}{\partial y}=e^y+x+x\cos y$ по условию. В результате, имеем

$$x+x\cos y+C'(y)=x+x\cos y+e^y \;\Rightarrow\; C'(y)=e^y \;\Rightarrow\; C(y)=e^y+C_1.$$

Таким образом, $u(x,y)=e^x+yx+x\sin y+e^y+C_1$, а общий интеграл исходного уравнения имеет вид $e^x+yx+x\sin y+e^y=C$ (C_1 включена в C).

2. Два студента у доски (параллельно) решают примеры:

а) $\left(x^2+y^2+y\right)dx+\left(2xy+x+e^y\right)dy=0$, $y(0)=0$ (первым способом).

Ответ: $\dfrac{1}{3}x^3+xy^2+xy+e^y=1$.

б) $\left(3x^2y+\sin x\right)dx+\left(x^3-\cos y\right)dy=0$ (вторым способом).

Ответ: $x^3y-\cos x-\sin y=C$.

3. Решить любым способом следующие примеры (студенты решают самостоятельно с консультациями преподавателя).

а) $\left(y+x\ln y\right)dx+\left(\dfrac{x^2}{2y}+x+1\right)dy=0$. *Ответ*: $\dfrac{x^2}{2}\ln y+y(x+1)=C$;

б) $\left(\dfrac{y}{x^2+y^2}-y\right)dx+\left(e^y-x-\dfrac{x}{x^2+y^2}\right)dy=0$.

Ответ: $\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}-xy+e^y=C$.

4. Обучающая задача 1 (решает преподаватель у доски). Источник света помещен в точке O. Какова должна быть форма зеркала, чтобы отраженные от него лучи были параллельны оси Ox?

Решение. Воспользуемся решением обучающей задачи 2 из практического занятия II. Там мы при решении этой же задачи получили дифференциальное уравнение $y' = \dfrac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}$, которое решали как однородное. Покажем, что его можно решить как дифференциальное уравнение в полных дифференциалах. Для этого уравнение преобразуем следующим образом:

$$y' = \frac{y\left(x - \sqrt{x^2 + y^2}\right)}{\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)\left(x - \sqrt{x^2 + y^2}\right)} \Rightarrow y' = \frac{y\left(x - \sqrt{x^2 + y^2}\right)}{x^2 - x^2 - y^2} \Rightarrow$$

$$y' = \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{y} \Rightarrow y' \cdot y + x = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow \frac{x + y \cdot y'}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 1 \Rightarrow$$

$$d\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) = 1 \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = x + C \quad \text{или} \quad y^2 = 2C\left(x + \frac{C}{2}\right).$$

5. Определить тип дифференциального уравнения первого порядка, указать метод его решения:

а) $4xy' + 3y = -e^x x^4 y^5$;

б) $(\arcsin x + 2xy)dx + \left(x^2 + 1 + \operatorname{arctg} y\right)dy = 0$;

в) $xy' = 2\left(y - \sqrt{xy}\right)$;

г) $(x - 2y + 3)dy + (2x + y - 1)dx = 0$;

д) $5e^x \operatorname{tg} y\, dx + \left(1 - e^x\right)\dfrac{1}{\cos^2 y}dy = 0$;

е) $\left(y^4 + 2x\right)y' = y$.

Домашнее задание

1. Подготовка теоретического материала по теме «Дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка».

2. Решить уравнения:

а) $(x + \sin y)dx + (x\cos y + \sin y)dy = 0$.

Ответ: $\dfrac{x^2}{2} + x\sin y - \cos y = C$;

б) $\left(\ln\frac{x}{y}-5y^2\sin 5x\right)dx+\left(-\frac{x}{y}+2y\cos 5x\right)dy=0$, $y(1) = 1$.

Ответ: $x\ln\frac{x}{y}+y^2\cos 5x-x=\cos 5-1$;

в) $\left(e^{x+y}+3x^2\right)dx+\left(e^{x+y}+4y^3\right)dy=0$. $y(0) = 0$.

Ответ: $e^{x+y}+x^3+y^4=1$.

3. Доказать, что уравнение $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$, которое одновременно является и однородным, и уравнением в полных дифференциалах имеет общий интеграл $xP(x,y)+yQ(x,y)=C$.

Указание. Воспользоваться теоремой Эйлера об однородных функциях $x\frac{\partial P}{dx}+y\frac{\partial P}{dy}=tP(x,y)$, где t – показатель однородности функций $P(x,y)$ и $Q(x,y)$.

Трехуровневые тестовые задания к разделу «Дифференциальные уравнения первого порядка»

Могут быть использованы для индивидуальных заданий на практических занятиях, индивидуальных домашних заданий, а также для выполнения внеаудиторной контрольной работы (типового расчета, расчетно-графической работы), если она предусмотрена рабочим учебным планом для данной специальности.

Уровень I

Вариант 1

Найти общее решение (общий интеграл) или частное решение (частный интеграл) дифференциальных уравнений:

1. $e^{x+3y}dy=xdx$. *Ответ*: $e^{3y}=3\left(C-xe^{-x}-e^{-x}\right)$;

2. $\left(xy+x^3y\right)y'=1+y^2$. *Ответ*: $Cx=\sqrt{\left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right)}$;

3. $y-xy'=x\sec\frac{y}{x}$. *Ответ*: $\sin\frac{y}{x}=\ln\frac{C}{|x|}$;

4. $\left(x^2+1\right)y'+4xy=3,\quad y(0)=0.$ *Ответ*: $y=\dfrac{\left(x^3+3x\right)}{\left(x^2+1\right)^2}$;

5. $y'+y=x\sqrt{y}.$ *Ответ*: $y=\left(xe^{\frac{x}{2}}-2e^{\frac{x}{2}}+C\right)^2 e^{-x}$;

6. $\dfrac{dS}{dt}+S\sin t=\sin te^{\cos t}.$ *Ответ*: $S=e^{\cos t}\left(C-\cos t\right)$.

Вариант 2

Найти общее решение (общий интеграл) или частное решение (частный интеграл) дифференциальных уравнений:

1. $y'\sin x=y\ln y.$ *Ответ*: $\ln y=C\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2}\right)$;

2. $\dfrac{y'}{7^{y-x}}=3.$ *Ответ*: $7^{-y}=3\cdot 7^{-x}+C\ln 7$;

3. $\left(y^2-3x^2\right)dy+2xydx=0.$ *Ответ*: $\left(y^2-x^2\right)^2=Cx^2y^3$;

4. $y'+y\operatorname{tg}x=\sec x,\quad y(0)=0.$ *Ответ*: $y=\sin x$;

5. $ydx+2xdy=2y\sqrt{x}\sec^2 ydy.$ *Ответ*: $x=\dfrac{\left(y\operatorname{tg}y+\ln\left|\cos y\right|+C\right)^2}{y^2}$;

6. $\left(1-y^2\right)y'-xy-axy^2=0.$ *Ответ*: $\left(C\sqrt{1-x^2}-a\right)y=1$.

Вариант 3

Найти общее решение (общий интеграл) или частное решение (частный интеграл) дифференциальных уравнений:

1. $y'=(2x-1)\operatorname{ctg}y.$ *Ответ*: $\ln\left|\cos y\right|=x-x^2+C$;

2. $y-xy'=2\left(1+x^2y'\right).$ *Ответ*: $y=\dfrac{Cx}{2x+1}+2$;

3. $(x+2y)dx-xdy=0.$ *Ответ*: $y=Cx^2-x$;

4. $(1-x)(y'+y)=e^{-x},\quad y(0)=0.$ *Ответ*: $y=e^{-x}\ln\dfrac{1}{1-x}$;

5. $y' + 2y = y^2 e^x$. *Ответ*: $y = \dfrac{1}{Ce^{2x} + e^x}$;

6. $\left(\dfrac{y^2}{(x-y)^2} - \dfrac{1}{x} \right) dx + \left(\dfrac{1}{y} - \dfrac{x^2}{(x-y)^2} \right) dy = 0$. *Ответ*: $\ln \dfrac{y}{x} - \dfrac{xy}{x-y} = C$.

Вариант 4

Найти общее решение (общий интеграл) или частное решение (частный интеграл) дифференциальных уравнений:

1. $\sec^2 x \operatorname{tg} y dx + \sec^2 y \operatorname{tg} x dy = 0$. *Ответ*: $C = \operatorname{tg} y \operatorname{tg} x$;

2. $y - xy' = 1 + x^2 y'$. *Ответ*: $y = \dfrac{Cx}{(x+1)} + 1$;

3. $(x-y)dx + (x+y)dy = 0$. *Ответ*: $\operatorname{arctg} \dfrac{y}{x} + \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{y^2 + x^2}{x^2} = \ln \dfrac{C}{x}$;

4. $xy' - 2y = 2x^4$, $y(1) = 0$. *Ответ*: $y = x^4 - x^2$;

5. $y' = y^4 \cos x + y \operatorname{tg} x$. *Ответ*: $y = \dfrac{1}{\cos x \sqrt[3]{C - 4 \operatorname{tg} x}}$;

6. $2\left(3xy^2 + 2x^3\right)dx + 3\left(2x^2 y + y^2\right)dy = 0$. *Ответ*: $x^4 + 3x^2 y^2 + y^3 = C$.

Вариант 5

Найти общее решение (общий интеграл) или частное решение (частный интеграл) дифференциальных уравнений:

1. $\left(1 + e^x\right) y dy - e^y dx = 0$. *Ответ*: $-e^{-y}(y+1) = \ln \dfrac{e^x}{e^x + 1} + C$;

2. $(x+4)dy - xydx = 0$. *Ответ*: $y = \dfrac{C \cdot e^x}{(x+4)^4}$;

3. $\left(y^2 - 2xy\right)dx + x^2 dy = 0$. *Ответ*: $\dfrac{y}{x-y} = Cx$;

4. $y' = 2x\left(x^2 + y\right)$, $y(0) = 0$. *Ответ*: $y = e^{x^2} - x^2 - 1$;

5. $xydy = \left(y^2 + x\right)dx$. *Ответ*: $y = x\sqrt{2\left(C - \dfrac{1}{x}\right)}$;

6. $\dfrac{xdx+(2x+y)dy}{(x+y)^2}=0$. *Ответ*: $\ln(x+y)-\dfrac{x}{x+y}=C$.

Вариант 6

Найти общее решение (общий интеграл) или частное решение (частный интеграл) дифференциальных уравнений:

1. $\left(y^2+3\right)dx-\dfrac{e^x}{x}ydy=0$. *Ответ*: $\ln\left(y^2+3\right)=2\left(C-xe^{-x}-e^{-x}\right)$;
2. $y'+y+y^2=0$. *Ответ*: $\dfrac{y}{y+1}=e^{C-x}$;
3. $y^2+x^2y'=xyy'$. *Ответ*: $e^{\frac{y}{x}}=Cy$;
4. $y'-y=e^x$, $y(0)=1$. *Ответ*: $y=(x+1)e^x$;
5. $xy'+2y+x^5y^3e^x=0$. *Ответ*: $y=\dfrac{1}{x^2\sqrt{2\left(e^x+C\right)}}$;
6. $\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{3y^2}{x^4}\right)dx=\dfrac{2ydy}{x^3}$. *Ответ*: $x^2+y^2=Cx^3$.

Вариант 7

Найти общее решение (общий интеграл) или частное решение (частный интеграл) дифференциальных уравнений:

1. $\sin y\cos xdy=\cos y\sin xdx$. *Ответ*: $C=\dfrac{\cos x}{\cos y}$;
2. $y^2\ln xdx-(y-1)xdy=0$. *Ответ*: $\dfrac{1}{y}+\ln y=C+\dfrac{1}{2}\ln^2 x$;
3. $xy'-y=x\,\mathrm{tg}\left(\dfrac{y}{x}\right)$. *Ответ*: $\sin\left(\dfrac{y}{x}\right)=Cx$;
4. $xy'+y+xe^{-x^2}=0$, $y(1)=\dfrac{1}{2e}$. *Ответ*: $y=\dfrac{e^{-x^2}}{2x}$;
5. $y'x^3\sin y=xy'-2y$. *Ответ*: $x=\sqrt{\dfrac{y}{C-\cos y}}$;

6. $y' - a\dfrac{y}{x} = \dfrac{x+1}{x}$. *Ответ*: $y = Cx^a + \dfrac{x}{1-a} - \dfrac{1}{a}$.

Вариант 8

Найти общее решение (общий интеграл) или частное решение (частный интеграл) дифференциальных уравнений:

1. $y' = (2y+1)\operatorname{tg} x$. *Ответ*: $\sqrt{2y+1} = \dfrac{C}{\cos x}$;

2. $\left(x + xy^2\right)dy + ydx - y^2dx = 0$. *Ответ*: $y + \ln\dfrac{(y-1)^4}{y} = C + \ln x$;

3. $xy' = y - xe^{\frac{y}{x}}$. *Ответ*: $e^{-\frac{y}{x}} = \ln Cx$;

4. $\cos y dx = (x + 2\cos y)\sin y dy$, $y(0) = \dfrac{\pi}{4}$. *Ответ*: $x = \left(\sin^2 y - \dfrac{1}{2}\right)\dfrac{1}{\cos y}$;

5. $\left(2x^2 \ln y - x\right)y' = y$. *Ответ*: $x = \dfrac{1}{Cy^2 + 2\ln y + 2}$;

6. $3y^2y' - ay^3 - x - 1 = 0$. *Ответ*: $a^2y^3 = Ce^{ax} + a(x+1) - 1$.

Вариант 9

Найти общее решение (общий интеграл) или частное решение (частный интеграл) дифференциальных уравнений:

1. $\left(\sin(x+y) + \sin(x-y)\right)dx + \dfrac{dy}{\cos y} = 0$. *Ответ*: $\operatorname{tg} y = C + 2\cos x$;

2. $y' + 2y - y^2 = 0$. *Ответ*: $\sqrt{\dfrac{(y-2)}{y}} = Ce^x$;

3. $xy' - y = (x+y)\ln\dfrac{x+y}{x}$. *Ответ*: $\ln\left|1 + \dfrac{y}{x}\right| = Cx$;

4. $x^2y' + xy + 1 = 0$, $y(1) = 0$. *Ответ*: $y = -\dfrac{\ln x}{x}$;

5. $2y' - \dfrac{x}{y} = \dfrac{xy}{x^2-1}$. *Ответ*: $y = \sqrt{C + \sqrt{x^2-1}}\sqrt[4]{x^2-1}$;

6. $y'\left(x^2y^3+xy\right)=1.$ *Ответ*: $x\left(\left(2-y^2\right)e^{\frac{y^2}{2}}+C\right)=e^{\frac{y^2}{2}}$.

Вариант 10

Найти общее решение (общий интеграл) или частное решение (частный интеграл) дифференциальных уравнений:

1. $\left(1+e^x\right)yy'=e^x$. *Ответ*: $y^2=2\ln C\left(e^x+1\right)$;

2. $\left(x^2+x\right)ydx+\left(y^2+1\right)dy=0$. *Ответ*: $\frac{y^2}{2}+\ln y=C-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}$;

3. $xy'=y\cdot\cos\ln\frac{y}{x}$. *Ответ*: $\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}\ln\frac{y}{x}\right)=\ln Cx$;

4. $yx'+x=4y^3+3y^2$, $y(2)=1$. *Ответ*: $x=y^3+y^2$;

5. $xy'-2x^2\sqrt{y}=4y$. *Ответ*: $y=x^4\left(C+\ln x\right)^2$;

6. $\left(x-x^3\right)y'-\left(3x^2-1\right)y-ax^3=0$. *Ответ*: $y=\frac{C-ax^4}{4\left(x^3-x\right)}$.

Вариант 11

Найти общее решение (общий интеграл) или частное решение (частный интеграл) дифференциальных уравнений:

1. $\sin x\operatorname{tg}ydx-\frac{dy}{\sin x}=0$. *Ответ*: $\ln\left|\sin y\right|=C+\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x$;

2. $\left(xy^3+x\right)dx+\left(x^2y^2-y^2\right)dy=0$. *Ответ*: $\sqrt[3]{y^3+1}=\frac{C}{\sqrt{x^2-1}}$;

3. $\left(y+\sqrt{xy}\right)dx=xdy$. *Ответ*: $y=\frac{x}{4}\ln^2 Cx$;

4. $(2x+y)dy=ydx+4\ln ydy$, $y(0)=1$. *Ответ*: $x=2\ln y+1-y$;

5. $xy^2y'=x^2+y^3$. *Ответ*: $y=x\sqrt[3]{3\left(C-\frac{1}{x}\right)}$;

6. $\left(y^3-x\right)y'=y$. *Ответ*: $y^4=4xy+C$.

Вариант 12

Найти общее решение (общий интеграл) или частное решение (частный интеграл) дифференциальных уравнений:

1. $3e^x \sin y dx + \left(1-e^x\right)\cos y dy = 0$. *Ответ*: $\sin y = C\left(e^x-1\right)^3$;

2. $\left(1+y^2\right)dx - \left(y+yx^2\right)dy = 0$. *Ответ*: $\frac{1}{2}\ln\left(y^2+1\right) = C + \operatorname{arctg} x$;

3. $xy' = \sqrt{x^2-y^2} + y$. *Ответ*: $\arcsin\frac{y}{x} = \ln Cx$;

4. $y' = \frac{y}{3x-y^2}$, $y(0)=1$. *Ответ*: $x = y^2 - y^3$;

5. $(x+1)\left(y'+y^2\right) = -y$. *Ответ*: $y = \frac{1}{(x+1)\left(C+\ln|x+1|\right)}$;

6. $\frac{x^2dy - y^2dx}{(x-y)^2} = 0$. *Ответ*: $\frac{xy}{x-y} = C$.

Вариант 13

Найти общее решение (общий интеграл) или частное решение (частный интеграл) дифференциальных уравнений:

1. $y' = \frac{e^{2x}}{\ln y}$. *Ответ*: $y(\ln y - 1) = \frac{1}{2}e^{2x} + C$;

2. $y' = 2xy + x$. *Ответ*: $\frac{1}{2}\ln|2y+1| = \frac{x^2}{2} + C$;

3. $y = x\left(y' - \sqrt[x]{e^y}\right)$. *Ответ*: $-e^{-\frac{y}{x}} = \ln Cx$;

4. $(1-2xy)y' = y(y-1)$, $y(0)=1$. *Ответ*: $x(y-1)^2 = (y - \ln y - 1)$;

5. $y'x + y = -xy^2$. *Ответ*: $y = \frac{1}{x(C+\ln x)}$;

6. $xdx + ydy = \frac{ydx - xdy}{x^2+y^2}$. *Ответ*: $x^2 + y^2 - 2\operatorname{arctg}\frac{x}{y} = C$.

Вариант 14

Найти общее решение (общий интеграл) или частное решение (частный интеграл) дифференциальных уравнений:

1. $3^{x^2+y}dy + xdx = 0$. *Ответ*: $3^y = \frac{1}{2}3^{-x^2} + C$;

2. $y - xy' = 3\left(1 + x^2 y'\right)$. *Ответ*: $y = C\frac{x}{3x+1} + 3$;

3. $y' = \frac{y}{x} - 1$. *Ответ*: $y = x\ln\frac{C}{x}$;

4. $x\left(y' - y\right) = e^x$, $y(1) = 0$. *Ответ*: $y = e^x \ln x$;

5. $y' - xy = -y^3 e^{-x^2}$. *Ответ*: $y = \frac{e^{\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2(C+x)}}$;

6. $\left(y\ln x - 2\right)ydx = xdy$. *Ответ*: $y\left(Cx^2 + 2\ln x + 1\right) = 4$.

Вариант 15

Найти общее решение (общий интеграл) или частное решение (частный интеграл) дифференциальных уравнений:

1. $\left(\cos(x-2y) + \cos(x+2y)\right)y' = \sec x$. *Ответ*: $\sin 2y = \operatorname{tg} x + C$;

2. $2xyy' = 1 - x^2$. *Ответ*: $y^2 = \ln|x| - \frac{x^2}{2} + C$;

3. $y'x + x + y = 0$. *Ответ*: $y = \frac{C}{x} - \frac{x}{2}$;

4. $y = x\left(y' - x\cos x\right)$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. *Ответ*: $y = \left(\sin x - 1\right)x$;

5. $xy' - 2\sqrt{x^3 y} = y$. *Ответ*: $y = x\left(x + C\right)^2$;

6. $y - y'\cos x = y^2 \cos x\left(1 - \sin x\right)$. *Ответ*: $y = \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)}{\sin x + C}$.

Вариант 16

Найти общее решение (общий интеграл) или частное решение (частный интеграл) дифференциальных уравнений:

1. $y' = e^{x^2} x\left(1+y^2\right)$. *Ответ*: $\operatorname{arctg} y = C + \frac{1}{2}e^{x^2}$;
2. $\left(x^2-1\right)y' - xy = 0$. *Ответ*: $y = C\sqrt{x^2-1}$;
3. $ydx + \left(2\sqrt{xy} - x\right)dy = 0$. *Ответ*: $x = y\left(C - \ln y\right)^2$;
4. $\left(xy'-1\right)\ln x = 2y$, $y(e) = 0$. *Ответ*: $y = \ln^2 x - \ln x$;
5. $y' + xy = x^3y^3$. *Ответ*: $y = \dfrac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{x^2e^{-x^2} + e^{-x^2} + C}}$;
6. $\dfrac{dS}{dt} + S\cos t = \dfrac{1}{2}\sin 2t$. *Ответ*: $S = \sin t - 1 + Ce^{-\sin t}$.

Вариант 17

Найти общее решение (общий интеграл) или частное решение (частный интеграл) дифференциальных уравнений:

1. $\operatorname{ctg} x \cos^2 y dx + \sin^2 x \operatorname{tg} y dy = 0$. *Ответ*: $\operatorname{tg}^2 y = \operatorname{ctg}^2 x + 2C$;
2. $\left(y^2x + y^2\right)dy + xdx = 0$. *Ответ*: $y^3 = 3\left(C - x + \ln\left|x+1\right|\right)$;
3. $xdy - ydx = \sqrt{x^2+y^2}\,dx$. *Ответ*: $y + \sqrt{x^2+y^2} = Cx^2$;
4. $\left(2e^y - x\right)y' = 1$, $y(0) = 0$. *Ответ*: $x = e^y - e^{-y}$;
5. $y' = \dfrac{x}{y}e^{2x} + y$. *Ответ*: $y = e^x\sqrt{x^2+C}$;
6. $y' - \dfrac{n}{x}y = e^x x^n$. *Ответ*: $y = x^n\left(e^x + C\right)$.

Вариант 18

Найти общее решение (общий интеграл) или частное решение (частный интеграл) дифференциальных уравнений:

1. $\sin x \cdot y' = y\cos x + 2\cos x$. *Ответ*: $y = C\sin x - 2$;
2. $\left(1+x^3\right)y^3dx - \left(y^2-1\right)x^3dy = 0$. *Ответ*: $\ln y + \dfrac{1}{2y^2} = C + x - \dfrac{1}{2x^2}$;

3. $\left(4x^2+3xy+y^2\right)dx+\left(4y^2+3xy+x^2\right)dy=0$.

Ответ: $\frac{1}{4}\ln\frac{x+y}{x}+\frac{3}{8}\ln\frac{x^2+y^2}{y^2}=\ln\frac{C}{x}$;

4. $xy'+(x+1)y=3x^2e^{-x}$, $y(1)=0$. *Ответ*: $y=\frac{x^3-1}{x}e^{-x}$;

5. $yx'+x=-yx^2$. *Ответ*: $x=\frac{1}{y(C+\ln y)}$;

6. $y'+\frac{n}{x}y=\frac{a}{x^n}$. *Ответ*: $x^n y=ax+C$.

Вариант 19

Найти общее решение (общий интеграл) или частное решение (частный интеграл) дифференциальных уравнений:

1. $1+(1+y')e^y=0$. *Ответ*: $C\left(e^y+1\right)=e^{-x}$;

2. $xy'-y=y^2$. *Ответ*: $\frac{y}{(y+1)}=Cx$;

3. $(x-y)ydx-x^2dy=0$. *Ответ*: $y=\frac{x}{\ln Cx}$;

4. $\left(x+y^2\right)dy=ydx$, $y(0)=1$. *Ответ*: $x=y^2-y$;

5. $x(x-1)y'+y^3=xy$. *Ответ*: $y=\frac{x-1}{\sqrt{2(x-\ln x+C)}}$;

6. $\left(t^2-xt^2\right)\frac{dx}{dt}+x^2+tx^2=0$. *Ответ*: $\frac{t+x}{tx}+\ln\frac{x}{t}=C$.

Вариант 20

Найти общее решение (общий интеграл) или частное решение (частный интеграл) дифференциальных уравнений:

1. $y'\operatorname{ctg}x+y=2$. *Ответ*: $y=2-C\cos x$;

2. $\sqrt{y^2+1}\,dx=xydy$. *Ответ*: $\sqrt{y^2+1}=\ln Cx$;

3. $xy+y^2=\left(2x^2+xy\right)y'$. *Ответ*: $\frac{y}{x}+2\ln\frac{y}{x}=\ln\frac{C}{x}$;

4. $\left(\sin^2 y + x\operatorname{ctg} y\right)y' = 1$, $y(0) = \dfrac{\pi}{2}$. *Ответ*: $x = -\sin y \cos y$;

5. $2x^3yy' + 3x^2y^2 + 1 = 0$. *Ответ*: $y = \dfrac{\sqrt{C-x}}{x^{\frac{3}{2}}}$;

6. $zdt - \left(t^2 - a^2\right)dz = 0$. *Ответ*: $z^{2a} = C\dfrac{t-a}{t+a}$.

Вариант 21

Найти общее решение (общий интеграл) или частное решение (частный интеграл) дифференциальных уравнений:

1. $\dfrac{e^{-x^2}dy}{x} + \dfrac{dx}{\cos^2 y} = 0$. *Ответ*: $\dfrac{1}{2}y + \dfrac{1}{4}\sin 2y = C - \dfrac{1}{2}e^{x^2}$;

2. $y' - xy^2 = 2xy$. *Ответ*: $\ln\left|\dfrac{y}{y+2}\right| = C + x^2$;

3. $\left(x^2 - 2xy\right)y' = xy - y^2$. *Ответ*: $\dfrac{x}{y} + 2\ln\dfrac{y}{x} = -\ln Cx$;

4. $(x+1)y' + y = x^3 + x^2$, $y(0) = 0$. *Ответ*: $y = \dfrac{3x^4 + 4x^3}{12(x+1)}$;

5. $\dfrac{dx}{x} = \left(\dfrac{1}{y} - 2x\right)dy$. *Ответ*: $x = \dfrac{y}{y^2 + C}$;

6. $\left(1 + S^2\right)dt - \sqrt{t}\,dS = 0$. *Ответ*: $2\sqrt{t} - \operatorname{arctg} S = C$.

Вариант 22

Найти общее решение (общий интеграл) или частное решение (частный интеграл) дифференциальных уравнений:

1. $e^x \sin y dx + \operatorname{tg} y dy = 0$. *Ответ*: $\ln\left|\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{y}{2}\right)\right| = C - e^x$;

2. $2x^2yy' + y^2 = 2$. *Ответ*: $\ln\left|2 - y^2\right| = C + \dfrac{1}{x}$;

3. $\left(2\sqrt{xy} - y\right)dx + xdy = 0$. *Ответ*: $y = x\ln^2\dfrac{C}{x}$;

4. $xy' - 2y + x^2 = 0$, $y(1) = 0$. *Ответ*: $y = -x^2 \ln x$;

5. $y' + x\sqrt[3]{y} = 3y$. *Ответ*: $y = e^{3x}\left(\frac{x}{3}e^{-2x} + \frac{1}{6}e^{-2x} + C\right)^{\frac{3}{2}}$;

6. $d\rho + \rho \operatorname{tg}\theta\, d\theta = 0$. *Ответ*: $\rho = C\cos\theta$.

Вариант 23

Найти общее решение (общий интеграл) или частное решение (частный интеграл) дифференциальных уравнений:

1. $\left(1 + e^{3y}\right)xdx = e^{3y}dy$. *Ответ*: $\frac{x^2}{2} = \frac{1}{3}\ln\left(1 + e^{3y}\right) + C$;

2. $y' = \frac{1 + y^2}{1 + x^2}$. *Ответ*: $\operatorname{arctg} y = C + \operatorname{arctg} x$;

3. $xy' + y\left(\ln\frac{y}{x} - 1\right) = 0$. *Ответ*: $y = xe^{\frac{C}{x}}$;

4. $xy' + y = \sin x$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi}$. *Ответ*: $y = \frac{1 - \cos x}{x}$;

5. $xy' + y = y^2 \ln x$. *Ответ*: $y = \frac{1}{\ln x + 1 + Cx}$;

6. $\sin\theta\cos\varphi\, d\theta - \cos\theta\sin\varphi\, d\varphi = 0$. *Ответ*: $\cos\varphi = C\cos\theta$.

Вариант 24

Найти общее решение (общий интеграл) или частное решение (частный интеграл) дифференциальных уравнений:

1. $\left(\sin(2x + y) - \sin(2x - y)\right)dx = \frac{dy}{\sin y}$. *Ответ*: $\operatorname{ctg} y = C - \sin 2x$;

2. $y'\sqrt{1 + y^2} = \frac{x^2}{y}$. *Ответ*: $\sqrt{\left(1 + y^2\right)^3} = C + x^3$;

3. $\left(x^2 + y^2\right)dx + 2xydy = 0$. *Ответ*: $\frac{x^3}{3} + y^2x = C$;

4. $\left(x^2 - 1\right)y' - xy = x^3 - x$, $y\left(\sqrt{2}\right) = 1$. *Ответ*: $y = x^2 - 1$;

5. $xdx = \left(\frac{x^2}{y} - y^3\right)dy$. *Ответ*: $x = y\sqrt{C - y^2}$;

6. $\sec^2\theta\,\mathrm{tg}\,\varphi\,d\theta+\sec^2\varphi\,\mathrm{tg}\,\theta\,d\varphi=0$. *Ответ*: $\mathrm{tg}\,\theta\,\mathrm{tg}\,\varphi=C$.

Вариант 25

Найти общее решение (общий интеграл) или частное решение (частный интеграл) дифференциальных уравнений:

1. $\cos y\,dx=2\sqrt{1+x^2}\,dy+\cos y\sqrt{1+x^2}\,dy$.

Ответ: $2\ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{y}{2}\right)\right|+y=\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|+C$;

2. $(y+1)\,y'=\frac{y}{\sqrt{1-x^2}}+xy$. *Ответ*: $y+\ln y=\arcsin x+\frac{x^2}{2}+C$;

3. $\left(y^2-2xy\right)dx-x^2dy=0$. *Ответ*: $y=\frac{3x}{1-Cx^3}$;

4. $\left(1-x^2\right)y'+xy=1,\quad y(0)=1$. *Ответ*: $y=x+\sqrt{1-x^2}$;

5. $y'+2xy=2x^3y^3$ *Ответ*: $y=\frac{e^{-x^2}}{\sqrt{2x^2e^{-2x^2}+e^{-2x^2}+C}}$;

6. $\sec^2\theta\cdot\mathrm{tg}\,\varphi\,d\varphi+\sec^2\varphi\cdot\mathrm{tg}\,\theta\,d\theta=0$. *Ответ*: $\sin^2\theta+\sin^2\varphi=C$.

Вариант 26

Найти общее решение (общий интеграл) или частное решение (частный интеграл) дифференциальных уравнений:

1. $y'\sqrt{1-x^2}-\cos^2 y=0$. *Ответ*: $\mathrm{tg}\,y=\arcsin x+C$;

2. $\left(1+x^2\right)y'+y\sqrt{1+x^2}=xy$. *Ответ*: $y=\frac{C\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}}$;

3. $(x+2y)\,dx+x\,dy=0$. *Ответ*: $y=\frac{C}{x^2}-\frac{x}{3}$;

4. $y'\,\mathrm{ctg}\,x-y=2\cos^2 x\,\mathrm{ctg}\,x,\quad y(0)=0$. *Ответ*: $y=\frac{6\sin x-2\sin^3 x}{3\cos x}$;

5. $y'+y=\frac{x}{y^2}$. *Ответ*: $y=e^{-x}\sqrt[3]{xe^{3x}-\frac{1}{3}e^{3x}+C}$;

6. $x\cos\frac{y}{x}(ydx+xdy)=y\sin\frac{y}{x}(xdy-ydx)$. *Ответ*: $xy\cos\frac{y}{x}=C$.

Вариант 27

Найти общее решение (общий интеграл) или частное решение (частный интеграл) дифференциальных уравнений:

1. $e^x \operatorname{tg} y dx=\left(1-e^x\right)\sec^2 y dy$. *Ответ*: $\operatorname{tg} y=\frac{C}{\left(e^x-1\right)}$;

2. $xyy'=\frac{1+x^2}{1-y^2}$. *Ответ*: $2y^2-y^4=4\ln|x|+2x^2+C$;

3. $(2x-y)dx+(x+y)dy=0$. *Ответ*: $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{y^2+2x^2}{x^2}\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{y}{\sqrt{2}x}=\ln\frac{C}{x}$;

4. $x^2y'=2xy+3,\quad y(1)=-1$. *Ответ*: $y=-\frac{1}{x}$;

5. $y'-y\operatorname{tg} x+y^2\cos x=0$. *Ответ*: $y=\frac{1}{(x+C)\cos x}$;

6. $xy^2dy=\left(x^3+y^3\right)dx$. *Ответ*: $y=x\sqrt[3]{3\ln Cx}$.

Вариант 28

Найти общее решение (общий интеграл) или частное решение (частный интеграл) дифференциальных уравнений:

1. $y'+\sin(x+y)=\sin(x-y)$. *Ответ*: $\ln\left|\operatorname{tg}\frac{y}{2}\right|=C-2\sin x$;

2. $(xy-x)^2dy+y(1-x)dx=0$. *Ответ*: $\frac{y^2}{2}-2y+\ln|y|=\ln|x|+\frac{1}{x}+C$;

3. $2x^3y'=y\left(2x^2-y^2\right)$. *Ответ*: $y=\frac{x}{\sqrt{\ln(Cx)}}$;

4. $y'+2xy=xe^{-x^2},\quad y(0)=0$. *Ответ*: $y=0{,}5x^2e^{-x^2}$;

5. $y'+\frac{2y}{x}=\frac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}$. *Ответ*: $y=\left(\frac{x\operatorname{tg} x+\ln|\cos x|+C}{x}\right)^2$;

6. $(t-S)dt+tdS=0$. *Ответ*: $te^{\frac{S}{t}}=C$.

Вариант 29

Найти общее решение (общий интеграл) или частное решение (частный интеграл) дифференциальных уравнений:

1. $\cos^3 y\cdot y'-\cos(2x+y)=\cos(2x-y)$. *Ответ*: $\frac{1}{2}y+\frac{1}{4}\sin 2y=\sin 2x+C$;
2. $\left(x^2y-y\right)^2 y'=x^2y-y+x^2-1$. *Ответ*: $\frac{y^2}{2}-y+\ln|y+1|=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$;
3. $x^2y'=y(x+y)$. *Ответ*: $y=-\frac{x}{\ln(Cx)}$;
4. $y'-3x^2y-x^2e^{x^3}=0$, $y(0)=0$. *Ответ*: $y=\frac{1}{3}x^3e^{x^3}$;
5. $y'-y+y^2\cos x=0$. *Ответ*: $y=\frac{2e^x}{e^x(\cos x+\sin x)+C}$;
6. $\left(2\sqrt{St}-S\right)dt+tdS=0$. *Ответ*: $te^{\sqrt{\frac{S}{t}}}=C$.

Вариант 30

Найти общее решение (общий интеграл) или частное решение (частный интеграл) дифференциальных уравнений:

1. $3^{y^2-x^2}=\frac{yy'}{x}$. *Ответ*: $3^{-y^2}=3^{-x^2}-2C\ln 3$;
2. $\sqrt{1-y^2}dx+y\sqrt{1-x^2}dy=0$. *Ответ*: $\sqrt{1-y^2}=\arcsin x+C$;
3. $y'=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$. *Ответ*: $y^2=x^2\ln(Cx)^2$;
4. $xy'+y=\ln x+1$, $y(1)=0$. *Ответ*: $y=\ln x$;
5. $y'=x\sqrt{y}+\frac{xy}{x^2-1}$. *Ответ*: $y=\left(\frac{4}{3}\left(x^2-1\right)^{\frac{3}{4}}+C\right)^2\sqrt{x^2-1}$;
6. $(8S+10t)dt+(5S+7t)dS=0$. *Ответ*: $(t+S)^2(2t+S)^3=C$.

Уровень II

Вариант 1

1. Проинтегрировать дифференциальное уравнение

$$(1-x)dy+(x+y-2)dx=0.$$

Ответ: $\ln|x-1|-\dfrac{y-1}{x-1}=C$.

2. Записать уравнение кривой, проходящей через точку $A(x_0,y_0)$, если известно, что угловой коэффициент касательной в любой ее точке равняется ординате этой точки, увеличенной в k раз. $A(0, -2)$, $k = 3$.

Ответ: $y=-2e^{3x}$.

3. Записать уравнение кривой, проходящей через точку $A(x_0,y_0)$, если известно, что длина отрезка, отсекаемого на оси ординат нормалью, проведенной в любой точке кривой, равна расстоянию от этой точки до начала координат. $A(0, 4)$.

Ответ: $y=-\dfrac{1}{16}x^2+4$.

4. Скорость движущегося тела возрастает обратно пропорционально пройденному пути. В начальный момент движения тело находилось на расстоянии S_0 от начала отсчета пути и имело скорость v_0. Определить пройденный путь и скорость тела через время T после начала движения.

$S_0 = 5$ м, $v_0 = 20$ м/с, $T = 10$ с.

Ответ: 45 м; $\dfrac{20}{9}$ м/с.

Вариант 2

1. Проинтегрировать дифференциальное уравнение

$$(2x-y+1)dx+(2y-x-1)dy=0.$$

Ответ: $x^2-xy+y^2+x-y=C$.

2. Записать уравнение кривой, проходящей через точку $A(x_0,y_0)$, если известно, что угловой коэффициент касательной в любой ее точке равняется ординате этой точки, увеличенной в k раз. $A(0, 5)$, $k = 7$.

Ответ: $y=5e^{7x}$.

3. Записать уравнение кривой, проходящей через точку $A\left(x_0, y_0\right)$, если известно, что длина отрезка, отсекаемого на оси ординат нормалью, проведенной в любой точке кривой, равна расстоянию от этой точки до начала координат. $A(0, -8)$.

Ответ: $y = \frac{x^2}{32} - 8$.

4. Скорость движущегося тела возрастает обратно пропорционально пройденному пути. В начальный момент движения тело находилось на расстоянии S_0 от начала отсчета пути и имело скорость v_0. Определить пройденный путь и скорость тела через время T после начала движения. $S_0 = 10$ м, $v_0 = 20$ м/с, $T = 2$ с.

Ответ: 30 м; $\frac{20}{3}$ м/с.

Вариант 3

1. Проинтегрировать дифференциальное уравнение

$$\left(y+2\right)dx - \left(2x + y - 4\right)dy = 0.$$

Ответ: $x + y - 1 = C\left(y+2\right)^2$.

2. Записать уравнение кривой, проходящей через точку $A\left(x_0, y_0\right)$, если известно, что угловой коэффициент касательной в любой ее точке равняется ординате этой точки, увеличенной в k раз. $A(-1, 3)$, $k = 2$.

Ответ: $y = 3e^{2x+2}$.

3. Записать уравнение кривой, проходящей через точку $A\left(x_0, y_0\right)$, если известно, что длина отрезка, отсекаемого на оси ординат нормалью, проведенной в любой точке кривой, равна расстоянию от этой точки до начала координат. $A(0, 1)$.

Ответ: $y = -\frac{x^2}{4} + 1$.

4. Скорость движущегося тела возрастает обратно пропорционально пройденному пути. В начальный момент движения тело находилось на расстоянии S_0 от начала отсчета пути и имело скорость v_0. Определить пройденный путь и скорость тела через время T после начала движения.

$S_0 = 25$ м, $v_0 = 10$ м/с, $T = 10$ с.

Ответ: 75 м; $\frac{10}{3}$ м/с.

Вариант 4

1. Проинтегрировать дифференциальное уравнение

$$(x+y+1)dx+(2x+2y-1)dy=0.$$

Ответ: $x+2y+3\ln|x+y-2|=C$.

2. Записать уравнение кривой, проходящей через точку $A(x_0, y_0)$, если известно, что угловой коэффициент касательной в любой ее точке равняется ординате этой точки, увеличенной в k раз. $A(-2, 4)$, $k = 6$.

Ответ: $y=4e^{6x+12}$.

3. Записать уравнение кривой, проходящей через точку $A(x_0, y_0)$, если известно, что длина отрезка, отсекаемого на оси ординат нормалью, проведенной в любой точке кривой, равна расстоянию от этой точки до начала координат. $A(0, -3)$.

Ответ: $y=\dfrac{x^2}{12}-3$.

4. Скорость движущегося тела возрастает обратно пропорционально пройденному пути. В начальный момент движения тело находилось на расстоянии S_0 от начала отсчета пути и имело скорость v_0. Определить пройденный путь и скорость тела через время T после начала движения. $S_0 = 35$ м, $v_0 = 40$ м/с, $T = 50$ с.

Ответ: ≈375,8 м; 3,7 м/с.

Вариант 5

1. Проинтегрировать дифференциальное уравнение

$$x+y-2+(1-x)y'=0.$$

Ответ: $\ln|x-1|-\dfrac{y-1}{x-1}=C$.

2. Записать уравнение кривой, проходящей через точку $A(x_0, y_0)$, если известно, что угловой коэффициент касательной в любой ее точке равняется ординате этой точки, увеличенной в k раз. $A(-2, 1)$, $k = 5$.

Ответ: $y=e^{5x+10}$.

3. Записать уравнение кривой, проходящей через точку $A(x_0, y_0)$ и обладающей следующим свойством: длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на касательную к кривой, равна абсциссе точки касания. $A(2, 3)$.

Ответ: $\left(x-\dfrac{13}{4}\right)^2+y^2=\dfrac{169}{16}$.

4. Скорость движущегося тела возрастает обратно пропорционально пройденному пути. В начальный момент движения тело находилось на расстоянии S_0 от начала отсчета пути и имело скорость v_0. Определить пройденный путь и скорость тела через время T после начала движения. $S_0 = 20$ м, $v_0 = 15$ м/с, $T = 10$ с.

Ответ: 80 м; 3,75 м/с.

Вариант 6

1. Проинтегрировать дифференциальное уравнение

$$(x+y+2)dx+(2x+2y-1)dy=0.$$

Ответ: $x+2y+5\ln|x+y-3|=C$.

2. Записать уравнение кривой, проходящей через точку $A(x_0, y_0)$, если известно, что угловой коэффициент касательной в любой ее точке равняется ординате этой точки, увеличенной в k раз. $A(3, -2)$, $k = 4$.

Ответ: $y=-2e^{4x-12}$.

3. Записать уравнение кривой, проходящей через точку $A(x_0, y_0)$ и обладающей следующим свойством: длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на касательную к кривой, равна абсциссе точки касания. $A(-4, 1)$.

Ответ: $\left(x+\dfrac{17}{8}\right)^2+y^2=\dfrac{289}{64}$.

4. Скорость движущегося тела возрастает обратно пропорционально пройденному пути. В начальный момент движения тело находилось на расстоянии S_0 от начала отсчета пути и имело скорость v_0. Определить пройденный путь и скорость тела через время T после начала движения.
$S_0 = 5$ м, $v_0 = 20$ м/с, $T = 3$ с.

Ответ: 25 м; 4 м/с.

Вариант 7

1. Проинтегрировать дифференциальное уравнение $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x-3y+1}{2x+y+2}$.

Ответ: $\sqrt{y^2+5y(x+1)-(x+1)^2}\cdot\left(\dfrac{(\sqrt{29}+5)(x+1)+2y}{(\sqrt{29}-5)(x+1)-2y}\right)^{\frac{1}{2\sqrt{29}}}=C$.

2. Записать уравнение кривой, проходящей через точку $A\left(x_0, y_0\right)$, если известно, что угловой коэффициент касательной в любой ее точке в n раз больше углового коэффициента прямой, соединяющей ту же точку с началом координат. A(2, 5), n = 8.

Ответ: $y = \dfrac{5}{256}x^8$.

3. Записать уравнение кривой, проходящей через точку $A\left(x_0, y_0\right)$, если известно, что длина отрезка, отсекаемого на оси ординат нормалью, проведенной в любой точке кривой, равна расстоянию от этой точки до начала координат. A(1, – 2).

Ответ: $\left(x-2{,}5\right)^2 + y^2 = 6{,}25$.

4. Скорость движущегося тела возрастает обратно пропорционально пройденному пути. В начальный момент движения тело находилось на расстоянии S_0 от начала отсчета пути и имело скорость v_0. Определить пройденный путь и скорость тела через время T после начала движения.
S_0 = 10 м, v_0 = 15 м/с, T = 4 с.

Ответ: 50 м; 6 м/с.

Вариант 8

1. Проинтегрировать дифференциальное уравнение

$$\left(x+2y+1\right)dx - \left(2x+4y+3\right)dy = 0.$$

Ответ: $\ln\left|4x+8y+5\right| + 8y - 4x = C$.

2. Записать уравнение кривой, проходящей через точку $A\left(x_0, y_0\right)$, если известно, что угловой коэффициент касательной в любой ее точке в n раз больше углового коэффициента прямой, соединяющей ту же точку с началом координат. A(3, – 1), $n = \dfrac{3}{2}$.

Ответ: $y = -\dfrac{x\sqrt{x}}{3\sqrt{3}}$.

3. Записать уравнение кривой, проходящей через точку $A\left(x_0, y_0\right)$, если известно, что длина отрезка, отсекаемого на оси ординат нормалью, проведенной в любой точке кривой, равна расстоянию от этой точки до начала координат. A(– 2, – 2).

Ответ: $\left(x+2\right)^2 + y^2 = 4$.

4. Скорость движущегося тела возрастает обратно пропорционально пройденному пути. В начальный момент движения тело находилось на расстоянии S_0 от начала отсчета пути и имело скорость v_0. Определить пройденный путь и скорость тела через время T после начала движения.
$S_0 = 15$ м, $v_0 = 10$ м/с, $T = 6$ с.

Ответ: 45 м; $\frac{10}{3}$ м/с.

Вариант 9

1. Проинтегрировать дифференциальное уравнение

$$(x+2y+1)dx-(2x-3)dy=0.$$

Ответ: $\ln|2x-3|-\frac{4y+5}{2x-3}=C$.

2. Записать уравнение кривой, проходящей через точку $A(x_0, y_0)$, если известно, что угловой коэффициент касательной в любой ее точке в n раз больше углового коэффициента прямой, соединяющей ту же точку с началом координат. $A(-6, 4)$, $n = 9$.

Ответ: $y=-\frac{x^9}{11664}$.

3. Записать уравнение кривой, проходящей через точку $A(x_0, y_0)$, если известно, что длина отрезка, отсекаемого на оси ординат нормалью, проведенной в любой точке кривой, равна расстоянию от этой точки до начала координат. $A(4, -3)$.

Ответ: $(x-3{,}125)^2+y^2=3{,}125^2$.

4. Скорость движущегося тела возрастает обратно пропорционально пройденному пути. В начальный момент движения тело находилось на расстоянии S_0 от начала отсчета пути и имело скорость v_0. Определить пройденный путь и скорость тела через время T после начала движения.
$S_0 = 20$ м, $v_0 = 10$ м/с, $T = 15$ с.

Ответ: 80 м; 2,5 м/с.

Вариант 10

1. Проинтегрировать дифференциальное уравнение

$$(x-y)dx+(2y-x+1)dy=0.$$

Ответ: $\frac{x^2}{2}+y^2-xy+y=C$.

2. Записать уравнение кривой, проходящей через точку $A(x_0, y_0)$, если известно, что угловой коэффициент касательной в любой ее точке в n раз больше углового коэффициента прямой, соединяющей ту же точку с началом координат. $A(-8, -2)$, $n = 3$.

Ответ: $y = \frac{x^3}{256}$.

3. Записать уравнение кривой, проходящей через точку $A(x_0, y_0)$, если известно, что длина отрезка, отсекаемого на оси ординат нормалью, проведенной в любой точке кривой, равна расстоянию от этой точки до начала координат. $A(5, 0)$.

Ответ: $(x - 2{,}5)^2 + y^2 = 6{,}25$.

4. Скорость движущегося тела возрастает обратно пропорционально пройденному пути. В начальный момент движения тело находилось на расстоянии S_0 от начала отсчета пути и имело скорость v_0. Определить пройденный путь и скорость тела через время T после начала движения.
$S_0 = 15$ м, $v_0 = 15$ м/с, $T = 60$ с.

Ответ: 165 м; $\frac{15}{11}$ м/с.

Уровень III

1. Записать уравнение кривой, проходящей через точку (3, − 2) и обладающей следующим свойством: отрезок, который касательная в любой точке кривой отсекает на оси Oy, равен квадрату абсциссы точки касания.

Ответ: $y = \frac{7}{3}x - x^2$.

2. Записать уравнение кривой, проходящей через точку $A(16; 0)$, если известно, что отрезок, отсекаемый касательной к кривой на оси ординат, равен полусумме координат точки касания.

Ответ: $y = 4\sqrt{x} - x$.

3. Записать уравнение кривой, проходящей через точку $A(2; 2)$, если известно, что площадь трапеции, ограниченной осями координат, любой касательной к кривой и ординатой точки касания, есть величина постоянная, равная 3.

Ответ: $y = \frac{2}{x} + \frac{x^2}{4}$.

4. В резервуаре первоначально содержится A кг вещества, растворенного в B л воды. Затем каждую минуту в резервуар поступает M л воды и вытекает N л раствора ($M > N$), причем концентрация сохраняется равномерной путем перемешивания. Найти количество вещества в резервуаре через T мин после начала процесса.

Ответ: $x(T) = A\left(\dfrac{B}{B+(M-N)T}\right)^{\frac{N}{M-N}}$.

5. Скорость распада радия пропорциональна его количеству. В течение года из каждого грамма радия распадается 0,44 мг. Через сколько лет распадется половина имеющегося количества радия?

Ответ: через 1575 лет.

6. Скорость охлаждения тела пропорциональна разности температур тела и окружающей его среды (закон Ньютона). Найти зависимость температуры T от времени t, если тело, нагретое до T_0 градусов, внесено в помещение, температура которого постоянна и равна a градусам.

Ответ: $T = a + (T_0 - a)e^{-kt}$.

7. Замедляющее действие трения на диск, вращающийся в жидкости, пропорционально угловой скорости вращения. Найти зависимость этой угловой скорости от времени, если известно, что диск, начавший вращаться со скоростью 5 об/с, по истечении двух минут вращается со скоростью 3 об/с. Через сколько времени он будет иметь угловую скорость 1 об/с?

Ответ: $\omega = 5\cdot\left(\dfrac{3}{5}\right)^{\frac{t}{120}}$ об/с; через 6 мин 18 с.

8. В помещении цеха вместимостью 10800 м^3 воздух содержит 0,12 % углекислоты. Вентиляторы доставляют свежий воздух, содержащий 0,04 % углекислоты, в количестве 1500 м^3/мин. Предполагая, что концентрация углекислоты во всех частях помещения в каждый момент времени одна и та же, найти содержание углекислоты через 10 мин после начала работы вентиляторов.

Ответ: 0,06 %.

9. Сила тока i в цепи с сопротивлением R, самоиндукцией L и напряжением U удовлетворяет уравнению $L\dfrac{di}{dt} + Ri = U$. Найти силу тока i в момент времени t, если $U = E\sin t$ и $i = 0$ при $t = 0$ (L, R, E, ω – постоянные).

Ответ: $i = \dfrac{E}{R^2 + L^2\omega^2}\left(R\sin\omega t - L\omega\cos\omega t + L\omega e^{-\frac{R}{L}t}\right)$.

10. Трубопровод тепловой магистрали (диаметр 20 см) защищен изоляцией толщиной 10 см; величина коэффициента теплопроводности $k = 0{,}00017$. Температура трубы равна 160°, температура внешнего покрова 30°. Найти распределение температуры внутри изоляции, а также количество теплоты, отдаваемой 1 м трубы.

Ответ: $T = 591{,}8 - 431{,}8\lg x$; количество теплоты, отдаваемое в течение суток, равно 1 730 000 кал.

Указание: Если тело находится в стационарном тепловом состоянии и температура T в каждой его точке есть функция только одной координаты x, то, согласно закону теплопроводности Фурье, количество теплоты, испускаемое в секунду, $Q = -kF(x)\dfrac{dT}{dx} = \text{const}$, где $F(x)$ – площадь сечения тела на расстоянии x, k – коэффициент теплопроводности.

11. Найти решение уравнения $x^2y' + \sin 2y = 1$, удовлетворяющее условию $y \to 11\dfrac{\pi}{4}$ при $x \to \infty$.

Ответ: $y = \operatorname{arctg}\dfrac{2+x}{2-x}$.

12. Найти общий интеграл уравнения $y' = \dfrac{y}{x} + \dfrac{\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)}{\varphi'\left(\dfrac{y}{x}\right)}$.

Ответ: $\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right) = Ce^x$.

13. Пусть y_1 и y_2 – два различных решения уравнения $y' + p(x)y = f(x)$. Доказать, что $y = y_1 + C(y_2 - y_1)$ является общим решением этого же уравнения.

14. Подходящей заменой уравнение $yy'\sin x = \cos x\left(\sin x - y^2\right)$ свести к линейному и найти его общий интеграл.

Ответ: $y = \dfrac{1}{\sin x}\sqrt{\dfrac{2}{3}\sin^3 x + C}$.

15. Проинтегрировать уравнение Лагранжа $y = 2xy' + y'^2$.

Ответ: $x = \dfrac{C}{3p^2} - \dfrac{2}{3}p$, $y = \dfrac{2C - p^3}{3p}$.

16. Проинтегрировать уравнение Клеро $y = x \cdot y' + y'$.

Ответ: $y = Cx + C$.

17. Доказать, что функция $y = 1$ является особым решением дифференциального уравнения $y' = \sqrt{1 - y^2}$.

18. Доказать, что кривая, у которой угловой коэффициент в любой точке пропорционален абсциссе точки касания, есть парабола.

19. Докажите, что если все интегральные линии некоторого дифференциального уравнения подобны между собой с центром подобия в начале координат, то это уравнение однородное.

20. Решить комплексное дифференциальное уравнение $z' = \lambda z$, где $z = x + iy$ – комплексная неизвестная функция действительного переменного t, а $\lambda = \alpha + i\beta$ – комплексное число.

Ответ: $\begin{cases} x = r \cdot e^{\alpha t} \cos(\beta t + \varphi), \\ y = r \cdot e^{\alpha t} \sin(\beta t + \varphi). \end{cases}$

V. Дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка

1. Краткий теоретический обзор с использованием лекционного материала, графической схемы, информационной таблицы. Будем различать дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка, трех видов:

а) вида $y^{(n)} = f(x)$, решается n-кратным интегрированием;

б) не содержащее в явном виде неизвестную функцию y, $F\left(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, ..., y^{(n)}\right) = 0$. Замена $z = y^{(k)}$, $z = z(x)$, понижает порядок уравнения до $(n - k)$.

в) не содержащее в явном виде независимую переменную; замена $y' = p(y)$ понижает порядок на единицу.

2. Два студента у доски (параллельно) решают задачу: Найти частное решение дифференциального уравнения $y''' = \frac{\ln x}{x^2}$, удовлетворяющее начальным условиям:

$y(1)=0$, $y'(1) = 1$, $y''(1) = 2$. *Ответ*: $y = -\frac{x}{2}\ln^2 x + \frac{3}{2}x^2 - 2x + \frac{1}{2}$.

3. Студенты самостоятельно решают пример:

$y'' = x \cdot e^{-x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. *Ответ*: $y = (x+2)e^{-x} + x - 1$.

4. Обучающая задача 1 (решает у доски преподаватель). Пуля входит в брус толщиной 12 см со скоростью 200 м/с, а вылетает, пробив его, со скоростью 60 м/с. Брус сопротивляется движению пули с силой, пропорциональной квадрату скорости движения. Найти время движения пули через брус.

Решение. На основании второго закона динамики $F = ma$. По условию задачи сила $F = -kv^2$ (она направлена против движения пули). Составляя уравнение, получим $ma = -kv^2$.

Так как $v = \frac{dS}{dt}$, $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2S}{dt^2}$, то $m\frac{d^2S}{dt^2} = -k\left(\frac{dS}{dt}\right)^2$ $\Rightarrow$ $\frac{d^2S}{dt^2} = -\frac{k}{m}\left(\frac{dS}{dt}\right)^2$. Тогда $\frac{d^2S}{dt^2} = -\alpha\left(\frac{dS}{dt}\right)^2$, где $\alpha = \frac{k}{m}$, т.е. мы получили неполное дифференциальное уравнение вида $y'' = f(y')$, решим его методом понижения порядка путем введения новой искомой функции.

$\frac{dS}{dt} = p(t)$, $\frac{d^2S}{dt^2} = \frac{dp}{dt}$. Наше уравнение примет вид $\frac{dp}{dt} = -\alpha p^2$.

Разделяя переменные p и t, получим

$$\frac{dp}{p^2} = -\alpha\, dt \quad \Rightarrow \quad \int\frac{dp}{p^2} = -\alpha\int dt + C_1 \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{p} = -\alpha t + C_1.$$

Подставим $p = \frac{dS}{dt}$, тогда $-\frac{dt}{dS} = -\alpha t + C_1$ $\Rightarrow$ $dS = \frac{dt}{\alpha t - C_1}$ $\Rightarrow$

$$S = \frac{1}{\alpha}\int\frac{d(\alpha t - C_1)}{\alpha t - C_1} + C_2 \;\Rightarrow\; S = \frac{1}{\alpha}\ln\left|\alpha t - C_1\right| + C_2.$$

Используем начальные условия: при $t = 0$, $S = 0$ и $\frac{dS}{dt} = 200$ м/с.

Так как $\frac{dS}{dt} = \frac{1}{\alpha t - C_1}$, то имеем систему

$$\begin{cases} 0 = \frac{1}{\alpha}\ln\left|C_1\right| + C_2, \\ 200 = -\frac{1}{C_1}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = -\frac{1}{200}, \\ C_2 = -\frac{1}{\alpha}\ln\frac{1}{200}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = -\frac{1}{200}, \\ C_2 = \frac{1}{\alpha}\ln 200. \end{cases}$$

В результате получаем частное решение, изображающее уравнение движения в условиях задачи

$$S=\frac{1}{\alpha}\ln\left|\alpha t+\frac{1}{200}\right|+\frac{1}{\alpha}\ln 200=\frac{1}{\alpha}\ln\left(\left(\alpha t+\frac{1}{200}\right)200\right)=\frac{1}{\alpha}\ln\left(200\alpha t+1\right).$$

Решим уравнение $S=\frac{1}{\alpha}\ln\left(200\alpha t+1\right)$ относительно t.

$$\alpha S=\ln\left(200\alpha t+1\right)\ \Rightarrow\ 200\alpha t+1=e^{\alpha S}\ \Rightarrow\ t=\frac{e^{\alpha S}-1}{200\alpha}.$$

Неизвестный коэффициент α определим из дополнительного условия: при $S=h=12$ см $=0{,}12$ м. $\frac{dS}{dt}=60$ м/с.

$\frac{dS}{dt}=\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{200\alpha t+1}\cdot 200\alpha=\frac{200}{200\alpha t+1}$. Подставим $t=\frac{e^{\alpha S}-1}{200\alpha}$, тогда

$$\frac{dS}{dt}=\frac{200}{200\alpha\cdot\dfrac{e^{\alpha S}-1}{200\alpha}+1}=\frac{200}{e^{\alpha S}-1+1}=\frac{200}{e^{\alpha S}}.$$

Подстановка дополнительного условия приводит к равенству

$$60=\frac{200}{e^{\alpha\cdot 0{,}12}}\ \Rightarrow\ e^{\alpha\cdot 0{,}12}=\frac{10}{3}\ \Rightarrow\ 0{,}12\alpha=\ln\frac{10}{3}\ \Rightarrow\ \alpha=\frac{\ln\frac{10}{3}}{0{,}12}\approx 10{,}03.$$

Таким образом, имеем $t=\frac{e^{\alpha S}-1}{200\alpha}=\frac{e^{10{,}03\cdot 0{,}12}-1}{200\cdot 10{,}03}=\frac{3{,}3321-1}{2006}=0{,}00116$ с.

Итак, время прохождения пули через брус равно 0,00116 с (немногим более тысячной доли секунды).

5. Два студента у доски решают примеры:

а) $y''-\frac{y'}{x-1}=x\left(x-1\right)$, $y\left(2\right)=1$, $y'\left(2\right)=-1$.

Ответ: $y=\frac{1}{24}\left(3x^4-4x^3-36x^2+72x+8\right)$.

б) $y'''\left(x-1\right)-y''=0$, $y\left(2\right)=2$, $y'\left(2\right)=1$, $y''\left(2\right)=1$.

Ответ: $y=\frac{1}{6}\left(x^3-3x^2+6x+4\right)$.

6. Обучающая задача 2 (решает преподаватель у доски). Решить уравнение $y'^2+yy''=yy'$.

Решение. Это дифференциальное уравнение, не содержащее в явном виде независимую переменную x. Положим $y' = p(y) \Rightarrow$ $y'' = \dfrac{dp}{dy} \cdot \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dp}{dy} \cdot p$. Тогда уравнение принимает вид

$$p^2 + y \cdot \frac{dp}{dy} p = y \cdot p \;\Rightarrow\; p\left(p + y\frac{dp}{dy} - y\right) = 0.$$

Полагая $p \neq 0$, получим $p + y\dfrac{dp}{dy} - y = 0 \;\Rightarrow\; \dfrac{dp}{dy} + \dfrac{1}{y} p = 1$, т.е. получили линейное дифференциальное уравнение первого порядка, решаем его методом Бернулли. $p = u(y)v(y) \;\Rightarrow\; p = u(y)v(y) \;\Rightarrow\; p' = u'v + uv'$, тогда $u'v + uv' + \dfrac{1}{y}uv = 1 \;\Rightarrow\; u'v + u\left(v' + \dfrac{1}{y}v\right) = 1 \;\Rightarrow\; \begin{cases} v' + \dfrac{1}{y}v = 0, \\ u'v = 1. \end{cases}$

Решаем первое уравнение системы $v' + \dfrac{1}{y}v = 0 \;\Rightarrow\; \dfrac{dv}{dy} = -\dfrac{v}{y} \;\Rightarrow$ $\dfrac{dv}{v} = -\dfrac{dy}{y} \;\Rightarrow\; \ln|v| = -\ln|y| \;\Rightarrow\; v = \dfrac{1}{y}$. Тогда второе уравнение системы принимает вид $\dfrac{du}{dy} \cdot \dfrac{1}{y} = 1 \;\Rightarrow\; du = ydy \;\Rightarrow\; u = \dfrac{y^2}{2} - C_2$. Теперь $p = u(y) \cdot v(y) = \dfrac{1}{y}\left(\dfrac{y^2}{2} - C_2\right) = \dfrac{y^2 - 2C_2}{2y}$. Но $p = \dfrac{dy}{dx}$, поэтому $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2 - 2C_2}{2y} \;\Rightarrow\; \dfrac{2ydy}{y^2 - 2C_2} = dx \;\Rightarrow\; \displaystyle\int \frac{d\left(y^2 - 2C_2\right)}{y^2 - 2C_2} = \int dx + \ln 2C_1 \;\Rightarrow$ $\ln\left|y^2 - 2C_2\right| = \ln e^x + \ln 2C_1 \;\Rightarrow\; y^2 - 2C_2 = 2C_1e^x \;\Rightarrow\; \dfrac{y^2}{2} = C_1e^x + C_2$ – общий интеграл данного дифференциального уравнения.

З а м е ч а н и е. Это уравнение можно проинтегрировать более простым способом, т.к. его левая часть $y'^2 + yy'' = (yy')'$, т.е. уравнение принимает вид $(yy')' = y \cdot y'$ или $\dfrac{d(yy')}{yy'} = dx \;\Rightarrow\; \ln(yy') = x + \ln C_1 \;\Rightarrow$ $y \cdot y' = C_1e^x$, т.е $ydy = C_1e^x dx \;\Rightarrow\; \dfrac{y^2}{2} = C_1e^x + C_2$.

7. Студент у доски решает дифференциальное уравнение

$$y'' = y' \cdot e^y, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

Ответ: $y = -\ln|1-x|$.

8. Студенты самостоятельно решают примеры:

а) $y \cdot y'' - y'^2 = 0$. *Ответ*: $y = C_2 e^{C_1 x}$.

б) $y''' = 2(y''-1)\operatorname{ctg} x$. *Ответ*: $2y = C_1 \cos 2x + (1+2C_1)x^2 + C_2 x + C_3$.

в) $y^{IY} = \dfrac{8}{(x-3)^5}$. *Ответ*: $y = \dfrac{1}{3(x-3)} + C_1 x^3 + C_2 x^2 + C_3 x + C_4$.

Домашнее задание

1. Подготовка теоретического материала по теме «Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами».

2. Решить следующие примеры:

а) $x^2 y''' = y''^2$. *Ответ*: $2y = C_1 x^2 - 2C_1^2 (x + C_1)\ln|x + C_1| + C_2 x + C_3$.

б) $y'' = \dfrac{1}{1+x^2}$. *Ответ*: $y = (C_1 + \operatorname{arctg} x)x - \ln\sqrt{1+x^2} + C_2$.

в) $y'' = e^{2y}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. *Ответ*: $y = -\ln|x-1|$.

3. Решить задачу: с высоты падает тело массы m с начальной скоростью $v(0) = 0$. Найти скорость тела $v = v(t)$ в любой момент времени t, если на него, кроме силы тяжести $P = mg$, действует сила сопротивления воздуха, пропорциональная скорости $v(t)$ с коэффициентом пропорциональности k = 1,5.

Ответ: $v = \dfrac{2}{3} mg \left(1 - e^{-1{,}5\frac{t}{m}} \right)$.

4. Решить задачу: Кривая, проходящая через точки $A(5,\ 7)$ и $B(6,\ 6)$, имеет радиус кривизны R = 5. Найти уравнение этой кривой.

Указание: радиус кривизны кривой $y = f(x)$: $R = \dfrac{\left(1+y'^2\right)^{\frac{3}{2}}}{y''}$.

Ответ: $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 25$.

VI. Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

1. Краткий теоретический обзор с использованием лекционного материала, графической схемы и информационной таблицы линейных однородных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Отдельно остановиться на дифференциальных уравнениях с постоянными коэффициентами второго порядка

$$y'' + py' + qy = 0,$$

где p и q – постоянные действительные числа. Для решения такого уравнения составляется характеристическое уравнение $k^2 + pk + q = 0$, в зависимости от корней которого могут быть следующие три случая:

а) $D > 0$ $\left(D = \dfrac{p^2}{4} - q \right)$, тогда $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$, где $k_1 \neq k_2$;

б) $D = 0$ $\left(k_1 = k_2 = -\dfrac{p}{2} \right)$, тогда $y = e^{k_1 x}\left(C_1 + C_2 x\right)$;

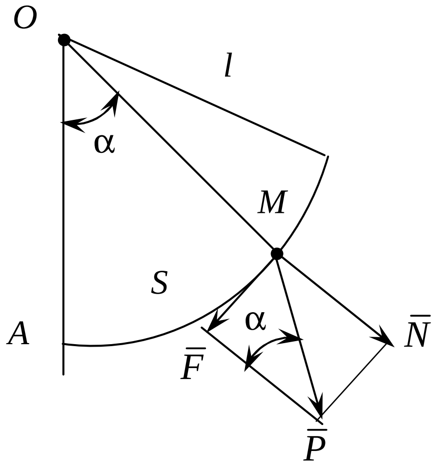
в) $D < 0$ $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, тогда $y = e^{\alpha x}\left(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x\right)$.

2. Обучающая задача 1 (решает преподаватель у доски). Найти закон движения и определить период T математического маятника длиной l при малых отклонениях.

Решение. Силу тяжести $\overline{P}$ в точке M разложим на две составляющие: $\overline{N}$ по направлению нити и $\overline{F}$ – по касательной к траектории. Сила $\overline{N}$ уравновешивается сопротивлением нити и, таким образом, вся система сил эквивалентна силе $\overline{F}$.

$$F = P\sin\alpha = mg\sin\alpha,$$

где m – масса маятника; g – ускорение силы тяжести.



Так как для положительных углов α касательная составляющая $\overline{F}$ направлена в отрицательную сторону, то $F = -mg\sin\alpha \approx -mg\alpha$ (при малых отклонениях нити $\sin\alpha \sim \alpha$).

Ввиду очевидного равенства $\alpha = \dfrac{S}{l}$, составляющая $F = -\dfrac{mg}{l}S$. Здесь $S = \overset{\frown}{AM}$ –

длина пройденного шариком криволинейного пути. На основании второго закона динамики ($F = ma$)

$$m\frac{d^2S}{dt^2} = -\frac{mg}{l}S, \qquad \text{или} \qquad \frac{d^2S}{dt^2} + \frac{g}{l}S = 0.$$

Для решения последнего уравнения составим и решим характеристическое уравнение $k^2 + \frac{g}{l} = 0 \;\Rightarrow\; k^2 = -\frac{g}{l} \;\Rightarrow\; k_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{g}{l}} \cdot \sqrt{-1} = \pm\sqrt{\frac{g}{l}}\,i$

$\left(i = \sqrt{-1}\right)$. $\alpha = 0$, $\beta = \sqrt{\frac{g}{l}}$.

Общее решение имеет вид $S = C_1 \sin\sqrt{\frac{g}{l}}\,t + C_2 \cos\sqrt{\frac{g}{l}}\,t$.

Используем начальные условия: при $t = 0$, $S = a$ и $\frac{dS}{dt} = 0$.

$\frac{dS}{dt} = C_1\sqrt{\frac{g}{l}}\cos\sqrt{\frac{g}{l}}\,t - C_2\sqrt{\frac{g}{l}}\sin\sqrt{\frac{g}{l}}\,t$. Получаем систему:

$$\begin{cases} a = C_2, \\ 0 = C_1\sqrt{\frac{g}{l}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 0, \\ C_2 = a. \end{cases}$$

Подставляя эти значения в общее решение, получим $S = a\cos\sqrt{\frac{g}{l}}\,t$, где a – амплитуда колебания.

Движение математического маятника представляет собой гармоническое колебание с периодом $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, так как

$$\cos\sqrt{\frac{g}{l}}\left(t + 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\right) = \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t + 2\pi\right) = \cos\frac{\sqrt{g}}{l}\,t.$$

3. Два студента у доски (параллельно) решают примеры:

а) $y'' - y' - 2y = 0$. *Ответ*: $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-x}$;

б) $y'' + 25y = 0$. *Ответ*: $y = C_1\cos 5x + C_2\sin 5x$;

в) $y'' + 3y' = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$. *Ответ*: $y = \frac{1}{3}\left(5 - 2e^{-3x}\right)$.

4. Студенты самостоятельно решают примеры.

Найти решения уравнений, удовлетворяющих заданным начальным условиям:

а) $y'' - 2y' + 10y = 0;\quad y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0,\ y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = e^{\frac{\pi}{6}}$. *Ответ*: $y = -\frac{1}{3}e^x \cos 3x$.

б) $y'' + 9y = 0;\quad y(0) = 0,\ y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$. *Ответ*: $y = \sqrt{2}\sin 3x$.

в) $y'' + y = 0;\quad y'(0) = 1,\ y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$. *Ответ*: $y = \sin x + \frac{1}{\sqrt{3}}\cos x$.

5. Обучающая задача 2. Найти интегральную кривую дифференциального уравнения $y'' - y = 0$, касающуюся в точке $O(0,0)$ прямой $y = x$.

Решение. $k^2 - 1 = 0 \Rightarrow k^2 = 1 \Rightarrow k_{1,2} = \pm 1$, $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^x$ – общее решение. Из условия задачи следуют начальные условия: $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ ($y' = k = \operatorname{tg}\alpha = 1$ для прямой $y = x$ и касательной в точке $O(0,0)$ к искомой кривой).

Найдем $y' = -C_1 e^{-x} + C_2 e^x$. Тогда имеем $\begin{cases} 0 = C_1 + C_2, \\ 1 = -C_1 + C_2. \end{cases} \Rightarrow 2C_2 = 1$ $\Rightarrow C_2 = \frac{1}{2}$, $C_1 = -\frac{1}{2}$. Итак, $y = -\frac{1}{2}e^{-x} + \frac{1}{2}e^x$ – искомое частное решение.

6. Обучающий пример 1. Найти общее решение уравнения $y^{IY} + 4y'' + 3y = 0$.

Решение. $k^4 + 4k^2 + 3 = 0$ – характеристическое уравнение. Пусть $k^2 = \lambda \Rightarrow \lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = -1$. Тогда $k^2 = -3 \Rightarrow k_{1,2} = \pm\sqrt{3}i$; $k^2 = -1 \Rightarrow k_{3,4} = \pm i$. Имеем

$$y = C_1 \cos\sqrt{3}x + C_2 \sin\sqrt{3}x + C_3 \sin x + C_4 \cos x \text{ – общее решение.}$$

7. Студенты самостоятельно решают примеры:

а) $y^{IY} + 2y''' + y'' = 0$. *Ответ*: $y = C_1 + C_2 x + (C_3 + C_4 x)e^{-x}$;

б) $y^{Y} + 8y''' + 16y' = 0$.

Ответ: $y = C_1 + C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x + x(C_4 \cos 2x + C_5 \sin 2x)$;

в) $y^{YI} + 2y^{Y} + y^{IY} = 0$. *Ответ*: $y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x^3 + e^{-x}(C_5 + C_6 x)$.

Домашнее задание

1. Подготовка теоретического материала по теме «Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Метод вариации произвольных постоянных».

2. Решить следующие примеры:

а) $y'' + 6y' + 13y = 0$. *Ответ*: $y = e^{-3x}\left(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x\right)$;

б) $4y'' + 4y' + y = 0$. *Ответ*: $y = e^{-\frac{x}{2}}\left(C_1 + C_2 x\right)$;

в) $3y'' - 2y' - 8y = 0$. *Ответ*: $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-\frac{4}{3}x}$;

г) $y^{YI} - 2y^{Y} + 3y^{IY} - 4y''' + 3y'' - 2y' + y = 0$.

Ответ: $y = \left(C_1 + C_2 x\right)e^{x} + \left(C_3 + C_4 x\right)\cos x + \left(C_5 + C_6 x\right)\sin x$.

3. Решить задачу: Найти интегральную кривую дифференциального уравнения $y'' - 4y' + 3y = 0$, касающуюся в точке $M(0,\ 2)$ прямой $2x - 2y + 9 = 0$. *Ответ*: $y = \dfrac{5}{2}e^{x} - \dfrac{1}{2}e^{3x}$.

4. Решить задачу: Определить закон колебания маятника в среде с сопротивлением, пропорциональным скорости качания v.

Указание. Кроме восстанавливающей силы $F = -\dfrac{mg}{l}S$ математического маятника (см. обучающую задачу 1) здесь действует еще сила сопротивления $F_1 = -bv$. Равнодействующая этих сил $R = F + F_1 = -\left(\dfrac{mg}{l}S + bv\right)$.

Ответ: $S = \dfrac{ah}{p}e^{-ht}\left(\sin pt + \dfrac{p}{h}\cos pt\right)$, где $h = \dfrac{b}{2m}$, $p = \sqrt{k^2 - h^2}$, $k^2 = \dfrac{g}{l}$.

VII. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Метод вариации произвольных постоянных

1. Краткий теоретический обзор с использованием лекционного материала, графической схемы и информационной таблицы. Следует отметить, что общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения состоит из суммы общего решения соответствующего однородного уравнения и любого частного решения неоднородного:

$$y = y_{одн} + y_ч.$$

Не существует общих методов решения линейных однородных и неоднородных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.

Однако для линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами метод нахождения общего решения существует, он рассмотрен на предыдущем занятии. В случае неоднородного уравнения частное решение можно найти методом Лагранжа вариации произвольных постоянных, если известно общее решение соответствующего однородного уравнения. Пусть $y_{одн} = C_1 y_1 + C_2 y_2$ – общее решение однородного дифференциального уравнения второго порядка $y'' + py' + qy = 0$, где y_1 и y_2 – линейно независимые решения. Частное решение неоднородного уравнения ищется в виде $y_ч = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2$. Для нахождения $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$ составляется и решается система:

$$\begin{cases} C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0, \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' = f(x). \end{cases}$$

$C_1(x)$ и $C_2(x)$ затем находятся интегрированием $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$.

2. Обучающая задача 1 (решает преподаватель у доски). Свободно висящая на крюке однородная цепь соскальзывает с него под действием собственного веса (трением можно пренебречь). Определить, за какое время соскользнет с крюка вся цепь, если в начальный момент с одной стороны крюка висело 10 м, а с другой – 8 м, и скорость цепи равна нулю.

Решение. Пусть вес одного погонного метра цепи $P_н$. Обозначим через x длину (м) большей части цепи, свешивающейся с крюка через t секунд после начала движения. К центру тяжести цепи приложена сила $F = Px - (18 - x)P = (2x - 18)P$ (Н). Масса цепи равна $18\dfrac{P}{g}$ кг, ее ускорение равно x'' м/с^2.

Итак, приходим к уравнению движения центра тяжести цепи: $F = ma \Rightarrow 18\dfrac{P}{g}x'' = (2x - 18)P$ или $x'' - \dfrac{g}{9}x = -g$.

Найдем общее решение этого уравнения. Составляем характеристическое уравнение $k^2 - \dfrac{g}{9} = 0 \Rightarrow k^2 = \dfrac{g}{9} \Rightarrow k_{1,2} = \dfrac{\pm\sqrt{g}}{3} \Rightarrow x_{одн} = C_1 e^{\frac{\sqrt{g}}{3}t} + C_2 e^{\frac{-\sqrt{g}}{3}t}$.

Частное решение будем искать методом вариации в виде $x_ч = C_1(t)e^{\frac{\sqrt{g}}{3}t} + C_2(t)e^{\frac{-\sqrt{g}}{3}t}$. Тогда система $\left.\begin{matrix} C_1' x_1 + C_2' x_2 = 0, \\ C_1' x_1' + C_2' x_2' = f(t) \end{matrix}\right\}$ имеет вид $\begin{cases} C_1' e^{\frac{\sqrt{g}}{3}t} + C_2' e^{\frac{-\sqrt{g}}{3}t} = 0, \\ \frac{\sqrt{g}}{3} C_1' e^{\frac{\sqrt{g}}{3}t} - \frac{\sqrt{g}}{3} C_2' e^{\frac{-\sqrt{g}}{3}t} = -g \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1' e^{\frac{\sqrt{g}}{3}t} + C_2' e^{\frac{-\sqrt{g}}{3}t} = 0, \\ C_1' e^{\frac{\sqrt{g}}{3}t} - C_2' e^{\frac{-\sqrt{g}}{3}t} = -3\sqrt{g}. \end{cases}$

Сложим эти два уравнения: $2C_1' e^{\frac{\sqrt{g}}{3}t} = -3\sqrt{g} \Rightarrow C_1' = -1{,}5\sqrt{g}\, e^{\frac{-\sqrt{g}}{3}t}$.

Из первого уравнения системы $C_2' = -C_1' e^{\frac{2\sqrt{g}}{3}t} = 1{,}5\sqrt{g}\, e^{\frac{\sqrt{g}}{3}t}$. Теперь

$$C_1 = -1{,}5\sqrt{g}\int e^{\frac{-\sqrt{g}}{3}t}dt = \frac{4{,}5\sqrt{g}}{\sqrt{g}} e^{\frac{-\sqrt{g}}{3}t} = 4{,}5e^{\frac{-\sqrt{g}}{3}t}.$$

$$C_2 = 1{,}5\sqrt{g}\int e^{\frac{\sqrt{g}}{3}t}dt = \frac{4{,}5}{\sqrt{g}} \cdot \sqrt{g}\, e^{\frac{\sqrt{g}}{3}t} = 4{,}5e^{\frac{\sqrt{g}}{3}t}.$$

Тогда $x_ч = C_1 x_1 + C_2 x_2 = 4{,}5e^{\frac{-\sqrt{g}}{3}t} \cdot e^{\frac{\sqrt{g}}{3}t} + 4{,}5e^{\frac{\sqrt{g}}{3}t} \cdot e^{\frac{-\sqrt{g}}{3}t} = 9$.

Итак, $x = C_1 e^{\frac{\sqrt{g}}{3}t} + C_2 e^{\frac{-\sqrt{g}}{3}t} + 9$ – общее решение. Используем начальные условия: $x = 10$, $v = x' = 0$ при $t = 0$.

$$x' = \frac{\sqrt{g}}{3} C_1 e^{\frac{\sqrt{g}}{3}t} - \frac{\sqrt{g}}{3} C_2 e^{\frac{-\sqrt{g}}{3}t}.$$

$$\begin{cases} 10 = C_1 + C_2 + 9, \\ 0 = \frac{\sqrt{g}}{3}C_1 - \frac{\sqrt{g}}{3}C_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = C_2, \\ C_1 + C_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow C_1 = C_2 = \frac{1}{2}.$$

Значит, $x = \frac{e^{\frac{\sqrt{g}}{3}t} + e^{\frac{-\sqrt{g}}{3}t}}{2} + 9$ или $x = \operatorname{ch}\frac{\sqrt{g}}{3}t + 9$.

Время, за которое соскользнет вся цепь, определим из условия:

$x = 18$ при $t = T$. $18 = 9 + \operatorname{ch}\frac{\sqrt{g}}{3}T$ или $\frac{e^{\frac{\sqrt{g}}{3}T} + e^{\frac{-\sqrt{g}}{3}T}}{2} = 9 \Rightarrow$

$$e^{\frac{\sqrt{g}}{3}T}+\frac{1}{e^{\frac{\sqrt{g}}{3}T}}=18 \;\Rightarrow\; e^{\frac{2\sqrt{g}}{3}T}-18e^{\frac{\sqrt{g}}{3}T}+1=0.$$ Пусть $e^{\frac{\sqrt{g}}{3}T}=y>0$, тогда

$$y^2-18y+1=0 \;\Rightarrow\; y_{1,2}=9\pm\sqrt{81-1}=9\pm\sqrt{80}=9\pm 4\sqrt{5}.$$

$$e^{\frac{\sqrt{g}}{3}T}=9+4\sqrt{5} \;\Rightarrow\; \frac{\sqrt{g}}{3}T=\ln\left(9+4\sqrt{5}\right) \;\Rightarrow\; T=\frac{3}{\sqrt{g}}\ln\left(9+4\sqrt{5}\right)\approx 2{,}76 \text{ с}$$

(корень $9-4\sqrt{5}$ не удовлетворяет условиям задачи).

3. Два студента у доски (параллельно) решают примеры. Найти общие решения:

а) $y''+3y'+2y=\frac{1}{e^x+1}$. *Ответ*: $y=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}+\left(e^{-x}+e^{-2x}\right)\ln\left(e^x+1\right)-e^{-x}$.

б) $y''+4y'+4y=e^{-2x}\ln x$. *Ответ*: $y=\left(C_1+C_2x+\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{3}{4}x^2\right)e^{-2x}$.

4. Обучающий пример (решает преподаватель у доски). Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'''-2y''-y'+2y=\frac{e^{2x}}{e^x+1}.$$

Решение. Составляем и решаем характеристическое уравнение

$$k^3-2k^2-k+2=0 \;\Rightarrow\; k^2(k-2)-(k-2)=0 \;\Rightarrow\; (k-2)\left(k^2-1\right)=0 \;\Rightarrow$$

$$k_{1,2}=\pm 1,\quad k_3=2 \;\Rightarrow\; y_{одн}=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3e^{2x}.$$

Частное решение неоднородного уравнения ищем в виде

$$y_ч=C_1(x)e^x+C_2(x)e^{-x}+C_3(x)e^{2x}.$$

Система в общем виде для нахождения $C_1'(x)$, $C_2'(x)$, $C_3'(x)$

следующая
$$\begin{cases} C_1'y_1+C_2'y_2+C_3'y_3=0, \\ C_1'y_1'+C_2'y_2'+C_3'y_3'=0, \\ C_1'y_1''+C_2'y_2''+C_3'y_3''=f(x). \end{cases}$$

В нашем примере система имеет вид $\begin{cases} C_1' e^x + C_2' e^{-x} + C_3' e^{2x} = 0, \\ C_1' e^x - C_2' e^{-x} + 2C_3' e^{2x} = 0, \\ C_1' e^x + C_2' e^{-x} + 4C_3' e^{2x} = \dfrac{e^{2x}}{e^x+1}. \end{cases}$

Ее главный определитель $W = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} & e^{2x} \\ e^x & -e^{-x} & 2e^{2x} \\ e^x & e^{-x} & 4e^{2x} \end{vmatrix} = e^x \cdot e^{-x} \cdot e^{2x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} =$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = e^{2x} \cdot 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -6e^{2x} \neq 0.$$

Решим эту систему по правилу Крамера:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & e^{-x} & e^{2x} \\ 0 & -e^{-x} & 2e^{2x} \\ \dfrac{e^{2x}}{e^x+1} & e^{-x} & 4e^{2x} \end{vmatrix} = e^{-x} \cdot e^{2x} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ \dfrac{e^{2x}}{e^x+1} & 1 & 4 \end{vmatrix} = e^x \cdot \frac{e^{2x}}{e^x+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3\frac{e^{3x}}{e^x+1};$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} e^x & 0 & e^{2x} \\ e^x & 0 & 2e^{2x} \\ e^x & \dfrac{e^{2x}}{e^x+1} & 4e^{2x} \end{vmatrix} = e^x \cdot e^{2x} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & \dfrac{e^{2x}}{e^x+1} & 4 \end{vmatrix} = -e^{3x} \cdot \frac{e^{2x}}{e^x+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -\frac{e^{5x}}{e^x+1};$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} & 0 \\ e^x & -e^{-x} & 0 \\ e^x & e^{-x} & \dfrac{e^{2x}}{e^x+1} \end{vmatrix} = e^x \cdot e^{-x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & \dfrac{e^{2x}}{e^x+1} \end{vmatrix} = \frac{e^{2x}}{e^x+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2\frac{e^{2x}}{e^x+1}.$$

$$C_1' = \frac{\Delta_1}{W} = \frac{3e^{3x}}{\left(e^x+1\right)\left(-6e^{2x}\right)} = -\frac{1}{2}\frac{e^x}{e^x+1};$$

$$C_2{}' = \frac{\Delta_2}{W} = \frac{-e^{5x}}{\left(e^x+1\right)\left(-6e^{2x}\right)} = \frac{1}{6}\frac{e^{3x}}{e^x+1};$$

$$C_3{}' = \frac{\Delta_3}{W} = -2\frac{e^{2x}}{\left(e^x+1\right)\left(-6e^{2x}\right)} = \frac{1}{3}\frac{1}{e^x+1}.$$

Интегрируя эти выражения, получаем:

$$C_1 = -\frac{1}{2}\int \frac{e^x}{e^x+1}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{d\left(e^x+1\right)}{e^x+1}dx = -\frac{1}{2}\ln\left(e^x+1\right),$$

$$C_2 = \frac{1}{6}\int \frac{e^{3x}}{e^x+1}dx = \frac{1}{6}\int \frac{e^{2x}\cdot e^x}{e^x+1}dx = \frac{1}{6}\int \frac{\left(e^{2x}-1\right)+1}{e^x+1}de^x =$$

$$= \frac{1}{6}\left(\int \frac{\left(e^x+1\right)\left(e^x-1\right)}{e^x+1}de^x + \int \frac{d\left(e^x\right)}{e^x+1}\right) = \frac{1}{6}\left(\int \left(e^x-1\right)de^x + \int \frac{d\left(e^x+1\right)}{e^x+1}\right) =$$

$$= \frac{1}{6}\left(\frac{e^{2x}}{2} - e^x + \ln\left(e^x+1\right)\right),$$

$$C_3 = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{e^x+1} = \frac{1}{3}\int \frac{\left(e^x+1\right)-e^x}{e^x+1}dx = \frac{1}{3}\left(\int dx - \int \frac{d\left(e^x+1\right)}{e^x+1}dx\right) = \frac{1}{3}\left(x - \ln\left(e^x+1\right)\right).$$

Записываем частное решение

$$y_ч = -\frac{1}{2}e^x\ln\left(e^x+1\right) + \frac{1}{6}e^{-x}\left(\frac{1}{2}e^{2x} - e^x + \ln\left(e^x+1\right)\right) + \frac{1}{3}e^{2x}\left(x - \ln\left(e^x+1\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{12}e^x - \frac{1}{6} + \frac{1}{3}xe^{2x} + \left(\frac{1}{6}e^{-x} - \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{3}e^{2x}\right)\ln\left(e^x+1\right).$$

Общее решение исходного уравнения имеет вид

$$y = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3e^{2x} + \frac{1}{12}\left(4xe^{2x} + e^x - 2\right) + \frac{1}{6}\left(e^{-x} - 3e^x - 2e^{2x}\right)\ln\left(e^x+1\right).$$

Если взять $C_1(x) = -\frac{1}{2}\ln\left(e^x+1\right) + C_4$, $C_2(x) = \frac{1}{6}\left(\frac{e^{2x}}{2} - e^x + \ln\left(e^x+1\right)\right) + C_5$, $C_3(x) = \frac{1}{3}\left(x - \ln\left(e^x+1\right)\right) + C_6$, то $y = C_1(x)e^x + C_2(x)e^{-x} + C_3(x)e^{2x}$ дает то же самое общее решение.

5. Студенты решают самостоятельно следующие примеры:

а) $y'' + y = \dfrac{1}{\sqrt{\cos 2x}}$. *Ответ*: $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x +$

$$+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x \cdot \ln\left|\cos x + \sqrt{\cos^2 x - \frac{1}{2}}\right| + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x \cdot \arcsin\left(\sqrt{2}\sin x\right);$$

б) $y'' + 4y = \operatorname{ctg} 2x$.

Ответ: $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \dfrac{1}{4}\sin 2x \cdot \ln \operatorname{tg} x$;

в) $y''' + y' = \operatorname{tg} x$.

Ответ: $y = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x - \ln\left|\cos x\right| - \sin x \cdot \ln\left|\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{x}{2}\right)\right|$.

Домашнее задание

1. Подготовка теоретического материала по теме «Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами и специальной правой частью».

2. Применяя метод вариации произвольных постоянных, решить следующие примеры:

а) $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{\sqrt{4 - x^2}}$. *Ответ*: $y = \left(C_1 + C_2 x + \sqrt{4 - x^2} + x \arcsin\dfrac{x}{2}\right)e^x$;

б) $y'' + y + \operatorname{ctg}^2 x = 0$. *Ответ*: $y = 2 + C_1 \cos x + C_2 \sin x + \cos x \ln\left|\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right|$;

в) $y^{IY} - y = 8e^x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = 4$, $y'''(0) = 6$. *Ответ*: $y = 2xe^x$.

VIII. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами и специальной правой частью

1. Краткий повтор теоретического материала. Отмечаем, что для некоторых специальных правых частей частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами можно найти проще, чем методом вариации произвольных постоянных, обходясь без интегрирования.

Различают, как правило, три вида правых частей:

I. $f(x)=e^{\alpha x}P_n(x)$, где $P_n(x)$ – известный многочлен степени n. Частное решение в этом случае следует искать в виде

$$y_ч = x^l e^{\alpha x} Q_n(x),$$

где l – кратность α как корня соответствующего характеристического уравнения; $Q_n(x)$ – неизвестный многочлен такой же степени, что и многочлен $P_n(x)$.

II. $f(x)=e^{\alpha x}P(x)\cos\beta x+e^{\alpha x}Q(x)\sin\beta x$.

а) Если $\alpha\pm\beta i$ не являются корнями характеристического уравнения, то частное решение следует искать в виде

$$y_ч = e^{\alpha x}u(x)\cos\beta x+e^{\alpha x}v(x)\sin\beta x,$$

где $u(x)$ и $v(x)$ – неизвестные многочлены одинаковой степени, равной наибольшей из степеней многочленов $P(x)$ и $Q(x)$, причем, если в правой части отсутствует одно слагаемое, частное решение следует искать в полном виде (т.е. в виде суммы двух слагаемых).

б) Если $\alpha\pm\beta i$ являются корнями характеристического уравнения, то

$$y_ч = x\left(e^{\alpha x}u(x)\cos\beta x+e^{\alpha x}v(x)\sin\beta x\right).$$

III. $f(x)=M\cos\beta x+N\sin\beta x$.

Это частный случай предыдущего, однако рассмотрим его отдельно, так как дифференциальные уравнения с такими правыми частями наиболее часто встречаются в приложениях.

а) $\pm\beta i$ не являются корнями характеристического уравнения, частное решение следует искать в виде

$$y_ч = A\cos\beta x+B\sin\beta x;$$

б) $\pm\beta i$ являются корнями характеристического уравнения,

$$y_ч = x(A\cos\beta x+B\sin\beta x).$$

2. Обучающий пример 1 (решает преподаватель у доски). Решить уравнение

$$y'''+y''-2y'=x-e^x.$$

Решение. Составляем и решаем характеристическое уравнение $k^3+k^2-2k=0 \;\Rightarrow\; k\left(k^2+k-2\right)=0 \;\Rightarrow\; k_1=0$, $k_2=-2$, $k_3=1$, поэтому общее решение однородного уравнения

$$y_{одн}=C_1+C_2e^{-2x}+C_3e^x.$$

Используя принцип наложения частных решений, правую часть разобьем на две: $f_1(x)=x$, $f_2(x)=-e^x$.

$f_1(x)=x=e^{0\cdot x}\cdot P_1(x) \;\Rightarrow\; \alpha=0$ является однократным ($l=1$) корнем характеристического уравнения, поэтому соответствующее частное решение ищем в виде

$$y_ч=xe^{0\cdot x}Q_1(x),\ \text{т.е}\ \ y_1=x(Ax+B)\ \ \text{или}\ \ y_1=Ax^2+Bx \;\Rightarrow\; y_1'=2Ax+B,$$

$$y_1''=2A,\ \ y_1'''=0.\ \text{Тогда}\ 0+2A-4Ax-2B=x.$$

Приравниваем коэффициенты при x и x^0 слева и справа:

$$\begin{matrix} x: \\ x^0: \end{matrix}\begin{cases} -4A=1, \\ 2A-2B=0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-\dfrac{1}{4}, \\ B=-\dfrac{1}{4}. \end{cases} \Rightarrow\ y_1=x\left(-\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}\right),\ \text{т.е.}$$

$$y_1=-\frac{1}{4}x(x+1).$$

$f_2(x)=-e^x=e^{\alpha x}\cdot P_0(x) \;\Rightarrow\; \alpha=1$ является тоже однократным ($l=1$) корнем характеристического уравнения, поэтому второе частное решение ищем в виде

$$y_2=xe^{\alpha x}Q_0(x)=Axe^x \;\Rightarrow\; y_2'=A\left(e^x+xe^x\right),\ \ y_2''=A\left(e^x+e^x+xe^x\right),$$

$$y_2'''=A\left(2e^x+e^x+xe^x\right).$$

Тогда $A\left(3e^x+xe^x\right)+A\left(2e^x+xe^x\right)-2A\left(e^x+xe^x\right)=-e^x \;\Rightarrow$

$$A\left(3e^x+xe^x+2e^x+xe^x-2e^x-2xe^x\right)=-e^x \;\Rightarrow\; 3A=-1 \;\Rightarrow\; A=-\frac{1}{3},$$

т.е. $y_2=-\dfrac{1}{3}xe^x$. Следовательно, общее решение исходного уравнения

$$y=C_1+C_2e^{-2x}+C_3e^x-\frac{1}{4}x(x+1)-\frac{1}{3}xe^x.$$

3. Чтобы сравнить методы нахождения частного решения, вернемся к обучающей задаче 1 из предыдущего практического занятия YII.

Обучающая задача 1. Свободно висящая на крюке однородная цепь соскальзывает с него под действием собственного веса (трением можно пренебречь). Составить и решить уравнение движения центра тяжести цепи, если в начальный момент с одной стороны висело 10 м, а с другой 8 м цепи.

Решение. На усмотрение преподавателя студент у доски либо получает искомое дифференциальное уравнение заново, либо использует готовый результат из предыдущего практического занятия:

$$x'' - \frac{g}{9}x = -g, \quad x_{одн} = C_1 e^{\frac{\sqrt{g}}{3}t} + C_2 e^{\frac{-\sqrt{g}}{3}t}.$$

Для того чтобы найти частное решение, будем считать, что правая часть $f(x) = -g = e^{\alpha x}P_0(x)$ – специальная, где $\alpha = 0$ не является корнем характеристического уравнения. Поэтому частное решение ищем в виде $x_ч = e^{\alpha x}Q_0(x)$, т.е. $x_ч = A \Rightarrow x_ч{}' = x_ч{}'' = 0$. Поэтому $-\frac{g}{9}\cdot A = -g \Rightarrow A = 9$ и $x = C_1 e^{\frac{\sqrt{g}}{3}t} + C_2 e^{\frac{-\sqrt{g}}{3}t} + 9$ – искомое общее решение.

(Преподаватель сравнивает методы нахождения частного решения).

4. Студенты самостоятельно решают следующие примеры:

а) $y'' - 6y' + 8y = 3x^2 + 2x + 1.$

Ответ: $y = C_1 e^{4x} + C_2 e^{2x} + \frac{1}{64}\left(24x^2 + 52x + 41\right);$

б) $y'' - 9y' + 20y = x^2 e^{4x}.$ *Ответ*: $y = C_1 e^{5x} + C_2 e^{4x} - \left(\frac{x^3}{3} + x^2 + 2x\right)e^{4x};$

в) $y'' - 8y' + 16y = e^{4x},\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$ *Ответ*: $y = 0{,}5x(x+2)e^{4x};$

г) $y^{IY} + y'' = x^2 + x.$

Ответ: $y = C_1 + C_2 x + C_3\cos x + C_4 \sin x + \frac{x^2}{12}\left(x^2 + 2x - 12\right).$

5. Обучающая задача 2 (решает преподаватель у доски). Определить закон движения материальной точки массы m, перемещающейся по прямой под влиянием восстанавливающей силы, направленной к началу отсчета перемещений и прямо пропорциональной расстоянию точки от начала отсчета, если сопротивление среды отсутствует, но на точку действует внешняя сила $F = A\sin\omega t$.

Решение. $F = ma$, $a = x'' = \dfrac{d^2x}{dt^2}$; $F = -kx + A\sin\omega t$. $\Rightarrow$

$mx'' + kx = A\sin\omega t \Rightarrow x'' + \dfrac{k}{m}x = \dfrac{A}{m}\sin\omega t$ – линейное неоднородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами. Составляем и решаем характеристическое уравнение.

$\lambda^2 + \dfrac{k}{m} = 0 \Rightarrow \lambda^2 = -\dfrac{k}{m} \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\dfrac{k}{m}}\,i$ ($\dfrac{k}{m} > 0$ по условию).

$$x_{одн} = C_1\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + C_2\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\,t.$$

Правая часть $f(t) = \dfrac{A}{m}\sin\omega t$. Рассмотрим два случая:

а) $\omega \neq \sqrt{\dfrac{k}{m}}$, тогда $\pm\beta i = \pm\omega i$ не являются корнями характеристического уравнения, и частное решение следует искать в виде

$$x_ч = B\cos\omega t + C\sin\omega t.$$

Находим $x_ч' = -B\omega\sin\omega t + C\omega\cos\omega t$, $x_ч'' = -B\omega^2\cos\omega t - C\omega^2\sin\omega t$ и подставляем в неоднородное уравнение

$$-B\omega^2\cos\omega t - C\omega^2\sin\omega t + \frac{k}{m}\left(B\cos\omega t + C\sin\omega t\right) = \frac{A}{m}\sin\omega t.$$

Приравнивая коэффициенты при $\cos\omega t$ и $\sin\omega t$ слева и справа, получим систему двух уравнений с двумя неизвестными B и C:

$$\left.\begin{aligned} \cos\omega t:&\quad -B\omega^2 + \frac{k}{m}B = 0,\\ \sin\omega t:&\quad -C\omega^2 + \frac{k}{m}C = \frac{A}{m}. \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} B = 0,\\ \left(\dfrac{k}{m} - \omega^2\right)C = \dfrac{A}{m}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = 0,\\ C = \dfrac{A}{k - m\omega^2}. \end{cases}$$

Таким образом, $x_ч = \dfrac{A}{k - m\omega^2}\sin\omega t$, а общее решение

$$x = C_1\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + C_2\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \frac{A}{k - m\omega^2}\sin\omega t.$$

б) $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$, тогда $\pm\beta i = \pm\omega i$ являются корнями характеристического уравнения, и частное решение следует искать в виде

$$x_ч = t\left(B\cos\omega t + C\sin\omega t\right).$$

Найдем $x_ч' = B\cos\omega t + C\sin\omega t + t\left(-B\omega\sin\omega t + C\omega\cos\omega t\right)$,

$x_ч'' = -B\omega\sin\omega t + C\omega\cos\omega t - B\omega\sin\omega t + C\omega\cos\omega t + t\left(-B\omega^2\cos\omega t - C\omega^2\sin\omega t\right)$

и подставим в исходное уравнение

$$-2B\omega\sin\omega t + 2C\omega\cos\omega t - t\left(B\omega^2\cos\omega t + C\omega^2\sin\omega t\right) + \frac{k}{m}t\left(B\cos\omega t + C\sin\omega t\right) =$$

$$= \frac{A}{m}\sin\omega t \quad \Rightarrow \quad (\text{т.к. } \omega^2 = \frac{k}{m})$$

$$-2B\omega\sin\omega t + 2C\omega\cos\omega t - t\omega^2\left(B\cos\omega t + C\sin\omega t\right) + t\omega^2\left(B\cos\omega t + C\sin\omega t\right) =$$

$$= \frac{A}{m}\sin\omega t \quad \Rightarrow \quad -2B\omega\sin\omega t + 2C\omega\cos\omega t = \frac{A}{m}\sin\omega t.$$

$$\left.\begin{aligned} \sin\omega t: &\quad -2B\omega = \frac{A}{m}, \\ \cos\omega t: &\quad 2C\omega = 0. \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} B = -\dfrac{A}{2m\omega}, \\ C = 0. \end{cases}$$

Таким образом, $x_ч = -\dfrac{A}{2m\omega}\, t\cdot\cos\omega t$, а общее решение

$$x = C_1\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t + C_2\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t - \frac{A}{2m\omega}\, t\cdot\cos\omega t.$$

6. Два студента у доски (параллельно) решают примеры:

а) Найти решение дифференциального уравнения $y'' + y = 3\sin x$, удовлетворяющее краевым условиям: $y(0) + y'(0) = 0$, $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) + y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$.

Ответ: $y = \dfrac{3}{8}\left((\pi+2)\cos x - (\pi-2)\sin x\right) - \dfrac{3}{2}x\cos x$;

б) Решить уравнение $y'' - y' = \operatorname{ch} 2x$ при начальных условиях $y(0) = y'(0) = 0$.

Указание. $y_ч = A\operatorname{ch}2x + B\operatorname{sh}2x$ хотя можно решать, разбив функцию $\operatorname{ch}2x = \dfrac{e^{2x} + e^{-2x}}{2}$ на две: $f_1(x) = \dfrac{1}{2}e^{2x}$ и $f_2(x) = \dfrac{1}{2}e^{-2x}$. ($\alpha = \pm 2$ не являются корнями характеристического уравнения).

Ответ: $y = \dfrac{1}{3}\operatorname{ch}2x + \dfrac{1}{6}\operatorname{sh}2x - \dfrac{1}{3}e^x$.

7. Студенты решают самостоятельно следующие примеры:

а) $y'' - 4y = \operatorname{ch} 2x$. *Ответ*: $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + \frac{1}{4} x \operatorname{sh} 2x$;

Указание. $\alpha = \pm 2$ $\left(\operatorname{ch} 2x = \dfrac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} \right)$ являются однократными корнями характеристического уравнения, поэтому $y_ч = x\left(A \operatorname{ch} 2x + B \operatorname{sh} 2x \right)$.

б) $y'' + 4y = \cos^2 x$. *Ответ*: $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} x \sin 2x$;

Указание. $\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x$.

в) $y^{IY} - y = xe^x + \cos x$.

Ответ: $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x + \frac{x}{8}(x-3)e^x - \frac{x}{4} \sin x$.

Домашнее задание

1. Подготовка теоретического материала по теме «Решение систем дифференциальных уравнений».

2. Решить обучающую задачу 1 из предыдущего практического занятия YII с учетом трения цепи о крюк, если сила трения равна весу 1 м цепи.

Указание. $F_{тр} = -g \cdot 1$. *Ответ*: $T = \frac{3}{\sqrt{g}} \ln\left(17 + 12\sqrt{2}\right)$ сек.

3. Решить задачу. Электрическая цепь состоит из последовательно соединенных источника тока с эдс $e(t) = E \sin \omega t$, индуктивности L и емкости C, причем $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ (случай резонанса). Найти ток i в цепи как функцию времени t, если $i\big|_{t=0} = \frac{di}{dt}\Big|_{t=0} = 0$. *Ответ*: $i = \frac{E}{2L} t \cdot \sin \frac{t}{\sqrt{LC}}$.

Указание. Дифференциальное уравнение цепи

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{1}{C} i = E \omega \cos \omega t.$$

4. Решить примеры:

а) $y'' - 5y' + 6y = 13 \sin 3x$. *Ответ*: $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + \frac{1}{6}(5 \cos 3x - \sin 3x)$;

б) $y''' - y' = -2x$. *Ответ*: $y = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{-x} + x^2$.

IX. Решение систем дифференциальных уравнений

1. Краткий теоретический обзор с использованием лекционного материала, графической схемы, информационной таблицы.

2. Обучающая задача 1 (решает преподаватель у доски). Некоторое вещество A разлагается на два вещества P и Q. Скорость образования каждого из них пропорциональна количеству неразложенного вещества. Пусть x и y – количество веществ P и Q, соответственно, образовавшихся к моменту времени t. Определить закон их изменений, зная, что в начальный момент $x = 0$, $y = 0$, а через 1 час $x=\frac{3}{8}a$, $y=\frac{1}{8}a$, где a – первоначальное количество вещества A.

Решение. В момент времени t скорости образования веществ P и Q будут:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=k_1(a-x-y), \\ \dfrac{dy}{dt}=k_2(a-x-y), \end{cases}$$

так как к этому моменту количество неразложившегося еще вещества A равно $(a-x-y)$. Решим получившуюся систему двух линейных дифференциальных уравнений первого порядка методом исключения.

Дифференцируя первое уравнение, получим $\dfrac{d^2x}{dt^2}=-k_1\left(\dfrac{dx}{dt}+\dfrac{dy}{dt}\right)$.

Подставим сюда $\dfrac{dy}{dt}=k_2(a-x-y)$, тогда $\dfrac{d^2x}{dt^2}=-k_1\left(\dfrac{dx}{dt}+k_2(a-x-y)\right)$.

Подставим в это уравнение y, найденное из первого уравнения системы,

$$-y=\frac{1}{k_1}\frac{dx}{dt}+x-a: \quad \frac{d^2x}{dt^2}=-k_1\left(\frac{dx}{dt}+k_2\left(a-x+\frac{1}{k_1}\frac{dx}{dt}+x-a\right)\right) \Rightarrow$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-k_1\left(\frac{dx}{dt}+\frac{k_2}{k_1}\frac{dx}{dt}\right) \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2}=-(k_2+k_1)\frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2}+(k_2+k_1)\frac{dx}{dt}=0.$$

Получим линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Его характеристическое уравнение имеет вид $\lambda^2+(k_1+k_2)\lambda=0 \Rightarrow \lambda(\lambda+k_1+k_2)=0 \Rightarrow \lambda_1=0$, $\lambda_2=-(k_1+k_2) \Rightarrow x=C_1+C_2e^{-(k_1+k_2)t} \Rightarrow \dfrac{dx}{dt}=-(k_1+k_2)C_2e^{-(k_1+k_2)t}$.

Тогда $y=-\dfrac{1}{k_1}\dfrac{dx}{dt}-x+a=\dfrac{k_1+k_2}{k_1}C_2e^{-(k_1+k_2)t}-C_1-C_2e^{-(k_1+k_2)t}+a=$

$$=C_2e^{-(k_1+k_2)t}+\frac{k_2}{k_1}C_2e^{-(k_1+k_2)t}-C_1-C_2e^{-(k_1+k_2)t}+a=\frac{k_2}{k_1}C_2e^{-(k_1+k_2)t}-C_1+a.$$

Таким образом, решение системы – $\begin{cases} x=C_1+C_2e^{-(k_1+k_2)t}, \\ y=a+\dfrac{k_2}{k_1}C_2e^{-(k_1+k_2)t}-C_1. \end{cases}$

Определим C_1 и C_2, используя начальные условия $x(0)=y(0)=0$.

$$\begin{cases} 0=C_1+C_2, \\ 0=a+\dfrac{k_2}{k_1}C_2-C_1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1=\dfrac{k_1a}{k_1+k_2}, \\ C_2=-\dfrac{k_1a}{k_1+k_2}. \end{cases}$$

Тогда $x=\dfrac{k_1a}{k_1+k_2}\left(1-e^{-(k_1+k_2)t}\right)$, $y=a-\dfrac{k_2}{k_1}\dfrac{k_1a}{k_1+k_2}\cdot e^{-(k_1+k_2)t}-\dfrac{k_1a}{k_1+k_2}=$

$$=a-\frac{k_1a}{k_1+k_2}-\frac{k_2a}{k_1+k_2}\cdot e^{-(k_1+k_2)t}=\frac{k_1a+k_2a-k_1a}{k_1+k_2}-\frac{k_2a}{k_1+k_2}\cdot e^{-(k_1+k_2)t}=$$

$$=\frac{k_2a}{k_1+k_2}-\frac{k_2a}{k_1+k_2}\cdot e^{-(k_1+k_2)t}=\frac{k_2a}{k_1+k_2}\left(1-e^{-(k_1+k_2)t}\right),$$ то есть

$$\begin{cases} x=\dfrac{k_1a}{k_1+k_2}\left(1-e^{-(k_1+k_2)t}\right), \\ y=\dfrac{k_2a}{k_1+k_2}\left(1-e^{-(k_1+k_2)t}\right). \end{cases}$$

Неизвестные коэффициенты k_1 и k_2 найдем из дополнительных условий задачи: при $t = 1$ $x=\dfrac{3}{8}a$, $y=\dfrac{1}{8}a$. Имеем $\begin{cases} \dfrac{3}{8}a=\dfrac{k_1a}{k_1+k_2}\left(1-e^{-(k_1+k_2)t}\right), \\ \dfrac{1}{8}a=\dfrac{k_2a}{k_1+k_2}\left(1-e^{-(k_1+k_2)t}\right). \end{cases}$

Разделим первое уравнение на второе: $\dfrac{k_1}{k_2}=3 \Rightarrow k_1=3k_2$, и тогда из второго уравнения $\frac{a}{8}=\frac{k_2 a}{4k_2}\left(1-e^{-4k_2}\right) \Rightarrow \frac{1}{8}=\frac{1}{4}\left(1-e^{-4k_2}\right) \Rightarrow \frac{1}{2}=1-e^{-4k_2} \Rightarrow$ $e^{-4k_2}=\frac{1}{2} \Rightarrow -4k_2=-\ln 2 \Rightarrow k_2=\frac{1}{4}\ln 2$. Тогда $k_1=\frac{3}{4}\ln 2$.

$k_1+k_2=\ln 2 \Rightarrow e^{k_1+k_2}=2$. Далее $\frac{k_1}{k_1+k_2}=\frac{3}{4}$, $\frac{k_2}{k_1+k_2}=\frac{1}{4}$. Поэтому $x=\frac{3}{4}a\left(1-2^{-t}\right)=\frac{3}{4}a\left(1-\frac{1}{2^t}\right)$, $y=\frac{1}{4}a\left(1-2^{-t}\right)=\frac{1}{4}a\left(1-\frac{1}{2^t}\right)$.

3. Два студента у доски (параллельно) решают системы:

а) Решить задачу Коши $\begin{cases} y_1'=4y_1-5y_2+4x+1, \\ y_2'=y_1-2y_2+x. \end{cases}$ $y_1(0)=1$, $y_2(0)=2$.

Ответ: $\begin{cases} y_1=\frac{11}{4}e^{-x}-\frac{5}{12}e^{3x}-x-\frac{4}{3}, \\ y_2=\frac{11}{4}e^{-x}-\frac{1}{12}e^{3x}-\frac{2}{3}. \end{cases}$

б) Найти общее решение системы $\begin{cases} x_1'=x_1-x_3, \\ x_2'=x_1, \\ x_3'=x_1-x_2. \end{cases}$

Ответ: $\begin{cases} x_1=C_1e^t+C_2\cos t+C_3\sin t, \\ x_2=C_1e^t+C_2\sin t-C_3\cos t, \\ x_3=C_2(\cos t+\sin t)+C_3(\sin t-\cos t). \end{cases}$

4. Обучающий пример (решает преподаватель у доски). Решим пример б) другим способом. Частные решения x_1, x_2, x_3 будем искать в виде $x_1=\alpha_1 e^{kt}$, $x_2=\alpha_2 e^{kt}$, $x_3=\alpha_3 e^{kt}$. Для нахождения k получим характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 1-k & 0 & -1 \\ 1 & 0-k & 0 \\ 1 & -1 & 0-k \end{vmatrix}=0 \Rightarrow (1-k)\begin{vmatrix} -k & 0 \\ -1 & -k \end{vmatrix}-0-1\begin{vmatrix} 1 & -k \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow$$

$k^2(1-k)-(-1+k)=0 \Rightarrow (1-k)\left(k^2+1\right)=0 \Rightarrow k_1=1,\ k_2=i,\ k_3=-i.$

При $k_1 = 1$ для определения α_1, α_2, α_3 получаем систему:

$$\begin{cases} 0\cdot\alpha_1 + 0\cdot\alpha_2 - \alpha_3 = 0, \\ 1\cdot\alpha_1 - 1\cdot\alpha_2 + 0\cdot\alpha_3 = 0, \\ 1\cdot\alpha_1 - 1\cdot\alpha_2 - 1\cdot\alpha_3 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\alpha_3 = 0, \\ \alpha_1 - \alpha_2 = 0, \\ \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_3 = 0, \\ \alpha_1 - \alpha_2 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_3 = 0, \\ \alpha_1 = \alpha_2 = 1. \end{cases}$$

По сути дела мы нашли собственный вектор (1,1,0) для $k_1 = 1$.

При $\lambda = i$ получаем системуравнений:

$$\left.\begin{aligned} (1-i)\alpha_1 - \alpha_3 = 0, \\ \alpha_1 - i\alpha_2 = 0, \\ \alpha_1 - \alpha_2 - i\alpha_3 = 0. \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_3 = (1-i)\alpha_1, \\ \alpha_2 = \dfrac{1}{i}\alpha_1, \\ \alpha_1 - \dfrac{1}{i}\alpha_1 - i(1-i)\alpha_1 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_3 = (1-i)\alpha_1, \\ \alpha_2 = -i\alpha_1, \\ \alpha_1\left(1+i-i+i^2\right) = 0. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_3 = (1-i)\alpha_1, \\ \alpha_2 = -i\alpha_1, \\ \alpha_1 \cdot 0 = 0. \end{cases}$$ $\Rightarrow$ Пусть $\alpha_1 = 1$, тогда $\alpha_2 = -i$, $\alpha_3 = 1 - i$.

Итак, имеем второй собственный вектор $(1, -i, 1 - i)$.

Значению $k_1 = 1$ соответствуют решения $x_{11} = e^t$, $x_{21} = e^t$, $x_{31} = 0$.

Значению $\lambda = i$ соответствуют решения (по формуле Эйлера $e^{(\alpha+\beta i)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x)$):

$$1\cdot e^{it} = \cos t + i\sin t,\ -ie^{it} = -i(\cos t + i\sin t) = \sin t - i\cos t,$$

$$(1-i)e^{it} = (1-i)(\cos t + i\sin t) = (\cos t + \sin t) + i(\sin t - \cos t).$$

(При $\lambda = -i$ получается аналогичный результат).

Отделяя действительные части, получим решения

$$x_{12} = \cos t, \qquad x_{22} = \sin t, \qquad x_{32} = \cos t + \sin t.$$

Отделяя мнимые части, получим решения

$$x_{13} = \sin t, \qquad x_{23} = -\cos t, \qquad x_{33} = \sin t - \cos t.$$

Общее решение системы будет $\begin{cases} x_1 = C_1e^t + C_2\cos t + C_3\sin t, \\ x_2 = C_1e^t + C_2\sin t - C_3\cos t, \\ x_3 = C_2(\cos t + \sin t) + C_3(\sin t - \cos t). \end{cases}$

З а м е ч а н и е. Решение примера, когда все корни характеристического уравнения являются действительными различными числами, показано в теоретической части модуля 9.

5. Два студента у доски решают примеры:

а) $\begin{cases} x_1' = 7x_1 + 3x_2, \\ x_2' = 6x_1 + 4x_2. \end{cases}$ *Ответ*: $\begin{cases} x_1 = -\dfrac{1}{2}C_1e^t + C_2e^{10t}, \\ x_2 = C_1e^t + C_2e^{10t}. \end{cases}$

б) $\begin{cases} y_1' = -7y_1 + y_2, \\ y_2' = -2y_1 - 5y_2. \end{cases}$ *Ответ*: $\begin{cases} y_1 = e^{-6x}\left(C_1\cos x + C_2\sin x\right), \\ y_2 = e^{-6x}\left(C_1\left(\cos x - \sin x\right) + C_2\left(\cos x + \sin x\right)\right). \end{cases}$

Домашнее задание

1. Найти общее решение, не пользуясь методом исключения

$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 8x_2 - x_1, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_1 + x_2. \end{cases}$ *Ответ*: $\begin{cases} x_1 = 2C_1e^{3t} - 4C_2e^{-3t}, \\ x_2 = C_1e^{3t} + C_2e^{-3t}. \end{cases}$

2. Методом исключения найти общее решение следующей системы:

$\begin{cases} y_1' = -5y_1 + 2y_2 + e^x, \\ y_2' = y_1 - 6y_2 + e^{-2x}. \end{cases}$ *Ответ*: $\begin{cases} y_1 = 2C_1e^{-4x} - C_2e^{-7x} + \dfrac{1}{5}e^{-2x} + \dfrac{7}{40}e^x, \\ y_2 = C_1e^{-4x} + C_2e^{-7x} + \dfrac{3}{10}e^{-2x} + \dfrac{1}{40}e^x. \end{cases}$

3. Решить задачу Коши для системы: $\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = y_3, \\ y_3' = y_1. \end{cases}$

$y_1(0) = y_2(0) = y_3(0) = 1$. *Ответ*: $y_1 = y_2 = y_3 = e^x$.

Трехуровневые тестовые задания к разделу «Дифференциальные уравнения высших порядков»

Могут быть использованы для индивидуальных заданий на практических занятиях, индивидуальных домашних заданий, а также для выполнения внеаудиторной контрольной работы (типового расчета, расчетно-графической работы), если она предусмотрена рабочим учебным планом для данной специальности.

Уровень I

Вариант 1

1. Найти частное решение дифференциального уравнения и вычислить значение полученной функции $y=\varphi(x)$ при $x=x_0$ с точностью до двух знаков после запятой.

$$y'''=\sin x,\quad x_0=\frac{\pi}{2},\quad y(0)=1,\quad y'(0)=0,\quad y''(0)=0.$$

Ответ: 1,23.

2. Найти общее решение дифференциального уравнения, допускающего понижение порядка, $\left(1-x^2\right)y''-xy'=2$.

Ответ: $y=\arcsin^2 x+C_1\arcsin x+C_2$.

3. Найти общее решение дифференциального уравнения
   а) $y''+4y=0$; б) $y''-10y'+25y=0$; в) $y''+3y'+2y=0$.

4. Найти общее решение дифференциального уравнения $y''+y'=2x-1$.

Ответ: $y=C_1+C_2e^{-x}+x^2-3x$.

5. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$y''-2y'+y=-12\cos 2x-9\sin 2x,\quad y(0)=-2,\quad y'(0)=0.$$

Ответ: $y=-2e^x-4xe^x+3\sin 2x$.

6. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$y'''-7y''+6y'=0,\quad y(0)=0,\quad y'(0)=0,\quad y''(0)=30.$$

Ответ: $y=5-6e^x+e^{6x}$.

7. Решить дифференциальное уравнение методом вариации произвольных постоянных $y''-y=\dfrac{e^x}{e^x+1}$.

Ответ: $y=\left(-\dfrac{e^x}{2}+\dfrac{1}{2}\ln\left(e^x+1\right)+C_1\right)e^{-x}+\left(\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{e^x}{e^x+1}+C_2\right)e^x$.

8. Решить систему дифференциальных уравнений двумя способами:
   а) сведением к дифференциальному уравнению высшего порядка;
   б) с помощью характеристического уравнения.

$$\begin{cases} x'=2x+y,\\ y'=3x+4y.\end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x=C_1e^{5t}+C_2e^t,\\ y=3C_1e^{5t}-C_2e^t.\end{cases}$

Вариант 2

1. Найти частное решение дифференциального уравнения и вычислить значение полученной функции $y=\varphi(x)$ при $x=x_0$ с точностью до двух знаков после запятой.

$$y''' = \frac{1}{x},\quad x_0 = 2,\quad y(1) = \frac{1}{4},\quad y'(1) = y''(1) = 0.$$

Ответ: 0,38.

2. Найти общее решение дифференциального уравнения, допускающего понижение порядка, $2xy'y'' = y'^2 - 1$.

Ответ: $9C_1^2(y-C_2)^2 = 4(C_1x+1)^3,\ \ y = \pm x + C$.

3. Найти общее решение дифференциального уравнения
   а) $y'' - y' - 2y = 0$; б) $y'' + 9y = 0$; в) $y'' + 4y' + 4y = 0$.

4. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' - 2y' + 5y = 10e^{-x}\cos 2x.$$

Ответ: $y = e^{x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x) + \frac{1}{2}e^{-x}(\cos 2x - 2\sin 2x)$.

5. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$y'' - 6y' + 9y = 9x^2 - 39x + 65,\quad y(0) = -1,\quad y'(0) = 1.$$

Ответ: $y = -6e^{3x} + 22xe^{3x} + x^2 - 3x + 5$.

6. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$y^{Y} - 9y''' = 0,\quad y(0) = 1,\quad y'(0) = -1,\quad y''(0) = 0,\quad y'''(0) = 0,\quad y^{IY}(0) = 0$$

Ответ: $y = 1 - x$.

7. Решить дифференциальное уравнение методом вариации произвольных постоянных $y'' + 4y = \dfrac{1}{\cos 2x}$.

Ответ: $y = \left(\frac{1}{4}\ln|\cos 2x| + C_1\right)\cos 2x + \left(\frac{1}{2}x + C_2\right)\sin 2x$.

8. Решить систему дифференциальных уравнений двумя способами:
   а) сведением к дифференциальному уравнению высшего порядка;
   б) с помощью характеристического уравнения.

$$\begin{cases} x' = x - y, \\ y' = -4x + y. \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x = C_1e^{3t} + C_2e^{-t}, \\ y = -2C_1e^{3t} + 2C_2e^{-t}. \end{cases}$

Вариант 3

1. Найти частное решение дифференциального уравнения и вычислить значение полученной функции $y=\varphi(x)$ при $x=x_0$ с точностью до двух знаков после запятой.

$$y''=\frac{1}{\cos^2 x},\quad x_0=\frac{\pi}{3},\quad y(0)=1,\quad y'(0)=\frac{3}{5}.$$

Ответ: 2,69.

2. Найти общее решение дифференциального уравнения, допускающего понижение порядка, $x^3y''+x^2y'=1$.

Ответ: $y=C_1\ln x+\frac{1}{x}+C_2$.

3. Найти общее решение дифференциального уравнения
   а) $y''-4y'=0$; б) $y''-4y'+13y=0$; в) $y''-3y'+2y=0$.
4. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y''-2y'-8y=12\sin 2x-36\cos 2x.$$

Ответ: $y=C_1e^{-2x}+C_2e^{4x}+3\cos 2x$.

5. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$y''+2y'+2y=2x^2+8x+6,\quad y(0)=1,\quad y'(0)=4.$$

Ответ: $y=e^{-x}(\cos x+3\sin x)+x^2+2x$.

6. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$y'''-y''=0,\quad y(0)=0,\quad y'(0)=0,\quad y''(0)=-1.$$

Ответ: $y=1+x-e^x$.

7. Решить дифференциальное уравнение методом вариации произвольных постоянных $y''-4y'+5y=\frac{e^{2x}}{\cos x}$.

Ответ: $y=\left(\ln|\cos x|+C_1\right)e^{2x}\cos x+\left(x+C_2\right)e^{2x}\sin x$.

8. Решить систему дифференциальных уравнений двумя способами:
   а) сведением к дифференциальному уравнению высшего порядка;
   б) с помощью характеристического уравнения.

$$\begin{cases} x'=-x+8y, \\ y'=x+y. \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x=C_1e^{3t}+C_2e^{-3t}, \\ y=\frac{1}{2}C_1e^{3t}-\frac{1}{4}C_2e^{-3t}. \end{cases}$

Вариант 4

1. Найти частное решение дифференциального уравнения и вычислить значение полученной функции $y = \varphi(x)$ при $x = x_0$ с точностью до двух знаков после запятой.

$$y''' = \frac{6}{x^3},\quad x_0 = 2,\quad y(1) = 0,\quad y'(1) = 5,\quad y''(1) = 1.$$

Ответ: 6,07.

2. Найти общее решение дифференциального уравнения, допускающего понижение порядка, $y'' + y' \operatorname{tg} x = \sin 2x$.

Ответ: $y = C_1 \sin x - x - \frac{1}{2}\sin 2x + C_2$.

3. Найти общее решение дифференциального уравнения

   а) $y'' - 5y' + 6y = 0$; б) $y'' + 3y' = 0$; в) $y'' + 2y' + 5y = 0$.

4. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' - 12y' + 36y = 14e^{6x}.$$

Ответ: $y = C_1 e^{6x} + C_2 x e^{6x} + 7x^2 e^{6x}$.

5. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$y'' - 6y' + 25y = 9\sin 4x - 24\cos 4x,\quad y(0) = 2,\quad y'(0) = -2.$$

Ответ: $y = e^{3x}(2\cos 4x - 3\sin 4x) + \sin 4x$.

6. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$y''' - 4y' = 0,\quad y(0) = 0,\quad y'(0) = 2,\quad y''(0) = 4.$$

Ответ: $y = e^{2x} - 1$.

7. Решить дифференциальное уравнение методом вариации произвольных постоянных $y''' + y' = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$.

Ответ: $y = \frac{1}{\cos x} + C_1 + \left(\ln|\cos x| + C_2\right)\cos x + \left(x - \operatorname{tg} x + C_3\right)\sin x$.

8. Решить систему дифференциальных уравнений двумя способами:

   а) сведением к дифференциальному уравнению высшего порядка;

   б) с помощью характеристического уравнения.

$$\begin{cases} x' = -2x - 3y, \\ y' = -x. \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x = C_1 e^{-3t} + C_2 e^{t}, \\ y = \frac{1}{3} C_1 e^{-3t} - C_2 e^{t}. \end{cases}$

Вариант 5

1. Найти частное решение дифференциального уравнения и вычислить значение полученной функции $y = \varphi(x)$ при $x = x_0$ с точностью до двух знаков после запятой

$$y''' = 4\cos 2x, \qquad x_0 = \frac{\pi}{4}, \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 3.$$

Ответ: 4,36.

2. Найти общее решение дифференциального уравнения, допускающего понижение порядка, $y'' x \ln x = y'$.

Ответ: $y = C_1 x(\ln x - 1) + C_2$.

3. Найти общее решение дифференциального уравнения

а) $y'' - 2y' + 10y = 0$; б) $y'' + y' - 2y = 0$; в) $y'' - 2y' = 0$.

4. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' - 3y' + 2y = (34 - 12x)e^{-x}.$$

Ответ: $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x} + (4 - 2x)e^{-x}$.

5. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$y'' - 14y' + 53y = 53x^3 - 42x^2 + 59x - 14, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 7.$$

Ответ: $y = 3e^{7x}\sin 2x + x^3 + x$.

6. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$y''' + y' = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = 1.$$

Ответ: $y = 1 - \cos x - \sin x$.

7. Решить дифференциальное уравнение методом вариации произвольных постоянных $\qquad y'' + 9y = \dfrac{1}{\sin 3x}$.

Ответ: $y = \left(-\dfrac{1}{3}x + C_1\right)\cos 3x + \left(\dfrac{1}{9}\ln\left|\sin 3x\right| + C_2\right)\sin 3x$.

8. Решить систему дифференциальных уравнений двумя способами:

а) сведением к дифференциальному уравнению высшего порядка;

б) с помощью характеристического уравнения.

$$\begin{cases} x' = x - y, \\ y' = -4x + 4y. \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x = C_1 + C_2 e^{5t}, \\ y = C_1 - 4C_2 e^{5t}. \end{cases}$

Вариант 6

1. Найти частное решение дифференциального уравнения и вычислить значение полученной функции $y=\varphi(x)$ при $x=x_0$ с точностью до двух знаков после запятой

$$y''=\frac{1}{1+x^2},\ x_0=1,\qquad y(0)=0,\quad y'(0)=0.$$

Ответ: 0,44.

2. Найти общее решение дифференциального уравнения, допускающего понижение порядка, $xy''-y'=x^2e^x$.

Ответ: $y=e^x(x-1)+C_1x^2+C_2$.

3. Найти общее решение дифференциального уравнения
   а) $y''-4y=0$; б) $y''+2y'+17y=0$; в) $y''-y'-12y=0$.

4. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y''-6y'+10y=51e^{-x}.$$

Ответ: $y=e^{3x}(C_1\cos x+C_2\sin x)+3e^{-x}$.

5. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$y''+16y=e^x(\cos 4x-8\sin 4x),\ y(0)=0,\ y'(0)=5.$$

Ответ: $y=\sin 4x-\cos 4x+e^x\cos 4x$.

6. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$y'''-y'=0,\ y(0)=0,\ y'(0)=2,\ y''(0)=4.$$

Ответ: $y=-4+e^{-x}+3e^x$.

7. Решить дифференциальное уравнение методом вариации произвольных постоянных $y''+2y'+y=xe^x+\dfrac{1}{xe^x}$.

Ответ: $y=C_1e^{-x}+C_2xe^{-x}+\dfrac{x}{4}e^x-\dfrac{1}{4}e^x-xe^{-x}+xe^{-x}\ln x$.

8. Решить систему дифференциальных уравнений двумя способами:
   а) сведением к дифференциальному уравнению высшего порядка;
   б) с помощью характеристического уравнения.

$$\begin{cases} x'=-2x+y,\\ y'=-3x+2y.\end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x=C_1e^t+C_2e^{-t},\\ y=3C_1e^t+C_2e^{-t}.\end{cases}$

Вариант 7

1. Найти частное решение дифференциального уравнения и вычислить значение полученной функции $y=\varphi(x)$ при $x=x_0$ с точностью до двух знаков после запятой

$$xy'''=2,\ \ x_0=2,\ \ y(1)=\frac{1}{2},\ \ y'(1)=y''(1)=0.$$

Ответ: 0,77.

2. Найти общее решение дифференциального уравнения, допускающего понижение порядка, $y''x\ln x=2y'$.

Ответ: $y=C_1\left(x\ln^2 x-2x\ln x+2x\right)+C_2$.

3. Найти общее решение дифференциального уравнения
   а) $y''+y'-6y=0$; б) $y''+9y'=0$; в) $y''-4y'+20y=0$.

4. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y''+y=2\cos x-(4x+4)\sin x.$$

Ответ: $y=C_1\cos x+C_2\sin x+\left(x^2+2x\right)\cos x$.

5. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$y''-4y'+20y=16xe^{2x},\ \ y(0)=1,\ \ y'(0)=2.$$

Ответ: $y=e^{2x}\left(\cos 4x-\frac{1}{4}\sin 4x\right)+xe^{2x}$.

6. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$y^{IY}+2y'''-2y'-y=0,\ \ y(0)=0,\ \ y'(0)=0,\ \ y''(0)=0,\ \ y'''(0)=8.$$

Ответ: $y=e^{x}-\left(1+2x+2x^2\right)e^{-x}$.

7. Решить дифференциальное уравнение методом вариации произвольных постоянных $y''+2y'+2y=\dfrac{e^{-x}}{\cos x}$.

Ответ: $y=\left(\ln\left|\cos x\right|+C_1\right)e^{-x}\cos x+\left(x+C_2\right)e^{-x}\sin x$.

8. Решить систему дифференциальных уравнений двумя способами:
   а) сведением к дифференциальному уравнению высшего порядка;
   б) с помощью характеристического уравнения.

$$\begin{cases} x'=6x-y, \\ y'=3x+2y. \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x=C_1e^{3t}+C_2e^{5t}, \\ y=3C_1e^{3t}+C_2e^{5t}. \end{cases}$

Вариант 8

1. Найти частное решение дифференциального уравнения и вычислить значение полученной функции $y=\varphi(x)$ при $x=x_0$ с точностью до двух знаков после запятой

$$y'''=e^{2x},\ \ x_0=\frac{1}{2},\ \ y(0)=\frac{9}{8},\ \ y'(0)=\frac{1}{4},\ \ y''(0)=-\frac{1}{2}.$$

Ответ: 1,22.

2. Найти общее решение дифференциального уравнения, допускающего понижение порядка, $x^2y''+xy'=1$.

Ответ: $y=\dfrac{\ln^2 x}{2}+C_1\ln x+C_2$.

3. Найти общее решение дифференциального уравнения
   а) $y''-9y=0$; б) $y''-4y'+5y=0$; в) $y''+2y'-3y=0$.

4. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y''+6y'+10y=74e^{3x}.$$

Ответ: $y=e^{-3x}\left(C_1\cos x+C_2\sin x\right)+2e^{3x}$.

5. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$y''-12y'+36y=32\cos 2x+24\sin 2x,\ \ y(0)=2,\ \ y'(0)=4.$$

Ответ: $y=e^{6x}-2xe^{6x}+\cos 2x$.

6. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$y'''+y''-5y'+3y=0,\ \ y(0)=0,\ \ y'(0)=1,\ \ y''(0)=-14.$$

Ответ: $y=e^{x}-3xe^{x}-e^{-3x}$.

7. Решить дифференциальное уравнение методом вариации произвольных постоянных $y''-2y'+2y=\dfrac{e^x}{\sin^2 x}$.

Ответ: $y=\left(\ln\left(\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}\right)+C_1\right)e^x\cos x-\left(\dfrac{1}{\sin x}+C_2\right)e^x\sin x$.

8. Решить систему дифференциальных уравнений двумя способами:
   а) сведением к дифференциальному уравнению высшего порядка;
   б) с помощью характеристического уравнения.

$$\begin{cases} x'=2x+y, \\ y'=-6x-3y. \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x=C_1+C_2e^{-t}, \\ y=-2C_1-3C_2e^{-t}. \end{cases}$

Вариант 9

1. Найти частное решение дифференциального уравнения и вычислить значение полученной функции $y=\varphi(x)$ при $x=x_0$ с точностью до двух знаков после запятой

$$y''' = \cos^2 x,\quad x_0 = \pi,\quad y(0)=1,\quad y'(0)=-\frac{1}{8},\quad y''(0)=0.$$

Ответ: 3,58.

2. Найти общее решение дифференциального уравнения, допускающего понижение порядка, $y'' = -\dfrac{x}{y'}$.

Ответ: $y = \dfrac{C_1^2}{2}\arcsin\dfrac{x}{C_1} + \dfrac{x}{2}\sqrt{C_1^2 - x^2} + C_2$.

3. Найти общее решение дифференциального уравнения
   а) $y'' + 7y' = 0$; б) $y'' - 5y' + 4y = 0$; в) $y'' + 16y = 0$.

4. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' - 3y' + 2y = 3\cos x + 19\sin x.$$

Ответ: $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + 6\cos x + \sin x$.

5. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$y'' + y = x^3 - 4x^2 + 7x - 10,\quad y(0)=2,\quad y'(0)=3.$$

Ответ: $y = 4\cos x + 2\sin x + x^3 - 4x^2 + x - 2$.

6. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$y''' + y'' = 0,\quad y(0)=0,\quad y'(0)=1,\quad y''(0)=-1.$$

Ответ: $y = 1 - e^{-x}$.

7. Решить дифференциальное уравнение методом вариации произвольных постоянных $y'' + 2y' + 2y = e^{-x}\operatorname{ctg} x$.

Ответ: $y = C_1 e^{-x}\cos x + C_2 e^{-x}\sin x + e^{-x}\sin x \cdot \ln\left|\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right|$.

8. Решить систему дифференциальных уравнений двумя способами:
   а) сведением к дифференциальному уравнению высшего порядка;
   б) с помощью характеристического уравнения.

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = x. \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x = C_1 e^t + C_2 e^{-t}, \\ y = C_1 e^t - C_2 e^{-t}. \end{cases}$

Вариант 10

1. Найти частное решение дифференциального уравнения и вычислить значение полученной функции $y=\varphi(x)$ при $x=x_0$ с точностью до двух знаков после запятой

$$y''=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\quad x_0=1,\quad y(0)=2,\quad y'(0)=3.$$

Ответ: 5,57.

2. Найти общее решение дифференциального уравнения, допускающего понижение порядка, $xy''=y'$.

Ответ: $y=\dfrac{C_1x^2}{2}+C_2$.

3. Найти общее решение дифференциального уравнения
   а) $y''-6y'+8y=0$; б) $y''+4y'+5y=0$; в) $y''+5y'=0$.

4. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y''+6y'+9y=(48x+8)e^x.$$

Ответ: $y=C_1e^{-3x}+C_2xe^{-3x}+(3x-1)e^x$.

5. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$y''-y=(14-16x)e^{-x},\quad y(0)=0,\quad y'(0)=-1.$$

Ответ: $y=e^x-e^{-x}+\left(4x^2-3x\right)e^{-x}$.

6. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$y'''-5y''+8y'-4y=0,\quad y(0)=1,\quad y'(0)=-1,\quad y''(0)=0.$$

Ответ: $y=\dfrac{1}{2}e^x+\dfrac{1}{2}e^{2x}-\dfrac{5}{8}xe^{2x}$.

7. Решить дифференциальное уравнение методом вариации произвольных постоянных $y''-2y'+2y=\dfrac{e^x}{\sin x}$.

Ответ: $y=(-x+C_1)e^x\cos x+\left(\ln|\sin x|+C_2\right)e^x\sin x$.

8. Решить систему дифференциальных уравнений двумя способами:
   а) сведением к дифференциальному уравнению высшего порядка;
   б) с помощью характеристического уравнения.

$$\begin{cases} x'=-x-2y,\\ y'=3x+4y.\end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x=C_1e^t+C_2e^{2t},\\ y=-C_1e^t-\dfrac{3}{2}C_2e^{2t}.\end{cases}$

Вариант 11

1. Найти частное решение дифференциального уравнения и вычислить значение полученной функции $y=\varphi(x)$ при $x=x_0$ с точностью до двух знаков после запятой.

$$y''=\frac{1}{\sin^2 2x},\quad x_0=\frac{5}{4}\pi,\quad y\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4},\quad y'\left(\frac{\pi}{4}\right)=1.$$

Ответ: 3,93.

2. Найти общее решение дифференциального уравнения, допускающего понижение порядка, $y''=y'+x$.

Ответ: $y=-\dfrac{x^2}{2}-x+C_1e^x+C_2$.

3. Найти общее решение дифференциального уравнения
   а) $4y''-8y'+3y=0$; б) $y''-3y'=0$; в) $y''-2y'+10y=0$.
4. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y''+5y'=42e^{2x}.$$

Ответ: $y=C_1+C_2e^{-5x}+3e^{2x}$.

5. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$y''+8y'+16y=16x^2-16x+66,\quad y(0)=3,\quad y'(0)=0.$$

Ответ: $y=-2e^{-4x}-6xe^{-4x}+x^2-2x+5$.

6. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$y'''+3y''+2y'=0,\quad y(0)=0,\quad y'(0)=0,\quad y''(0)=2.$$

Ответ: $y=1-2e^{-x}+e^{-2x}$.

7. Решить дифференциальное уравнение методом вариации произвольных постоянных $y''-2y'+y=\dfrac{e^x}{x^2}$.

Ответ: $y=(-\ln x+C_1)e^x+\left(-\dfrac{1}{x}+C_2\right)xe^x$.

8. Решить систему дифференциальных уравнений двумя способами:
   а) сведением к дифференциальному уравнению высшего порядка;
   б) с помощью характеристического уравнения.

$$\begin{cases} x'=-2x, \\ y'=y. \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x=C_2e^{-2t}, \\ y=C_1e^t. \end{cases}$

Вариант 12

1. Найти частное решение дифференциального уравнения и вычислить значение полученной функции $y=\varphi(x)$ при $x=x_0$ с точностью до двух знаков после запятой

$$y''=x+\sin x,\quad x_0=5,\quad y(0)=-3,\quad y'(0)=0.$$

Ответ: 5,31.

2. Найти общее решение дифференциального уравнения, допускающего понижение порядка, $xy''=y'+x^2$.

Ответ: $y=\dfrac{x^3}{3}+C_1\dfrac{x^2}{2}+C_2$.

3. Найти общее решение дифференциального уравнения

а) $y''+4y'+20y=0$; б) $y''-3y'-10y=0$; в) $y''-16y=0$.

4. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y''-5y'-6y=3\cos x+19\sin x.$$

Ответ: $y=C_1e^{-x}+C_2e^{6x}+\cos x-2\sin x$.

5. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$y''+10y'+34y=-9e^{-5x},\quad y(0)=0,\quad y'(0)=6.$$

Ответ: $y=e^{-5x}(\cos 3x+2\sin 3x)-e^{-5x}$.

6. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$y'''+3y''+3y'+y=0,\quad y(0)=-1,\quad y'(0)=0,\quad y''(0)=1.$$

Ответ: $y=-e^{-x}(1+x)$.

7. Решить дифференциальное уравнение методом вариации произвольных постоянных $y''+y=\operatorname{tg} x$.

Ответ: $y=C_1\cos x+C_2\sin x-\cos x\cdot\ln\left|\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right|$.

8. Решить систему дифференциальных уравнений двумя способами:

а) сведением к дифференциальному уравнению высшего порядка;

б) с помощью характеристического уравнения.

$$\begin{cases} x'=4x+2y,\\ y'=4x+6y.\end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x=C_1e^{2t}+C_2e^{8t},\\ y=-C_1e^{2t}+2C_2e^{8t}.\end{cases}$

Вариант 13

1. Найти частное решение дифференциального уравнения и вычислить значение полученной функции $y=\varphi(x)$ при $x=x_0$ с точностью до двух знаков после запятой

$$y''=\operatorname{arctg} x,\quad x_0=1,\quad y(0)=y'(0)=0.$$

Ответ: 0,15.

2. Найти общее решение дифференциального уравнения, допускающего понижение порядка, $xy''=y'\ln\left(\dfrac{y'}{x}\right)$.

Ответ: $y=\dfrac{x}{C_1}e^{C_1x+1}-\dfrac{1}{C_1^2}e^{C_1x+1}+C_2$.

3. Найти общее решение дифференциального уравнения
   а) $9y''+6y'+y=0$; б) $y''-4y'-21y=0$; в) $y''+y=0$.

4. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y''-8y'+12y=36x^4-96x^3+24x^2+16x-2.$$

Ответ: $y=C_1e^{2x}+C_2e^{6x}+3x^4-x^2$.

5. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$y''-6y'+25y=(32x-12)\sin 3x+(12-36x)\cos 3x,\quad y(0)=4,\quad y'(0)=0.$$

Ответ: $y=e^{3x}(4\cos 4x-3\sin 4x)+2x\sin 3x$.

6. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$y'''-2y''+9y'-18y=0,\quad y(0)=-2{,}5,\quad y'(0)=0,\quad y''(0)=0.$$

Ответ: $y=-\dfrac{45}{26}e^{2x}-\dfrac{10}{13}\cos 3x+\dfrac{15}{13}\sin 3x$.

7. Решить дифференциальное уравнение методом вариации произвольных постоянных $y''+4y=\operatorname{ctg} 2x$.

Ответ: $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+\dfrac{1}{4}\sin 2x\cdot\ln|\operatorname{tg} x|$.

8. Решить систему дифференциальных уравнений двумя способами:
   а) сведением к дифференциальному уравнению высшего порядка;
   б) с помощью характеристического уравнения.

$$\begin{cases} x'=8x-3y,\\ y'=2x+y.\end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x=C_1e^{2t}+C_2e^{7t},\\ y=2C_1e^{2t}+\dfrac{1}{3}C_2e^{7t}.\end{cases}$

Вариант 14

1. Найти частное решение дифференциального уравнения и вычислить значение полученной функции $y=\varphi(x)$ при $x=x_0$ с точностью до двух знаков после запятой

$$y''=\operatorname{tg}x\cdot\frac{1}{\cos^2 x},\quad x_0=\frac{\pi}{4},\quad y(0)=\frac{1}{2},\quad y'(0)=0.$$

Ответ: -0,39.

2. Найти общее решение дифференциального уравнения, допускающего понижение порядка, $xy''+y'=\ln x$.

Ответ: $y=(x+C_1)\ln x-2x+C_2$.

3. Найти общее решение дифференциального уравнения
а) $2y''+3y'+y=0$; б) $y''+4y'+8y=0$; в) $y''-6y'+9y=0$.

4. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y''+8y'+25y=18e^{5x}.$$

Ответ: $y=e^{-4x}\left(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x\right)+\frac{1}{5}e^{5x}$.

5. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$y''+25y=e^{x}\left(\cos 5x-10\sin 5x\right),\quad y(0)=3,\quad y'(0)=-4.$$

Ответ: $y=2\cos 5x-\sin 5x+e^{x}\cos 5x$.

6. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$y'''+9y'=0,\ y(0)=0,\ y'(0)=9,\ y''(0)=-18.$$

Ответ: $y=-2+2\cos 3x+3\sin 3x$.

7. Решить дифференциальное уравнение методом вариации произвольных постоянных $y''+y=\operatorname{ctg}x$.

Ответ: $y=C_1\cos x+C_2\sin x+\sin x\cdot\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$.

8. Решить систему дифференциальных уравнений двумя способами:
а) сведением к дифференциальному уравнению высшего порядка;
б) с помощью характеристического уравнения.

$$\begin{cases} x'=3x+y,\\ y'=x+3y.\end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x=C_1e^{2t}+C_2e^{4t},\\ y=-C_1e^{2t}+C_2e^{4t}.\end{cases}$

Вариант 15

1. Найти частное решение дифференциального уравнения и вычислить значение полученной функции $y=\varphi(x)$ при $x=x_0$ с точностью до двух знаков после запятой.

$$y'''=e^{\frac{x}{2}}+1,\quad x_0=2,\quad y(0)=8,\quad y'(0)=5,\quad y''(0)=2.$$

Ответ: 25,08.

2. Найти общее решение дифференциального уравнения, допускающего понижение порядка, $y''\operatorname{tg}x=y'+1$.

Ответ: $y=-C_1\cos x-x+C_2$.

3. Найти общее решение дифференциального уравнения
   а) $y''-10y'+21y=0$; б) $y''-2y'+2y=0$; в) $y''+4y'=0$.

4. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y''-9y'+20y=126e^{-2x}.$$

Ответ: $y=C_1e^{4x}+C_2e^{5x}+3e^{-2x}$.

5. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$y''+2y'+5y=-8e^{-x}\sin 2x,\quad y(0)=2,\quad y'(0)=6.$$

Ответ: $y=e^{-x}\left(2\cos 2x+3\sin 2x\right)+2xe^{-x}\cos 2x$.

6. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$y'''-13y''+12y'=0,\ y(0)=0,\ y'(0)=1,\ y''(0)=133.$$

Ответ: $y=10-11e^{x}+e^{12x}$.

7. Решить дифференциальное уравнение методом вариации произвольных постоянных $\quad y''-2y'+y=\dfrac{e^x}{x}$.

Ответ: $y=\left(-x+C_1\right)e^{x}+\left(\ln x+C_2\right)xe^{x}$.

8. Решить систему дифференциальных уравнений двумя способами:
   а) сведением к дифференциальному уравнению высшего порядка;
   б) с помощью характеристического уравнения.

$$\begin{cases} x'=2x+3y, \\ y'=5x+4y. \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x=C_1e^{-t}+C_2e^{7t}, \\ y=-C_1e^{-t}+\dfrac{5}{3}C_2e^{7t}. \end{cases}$

Вариант 16

1. Найти частное решение дифференциального уравнения и вычислить значение полученной функции $y=\varphi(x)$ при $x=x_0$ с точностью до двух знаков после запятой.

$$y''=\frac{x}{e^{2x}},\quad x_0=-\frac{1}{2},\quad y(0)=\frac{1}{4},\quad y'(0)=-\frac{1}{4}.$$

Ответ: 0,34.

2. Найти общее решение дифференциального уравнения, допускающего понижение порядка, $y''+2xy'^2=0$.

Ответ: $y=\frac{1}{C_1}\operatorname{arctg}\frac{x}{C_1}+C_2$.

3. Найти общее решение дифференциального уравнения
а) $y''+6y'=0$; б) $y''+10y'+29y=0$; в) $y''-8y'+7y=0$.

4. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y''+36y=36+66x-36x^3.$$

Ответ: $y=C_1\cos 6x+C_2\sin 6x-x^3+2x+1$.

5. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$y''-10y'+25y=e^{5x},\quad y(0)=1,\quad y'(0)=0.$$

Ответ: $y=e^{5x}-5xe^{5x}+\frac{1}{2}x^2e^{5x}$.

6. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$y^{IY}-5y''+4y=0,\quad y(0)=-2,\quad y'(0)=1,\quad y''(0)=2,\quad y'''(0)=0.$$

Ответ: $y=-e^{x}-\frac{7}{3}e^{-x}+\frac{7}{12}e^{2x}+\frac{3}{4}e^{-2x}$.

7. Решить дифференциальное уравнение методом вариации произвольных постоянных $y''+2y'+y=\frac{e^{-x}}{x}$.

Ответ: $y=(-x+C_1)e^{-x}+(\ln x+C_2)xe^{-x}$.

8. Решить систему дифференциальных уравнений двумя способами:
а) сведением к дифференциальному уравнению высшего порядка;
б) с помощью характеристического уравнения.

$$\begin{cases} x'=x+2y, \\ y'=3x+6y. \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x=C_1+C_2e^{7t}, \\ y=-\frac{1}{2}C_1+3C_2e^{7t}. \end{cases}$

Вариант 17

1. Найти частное решение дифференциального уравнения и вычислить значение полученной функции $y=\varphi(x)$ при $x=x_0$ с точностью до двух знаков после запятой

$$y''=\sin^2 3x,\quad x_0=\frac{\pi}{12},\quad y(0)=-\frac{\pi^2}{16},\quad y'(0)=0.$$

Ответ: -0,01.

2. Найти общее решение дифференциального уравнения, допускающего понижение порядка, $2xy'y''=y'^2+1$.

Ответ: $y=\frac{2}{3C_1}(C_1x-1)^{\frac{3}{2}}+C_2$.

3. Найти общее решение дифференциального уравнения
   а) $y''+25y=0$; б) $y''+6y'+9y=0$; в) $y''+2y'+2y=0$.

4. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y''+y=4\cos x+2\sin x.$$

Ответ: $y=C_1\cos x+C_2\sin x-x(\cos x-2\sin x)$.

5. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$y''+y'-12y=(16x+26)e^{4x},\quad y(0)=3,\quad y'(0)=5.$$

Ответ: $y=e^{3x}+e^{-4x}+(2x+1)e^{4x}$.

6. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$y^{IY}-10y''+9y=0,\quad y(0)=0,\quad y'(0)=0,\quad y''(0)=8,\quad y'''(0)=24.$$

Ответ: $y=-2e^{x}+e^{-x}+e^{3x}$.

7. Решить дифференциальное уравнение методом вариации произвольных постоянных $y''+y=\frac{1}{\cos x}$.

Ответ: $y=(\ln|\cos x|+C_1)\cos x+(x+C_2)\sin x$.

8. Решить систему дифференциальных уравнений двумя способами:
   а) сведением к дифференциальному уравнению высшего порядка;
   б) с помощью характеристического уравнения.

$$\begin{cases} x'=5x+4y, \\ y'=4x+5y. \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x=C_1e^{t}+C_2e^{9t}, \\ y=-C_1e^{t}+C_2e^{9t}. \end{cases}$

Вариант 18

1. Найти частное решение дифференциального уравнения и вычислить значение полученной функции $y=\varphi(x)$ при $x=x_0$ с точностью до двух знаков после запятой

$$y'''=x\sin x,\ \ x_0=\frac{\pi}{2},\ \ y(0)=0,\ \ y'(0)=0,\ \ y''(0)=0.$$

Ответ: 0,14.

2. Найти общее решение дифференциального уравнения, допускающего понижение порядка, $y''-\dfrac{y'}{x-1}=x(x-1)$.

Ответ: $y=\dfrac{x^4}{8}-\dfrac{x^3}{6}+C_1\dfrac{x^2}{2}-C_1x+C_2$.

3. Найти общее решение дифференциального уравнения
   а) $y''-3y'=0$; б) $y''-7y'-8y=0$; в) $y''+4y'+13y=0$.

4. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y''+2y'-24y=6\cos 3x-33\sin 3x.$$

Ответ: $y=C_1e^{-6x}+C_2e^{4x}+\sin 3x$.

5. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$y''-2y'+5y=5x^2+6x-12,\ \ y(0)=0,\ \ y'(0)=2.$$

Ответ: $y=e^x\left(2\cos 2x-\sin 2x\right)+x^2+2x-2$.

6. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$y'''-y''+y'-y=0,\ \ y(0)=0,\ \ y'(0)=1,\ \ y''(0)=0.$$

Ответ: $y=\sin x$.

7. Решить дифференциальное уравнение методом вариации произвольных постоянных $y''+y=\dfrac{1}{\sin x}$.

Ответ: $y=(-x+C_1)\cos x+\left(\ln|\sin x|+C_2\right)\sin x$.

8. Решить систему дифференциальных уравнений двумя способами:
   а) сведением к дифференциальному уравнению высшего порядка;
   б) с помощью характеристического уравнения.

$$\begin{cases} x'=x+2y, \\ y'=4x+3y. \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x=C_1e^{-t}+C_2e^{5t}, \\ y=-C_1e^{-t}+2C_2e^{5t}. \end{cases}$

Вариант 19

1. Найти частное решение дифференциального уравнения и вычислить значение полученной функции $y=\varphi(x)$ при $x=x_0$ с точностью до двух знаков после запятой

$$y'''\sin^4 x=\sin 2x,\quad x_0=\frac{5\pi}{2},\quad y\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2},\quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=1,\quad y''\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1.$$

Ответ: 7,85.

2. Найти общее решение дифференциального уравнения, допускающего понижение порядка, $y'''+y''\operatorname{tg}x=\sec x$.

Ответ: $y=-\sin x-C_1\cos x+C_2x+C_3$.

3. Найти общее решение дифференциального уравнения
   а) $y''-3y'-4y=0$; б) $y''+6y'+13y=0$; в) $y''+2y'=0$.

4. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y''+6y'+13y=12\cos 2x-87\sin 2x.$$

Ответ: $y=e^{-3x}\left(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x\right)+4\cos 2x-3\sin 2x$.

5. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$y''+8y'+16y=16x^3+24x^2-10x+8,\quad y(0)=1,\quad y'(0)=3.$$

Ответ: $y=4xe^{-4x}+x^3-x+1$.

6. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$y'''-3y''+3y'-y=0,\ y(0)=0,\ y'(0)=0,\ y''(0)=4.$$

Ответ: $y=2x^2e^x$.

7. Решить дифференциальное уравнение методом вариации произвольных постоянных $y''+4y=\dfrac{1}{\sin 2x}$.

Ответ: $y=\left(-\dfrac{x}{2}+C_1\right)\cos 2x+\left(\dfrac{1}{4}\ln\left|\sin 2x\right|+C_2\right)\sin 2x$.

8. Решить систему дифференциальных уравнений двумя способами:
   а) сведением к дифференциальному уравнению высшего порядка;
   б) с помощью характеристического уравнения.

$$\begin{cases} x'=x+4y,\\ y'=x+y.\end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x=C_1e^{-t}+C_2e^{3t},\\ y=-\dfrac{1}{2}C_1e^{-t}+\dfrac{1}{2}C_2e^{3t}.\end{cases}$

Вариант 20

1. Найти частное решение дифференциального уравнения и вычислить значение полученной функции $y=\varphi(x)$ при $x=x_0$ с точностью до двух знаков после запятой

$$y''=\cos x+e^{-x},\quad x_0=\pi,\quad y(0)=-e^{-\pi},\quad y'(0)=1.$$

Ответ: 1,00.

2. Найти общее решение дифференциального уравнения, допускающего понижение порядка, $y''-2y'\operatorname{ctg}x=\sin^3 x$.

Ответ: $y=-\dfrac{\sin^3 x}{3}+C_1\dfrac{x}{2}-C_1\dfrac{\sin 2x}{4}+C_2$.

3. Найти общее решение дифференциального уравнения

а) $y''+25y'=0$; б) $y''-10y'+16y=0$; в) $y''-8y'+16y=0$.

4. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y''+5y'=39\cos 3x-105\sin 3x.$$

Ответ: $y=C_1+C_2e^{-5x}+4\cos 3x+5\sin 3x$.

5. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$y''-2y'+37y=36e^x\cos 6x,\quad y(0)=0,\quad y'(0)=6.$$

Ответ: $y=e^x\sin 6x+3xe^x\sin 6x$.

6. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$y'''-y''+4y'-4y=0,\quad y(0)=-1,\quad y'(0)=0,\quad y''(0)=-6.$$

Ответ: $y=-2e^x+\cos 2x+\sin 2x$.

7. Решить дифференциальное уравнение методом вариации произвольных постоянных $y''+4y=\operatorname{tg}2x$.

Ответ: $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x-\dfrac{1}{4}\ln\left|\operatorname{tg}\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\right|\cos 2x$.

8. Решить систему дифференциальных уравнений двумя способами:

а) сведением к дифференциальному уравнению высшего порядка;

б) с помощью характеристического уравнения.

$$\begin{cases} x'=3x-2y,\\ y'=2x+8y.\end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x=C_1e^{4t}+C_2e^{7t},\\ y=-\dfrac{1}{2}C_1e^{4t}-2C_2e^{7t}.\end{cases}$

Вариант 21

1. Найти частное решение дифференциального уравнения и вычислить значение полученной функции $y=\varphi(x)$ при $x=x_0$ с точностью до двух знаков после запятой

$$y''=\sin^3 x,\quad x_0=2{,}5\pi,\quad y\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{7}{9},\quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0.$$

Ответ: -0,78.

2. Найти общее решение дифференциального уравнения, допускающего понижение порядка, $y''+4y'=2x^2$.

Ответ: $y=\frac{x^3}{6}-\frac{x^2}{8}+\frac{x}{16}-C_1\frac{e^{-4x}}{4}+C_2$.

3. Найти общее решение дифференциального уравнения
   а) $y''-3y'-18y=0$; б) $y''-6y'=0$; в) $y''+2y'+5y=0$.

4. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y''-4y'+29y=104\sin 5x.$$

Ответ: $y=e^{2x}\left(C_1\cos 5x+C_2\sin 5x\right)+5\cos 5x+\sin 5x$.

5. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$y''-8y'=16+48x^2-128x^3,\quad y(0)=-1,\quad y'(0)=14.$$

Ответ: $y=2e^{8x}-3+4x^4-2x$.

6. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$y^{IY}-2y'''+y''=0,\quad y(0)=0,\quad y'(0)=0,\quad y''(0)=1,\quad y'''(0)=2.$$

Ответ: $y=1-e^x+xe^x$.

7. Решить дифференциальное уравнение методом вариации произвольных постоянных $y''+4y'+4y=\frac{e^{-2x}}{x^3}$.

Ответ: $y=\left(C_1+C_2x+\frac{1}{2x}\right)e^{-2x}$.

8. Решить систему дифференциальных уравнений двумя способами:
   а) сведением к дифференциальному уравнению высшего порядка;
   б) с помощью характеристического уравнения.

$$\begin{cases} x'=x+4y,\\ y'=2x+3y.\end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x=C_1e^{-t}+C_2e^{5t},\\ y=-\frac{1}{2}C_1e^{-t}+C_2e^{5t}.\end{cases}$

Вариант 22

1. Найти частное решение дифференциального уравнения и вычислить значение полученной функции $y=\varphi(x)$ при $x=x_0$ с точностью до двух знаков после запятой $y'''=\sqrt{x}-\sin 2x$, $x_0=1$,

$$y(0)=-\frac{1}{8},\quad y'(0)=\frac{1}{8}\cos 2,\quad y''(0)=\frac{1}{2}.$$ *Ответ*: 0,08.

2. Найти общее решение дифференциального уравнения, допускающего понижение порядка, $xy''-y'=2x^2e^x$.

Ответ: $y=2e^x(x-1)+C_1\dfrac{x^2}{2}+C_2$.

3. Найти общее решение дифференциального уравнения
   а) $y''-6y'+13y=0$; б) $y''-2y'-15y=0$; в) $y''-8y'=0$.
4. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y''-4y'+5y=(24\sin x+8\cos x)e^{-2x}.$$

Ответ: $y=e^{2x}(C_1\cos x+C_2\sin x)+e^{-2x}(\cos x+\sin x)$.

5. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$y''+12y'+36y=72x^3-18,\ y(0)=1,\ y'(0)=0.$$

Ответ: $y=y=\left(\dfrac{31}{22}+\dfrac{82}{11}x\right)e^{-6x}+2x^3-2x^2+x-\dfrac{9}{22}$.

6. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$y^{IY}-y=0,\ y(0)=0,\ y'(0)=0,\ y''(0)=0,\ y'''(0)=-4.$$

Ответ: $y=e^{-x}-e^x+2\sin x$.

7. Решить дифференциальное уравнение методом вариации произвольных постоянных $y''-4y'+4y=\dfrac{e^{2x}}{x^3}$.

Ответ: $y=C_1e^{2x}+C_2xe^{2x}+\dfrac{e^{2x}}{2x}$.

8. Решить систему дифференциальных уравнений двумя способами:
   а) сведением к дифференциальному уравнению высшего порядка;
   б) с помощью характеристического уравнения.

$$\begin{cases} x'=7x+3y, \\ y'=x+5y. \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x=C_1e^{4t}+C_2e^{8t}, \\ y=-C_1e^{4t}+\dfrac{1}{3}C_2e^{8t}. \end{cases}$

Вариант 23

1. Найти частное решение дифференциального уравнения и вычислить значение полученной функции $y=\varphi(x)$ при $x=x_0$ с точностью до двух знаков после запятой

$$y''=\frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)},\quad x_0=4\pi,\quad y(0)=0,\quad y'(0)=1.$$

Ответ: 12,56.

2. Найти общее решение дифференциального уравнения, допускающего понижение порядка, $x(y''+1)+y'=0$.

Ответ: $y=-\dfrac{x^2}{4}+C_1\ln x+C_2$.

3. Найти общее решение дифференциального уравнения
   а) $y''+2y'+y=0$; б) $y''+6y'+25y=0$; в) $y''-4y'=0$.

4. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y''+16y=8\cos 4x.$$

Ответ: $y=C_1\cos 4x+C_2\sin 4x+x\sin 4x$.

5. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$y''+3y'=(40x+58)e^{2x},\quad y(0)=0,\quad y'(0)=-2.$$

Ответ: $y=4e^{-3x}-7+(4x+3)e^{2x}$.

6. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$y^{IY}-16y=0,\quad y(0)=0,\quad y'(0)=2,\quad y''(0)=0,\quad y'''(0)=0.$$

Ответ: $y=\dfrac{1}{4}e^{2x}-\dfrac{1}{4}e^{-2x}+\dfrac{1}{2}\sin 2x$.

7. Решить дифференциальное уравнение методом вариации произвольных постоянных $y''+2y'+y=3e^{-x}\sqrt{x+1}$.

Ответ: $y=\left(-\dfrac{6}{5}\sqrt{(x+1)^5}+2\sqrt{(x+1)^3}+C_1\right)e^{-x}+\left(2\sqrt{(x+1)^3}+C_2\right)xe^{-x}$.

8. Решить систему дифференциальных уравнений двумя способами:
   а) сведением к дифференциальному уравнению высшего порядка;
   б) с помощью характеристического уравнения.

$$\begin{cases} x'=4x-y, \\ y'=-x+4y. \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x=C_1e^{3t}+C_2e^{5t}, \\ y=C_1e^{3t}-C_2e^{5t}. \end{cases}$

Вариант 24

1. Найти частное решение дифференциального уравнения и вычислить значение полученной функции $y=\varphi(x)$ при $x=x_0$ с точностью до двух знаков после запятой

$$y''=2\sin x\cos^2 x,\quad x_0=\frac{\pi}{2},\quad y(0)=-\frac{5}{9},\quad y'(0)=-\frac{2}{3}.$$

Ответ: -1,00.

2. Найти общее решение дифференциального уравнения, допускающего понижение порядка, $y''+4y'=\cos 2x$.

Ответ: $y=\frac{1}{10}\sin 2x-\frac{1}{20}\cos 2x-\frac{C_1}{4}e^{-4x}+C_2$.

3. Найти общее решение дифференциального уравнения
   а) $y''+10y'=0$; б) $y''-6y'+8y=0$; в) $4y''+4y'+y=0$.

4. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y''+9y=9x^4+12x^2-27.$$

Ответ: $y=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x+x^4-3$.

5. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$y''-9y'+18y=26\cos x-8\sin x,\quad y(0)=0,\quad y'(0)=2.$$

Ответ: $y=2e^{6x}-3e^{3x}-\sin x+\cos x$.

6. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$y'''+y''-4y'-4y=0,\quad y(0)=0,\quad y'(0)=0,\quad y''(0)=12.$$

Ответ: $y=e^{2x}+3e^{-2x}-4e^{-x}$.

7. Решить дифференциальное уравнение методом вариации произвольных постоянных $y''+y=-\mathrm{ctg}^2 x$.

Ответ: $y=C_1\cos x+C_2\sin x+\cos x\cdot\ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right|+2$.

8. Решить систему дифференциальных уравнений двумя способами:
   а) сведением к дифференциальному уравнению высшего порядка;
   б) с помощью характеристического уравнения.

$$\begin{cases} x'=2x+8y,\\ y'=x+4y. \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x=C_1+C_2e^{6t},\\ y=-\frac{1}{4}C_1+\frac{1}{2}C_2e^{6t}. \end{cases}$

Вариант 25

1. Найти частное решение дифференциального уравнения и вычислить значение полученной функции $y=\varphi(x)$ при $x=x_0$ с точностью до двух знаков после запятой

$$y''=2\sin^2 x\cos x,\ \ x_0=\pi,\ \ y(0)=\frac{1}{9},\ \ y'(0)=1.$$

Ответ: 4,14.

2. Найти общее решение дифференциального уравнения, допускающего понижение порядка, $y''+y'=\sin x$.

Ответ: $y=-\frac{1}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x-C_1e^{-x}+C_2$.

3. Найти общее решение дифференциального уравнения

а) $y''+5y=0$; б) $9y''-6y'+y=0$; в) $y''+6y'+8y=0$.

4. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y''-12y'+40y=2e^{6x}.$$

Ответ: $y=e^{6x}\left(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x\right)+\frac{1}{2}e^{6x}$.

5. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$y''+8y'=18x+60x^2-32x^3,\ \ y(0)=5,\ \ y'(0)=-16.$$

Ответ: $y=3+2e^{-8x}-x^4+3x^3$.

6. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$y'''+2y''+9y'+18y=0,\ \ y(0)=1,\ \ y'(0)=-3,\ \ y''(0)=-9.$$

Ответ: $y=\cos 3x-\sin 3x$.

7. Решить дифференциальное уравнение методом вариации произвольных постоянных $y''-y'=e^{2x}\cdot\cos\left(e^x\right)$.

Ответ: $y=C_1+C_2e^x-\cos\left(e^x\right)$.

8. Решить систему дифференциальных уравнений двумя способами:

а) сведением к дифференциальному уравнению высшего порядка;

б) с помощью характеристического уравнения.

$$\begin{cases} x'=5x+8y, \\ y'=3x+3y. \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x=C_1e^{-t}+C_2e^{9t}, \\ y=-\frac{3}{4}C_1e^{-t}+\frac{1}{2}C_2e^{9t}. \end{cases}$

Вариант 26

1. Найти частное решение дифференциального уравнения и вычислить значение полученной функции $y=\varphi(x)$ при $x=x_0$ с точностью до двух знаков после запятой

$$y''=2\sin x\cos^2 x-\sin^3 x,\quad x_0=\frac{\pi}{2},\quad y(0)=0,\quad y'(0)=1.$$

Ответ: 1,90.

2. Найти общее решение дифференциального уравнения, допускающего понижение порядка, $x^2y''=y'^2$.

Ответ: $y=C_1x-C_1^2\ln(x+C_1)+C_2$.

3. Найти общее решение дифференциального уравнения

   а) $y''+6y'+10y=0$; б) $y''-4y'+4y=0$; в) $y''-5y'+4y=0$.

4. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y''+4y'=e^x(24\cos 2x+2\sin 2x).$$

Ответ: $y=C_1+C_2e^{-4x}+2e^x\sin 2x$.

5. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$y''-3y'+2y=-\sin x-7\cos x,\quad y(0)=2,\quad y'(0)=7.$$

Ответ: $y=e^x+2e^{2x}-\cos x+2\sin x$.

6. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$y^{Y}-6y^{IY}+9y'''=0,\quad y(0)=y'(0)=y''(0)=y'''(0)=0,\quad y^{IY}(0)=27.$$

Ответ: $y=1+2x+\frac{3}{2}x^2-e^{3x}+xe^{3x}$.

7. Решить дифференциальное уравнение методом вариации произвольных постоянных $y''-y'=e^{2x}\cdot\sin\left(e^x\right)$.

Ответ: $y=C_1+C_2e^x-\sin\left(e^x\right)$.

8. Решить систему дифференциальных уравнений двумя способами:

   а) сведением к дифференциальному уравнению высшего порядка;
   б) с помощью характеристического уравнения.

$$\begin{cases} x'=3x+y, \\ y'=8x+y. \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x=C_1e^{-t}+C_2e^{5t}, \\ y=-4C_1e^{-t}+2C_2e^{5t}. \end{cases}$

Вариант 27

1. Найти частное решение дифференциального уравнения и вычислить значение полученной функции $y = \varphi(x)$ при $x = x_0$ с точностью до двух знаков после запятой

$$y'' = 2\cos x \sin^2 x - \cos^3 x, \quad x_0 = \frac{\pi}{2}, \quad y(0) = \frac{2}{3}, \quad y'(0) = 2.$$

Ответ: 3,47.

2. Найти общее решение дифференциального уравнения, допускающего понижение порядка, $2xy''y' = y'^2 - 4$.

Ответ: $y = \frac{2}{3C_1}(C_1 x + 4)^{\frac{3}{2}} + C_2$.

3. Найти общее решение дифференциального уравнения
   а) $y'' - y = 0$; б) $4y'' + 8y' - 5y = 0$; в) $y'' - 6y' + 10y = 0$.

4. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' + 2y' + y = 6e^{-x}.$$

Ответ: $y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + 3x^2 e^{-x}$.

5. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$y'' + 2y' = 6x^2 + 2x - 2, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 2.$$

Ответ: $y = 3 - e^{-2x} + x^3 - x^2$.

6. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$y''' + 2y'' + y' = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2, \quad y''(0) = -3.$$

Ответ: $y = 1 - e^{-x} + xe^{-x}$.

7. Решить дифференциальное уравнение методом вариации произвольных постоянных, $y'' + y = \operatorname{tg}^2 x$.

Ответ: $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \sin x \cdot \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| - 2$.

8. Решить систему дифференциальных уравнений двумя способами:
   а) сведением к дифференциальному уравнению высшего порядка;
   б) с помощью характеристического уравнения.

$$\begin{cases} x' = x - 5y, \\ y' = -x - 3y. \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x = C_1 e^{-4t} + C_2 e^{2t}, \\ y = C_1 e^{-4t} - \frac{1}{5} C_2 e^{2t}. \end{cases}$

Вариант 28

1. Найти частное решение дифференциального уравнения и вычислить значение полученной функции $y=\varphi(x)$ при $x=x_0$ с точностью до двух знаков после запятой

$$y''=x-\ln x,\quad x_0=2,\quad y(1)=-\frac{5}{12},\quad y'(1)=\frac{3}{2}.$$

Ответ: 1,62.

2. Найти общее решение дифференциального уравнения, допускающего понижение порядка, $y'''x\ln x=y''$.

Ответ: $y=\frac{C_1x^2}{4}(2\ln x-3)+C_2x+C_3$.

3. Найти общее решение дифференциального уравнения
   а) $y''+8y'+25y=0$; б) $y''+9y'=0$; в) $9y''+3y'-2y=0$.

4. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y''+2y'+37y=37x^2-33x+74.$$

Ответ: $y=e^{-x}(C_1\cos 6x+C_2\sin 6x)+x^2-x+2$.

5. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$y''+16y=32e^{4x},\quad y(0)=2,\quad y'(0)=0.$$

Ответ: $y=\cos 4x-\sin 4x+e^{4x}$.

6. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$y'''-y''-y'+y=0,\quad y(0)=-1,\quad y'(0)=0,\quad y''(0)=10.$$

Ответ: $y=-4e^x+7xe^x+3e^{-x}$.

7. Решить дифференциальное уравнение методом вариации произвольных постоянных $y''+y=\frac{2}{\sin^2 x}$.

Ответ: $y=C_1\cos x+C_2\sin x+2\cos x\cdot\ln\left|\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{2}\right)\right|-2$.

8. Решить систему дифференциальных уравнений двумя способами:
   а) сведением к дифференциальному уравнению высшего порядка;
   б) с помощью характеристического уравнения.

$$\begin{cases} x'=-5x+2y,\\ y'=x-6y.\end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x=C_1e^{-4t}+C_2e^{-7t},\\ y=\frac{1}{2}C_1e^{-4t}-C_2e^{-7t}.\end{cases}$

Вариант 29

1. Найти частное решение дифференциального уравнения и вычислить значение полученной функции $y=\varphi(x)$ при $x=x_0$ с точностью до двух знаков после запятой

$$y''=\frac{1}{x^2},\quad x_0=2,\quad y(1)=3,\quad y'(1)=1.$$

Ответ: 4,31.

2. Найти общее решение дифференциального уравнения, допускающего понижение порядка, $y''\operatorname{ctg}x+y'=2$.

Ответ: $y=2x+C_1\sin x+C_2$.

3. Найти общее решение дифференциального уравнения
   а) $6y''+7y'-3y=0$; б) $y''+16y=0$; в) $4y''-4y'+y=0$.

4. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$6y''-y'-y=3e^{2x}.$$

Ответ: $y=C_1e^{\frac{x}{2}}+C_2e^{-\frac{x}{3}}+\frac{1}{7}e^{2x}$.

5. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$y''+5y'+6y=52\sin 2x,\quad y(0)=-2,\quad y'(0)=-5.$$

Ответ: $y=2e^{-2x}+e^{-3x}-5\cos 2x+\sin 2x$.

6. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$y^{IY}+5y''+4y=0,\quad y(0)=0,\quad y'(0)=4,\quad y''(0)=-9,\quad y'''(0)=-16.$$

Ответ: $y=2\sin 2x+3\cos 2x-3\cos x$.

7. Решить дифференциальное уравнение методом вариации произвольных постоянных $\quad y''+2y'+5y=\dfrac{e^{-x}}{\sin 2x}$.

Ответ: $y=\left(-\frac{x}{2}+C_1\right)e^{-x}\cos 2x+\left(\frac{1}{4}\ln\left|\sin 2x\right|+C_2\right)e^{-x}\sin 2x$.

8. Решить систему дифференциальных уравнений двумя способами:
   а) сведением к дифференциальному уравнению высшего порядка;
   б) с помощью характеристического уравнения.

$$\begin{cases} x'=6x+3y,\\ y'=-8x-5y.\end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x=C_1e^{-2t}+C_2e^{3t},\\ y=-\frac{8}{3}C_1e^{-2t}-C_2e^{3t}.\end{cases}$

Вариант 30

1. Найти частное решение дифференциального уравнения и вычислить значение полученной функции $y=\varphi(x)$ при $x=x_0$ с точностью до двух знаков после запятой

$$y'''=\cos 4x,\ \ x_0=\pi,\ \ y(0)=2,\ \ y'(0)=\frac{15}{16},\ \ y''(0)=0.$$

Ответ: 5,14.

2. Найти общее решение дифференциального уравнения, допускающего понижение порядка, $\left(1+x^2\right)y''=2xy'$.

Ответ: $y=C_1\dfrac{x^3}{3}+C_1x+C_2$.

3. Найти общее решение дифференциального уравнения
   а) $9y''-6y'+y=0$; б) $y''+12y'+37y=0$; в) $y''-2y'=0$.

4. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$2y''+7y'+3y=-222\sin 3x.$$

Ответ: $y=C_1e^{-3x}+C_2e^{-\frac{x}{2}}+7\cos 3x+5\sin 3x$.

5. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$y''-4y=8e^{2x},\ \ y(0)=1,\ \ y'(0)=-8.$$

Ответ: $y=3e^{-2x}-2e^{2x}+2xe^{2x}$.

6. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$y^{IY}+10y''+9y=0,\ \ y(0)=1,\ y'(0)=3,\ \ y''(0)=-9,\ \ y'''(0)=-27.$$

Ответ: $y=\cos 3x+\sin 3x$.

7. Решить дифференциальное уравнение методом вариации произвольных постоянных $y''+9y=\dfrac{1}{\cos 3x}$.

Ответ: $y=\left(\dfrac{1}{9}\ln\left|\cos 3x\right|+C_1\right)\cos 3x+\left(\dfrac{x}{3}+C_2\right)\sin 3x$.

8. Решить систему дифференциальных уравнений двумя способами:
   а) сведением к дифференциальному уравнению высшего порядка;
   б) с помощью характеристического уравнения.

$$\begin{cases} x'=4x-8y, \\ y'=-8x+4y. \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x=C_1e^{-4t}+C_2e^{12t}, \\ y=C_1e^{-4t}-C_2e^{12t}. \end{cases}$

Уровень II

Вариант 1

1. Решить дифференциальное уравнение $2xy'''y''=y''^2-a^2$.

Ответ: $y=C_2x+C_3\pm 4\dfrac{\left(C_1x+a^2\right)^{\frac{5}{2}}}{15C_1^2}$.

2. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'''+y'=\operatorname{tg}x$.

Ответ: $y=C_1+C_2\cos x+C_3\sin x-\ln\left|\cos x\right|-\sin x\ln\left|\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{x}{2}\right)\right|$.

3. Найти частное решение дифференциального уравнения
$$y^{IY}-y=8e^x,\quad y(0)=-1,\quad y'(0)=0,\quad y''(0)=1,\quad y'''(0)=0.$$

Ответ: $y=e^{-x}-3e^x+\cos x+2\sin x+2xe^x$.

4. Найти общее решение дифференциального уравнения
$$y^{IY}-a^4y=5a^4e^{ax}\sin ax.$$

Ответ: $y=\left(C_1-\sin ax\right)e^{ax}+C_2e^{-ax}+C_3\cos ax+C_4\sin ax$.

5. Решить систему дифференциальных уравнений:
$$\frac{dx}{dt}=2y,\quad \frac{dy}{dt}=2z,\quad \frac{dz}{dt}=2x.$$

Ответ: $$\begin{cases} x=C_1e^{2t}+e^{-t}\left(C_2\cos\sqrt{3}t+C_3\sin\sqrt{3}t\right), \\ y=C_1e^{2t}+\dfrac{1}{2}e^{-t}\left(\left(C_3\sqrt{3}+C_2\right)\cos\sqrt{3}t-\left(C_2\sqrt{3}+C_3\right)\sin\sqrt{3}t\right), \\ z=C_1e^{2t}-\dfrac{1}{2}e^{-t}\left(\left(C_3\sqrt{3}+C_2\right)\cos\sqrt{3}t-\left(C_2\sqrt{3}-C_3\right)\sin\sqrt{3}t\right). \end{cases}$$

Вариант 2

1. Решить задачу Коши для дифференциального уравнения
$$y'''-\frac{\left(y''\right)^2}{y'}=6\left(y'\right)^2y,\quad y(2)=0,\quad y'(2)=1,\quad y''(2)=1.$$

Ответ: $x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2y-1}{\sqrt{3}}+\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{\left|y+1\right|}{\sqrt{y^2-y+1}}+2+\dfrac{\pi}{6\sqrt{3}}$.

2. Применяя метод вариации произвольных постоянных, найти общее решение дифференциального уравнения $y''' - 3y'' + 3y' - y = e^x$.

Ответ: $y = \left(C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \dfrac{x^3}{6} \right) e^x$.

3. Найти общее решение дифференциального уравнения $y^{IY} - 3y'' = 9x^2$.

Ответ: $y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{\sqrt{3}x} + C_4 e^{-\sqrt{3}x} - \dfrac{1}{4}x^4 - x^2$.

4. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y^{IY} + 2a^2 y'' + a^4 y = 8\cos ax.$$

Ответ: $y = (C_1 + C_2 x)\cos ax + (C_3 + C_4 x)\sin ax - \dfrac{x^2}{a^2}\cos ax$.

5. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 6x - 12y - z, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 3y - z, \\ \dfrac{dz}{dt} = -4x + 12y + 3z. \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x = 2C_1 e^t + 7C_2 e^{2t} + 3C_3 e^{3t}, \\ y = C_1 e^t + 3C_2 e^{2t} + C_3 e^{3t}, \\ z = -2C_1 e^t - 8C_2 e^{2t} - 3C_3 e^{3t}. \end{cases}$

Вариант 3

1. Решить дифференциальное уравнение $y''' = (y'')^2$.

Ответ: $y = (C_1 - x)\left(\ln(C_1 - x) - 1\right) + C_2 x + C_3$.

2. Решить задачу Коши для дифференциального уравнения

$$y'' - 2y' + 5y = 3e^x + e^x \operatorname{tg} 2x, \quad y(0) = \frac{3}{4}, \quad y'(0) = \frac{15}{4}.$$

Ответ: $y = \dfrac{1}{4}e^x \left(3 + 7\sin 2x - \ln\left| \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} + x \right) \right| \cdot \cos 2x \right)$.

3. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$S'' - 2aS' + a^2 S = e^t, \ \ (a \neq 1).$$

Ответ: $S = C_1 e^{at} + C_2 t e^{at} + \dfrac{e^t}{(a-1)^2}$.

4. Найти решение уравнения $y'' + n^2 y = h \sin px$ $(p \neq n)$, удовлетворяющее условиям $y = a$, $y' = C$ при $x = 0$.

Ответ: $y = a \cos nx + \dfrac{C(n^2 - p^2) - hp}{n(n^2 - p^2)} \sin nx + \dfrac{h}{n^2 - p^2} \sin px$.

5. Найти общее решение системы: $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -x_1 + x_2 + x_3, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_1 - x_2 + x_3, \\ \dfrac{dx_3}{dt} = x_1 + x_2 + x_3. \end{cases}$

Ответ: $\begin{cases} x_1 = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t} + C_3 e^{-2t}, \\ x_2 = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t} - 3C_3 e^{-2t}, \\ x_3 = -C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{2t}. \end{cases}$

Вариант 4

1. Решить дифференциальное уравнение $xy''' + y'' - x - 1 = 0$.

Ответ: $y = \dfrac{1}{12}(x^3 + 6x^2) + C_1 x \ln|x| + C_2 x + C_3$.

2. Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' - 2y' - 3y = e^{4x}$, удовлетворяющее краевым условиям $y(\ln 2) = 1$, $y(2\ln 2) = 1$.

Ответ: $y = \dfrac{1}{5} e^{4x} + \dfrac{652}{75} e^{-x} - \dfrac{491}{600} e^{3x}$.

3. Найти общее решение дифференциального уравнения $y''' + y' = e^x$.

Ответ: $y = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x + \dfrac{1}{2} e^x$.

4. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y''' + y' = e^x + 6\cos 2x.$$

Ответ: $y = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x + \dfrac{1}{2} e^x - \sin 2x$.

5. Найти общее решение системы: $\begin{cases} x_1' = x_1 - x_2 + x_3, \\ x_2' = x_1 + x_2 + x_3, \\ x_3' = 2x_1 - x_2. \end{cases}$

Ответ: $\begin{cases} x_1 = C_1e^t + C_2e^{2t} + C_3e^{-t}, \\ x_2 = C_1e^t - 3C_3e^{-t}, \\ x_3 = C_1e^t + C_2e^{2t} - 5C_3e^{-t}. \end{cases}$

Вариант 5

1. Решить дифференциальное уравнение $y' \cdot y''' - 3(y'')^2 = 0$.

Ответ: $x = C_1y^2 + C_2y + C_3$.

2. Найти частное решение дифференциального уравнения $yy' + (y')^2 + yy'' = 0$, удовлетворяющее краевым условиям $y(0) = 1$, $y(-1) = 0$.

Ответ: $y = \sqrt{\dfrac{e - e^{-x}}{e - 1}}$.

3. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y''' + y'' = 6x + e^{-x}.$$

Ответ: $y = C_1 + C_2x + C_3e^{-x} + x^3 - 3x^2 + xe^{-x}$.

4. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y^{IY} - y = 3xe^x + \sin 2x.$$

Ответ: $y = C_1e^{-x} + C_2e^x + C_3\cos x + C_4\sin x + \dfrac{3}{8}\left(x^2 - 3x\right)e^x + \dfrac{1}{15}\sin 2x$.

5. Решить систему: $\begin{cases} x_1' = -15x_1 - 6x_2 + 16x_3, \\ x_2' = -15x_1 - 7x_2 + 18x_3, \\ x_3' = -19x_1 - 8x_2 + 21x_3. \end{cases}$

Ответ: $\begin{cases} x_1 = 2C_1e^{-t} + 2(4C_3 + C_2)\cos t - 2(4C_2 - C_3)\sin t, \\ x_2 = -2C_1e^{-t} + 3(5C_2 + 3C_3)\cos t + 3(5C_3 - 3C_2)\sin t, \\ x_3 = C_1e^{-t} + (7C_2 + 11C_3)\cos t + (7C_3 - 11C_2)\sin t. \end{cases}$

Вариант 6

1. Найти общее решение дифференциального уравнения $y^{(n)} = x^m$.

Ответ: $y = \dfrac{m!}{(m+n)!}x^{m+n} + C_1 x^{n-1} + \ldots + C_{n-1}x + C_n$.

2. Найти решение дифференциального уравнения $yy'' + (y')^2 + 1 = 0$, удовлетворяющее краевым условиям: $y(0) = 1$, $y(1) = 2$.

Ответ: $(x-2)^2 + y^2 = 5$.

3. Найти общее решение дифференциального уравнения $y^{IY} + y'' = x^2 + 2$.

Ответ: $y = C_1 + C_2 x + C_3 \cos x + C_4 \sin x + \dfrac{1}{12}x^4$.

4. Найти общее решение дифференциального уравнения $y^{IY} - y = \cos x$.

Ответ: $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \sin x + C_4 \cos x - \dfrac{1}{4}x(\sin x + \cos x)$.

5. Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + t, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + e^t, \end{cases} \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 0.$$

Ответ: $\begin{cases} x = \dfrac{1}{4}\left(3e^t + 5e^{-t}\right) + \dfrac{1}{2}te^t - 1, \\ y = \dfrac{5}{4}\left(e^t - e^{-t}\right) + \dfrac{1}{2}te^t - t. \end{cases}$

Вариант 7

1. Решить уравнение $2xy''' \cdot y'' = (y'')^2 - a^2$.

Ответ: $y = \pm 4 \dfrac{\left(C_1 x + a^2\right)^{\frac{5}{2}} + C_2 x + C_3}{15C_1^2}$.

2. Найти решение дифференциального уравнения $y'' + y = 0$, удовлетворяющее краевым условиям: $y'(0) = 0$, $y'(\pi) = 1$.

Ответ: нет решений.

3. Найти общее решение дифференциального уравнения $y''' + y' = xe^{-x}$.

Ответ: $y = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x - \left(\frac{1}{2} x + 1 \right) e^{-x}$.

4. Найти общее решение дифференциального уравнения $y''' + y' = -2\sin x$.

Ответ: $y = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x + x \sin x$.

5. Решить систему дифференциальных уравнений: $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y + \cos t, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + \sin t. \end{cases}$

Ответ: $\begin{cases} x = \left(C_1 + C_2 t \right) e^t, \\ y = \left(C_2 \left(1 - t \right) - C_1 \right) e^t - \cos t. \end{cases}$

Вариант 8

1. Решить уравнение $y''' - y' + 2x = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = y''(0) = 2$.

Ответ: $y = e^x - e^{-x} + x^2$.

2. Найти решение дифференциального уравнения $y'' - y = 0$, удовлетворяющее краевым условиям: $y(0) = 0$, $y(2\pi) = 1$.

Ответ: $y = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{sh} 2\pi}$.

3. Найти частное решение дифференциального уравнения $y^{IY} - y = 8e^x$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 1$, $y'''(0) = 0$.

Ответ: $y = 2xe^x - 3e^x + e^{-x} + \cos x + 2\sin x$.

4. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y''' - 8y = 8\sin 2x - 8\cos 2x.$$

Ответ: $y = C_1 e^{2x} + e^{-x} \left(C_2 \cos \sqrt{3} x + C_3 \sin \sqrt{3} x \right) + \cos 2x$.

5. Решить систему: $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} = 2\left(x + y \right), \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + y. \end{cases}$

Ответ: $\begin{cases} x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-2t}, \\ y = 3C_1 e^{2t} - C_2 e^{-2t}. \end{cases}$

Вариант 9

1. Решить уравнение $y^{IY}+2a^2y''+a^4y=8\sin ax$.

Ответ: $y=(C_1+C_2x)\cos ax+(C_3+C_4x)\sin ax-\dfrac{x^2}{a^2}\sin ax$.

2. Найти решение дифференциального уравнения $y''-y=0$, удовлетворяющее краевым условиям: $y(0)=0$, $y(1)=1$.

Ответ: $y=\dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{sh} 1}$.

3. Найти общее решение дифференциального уравнения $S''-a^2S=t+1$.

Ответ: $y=C_1e^{at}+C_2e^{-at}-\dfrac{t+1}{a^2}$.

4. Найти интегральную кривую уравнения $y''+k^2y=0$, проходящую через точку $M(x_0,y_0)$ и касающуюся в точке M прямой $y = ax$.

Ответ: $y=y_0\cos k(x-x_0)+\dfrac{a}{k}\sin k(x-x_0)$.

5. Решить систему дифференциальных уравнений: $\begin{cases} y'=e^x-z, \\ z'=e^{-x}+y. \end{cases}$

Ответ: $\begin{cases} y=C_1\cos x+C_2\sin x+\operatorname{sh} x, \\ z=C_1\sin x-C_2\cos x+\operatorname{sh} x. \end{cases}$

Вариант 10

1. Решить уравнение $y'''=(y'')^2$.

Ответ: $y=(C_1-x)\left(\ln(C_1-x)-1\right)+C_2x+C_3$.

2. Найти решение дифференциального уравнения $y''+y=0$, удовлетворяющее краевым условиям: $y'(0)=0$, $y'(1)=1$.

Ответ: $y=-\dfrac{\cos x}{\sin 1}$.

3. Решить уравнение $y'''-y''=12x^2+6x$.

Ответ: $y=C_1+C_2x+C_3e^x-x^4-5x^3-15x^2$.

4. Указать вид частного решения дифференциального уравнения
$$y^{Y}+4y^{IY}+24y'''+40y''+100y'=e^{-x}\cdot\left((x+3)\cos 3x+\left(2x^2-1\right)\sin 3x\right).$$

Ответ: $y_ч=x^2e^{-x}\left(\left(Ax^2+Bx+C\right)\cos 3x+\left(A_1x^2+B_1x+C_1\right)\sin 3x\right).$

5. Решить систему дифференциальных уравнений $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=4x+6y,\\ \dfrac{dy}{dt}=2x+3y+t.\end{cases}$

Ответ: $\begin{cases}x=C_1+C_2e^{7t}-\dfrac{3}{49}t(7t+2),\\ y=-\dfrac{2}{3}C_1+\dfrac{1}{2}C_2e^{7t}+\dfrac{1}{49}\left(14t^2-3t-1\right).\end{cases}$

Уровень III

1. Показать, что общее решение дифференциального уравнения $y''-m^2y=0$ можно представить в виде $y=C_1\operatorname{sh}mx+C_2\operatorname{ch}mx$.

2. Показать, что общее решение дифференциального уравнения $y''-2\alpha y'+\left(\alpha^2-\beta^2\right)y=0$ можно представить в виде $y=e^{\alpha x}\left(C_1\operatorname{ch}\beta x+C_2\operatorname{sh}\beta x\right)$.

3. Доказать теорему: если $y_1(x)$ есть частное решение линейного однородного уравнения $y''+p(x)y'+q(x)y=0$, то функция $y_2(x)=y_1(x)\int e^{-\int p(x)dx}\dfrac{dx}{y_1^2(x)}$ тоже является решением этого уравнения.

4. Используя результат задачи 3, найти общее решение уравнения $xy''+2y'+xy=0$, если $\dfrac{\sin x}{x}$ есть его частное решение.

Ответ: $y=C_1\dfrac{\cos x}{x}+C_2\dfrac{\sin x}{x}$.

5. Используя результат задачи 3, найти общее решение уравнения $\left(1-x^2\right)y''-2xy'+2y=0$, если функция $y_1=x$ есть его частное решение.

Ответ: $y=C_1x\left(\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|-1\right)+C_2x$.

6. Известно частное решение $y_1 = e^{kx}$ линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Дискриминант соответствующего характеристического уравнения равен нулю. Найти частное решение этого уравнения, удовлетворяющее начальным условиям: $y(0) = y'(0) = 1$.

Ответ: $y_ч = e^{kx}\left(1 + (1-k)x\right)$.

7. Показать, что общее решение дифференциального уравнения $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \alpha^2 x = 0$ может быть представлено в виде $x = A\sin(\alpha t + \varphi)$ или $x = A\cos(\alpha t + \varphi)$, где A и φ – произвольные постоянные.

8. Показать, что функции $1, x, x^2, ..., x^{n-1}$ линейно независимые на любом интервале (a,b).

9. Доказать, что линейное дифференциальное уравнение остается линейным при преобразовании искомой функции $y = \alpha(x)z + \beta(x)$, где z – новая функция; $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – произвольные, достаточное число раз дифференцируемые, функции.

10. Дана система функций: $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$, причем на некотором интервале вронскиан $W(x) \neq 0$. Составить линейное однородное дифференциальное уравнение, для которого эта система является фундаментальной системой решений.

$$\textit{Ответ}: \begin{vmatrix} y & y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y' & y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y^{(n)} & y_1^{(n)}(x) & y_2^{(n)}(x) & \dots & y_n^{(n)}(x) \end{vmatrix} = 0.$$

11. Радиус кривизны в произвольной точке кривой равен кубу длины нормали в этой точке. Найти уравнение кривой, проходящей через точку (0,1) и в этой точке параллельной оси абсцисс.

Ответ: $y^2 - x^2 = 1$.

12. Кривая, проходящая через точки $A(5, 7)$ и $B(6, 6)$, имеет радиус кривизны $R = 5$. Найти уравнение этой кривой.

Ответ: $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 25$.

13. В точке $(1, -2)$ кривая параллельна оси абсцисс. В любой точке радиус кривизны R равен квадрату абсцисс этой точки. Найти уравнение этой кривой.

Ответ: $6y = (2x-1)^{\frac{3}{2}} - 13$.

14. Электровоз движется по горизонтальному железнодорожному пути со скоростью 72 км/ч. Машинист включает тормоз, и сопротивление движению после начала торможения равно 0,2 веса электровоза. Найти время от момента включения тормоза до полной остановки электровоза и расстояние, пройденное за это время.

Ответ: электровоз остановится через 10,2 с, пройдя после начала торможения расстояние 102 м.

15. Балка на двух опорах длиной l прогибается под действием равномерно распределенной нагрузки, общий вес которой P. Определить уравнение упругой линии и прогиб в середине пролета.

Ответ: $y = \dfrac{P}{48EJ}\left(3lx^2 - \dfrac{2}{l}x^4\right)$,

где E – модуль упругости; J – момент инерции; $h = \dfrac{5}{8}\dfrac{Pl^3}{48EJ}$.

16. К вертикальной пружине, силой тяжести которой пренебрегаем, подвешен груз P, удлиняющий ее на величину l. Оттянув груз на длину a вниз, его оставляют свободно колебаться. Найти закон этого движения, пренебрегая побочными сопротивлениями.

Ответ: $x = a\cos\sqrt{\dfrac{g}{l}}t$ – закон гармонического колебания с периодом $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$.

17. На левом конце стержня (при $x = 0$) постоянная температура τ_0. В точках стержня, лежащих на разных расстояниях x от левого конца, устанавливается температура $\tau = \tau(x)$. Найти температуру в точке с абсциссой x.

Ответ: $\tau = \tau_0 e^{-px}$; $p^2 = \dfrac{kC}{\lambda\Phi}$, где Φ – поперечное сечение стержня; C – длина окружности поперечного сечения; λ – коэффициент теплопроводности; k – коэффициент пропорциональности.

18. Определить закон и период колебаний маятника в среде с сопротивлением, пропорциональным скорости качания.

Ответ: $S = \dfrac{ah}{p\cos\varphi} e^{-ht} \sin\left(pt + \varphi\right)$, $T = 4m\pi\sqrt{\dfrac{l}{4m^2 g - lb^2}}$, где b – коэффициент силы сопротивления $f_1 = -bv$; $h = \dfrac{b}{2m}$ – коэффициент сопротивления; $k^2 = \dfrac{g}{l}$ – коэффициент упругости; $P = \sqrt{k^2 - h^2}$; при $t = 0$ $S = a$, $\dfrac{dS}{dt} = 0$; $\mathrm{tg}\,\varphi = \dfrac{P}{h}$.

19. Моторная лодка движется по озеру со скоростью v_0 = 20 км/ч. Через 40 с после включения ее мотора скорость лодки уменьшается до v_1 = 8 км/ч. Определить скорость лодки через 2 мин после выключения мотора. (Сила сопротивления воды движению лодки пропорциональна ее скорости).

Ответ: 1,28 км/ч.

20. С высоты 18 м над уровнем земли брошено вертикально вверх тело со скоростью 30 м/с. Найти высоту, на которой тело находится в момент времени t, как функцию времени. Определить наибольшую высоту подъема тела.

Ответ: $S = h = -\dfrac{1}{2} gt^2 + 30t + 18$, $h_{наиб}$ = 3,9 м.

ГЛОССАРИЙ

Новые понятия	Содержание
1	2
1. Дифференциальное уравнение (ДУ)	уравнение относительно неизвестной функции и ее производных различных порядков. Общий вид $F\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}\right)=0$
2. Порядок ДУ	порядок старшей производной, входящей в это уравнение
3. Обыкновенное ДУ	если неизвестная функция зависит от одной переменной $y=y(x)$
4. ДУ с частными производными	если искомая функция зависит от нескольких переменных
5. Решение ДУ	функция $y=y(x)$, определенная и непрерывно дифференцируемая n раз в (a,b), называется решением ДУ в этом интервале, если она обращает данное уравнение в тождество
6. Интегральная линия (кривая) ДУ	график решения ДУ
7. ДУ первого порядка	называется уравнение, связывающее независимую переменную, искомую функцию этой переменной и ее производную. Общий вид $F(x, y, y')=0$ либо $y'=f(x,y)$, откуда $dy-f(x,y)dx=0$ или в более общем виде $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$
8. Общее решение ДУ первого порядка	называется функция $y=\varphi(x,C)$, где C – произвольная постоянная, обращающая данное уравнение в тождество
9. Общий интеграл ДУ	общее решение $\Phi(x,y,C)=0$, заданное в неявном виде
10. Частное решение ДУ	решение, полученное из общего решения при фиксированном значении C: $y=\varphi(x,C_0)$, где C_0 – число
11. Частный интеграл ДУ	$\Phi(x,y,C_0)=0$ – частное решение, заданное в неявном виде

1	2
12. Задача Коши	найти решение $y = f(x)$ ДУ первого порядка, удовлетворяющее начальному условию $y = y_0$ при $x = x_0$. Другими словами, найти интегральную кривую этого уравнения, проходящую через точку $M_0(x_0, y_0)$
13. Особое решение	решение ДУ, в каждой точке которого нарушается единственность решения задачи Коши
14. ДУ с разделенными переменными	уравнение вида $P(x)dx + Q(y)dy = 0$, где $P(x)$ – функция только от x; $Q(y)$ – функция только от y. $\int P(x)dx + Q(y)dy = C$ – общий интеграл этого уравнения
15. ДУ с разделяющимися переменными	уравнение вида $P_1(x)Q_1(y)dx + P_2(x)Q_2(y)dy = 0$, где $P_1(x)$ и $P_2(x)$ – функции только от x; $Q_1(y)$ и $Q_2(y)$ – функции только от y. Приводится к ДУ с разделенными переменными и интегрируется
16. ДУ, приводящиеся к уравнению с разделяющимися переменными	уравнение вида $y' = f(ax + by + C)$ приводится к ДУ с разделяющимися переменными подстановкой $z = ax + by + C$
17. Однородные ДУ	уравнение вида $y' = f(x, y)$ называется однородным, если $f(x, y)$ – однородная функция нулевого измерения, т.е. $f(tx, ty) = f(x, y)\ \forall t \neq 0$. Подстановкой $y = ux$, $y' = u'x + u$ приводится к ДУ с разделяющимися переменными
18. ДУ, приводящиеся к однородным	уравнение вида $y' = f\left(\dfrac{ax + by + C}{a_1x + b_1y + C_1}\right)$. С помощью преобразования $x = u + \alpha$, $y = v + \beta$ за счет выбора α и β приводится к однородному ДУ, если $\dfrac{a}{a_1} \neq \dfrac{b}{b_1}$, и к ДУ с разделяющимися переменными, если $\dfrac{a}{a_1} = \dfrac{b}{b_1}$

1	2
19. Линейное ДУ первого порядка	уравнение вида $y'+p(x)y=q(x)$, т.е. уравнение, содержащее в первой степени y и y', решается подстановкой $y=u(x)v(x)$ либо методом вариации произвольной постоянной
20. Уравнение Бернулли	уравнение вида $y'+p(x)y=q(x)\cdot y^{\alpha}$, где $\alpha\neq 0{,}1$ – действительное число. Оно сводится к линейному с помощью подстановки $u=y^{1-\alpha}$. Можно сразу применять подстановку $y=u(x)v(x)$ или метод вариации
21. ДУ в полных дифференциалах	уравнением в полных дифференциалах называется уравнение вида $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$, левая часть которого является полным дифференциалом некоторой функции $U(x,y)$, т.е. $$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=dU(x,y).$$ Необходимое и достаточное условие $\dfrac{\partial P}{\partial y}\equiv\dfrac{\partial Q}{\partial x}$, общий интеграл $U(x,y)=C$. $$U(x,y)=\int\limits_{x_0}^{x}P(x,y)dx+\int\limits_{y_0}^{y}Q(x_0,y)dy,$$ где $M_0(x_0,y_0)$ – произвольная точка из области существования решения
22. ДУ высших порядков, допускающие понижение порядка	частные случаи ДУ высших порядков, в которых отсутствуют либо x, либо y и y'; соответствующими подстановками сводятся к ДУ более низкого порядка: а) $y^{(n)}=f(x)$, решается n-кратным интегрированием; б) $y''=f(x,y')$, подстановкой $y'=p(x)$, $y''=p'(x)$ сводится к ДУ первого порядка $p'=f(x,p)$; в) $y''=f(y,y')$, подстановкой $y'=p(y)$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{dp}{dy}p$ сводится к ДУ первого порядка

1	2
23. Линейные неоднородные ДУ высших порядков	уравнение, линейное относительно неизвестной функции и ее производных. ДУ второго порядка имеет вид $y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x)$. Если $f(x) \neq 0$, то ДУ называется неоднородным; если $f(x) = 0$, ДУ называется однородным
24. Структура общего решения линейного неоднородного ДУ	$y = y_{одн} + y_ч$, где $y_{одн}$ – общее решение соответствующего однородного ДУ; $y_ч$ – любое частное решение неоднородного уравнения
25. Линейно зависимые и линейно независимые решения	два решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ называются линейно независимыми на $[a,b]$, если для всех точек этого отрезка $\dfrac{y_1(x)}{y_2(x)} \neq 0$, в противном случае они называются линейно зависимыми
26. Вронскиан	определитель вида $\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = W(y_1, y_2)$ называется определителем Вронского или вронскианом, составленным из двух решений y_1 и y_2. Если y_1 и y_2 – линейно зависимы, то $W(y_1, y_2) = 0$; если y_1 и y_2 – линейно независимые решения на $[a,b]$, то для всех точек этого отрезка $W(y_1, y_2) \neq 0$
27. Структура общего решения линейного однородного ДУ	$y_{одн} = C_1 y_1 + C_2 y_2$, где y_1 и y_2 – линейно независимые частные решения этого уравнения. Для ДУ n-ного порядка общее решение $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n \quad \left(W(y_1, y_2, ..., y_n) \neq 0\right)$. Не существует общих методов нахождения частных решений линейных однородных (а, значит, и неоднородных) ДУ с переменными коэффициентами

1	2
28. Линейные однородные ДУ с постоянными коэффициентами	уравнения вида $y'' + py' + qy = 0$, где p и q – постоянные числа. Его частное решение надо искать в виде $y = e^{kx}$. Для нахождения k получается уравнение $k^2 + pk + q = 0$. Если 1) $D > 0$, $y_{одн} = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$; 2) $D = 0$, $y_{одн} = e^{k_1 x}(C_1 + C_2 x)$; 3) $D < 0$, $y_{одн} = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x)$ $\left(k_{1,2} = \alpha \pm i\beta, \quad i = \sqrt{-1}\right)$
29. Метод вариации произвольных постоянных	применяется для нахождения частного решения линейного неоднородного ДУ в виде $y_ч = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2$, если известно общее решение соответствующего однородного уравнения $y_{одн} = C_1 y_1 + C_2 y_2$. Производные $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$ находятся из системы $\begin{cases} C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0, \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' = f(x) \end{cases}$. Сами функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ находятся интегрированием $C_1'(x)$, $C_2'(x)$
30. Специальная правая часть	специальной правой частью называются некоторые виды функции $f(x)$ в правой части линейного неоднородного ДУ с постоянными коэффициентами. I. $f(x) = e^{\alpha x} P_n(x)$, где $P_n(x)$ – многочлен степени n. Частное решение неоднородного ДУ следует искать в виде $y_ч = x^{\ell} \cdot e^{\alpha x} Q_n(x)$, где ℓ – кратность α, как корня характеристического уравнения соответствующего однородного ДУ, $Q_n(x)$ – искомый многочлен тоже степени n.

1	2
	II. $f(x)=e^{\alpha x}P(x)\cos\beta x+e^{\alpha x}Q(x)\sin\beta x$. а) если $\alpha\pm i\beta$ не являются корнями характеристического уравнения, то $$y_ч=e^{\alpha x}u(x)\cos\beta x+e^{\alpha x}v(x)\sin\beta x;$$ где $u(x)$ и $v(x)$ – искомые многочлены степени, равной наибольшей из степеней многочленов $P(x)$ и $Q(x)$. б) если $\alpha\pm i\beta$ являются корнями характеристического уравнения, то $$y_ч=x\left(e^{\alpha x}u(x)\cos\beta x+e^{\alpha x}v(x)\sin\beta x\right)$$
31. Системы ДУ	называется совокупность ДУ от нескольких неизвестных функций от одной переменной и производных от этих функций
32. Нормальная система ДУ	если каждое ДУ решено относительно производной, система называется нормальной
33. Системы линейных ДУ с постоянными коэффициентами	однородная и неоднородная системы ДУ с постоянными коэффициентами. Решаются сведением к ДУ высших порядков методом исключения неизвестных. Однородную систему можно решить также составлением характеристического уравнения, нахождением собственных значений и векторов матрицы, составленной из коэффициентов при неизвестных

УЧЕБНЫЙ МОДУЛЬ 10. «РЯДЫ»

Введение

В данном учебном модуле рассматриваются числовые ряды, функциональные ряды и их частные виды – степенные ряды и ряды Фурье. Исследуется вопрос о сходимости и расходимости числовых рядов, нахождении области сходимости функциональных рядов. Сходящиеся числовые ряды и степенные ряды широко используются для приближенного вычисления значений функций и «неберущихся» определенных интегралов, а также для нахождения частных решений дифференциальных уравнений в виде степенного ряда. Ряды Фурье имеют большое практическое применение в уравнениях математической физики.

ДИДАКТИЧЕСКИЕ ЦЕЛИ ОБУЧЕНИЯ

Студент должен знать	***Студент должен уметь***
– определение ряда, его сходимости и расходимости, суммы ряда; – необходимый признак сходимости и достаточный признак расходимости; – признаки сравнения, «эталонные ряды»; – достаточные признаки сходимости числовых рядов с положительными членами: Даламбера и Коши; – определение абсолютной и условной сходимости знакопеременных рядов; – теорему Лейбница для исследования на сходимость знакочередующихся рядов; – понятие мажорируемых функциональных рядов; – определение интервала сходимости; – формулы нахождения радиуса сходимости; – теоремы о почленном дифференцировании и интегрировании степенных рядов; – ряды Тейлора и Маклорена, условия разложимости функций в ряд Тейлора; – разложения функций e^x, $\sin x$, $\cos x$ в ряды Маклорена, биномиальный ряд и его частные случаи; – методы оценки погрешности при приближенных вычислениях с помощью рядов;	– исследовать числовой ряд на сходимость или расходимость по определению, в необходимых случаях находить сумму ряда; – применять достаточный признак расходимости; – применять признаки сравнения; – применять признаки Даламбера и Коши; – исследовать знакопеременные ряды на абсолютную и условную сходимость; – применять теорему Лейбница для исследования сходимости знакочередующихся рядов; – находить область сходимости простейших функциональных рядов; – находить интервал сходимости степенных рядов, исследовать сходимость на концах интервала; – раскладывать функции в ряды Тейлора и Маклорена; – применять теоремы о почленном дифференцировании и интегрировании степенных рядов для разложения функций в ряды Тейлора и нахождения сумм этих рядов; – применять ряды к приближенному вычислению значений функций и определенных интегралов;

– теорему Дирихле о разложении функций в ряды Фурье; – формулы для вычисления коэффициентов ряда Фурье и самого ряда Фурье для 2π-периодических и 2ℓ-периодических функций; для четных и нечетных функций	– применять степенные ряды к нахождению частных решений дифференциальных уравнений; – вычислять коэффициенты ряда Фурье и записывать сам ряд Фурье; – применять разложения функций в ряд Фурье для вычисления сумм некоторых сходящихся числовых рядов

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА МОДУЛЯ

Название вопросов, которые изучаются на лекции	№ практического занятия	Методические пособия	Формы контроля знаний
1. Числовые ряды. Сходимость и сумма ряда. Необходимое условие сходимости. Простейшие действия над рядами	I, II	1, 3, 4, 5, 6	ВДЗ
2. Ряды с положительными членами. Теоремы сравнения	II	3, 4, 5, 6	Опрос, ПДЗ
3. Признаки сходимости Даламбера и Коши	III	3, 4, 5, 6	Опрос, ПДЗ
4. Знакочередующиеся ряды. Теорема Лейбница. Знакопеременные ряды. Абсолютно и условно сходящиеся ряды	IY	3, 4, 5, 6	Опрос, ПДЗ
5. Функциональные ряды. Область сходимости. Степенные ряды	Y	1, 3, 4, 5, 6, 7	Опрос, ПДЗ
6. Теорема Абеля. Интервал и радиус сходимости для рядов с действительными членами. Интегрирование и дифференцирование степенных рядов	Y	1, 3, 4, 5, 6, 7	Опрос, ПДЗ
7. Ряд Тейлора. Достаточные условия разложения функции. Разложение по степеням x функций e^x, $\sin x$, $\cos x$, $(1+x)^m$	YI	4, 5, 6	ПДЗ
8. Приложение рядов к приближенным вычислениям	YI	4, 5, 6, 8	КР
9. Ряд Фурье. Коэффициенты Фурье. Разложение в тригонометрический ряд Фурье четных и нечетных функций, заданных на интервале $(-\pi, \pi)$	YIII	1, 2, 3, 4, 5, 6	Опрос, ВДЗ
10. Разложение в тригонометрический ряд функций, заданных на интервале $(-\ell, \ell)$	IX	1, 2, 3, 4, 5, 6	Опрос, ПДЗ

Перечень тем практических занятий приведен в практической части модуля.

ГРАФИЧЕСКАЯ СХЕМА МОДУЛЯ

Информационная таблица «Ряды»

«Важные сведения из пределов»

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{k}{n}\right)^n = e^k$;
2. $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sin ky}{y} = k$;
3. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$;
4. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{n^n}{n!}} = e$;
5. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$;
6. $\ln x \ll x^n \ll a^x \ll x^x$ при $x\to\infty,\ a>1,\ n\in\mathrm{N}$.

«Ряды»

Числовой ряд **–** сумма элементов последовательности $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

Числовой ряд называется ***сходящимся,*** if $\exists$ конечный предел последовательности его частичных сумм: $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$**.**

if $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не $\exists$ или бесконечен, то ряд называется ***расходящимся***.

if $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0}$ (*необходимое условие сходимости ряда*).

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$, $r_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots$

Признак сравнения **1.**

Пусть заданы знакоположительные ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ (1), $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ (2) и $\forall\ n \ge n_0,\ a_n \ge b_n$.

Тогда, если ряд (1) сходится, то сходится и ряд (2); если ряд (2) расходится, то расходится и ряд (1).

Признак сравнения **2.**

Если $\exists$ конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n} \ne 0$, то ряды (1) и (2) сходятся или расходятся одновременно.

Ряды «эталоны»

$\boxed{1.}$ *Ряд Дирихле*

(обобщенный гармонический ряд)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\rho}} - \left[\begin{array}{ll}\rho \le 1, & \text{расх.}\\ \rho > 1, & \text{сход.}\end{array}\right.$$

$\boxed{2.}$ *Геометрическая прогрессия*

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_1 q^n \left[\begin{array}{lll}\text{при} & |q| < 1, & \text{сход.}\\ \text{при} & |q| \ge 1, & \text{расх.}\end{array}\right.,\quad S = \frac{b_1}{1-q}.$$

Признак Даламбера. Пусть задан знакоположительный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Тогда if $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = p$, то $\left[\begin{array}{l}\text{при } p<1 \text{ – ряд сход.,}\\ \text{при } p>1 \text{ –ряд расход.,}\\ \text{при } p=1 \text{ нужны доп. исслед.}\end{array}\right.$

Радикальный признак Коши. Пусть задан знакоположительный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Тогда if $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = p$, то $\left[\begin{array}{l}\text{при } p<1 \text{ – ряд сход.,}\\ \text{при } p>1 \text{ –ряд расход.,}\\ \text{при } p=1 \text{ нужны доп. исслед.}\end{array}\right.$

Интегральный признак Коши. Пусть для знакоположительного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ $\exists$ положительная, непрерывная и монотонно убывающая на промежутке $[a, +\infty)$ $(a \ge 1)$ функция $f(x)$ такая, что $f(n) = a_n$. Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходятся или расходятся одновременно.

Знакопеременные ряды

Пусть задан знакопеременный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ (1), где a_n – числа произвольного знака. Тогда, если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ (2) сходится, то сходится и данный ряд (1), при этом он называется ***абсолютно сходящимся***. Если ряд (2) расходится, а данный ряд (1) сходится, то он называется ***условно сходящимся***.

Признак Лейбница. Пусть дан знакочередующийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot a_n \quad (a_n > 0)$. Если выполняются условия: $\left.\begin{array}{l} 1)\ a_1 > a_2 > \ldots > a_n > \ldots \\ 2)\ \lim a_n = 0, \end{array}\right\}$, то данный ряд сходится и его сумма $0 < S < a_1$.

Степенные ряды

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{C_n}{C_{n+1}} \right| \quad \text{или} \quad R = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{|C_n|}}, \text{ if } \sum_{n=1}^{\infty} C_n x^n .$$

$(-R, R)$ – *интервал сходимости*, при $x = -R$ и $x = R$ ряд исследуется дополнительно.

Ряд Фурье

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\,dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\,dx.$$

Если 2π – периодическая функция $f(x)$ кусочно-монотонная и ограниченная, то ряд справа сходится, именно, к этой функции $f(x)$.

Если $f(x)$ – четная функция, то она раскладывается в ряд Фурье только по косинусам, при этом $a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx$, $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) \cos nx\,dx$, $b_n = 0$;

если $f(x)$ – нечетная функция, то она раскладывается только по синусам, при этом $a_0 = 0$, $a_n = 0$, $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) \sin nx\,dx$.

Если 2ℓ – периодическая функция $f(x)$ задана на $[-\ell, \ell]$, то ряд Фурье имеет вид

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{\ell} x + b_n \sin \frac{n\pi}{\ell} x \right),$$

где $a_0 = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x)\,dx$, $a_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \cos \frac{n\pi}{\ell} x\,dx$, $b_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \sin \frac{n\pi}{\ell} x\,dx$.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА

10.1. Числовые ряды. Сходимость и сумма ряда

Рассмотрим числовую последовательность

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

Определение 10.1.1. Бесконечная сумма

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + a_{n+1} + \ldots \qquad (10.1.1)$$

называется *числовым рядом*. Числа $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ называются *членами* ряда, а число a_n – n-ным членом или общим членом ряда.

Кратко числовой ряд обозначается символом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Определение 10.1.2. Сумма конечного числа n первых членов ряда называется n-ной *частичной суммой ряда*

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

Рассмотрим последовательность частичных сумм $\{S_n\}$,

где $S_1 = a_1$,

$S_2 = a_1 + a_2$,

…………..

$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$,

$S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$,

…………………………..

Определение 10.1.3. Числовой ряд (10.1.1) называется *сходящимся*, если последовательность частичных сумм $\{S_n\}$ сходится к некоторому числу S, которое называется *суммой* этого ряда.

Итак, по определению, ряд (10.1.1) сходится к сумме S, если $\lim\limits_{n\to\infty}\{S_n\} = S$. В этом случае пишут

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = S. \qquad (10.1.2)$$

Если предел последовательности $\{S_n\}$ не существует или равен бесконечности, то ряд (10.1.1) называется *расходящимся*.

П р и м е р 10.1.1. Рассмотрим ряд, составленный из членов геометрической прогрессии

$$a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \ldots + a_1 q^{n-1} + \ldots \tag{10.1.3}$$

Сумма ее n первых членов равна

$$S_n = a_1 + a_1 q + \ldots + a_1 q^{n-1} = \frac{a_1\left(1-q^n\right)}{1-q}.$$

1) Если $|q|<1$, то $q^n \to 0$ при $n \to\infty$ и, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_1}{1-q} - \frac{a_1 q^n}{1-q}\right) = \frac{a_1}{1-q}.$$

Значит, в случае $|q|<1$ ряд (10.1.3) сходится и его сумма $S = \dfrac{a_1}{1-q}$.

2) Если $|q|>1$, то $|q|^n \to\infty$ при $n \to \infty$, и тогда $\dfrac{a_1 - a_1 q^n}{1-q} \to \pm\infty$ при $n \to \infty$. Таким образом, при $|q|>1$ ряд (10.1.3) расходится.

3) Если $q=1$, то ряд (10.1.3) имеет вид

$$a_1 + a_1 + \ldots + a_1 + \ldots,$$

в этом случае $S_n = a_1 + a_1 + \ldots + a_1 = na_1$ и $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, т.е. ряд расходится.

4) Если $q=-1$, то ряд (10.1.3) имеет вид

$$a_1 - a_1 + a_1 - a_1 + \ldots + (-1)^{n+1} a_1 + \ldots$$

В этом случае $S_n = \begin{cases} 0 & \text{при } n \text{ четном,} \\ a_1 & \text{при } n \text{ нечетном} \end{cases}$ и предела не имеет, $\Rightarrow$ ряд (10.1.3) расходится.

Таким образом, ряд (10.1.3), составленный из членов геометрической прогрессии, сходится, если $|q|<1$, и расходится при $|q|\ge 1$.

П р и м е р 10.1.2. Исследовать на сходимость ряд

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{(n-1)n} + \ldots = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)n}.$$

Решение. Общий член этого ряда раскладывается на простейшие дроби следующим образом: $\dfrac{1}{(n-1)n} = \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n}$.

Тогда

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{(n-2)(n-1)}+\frac{1}{(n-1)n}=$$

$$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}=1-\frac{1}{n}.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)=1$, то искомый ряд сходится и его сумма $S = 1$.

Суммой двух рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ называется ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n+\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$.

Произведением ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ на действительное число α называется ряд

$$\alpha\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n).$$

Пусть ряд (10.1.1) сходится к сумме S. Перепишем равенство (10.1.2) в виде $S_n+a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots=S$ и обозначим $r_n=a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots$ Это выражение, представляющее собой новый ряд, называется *остатком* ряда (10.1.1). Таким образом, для сходящегося ряда имеет место равенство

$$S=S_n+r_n. \qquad (10.1.4)$$

Справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 10.1.1. Для того чтобы ряд (10.1.1) сходился необходимо и достаточно, чтобы $\lim\limits_{n\to\infty} r_n=0$.

Доказательство теоремы вытекает из определения суммы ряда и равенства (10.1.4).

10.2. Простейшие свойства числовых рядов

Свойство 10.2.1. Сходимость ряда не нарушится, если произвольным образом изменить (переставить, добавить или отбросить) конечное число членов ряда.

Это свойство утверждает, что если ряд был сходящимся (расходящимся) до одной из перечисленных операций, то и после нее он будет сходящимся (расходящимся), хотя сумма его может измениться.

Свойство 10.2.2. Сходящийся ряд можно почленно умножить на любой множитель λ, т.е., если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ имеет сумму S, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n$ имеет сумму λS.

Доказательство. Из того, что $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$, получаем $\lambda S_n = \lambda a_1 + \lambda a_2 + ... + \lambda a_n$. Отсюда $\lim_{n\to\infty} \lambda S_n = \lambda S$.

Свойство 10.2.3. Сходящиеся ряды можно почленно складывать и вычитать, т.е. если даны ряды $a_1 + a_2 + ... + a_n + ... = S_1$ и $b_1 + b_2 + ... + b_n + ... = S_2$, то ряд $(a_1 \pm b_1) + (a_2 \pm b_2) + ... + (a_n \pm b_n) + ...$ сходится к $S_1 \pm S_2$.

Доказательство. В самом деле

$$\lim_{n\to\infty}\left((a_1 \pm b_1) + (a_2 \pm b_2) + ... + (a_n \pm b_n)\right) =$$
$$= \lim_{n\to\infty}(a_1 + a_2 + ... + a_n) \pm \lim_{n\to\infty}(b_1 + b_2 + ... + b_n) = S_1 \pm S_2.$$

Пример 10.2.1. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^n\left(1+\left(\frac{5}{6}\right)^n\right)$.

Решение. $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^n\left(1+\left(\frac{5}{6}\right)^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^{2n}$. Ряды $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^n$ и $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{25}{36}\right)^n$ представляют собой суммы геометрических прогрессий со знаменателями $q_1 = \frac{5}{6} < 1$ и $q_2 = \frac{25}{36} < 1$, т.е. сходятся. Их суммы $S_1 = \frac{a_1}{1-q_1} = \frac{1}{1-\frac{5}{6}} = 6$, $S_2 = \frac{a_2}{1-q_2} = \frac{1}{1-\frac{25}{36}} = \frac{36}{11}$. Тогда сумма всего ряда $S = S_1 + S_2 = 6 + 3\frac{3}{11} = 9\frac{3}{11}$.

10.3. Необходимое условие сходимости ряда. Гармонический ряд

ТЕОРЕМА 10.3.1 (необходимое условие сходимости ряда). Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0. \tag{10.3.1}$$

Доказательство. Пусть S – сумма ряда, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$. Так как $a_n = S_n - S_{n-1}$, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} S_n - \lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0$.

Итак, если ряд сходится, то всегда выполняется условие (10.3.1). Если же условие (10.3.1) не выполнено, то ряд расходится (легко доказывается методом от противного). Это является *достаточным условием* или *признаком расходимости* ряда.

Отметим, что условие (10.3.1) не является достаточным условием сходимости ряда, т.е. из выполнения равенства (10.3.1) не обязательно вытекает сходимость ряда (ряд может сходиться, может расходиться).

Покажем это на примерах.

Пример 10.3.1. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\frac{n+1}{n}$.

Решение. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \ln\frac{n+1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 0$, т.е. необходимое условие выполнено. Тем не менее, этот ряд расходится. Действительно,

$$S_n = \ln\frac{2}{1} + \ln\frac{3}{2} + \ln\frac{4}{3} + \ldots + \ln\frac{n}{n-1} + \ln\frac{n+1}{n} = \ln\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n+1}{n}\right) =$$
$$= \ln(n+1).$$

Отсюда $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \ln(n+1) = \infty$, т.е. ряд расходится.

Пример 10.3.2. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$.

Решение. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$. Ряд сходится, так как $q = \frac{1}{2} < 1$.

Пример 10.3.3. Рассмотрим так называемый *гармонический ряд* $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Для этого ряда необходимое условие сходимости выполнено, так его общий член $\frac{1}{n} \to 0$ при $n \to \infty$. Однако гармонический ряд расходится (в дальнейшем лекционном курсе при помощи интегрального признака Коши будет показано, что обобщенный гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ сходится при $p > 1$ и расходится при $p \le 1$).

10.4. Ряды с положительными членами. Теоремы сравнения

Пусть задан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с положительными членами $a_n \geq 0$. Исследуем вопрос о его сходимости или расходимости.

Так как частичные суммы ряда с положительными членами образуют неубывающую последовательность ($S_1 > S_2 > S_3 > \ldots$), то этот ряд сходится тогда и только тогда, когда последовательность $\{S_n\}$ его частичных сумм ограничена.

Т Е О Р Е М А 10.4.1 (признак сравнения 1). Пусть для рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ имеет место неравенство

$$0 < a_n \leq b_n \tag{10.4.1}$$

(для всех n или начиная с некоторого N). Тогда:

1) если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, то сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$;

2) если расходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, то расходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Признак утверждает, что при выполнении условия (10.4.1) из сходимости ряда с большими членами вытекает сходимость с меньшими членами, а из расходимости ряда с меньшими членами вытекает расходимость ряда с большими членами.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

1) Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится и S – его сумма. Из соотношения (10.4.1) следует неравенство

$$S_n' \leq S_n'' \leq S,$$

где S_n' – частичная сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$;

S_n'' – частичная сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Из этого неравенства вытекает ограниченность сверху частичных сумм S_n' $(S_n' \le S)$ ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. В таком случае неубывающая последовательность $\left\{S_n'\right\}$ имеет предел, т.е. ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, и его сумма $\sigma \le S$.

2) Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится. Если бы при этом ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходился, то по только что доказанному $\left(a_n \le b_n\right)$ должен сходиться и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, что противоречит условию. Значит, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ расходится.

При выполнении условий (10.4.1) будем говорить, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ является мажорантным рядом или *мажорантой* (оценкой) для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Пример 10.4.1. Ряд $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+...\frac{1}{n^n}+...$ сходится, так как его члены не больше соответствующих членов ряда $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+...\frac{1}{2^n}+...$ $\left(\frac{1}{n^n} \le \frac{1}{2^n}\right)$. Последний ряд сходится, так как его члены, начиная со второго, образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $q=\frac{1}{2}<1$. Сумма этого ряда $S=1+\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{2}}=1{,}5$. Следовательно, в силу теоремы 10.4.1 данный ряд тоже сходится, причем его сумма $\sigma < 1{,}5$.

Пример 10.4.2. Ряд $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...\frac{1}{\sqrt{n}}+...$ расходится, так как его члены, начиная со второго, больше соответствующих членов гармонического ряда $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...\frac{1}{n}+...$, который расходится.

З а м е ч а н и е 10.4.1. Признак сравнения 1 справедлив только для рядов с положительными членами. Он остается в силе, если некоторые члены 1-го или 2-го ряда – нули. Однако этот признак перестает быть верным, если среди членов ряда есть отрицательные числа.

З а м е ч а н и е 10.4.2. Теорема 10.4.1 справедлива и в том случае, если неравенство (10.4.1) начинает выполняться лишь для $n \geq \mathbb{N}$, а не для всех $n = 1, 2, 3, \ldots$

Т Е О Р Е М А 10.4.2 (предельный признак сравнения 2). Пусть члены рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ положительны и

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = A > 0, \quad A \neq \infty. \qquad (10.4.2)$$

Тогда оба ряда сходятся или расходятся одновременно.

П р и м е р 10.4.3. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{n^3+3}$.

Решение. Так как $a_n = \frac{2n+3}{n^3+3} = \frac{\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^3}}{1+\frac{3}{n^3}} = 0\left(\frac{1}{n^2}\right)$ при $n \to \infty$, то

сравним этот ряд с обобщенным гармоническим рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ($p = 2 > 1$),

который сходится. Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n+3}{n^3+1} \div \frac{1}{n^2}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(2n+3)n^2}{n^3+1} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^3+3n^2}{n^3+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2+\frac{3}{n}}{1+\frac{1}{n^3}} = 2$, то по признаку сравнения 2 исходный ряд

сходится.

П р и м е р 10.4.4. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathrm{tg}\frac{1}{n}$.

Решение. Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\mathrm{tg}\frac{1}{n} \div \frac{1}{n}\right) = 1$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится, то

расходится и данный ряд по признаку сравнения 2.

10.5. Признаки Даламбера и Коши

Рассмотрим еще три достаточных признака для исследования числовых рядов с положительными членами.

Т Е О Р Е М А 10.5.1 (признак Даламбера). Если в ряде

$$a_1 + a_2 + ... + a_n + a_{n+1} + ... \tag{10.5.1}$$

отношение $(n+1)$-го члена к n-ному при $n \to \infty$ имеет конечный предел

$$p = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}, \tag{10.5.2}$$

то 1) ряд сходится, если $p < 1$;

2) ряд расходится, если $p > 1$.

(В случае $p = 1$ ответа на вопрос о сходимости или расходимости ряда теорема не дает, нужны дополнительные исследования.)

Д о к а з а т е л ь с т в о.

1) Пусть $p < 1$. Рассмотрим число q, удовлетворяющее соотношению $p < q < 1$.

Из определения предела следует, что $\forall \varepsilon = q - p > 0 \;\exists N$, что для всех $n \geq N$ будет иметь место $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - p\right| < \varepsilon = q - p \;\Rightarrow\; \frac{a_{n+1}}{a_n} - p < q - p \;\Rightarrow$ $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q$. Запишем это неравенство для различных значений n, начиная с номера N.

$$\begin{aligned} &a_{N+1} < qa_N, \\ &a_{N+2} < qa_{N+1} < q^2 a_N, \\ &a_{N+3} < qa_{N+2} < q^3 a_N, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{10.5.3}$$

Рассмотрим теперь три ряда:

$$a_1 + a_2 + ... + a_{N-1} + a_N + a_{N+1} + a_{N+2} + ... \quad \text{(исходный ряд)}$$

$$a_N + a_{N+1} + a_{N+2} + ... \tag{10.5.4}$$

$$a_N + qa_N + q^2 a_N + ... \tag{10.5.5}$$

Ряд (10.5.5) есть сумма геометрической прогрессии с $q < 1$, следовательно, он сходится. Члены ряда (10.5.4) меньше соответствующих членов ряда (10.5.5) ввиду выполнения неравенств (10.5.3), поэтому он сходится.

Но ряд (10.5.1) получается добавлением к сходящемуся ряду (10.5.4) конечного числа членов $(N-1)$, поэтому он тоже сходится.

2) Пусть $p > 1$. Тогда из равенства $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = p$ (где $p > 1$) следует, что, начиная с некоторого номера N, т.е. для $n \geq N$ $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$. Следовательно, $u_{n+1} > u_n$ для всех $n \geq N$. Но это означает, что члены ряда возрастают, начиная с номера $N + 1$, и поэтому общий член ряда не стремится к нулю. Следовательно, ряд расходится.

Замечание 10.5.1. Ряд будет расходиться и в том случае, когда $p = \infty$. Это следует из того, что если $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \infty$, то, начиная с некоторого номера $n = N$, будет иметь место неравенство $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ или $a_{n+1} > a_n \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$.

Пример 10.5.1. Исследовать сходимость ряда

$$1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n} + \ldots$$

Решение. Здесь $a_n = \dfrac{1}{n!}$, $a_{n+1} = \dfrac{1}{(n+1)!}$. Следовательно,

$$p = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{(n+1)!} \div \frac{1}{n!}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n(n+1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0 < 1. \text{ Ряд сходится.}$$

Пример 10.5.2. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{n}$.

Решение. $p = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2^{n+1}}{n+1} \div \dfrac{2^n}{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{n+1}\cdot n}{(n+1)\cdot 2^n} = 2\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1} = 2 > 1.$

Ряд расходится.

Замечание 10.5.2. Если $p = 1$, но отношение $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ для всех номеров n, начиная с некоторого, больше единицы, то ряд расходится. Это следует из того, что если $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, то $a_{n+1} > a_n$ и общий член не стремится к нулю, когда $n \to \infty$.

П р и м е р 10.5.3. Исследовать сходимость ряда $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}...+\frac{n}{n+1}+...$

Решение.

$$p=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}\div\frac{n}{n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n+1)}{(n+2)n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}=1.$$

В данном случае ряд расходится, так как $\frac{a_{n+1}}{a_n}>1$ для всех n:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\left(n^2+2n\right)+1}{n^2+2n}=1+\frac{1}{n^2+2n}>1.$$

Т Е О Р Е М А 1 0 . 5 . 2 (радикальный признак Коши). Если для ряда с положительными членами (10.5.1) существует конечный предел $p=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$, то

1) ряд сходится, если $p<1$;
2) ряд расходится, если $p>1$.

Как и в признаке Даламбера, случай $p=1$ требует дополнительного исследования.

Доказательство практически ничем не отличается от доказательства теоремы 10.5.1, поэтому его приводить не будем.

П р и м е р 10.5.4. Исследовать сходимость ряда

$$\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{7}\right)^3+...+\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n+...$$

Решение. Применим радикальный признак Коши:

$$p=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}<1.\text{ Ряд сходится.}$$

Т Е О Р Е М А 1 0 . 5 . 3 (интегральный признак Коши). Пусть члены ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ имеют вид $a_n=f(n)$, где $f(x)$ – неотрицательная монотонно убывающая функция на промежутке $[a,+\infty)$, $a\geq 1$. Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится (расходится) тогда и только тогда, когда сходится (расходится) несобственный интеграл $\int\limits_a^{\infty}f(x)dx$.

Пример 10.5.5. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$.

Решение. Положим $f(x)=\frac{1}{x\ln x}$. Функция $f(x)$ непрерывна и монотонно убывает на $[2,+\infty)$. Так как несобственный интеграл

$$\int_2^{\infty} f(x)dx=\int_2^{\infty}\frac{dx}{x\ln x}=\lim_{b\to\infty}\int_2^b\frac{d(\ln x)}{\ln x}=\lim_{b\to\infty}\left|\ln x\right|\Big|_2^b=\lim_{b\to\infty}\left|\ln b\right|-\ln\ln 2=\infty,$$

т.е. расходится, то в соответствии с интегральным признаком Коши расходится и заданный ряд.

Пример 10.5.6. Исследовать на сходимость обобщенный гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$. Эта функция удовлетворяет всем условиям теоремы 10.5.3. Рассмотрим несобственный интеграл

$$I=\int_1^{\infty} f(x)dx=\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^p}=\lim_{b\to\infty}\int_1^b x^{-p}dx=\lim_{b\to\infty}\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Big|_1^b.$$

Рассмотрим три случая:

1) пусть $p>1 \Rightarrow p-1>0$, тогда

$$I=\lim_{b\to\infty}\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Big|_1^b=\frac{1}{1-p}\lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{b^{p-1}}-1\right)=\frac{1}{1-p}(0-1)=\frac{1}{p-1},$$ т.е

интеграл конечен и, следовательно, ряд сходится.

2) пусть $p<1 \Rightarrow$ 1-$p>0$ и

$$I=\lim_{b\to\infty}\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Big|_1^b=\frac{1}{1-p}\left(\lim_{b\to\infty}b^{-p+1}-1\right)=\frac{1}{1-p}(\infty-1)=\infty,$$ т.е.

интеграл расходится и, следовательно, ряд расходится.

3) если $p=1$, рассматриваем

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x}=\lim_{b\to\infty}\int_1^b\frac{dx}{x}=\lim_{b\to\infty}\ln|x|\Big|_1^b=\lim_{b\to\infty}\ln|b|-0=\infty,$$ ряд расходится.

Таким образом, ряд Дирихле $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ сходится, если $p>1$, и расходится, если $p\le 1$.

Заметим, что ни признак Даламбера, ни радикальный признак Коши не решают вопрос о сходимости этого ряда, так как соответствующие пределы равны 1.

Обобщенный гармонический ряд (ряд Дирихле), а также ряд, составленный из членов геометрической прогрессии, часто используются как «эталонные» ряды при применении обоих признаков сравнения.

10.6. Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница

До сих пор мы рассматривали ряды, члены которых положительны. Сейчас будем рассматривать ряды, члены которых имеют чередующиеся знаки, т.е. ряды вида

$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots,$ где $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ – положительны.

Т Е О Р Е М А 10.6.1 (Лейбница). Если в знакочередующемся ряде

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n+1} a_n + \ldots \qquad (10.6.1)$$

члены таковы, что выполняются два условия:

1) $a_1 > a_2 > a_3 > \ldots$ (10.6.2)

2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0,$ (10.6.3)

то ряд (10.6.1) сходится, его сумма положительна и не превосходит первого члена.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим сумму $n = 2m$ первых членов ряда $S_{2m} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots + (a_{2m-1} - a_{2m})$.

Из условия (10.6.2) следует, что выражение в каждой скобке положительно. Следовательно, сумма S_{2m} положительна и возрастает с возрастанием m. Запишем теперь эту же сумму так:

$$S_{2m} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \ldots - (a_{2m-2} - a_{2m-1}) - a_{2m}.$$

В силу условия (10.6.2) каждая из скобок положительна. Поэтому в результате вычитания этих скобок из a_1 мы получим число, меньшее a_1, т.е. $S_{2m} < a_1$.

Таким образом, мы установили, что S_{2m} при возрастании m возрастает и ограничена сверху. Отсюда следует, что $\exists$

$$\lim_{m\to\infty} S_{2m} = S, \qquad \text{причем} \quad 0 < S < a_1.$$

Докажем теперь, что «нечетные» частичные суммы также стремятся к пределу S. Очевидно,

$$S_{2m+1} = S_{2m} + a_{2m+1}.$$

Так как по условию (10.6.3) $\lim\limits_{m\to\infty} a_{2m+1} = 0$, то

$$\lim_{m\to\infty} S_{2m+1} = \lim_{m\to\infty} (S_{2m} + a_{2m+1}) = \lim_{m\to\infty} S_{2m} + \lim_{m\to\infty} a_{2m+1} = S + 0 = S.$$

Тем самым мы доказали, что $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ как при четном n, так и при нечетном. Следовательно, ряд (10.6.1) сходится.

Замечание 10.6.1. Теорема Лейбница справедлива, если неравенства (10.6.2) выполняются, начиная с некоторого N.

Пример 10.6.1. Ряд $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$ сходится, так как

1) $1>\frac{1}{2}>\frac{1}{3}>\frac{1}{4}>\ldots;$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$

Пример 10.6.2. Ряд $1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n!}+\ldots$ сходится по теореме Лейбница, так как

1) $1>\frac{1}{2!}>\frac{1}{3!}>\frac{1}{4!}>\ldots;$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n!}=0.$

Рассмотрим теперь остаток ряда $r_n = a_{n+1}-a_{n+2}+\ldots$, представляющий собой новый знакочередующийся ряд, удовлетворяющий условиям теоремы Лейбница. Тогда его сумма на основании теоремы удовлетворяет неравенству

$$|r_n| \le |a_{n+1}|. \tag{10.6.4}$$

Ряд, удовлетворяющий условиям теоремы (10.6.1), называют рядом Лейбница. Формула (10.6.4) дает оценку остатка ряда Лейбница.

Пример 10.6.3. Установить сходимость ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+n^3}$ и найти его сумму с точностью до 0,01.

Решение. Данный ряд сходится, как ряд Лейбница. Согласно неравенству (10.6.4) имеем $|r_n| \le |a_{n+1}| = \frac{1}{1+(n+1)^3} \le 0{,}01$. Неравенство $\frac{1}{1+(n+1)^3} \le \frac{1}{100}$ справедливо, начиная с n = 4, т.е. сумма ряда

$S \cong S_4 = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{9}-\frac{1}{28}+\frac{1}{65}=0{,}59.$

10.7. Знакопеременные ряды. Абсолютно и условно сходящиеся ряды

Ряд называется знакопеременным, если среди его членов имеются как положительные, так и отрицательные числа.

Рассмотренные в п.10.6 знакочередующиеся ряды являются, очевидно, частным случаем знакопеременных рядов.

Дадим один важный достаточный признак сходимости знакопеременного ряда.

Т Е О Р Е М А 10.7.1. Если знакопеременный ряд

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \qquad (10.7.1)$$

таков, что ряд, составленный из абсолютных величин его членов,

$$|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| + \ldots \qquad (10.7.2)$$

сходится, то и данный знакопеременный ряд также сходится.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть s_n и σ_n – суммы n первых членов рядов (10.7.1) и (10.7.2).

Пусть, далее, S_n^+ – сумма всех положительных, а S_n^- – сумма абсолютных величин всех отрицательных членов среди первых n членов ряда (10.7.1); тогда

$$s_n = S_n^+ - S_n^-, \qquad \sigma_n = S_n^+ + S_n^-.$$

По условию $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma$; S_n^+ и S_n^- – положительные возрастающие величины, меньшие σ. Следовательно, $\exists \lim\limits_{n\to\infty} S_n^+ = S^+$ и $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^- = S^-$. Из соотношения $s_n = S_n^+ - S_n^-$ следует, что

$$\exists \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S_n^+ - \lim_{n\to\infty} S_n^- = S^+ - S^-,$$

т.е. знакопеременный ряд (10.7.1) сходится.

Доказанная теорема дает возможность судить о сходимости некоторых знакопеременных рядов. Исследование вопроса о сходимости сводится в этом случае к исследованию рядов с положительными членами.

П р и м е р 10.7.1. Исследовать сходимость ряда

$$\frac{\sin\alpha}{1^3} + \frac{\sin 2\alpha}{2^3} + \frac{\sin 3\alpha}{3^3} + \ldots + \frac{\sin n\alpha}{n^3} + \ldots \qquad (10.7.3)$$

где α – любой угол (в зависимости от α $\sin n\alpha$ может иметь любой знак).

Решение. Рассмотрим два ряда:

$$\left|\frac{\sin\alpha}{1^3}\right|+\left|\frac{\sin 2\alpha}{2^3}\right|+\left|\frac{\sin 3\alpha}{3^3}\right|+\ldots+\left|\frac{\sin n\alpha}{n^3}\right|+\ldots \qquad (10.7.4)$$

и

$$\frac{1}{1^3}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\ldots+\frac{1}{n^3}+\ldots \qquad (10.7.5)$$

Ряд (10.7.5) сходится, как ряд Дирихле ($p = 3 > 1$). Члены ряда (10.7.4) не больше соответственных членов ряда (10.7.5) (так как $|\sin n\alpha| \le 1$); следовательно, ряд (10.7.4) тоже сходится по первому признаку сравнения. Но тогда в силу доказанной теоремы данный знакопеременный ряд тоже сходится.

Заметим, что этот признак сходимости является только достаточным признаком сходимости, но не необходимым: существуют такие знакопеременные ряды, которые сами сходятся, но ряды, составленные из абсолютных величин их членов, расходятся.

Пример 10.7.2. Ряд $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots$ сходится по теореме Лейбница, хотя ряд из абсолютных величин его членов $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$ является гармоническим и, как известно, расходится.

В связи с этим полезно ввести понятие абсолютной и условной сходимости знакопеременных рядов и на основе этих понятий классифицировать знакопеременные ряды.

Определение 10.7.1. Знакопеременный ряд

$$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots \qquad (10.7.6)$$

называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд

$$|a_1|+|a_2|+|a_3|+\ldots+|a_n|+\ldots \qquad (10.7.7)$$

Если же знакопеременный ряд (10.7.6) сходится, а ряд (10.7.7) расходится, то данный ряд (10.7.6) называется *условно*, или неабсолютно, сходящимся рядом.

Таким образом, ряд $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$, рассмотренный в примере 10.7.2, условно сходящийся, а ряд (10.7.3) абсолютно сходящийся.

П р и м е р 10.7.3. Знакопеременный ряд

$$1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n!}+\ldots$$

есть ряд абсолютно сходящийся, так как ряд из абсолютных величин его

$$1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\ldots,$$

как было показано в п.10.5 при помощи признака Даламбера, сходится.

10.8. Функциональные ряды. Область сходимости

Ряд $u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots$ называется *функциональным*, если его члены являются функциями от x.

Рассмотрим функциональный ряд

$$u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots \tag{10.8.1}$$

Давая x определенные числовые значения, мы получаем различные числовые ряды, которые могут оказаться сходящимися или расходящимися.

О п р е д е л е н и е 10.8.1. Совокупность тех значений x, при которых ряд сходится, называется *областью сходимости* этого ряда.

Очевидно, что в области сходимости ряда его сумма является некоторой функцией от x. Поэтому сумму функционального ряда обозначают через $S(x)$.

П р и м е р 10.8.1. Рассмотрим функциональный ряд

$$1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots$$

Этот ряд сходится для всех значений x в интервале (-1, 1), так как он составлен из членов геометрической прогрессии со знаменателем $q = x$ $\left(|q|=|x|<1\right)$, его сумма $S=\dfrac{1}{1-q}$, т.е. $S(x)=\dfrac{1}{1-x}$. Таким образом

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots$$

Обозначим через $S_n(x)$ сумму первых n членов ряда (10.8.1). Если этот ряд сходится и сумма его равна $S(x)$, то

$$S(x)=S_n(x)+r_n(x),$$

где $r_n(x)$ – остаток ряда. Очевидно,

$$r_n(x)=u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\ldots$$

Для всех значений x из области сходимости ряда имеет место соотношение $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = S(x)$, поэтому

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x) = \lim_{n\to\infty}\left(S(x) - S_n(x)\right) = 0,$$

т.е. остаток $r_n(x)$ сходящегося ряда стремится к нулю при $n \to \infty$.

Определение 10.8.2. Функциональный ряд

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots \qquad (10.8.1)$$

называется *мажорируемым* в некоторой его области изменения, если $\exists$ такой сходящийся числовой ряд

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \qquad (10.8.2)$$

с положительными членами, что для всех значений x из данной области выполняются соотношения

$$|u_1(x)| \le a_1, \quad |u_2(x)| \le a_2, \quad \ldots, \quad |u_n(x)| \le a_n, \quad \ldots \qquad (10.8.3)$$

Например, ряд $\dfrac{\cos x}{1} + \dfrac{\cos 2x}{2^2} + \dfrac{\cos 3x}{3^2} + \ldots + \dfrac{\cos nx}{n^2} + \ldots$ является мажорируемым на (-∞, ∞). Действительно, для $\forall\, x$ выполняется соотношение (так как $|\cos nx| \le 1$)

$$\frac{|\cos nx|}{n^2} \le \frac{1}{n^2} \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

а ряд $1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \ldots$ сходится, как обобщенный гармонический ряд (ряд Дирихле), так как $p = 2 > 1$.

Непосредственно из определения следует, что ряд, мажорируемый в некоторой области, абсолютно сходится во всех точках этой области.

Пусть имеем ряд из непрерывных функций

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots,$$

сходящийся на некотором $[a, b]$.

Как известно, сумма конечного числа непрерывных функций есть функция непрерывная. Для суммы ряда, состоящего из бесконечного числа слагаемых, это свойство не сохраняется. Для мажорируемых рядов справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 10.8.1. Сумма ряда непрерывных функций, мажорируемых на $[a, b]$, есть функция, непрерывная на этом отрезке.

Мажорируемые ряды можно почленно интегрировать и дифференцировать, об этом подробнее в следующем разделе.

10.9. Степенные ряды. Теорема Абеля. Интервал и радиус сходимости степенных рядов

Функциональный ряд вида

$$C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \ldots + C_n x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n \tag{10.9.1}$$

или вида

$$C_0 + C_1(x-a) + C_2(x-a)^2 + \ldots + C_n(x-a)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(x-a)^n, \tag{10.9.2}$$

членами которого являются степенные функции, называется степенным. Действительные числа C_n называются коэффициентами степенного ряда. Степенной ряд (10.9.1) всегда сходится, по крайней мере, при $x = 0$, а ряд (10.9.2) при $x = a$. Ряд (10.9.1) называют рядом по степеням x, а ряд (10.9.2) – по степеням $(x - a)$. Так как заменой $x - a = X$ ряд (10.9.2) приводится к виду (10.9.1), то в дальнейшем будем рассматривать степенные ряды (10.9.1).

ТЕОРЕМА 10.9.1 (теорема Абеля).

1. Если степенной ряд (10.9.1) сходится при некотором значении $x_0 \neq 0$, то он абсолютно сходится при всяком значении x, удовлетворяющему неравенству $|x| < |x_0|$;

2. если ряд (10.9.1) расходится при некотором значении x_1, то он расходится при всяком x, для которого $|x| > |x_1|$.

Доказательство. Так как по условию числовой ряд

$$C_0 + C_1 x_0 + C_2 x_0^2 + \ldots + C_n x_0^n + \ldots \tag{10.9.3}$$

сходится, то из необходимого признака сходимости следует, что его общий член $C_n x_0^n \to 0$ при $n \to \infty$, а это значит, что $\exists\ M > 0$, что все члены ряда по абсолютной величине меньше M, т.е. $\left|C_n x_0^n\right| < M$ для всех $n = 0, 1, 2, \ldots$

Перепишем ряд (10.9.1) в виде

$$C_0 + C_1 x_0\left(\frac{x}{x_0}\right) + C_2 x_0^2\left(\frac{x}{x_0}\right)^2 + \ldots + C_n x_0^n\left(\frac{x}{x_0}\right)^n + \ldots \tag{10.9.4}$$

и рассмотрим ряд из абсолютных величин его членов:

$$|C_0| + |C_1 x_0|\left|\frac{x}{x_0}\right| + \left|C_2 x_0^2\right|\left|\frac{x}{x_0}\right|^2 + \ldots + \left|C_n x_0^n\right|\left|\frac{x}{x_0}\right|^n + \ldots \tag{10.9.5}$$

Члены этого ряда меньше соответствующих членов ряда

$$M + M\left|\frac{x}{x_0}\right| + M\left|\frac{x}{x_0}\right|^2 + \ldots + M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n + \ldots \qquad (10.9.6)$$

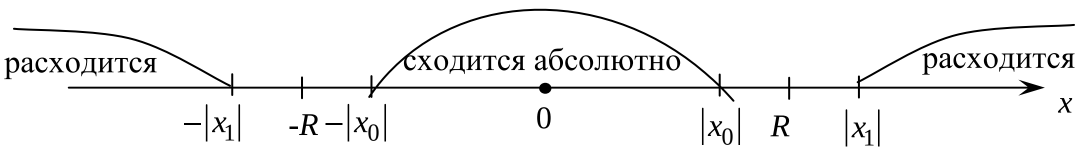
Последний ряд представляет собой сумму членов геометрической прогрессии со знаменателем $q = \left|\frac{x}{x_0}\right|$ и, следовательно, сходится, когда $q < 1$, т.е. для $|x| < |x_0|$.

Тогда по первому признаку сравнения ряд (10.9.5) тоже сходится, а это значит, что ряд (10.9.4) или (10.9.1) сходится абсолютно.

Пусть теперь ряд (10.9.1) расходится в точке x_1. Предположим, что в некоторой точке x_2, такой, что $|x_2| > |x_1|$, ряд сходится. Тогда по только что доказанному он должен сходиться и в точке x_1, что противоречит условию. Значит, для всех x, таких, что $|x| > |x_1|$, ряд расходится.

Таким образом, теорема полностью доказана.

Теорема Абеля позволяет судить о расположении точек сходимости и расходимости степенного ряда. Действительно, если x_0 есть точка сходимости, то весь интервал $(-|x_0|, |x_0|)$ заполнен точками абсолютной сходимости (из $|x| < |x_0| \;\Rightarrow\; -|x_0| < x < |x_0|$). Если же x_1 – точка расходимости, то вся бесконечная полупрямая вправо от точки $|x_1|$ и вся полупрямая влево от точки $-|x_1|$ состоят из точек расходимости (из $|x| > |x_1| \;\Rightarrow\; x < -|x_1|$, $x > |x_1|$).



Из этого можно заключить, что $\exists$ такое число R, что при $|x| < R$ ($-R < x < R$) мы имеем точки абсолютной сходимости, а при $|x| > R$ ($x < -R$, $x > R$) – точки расходимости.

Таким образом, мы доказали следующую теорему.

ТЕОРЕМА 10.9.2. Областью сходимости степенного ряда является интервал с центром в начале координат.

Определение 10.9.1. *Интервалом сходимости* степенного ряда называется такой интервал $(-R,\ R)$, что для всех точек x, лежащих внутри этого интервала, ряд сходится и притом абсолютно, а для точек x, лежащих вне его, ряд расходится. Число R называется *радиусом сходимости* степенного ряда.

На концах интервала (т.е. при $x = R$ и при $x = -R$) вопрос о сходимости или расходимости данного ряда решается индивидуально для каждого конкретного ряда.

Замечание 10.9.1. Интервалом сходимости ряда (10.9.2) по степеням $(x-a)$ является интервал $(a-R,\ a+R)$ с центром в точке a, так как из $|x-a|<R \quad \Rightarrow \quad a-R<x<a+R$.

Укажем способ определения радиуса сходимости степенного ряда.

Пусть имеем ряд

$$C_0+C_1x+C_2x^2+...+C_nx^n+... \tag{10.9.1}$$

Рассмотрим ряд из абсолютных величин его членов

$$|C_0|+|C_1x|+|C_2x^2|+...+|C_nx^n|+... \tag{10.9.7}$$

Для определения сходимости этого ряда (с положительными членами!) применим признак Даламбера.

$$p=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_{n+1}x^{n+1}}{C_nx^n}\right|=|x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_{n+1}}{C_n}\right|=L|x|,$$

где $L=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{C_{n+1}}{C_n}\right|$. Тогда ряд (10.9.7) сходится, если $p<1$, т.е

$L\cdot|x|<1 \quad \Rightarrow \quad |x|<\frac{1}{L}$, и расходится, если $p>1$, т.е. $L\cdot|x|>1 \quad \Rightarrow$ $|x|>\frac{1}{L}$. Следовательно, ряд (10.9.1) сходится абсолютно при $|x|<\frac{1}{L}$. Если же $|x|>\frac{1}{L}$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=|x|L>1$, и ряд (10.9.7) расходится, причем его общий член не стремится к нулю. Но тогда и общий член ряда (10.9.1) не стремится к нулю, а это означает, что этот степенной ряд расходится (при $|x|>\frac{1}{L}$).

Из предыдущего следует, что интервал $\left(-\frac{1}{L},\frac{1}{L}\right)$ есть интервал сходимости степенного ряда (10.9.1), т.е.

$$R=\frac{1}{L}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_n}{C_{n+1}}\right|.$$

Аналогичным образом, используя радикальный признак Коши, можно получить еще одну формулу для определения радиуса сходимости.

$$R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|C_n|}}.$$

Отметим, что в обеих формулах C_n – коэффициент при x^n, а не общий член ряда $a_n=C_nx^n$.

Пример 10.9.1. Определить область сходимости ряда

$$\frac{2x}{1}-\frac{(2x)^2}{2}+\frac{(2x)^3}{3}-\ldots.$$

Решение: Рассмотрим ряд из абсолютных величин:

$$\frac{2|x|}{1}+\frac{2^2}{2}|x|^2+\frac{2^3}{3}|x|^3+\ldots+\frac{2^n}{n}|x|^n+\ldots$$

$|C_n|=\dfrac{2^n}{n}$, $|C_{n+1}|=\dfrac{2^{n+1}}{n+1}$. Тогда $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{C_n}{C_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n}{n}\cdot\dfrac{n+1}{2^{n+1}}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n}=$ $=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{1}{2}$. Таким образом, интервал сходимости $\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$. Исследуем сходимость на концах интервала. При $x=-\dfrac{1}{2}$ получается ряд:

$$\frac{2\left(-\frac{1}{2}\right)}{1}-\frac{2^2\left(-\frac{1}{2}\right)^2}{2}+\frac{2^3\left(-\frac{1}{2}\right)^3}{3}-\ldots \Rightarrow -1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\ldots-\frac{1}{n}-\ldots$$ или

$-\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\ldots+\dfrac{1}{n}+\ldots\right)$, который расходится, как гармонический ряд.

Пусть, далее $x=\dfrac{1}{2}$, тогда из данного степенного ряда получаем знакочередующийся ряд $\dfrac{2\cdot\frac{1}{2}}{1}-\dfrac{\left(2\cdot\frac{1}{2}\right)^2}{2}+\dfrac{\left(2\cdot\frac{1}{2}\right)^3}{3}-\ldots \Rightarrow 1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\ldots$, который сходится по теореме Лейбница. Ряд абсолютных величин $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\ldots+\dfrac{1}{n}+\ldots$, как известно, расходится.

Ответ: $\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ – при $x=\dfrac{1}{2}$ ряд условно сходится.

П р и м е р 10.9.2. Определить область сходимости ряда

$$x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$$

Решение: $C_n=\frac{1}{n!}$, $C_{n+1}=\frac{1}{(n+1)!}$. $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{C_n}{C_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n!}\cdot(n+1)!=$ $=\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)=\infty$. Таким образом, $(-\infty, +\infty)$ – область сходимости.

П р и м е р 10.9.3. Определить область сходимости ряда

$$1+x+(2x)^2+(3x)^3+\ldots+(nx)^n+\ldots$$

Решение: $a_n=(nx)^n=n^n\cdot x^n \quad\Rightarrow\quad C_n=n^n$. Применим формулу $R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|C_n|}}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^n}}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} n}=0$. Значит, ряд расходится при всех значениях x, кроме $x = 0$.

З а м е ч а н и е 10.9.2. Если имеется ряд не по степеням x^n, а, например, по степеням x^{2n}, x^{3n+1} и т.д., то формулы для нахождения радиуса сходимости R применять нельзя, а нужно рассмотреть ряд из абсолютных величин соответствующих членов и применить сам признак Даламбера или признак Коши.

П р и м е р 10.9.4. Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{4^n}.$$

Решение: Рассмотрим ряд из абсолютных величин $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|x|^{2n}}{4^n}$ и применим признак Даламбера:

$$p=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{2(n+1)}}{4^{n+1}}\cdot\frac{4^n}{|x|^{2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{2n+2-2n}}{4}=\frac{|x|^2}{4}=\frac{x^2}{4}.$$

Ряд сходится, причем абсолютно, если $p < 1$, т.е. $\frac{x^2}{4}<1 \quad\Rightarrow\quad x^2<4 \quad\Rightarrow$ $|x|<2$, $-2<x<2$ – интервал сходимости, $R = 2$.

Если бы мы ошибочно подумали, что $C_n=\frac{1}{4^n}$, то по формуле

$$R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|C_n|}}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{4^n}}}=4.$$

Исследуем сходимость на концах интервала. Пусть $x = 2$, тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}}{4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 1 = 1+1+1+\ldots$, $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 1 = 1 \neq 0 \Rightarrow$ ряд расходится.

Пусть $x = -2$, имеем ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^{2n}}{4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 1$ такой же, как и при $x = 2$.

Таким образом, $(-2, 2)$ – область сходимости данного ряда.

10.10. Интегрирование и дифференцирование степенных рядов

ТЕОРЕМА 10.10.1. Степенной ряд

$$C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \ldots + C_n x^n + \ldots \tag{10.10.1}$$

мажорируем на любом отрезке $[-\rho, \rho]$, целиком лежащем внутри его интервала сходимости $(-R, R)$.

Доказательство. По условию $\rho < R$, а потому числовой ряд (с положительными членами)

$$|C_0| + |C_1|\rho + |C_2|\rho^2 + \ldots + |C_n|\rho^n + \ldots \tag{10.10.2}$$

сходится. Но при $|x| < \rho$ члены ряда (10.10.1) по абсолютной величине не больше соответствующих членов ряда (10.10.2). Следовательно, ряд (10.10.1) мажорируем на $[-\rho, \rho]$.

Следствие 1. На всяком отрезке, целиком лежащем внутри интервала сходимости, сумма степенного ряда есть непрерывная функция.

Следствие 2. Если пределы интегрирования α и β лежат внутри интервала сходимости степенного ряда, то интеграл от суммы ряда равен сумме интегралов от членов ряда, так как область интегрирования можно заключить в $[-\rho, \rho]$, где ряд мажорируем.

Следствие 3. Если степенной ряд

$$S(x) = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \ldots + C_n x^n + \ldots \tag{10.10.1}$$

имеет интервал сходимости $(-R, R)$, то ряд

$$\varphi(x) = C_1 + 2C_2 x + 3C_3 x^2 + \ldots + nC_n x^{n-1} + \ldots, \tag{10.10.3}$$

полученный почленным дифференцированием ряда (10.10.1), имеет тот же интервал сходимости $(-R, R)$, при этом

$$\varphi(x) = S'(x), \text{ если } |x| < R.$$

Ряд (10.10.3) снова можно дифференцировать и продолжать так сколь угодно раз, при этом интервал сходимости не изменяется.

10.11. Ряды Тейлора и Маклорена. Условия разложения функции в ряд Тейлора

Определение 10.11.1. Пусть функция $f(x)$ в некоторой окрестности точки a имеет производные всех порядков. Степенной ряд по степеням $(x-a)$

$$f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \qquad (10.11.1)$$

называется *рядом Тейлора* функции $f(x)$ в точке a. Если $a=0$, то ряд

$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots$ называется *рядом Маклорена*.

Эти ряды широко используются для получения приближения $f(x)$ в окрестности точки $x=a$. Заметим, что ряд (10.11.1), составленный для функции $f(x)$, может расходиться или сходиться не к функции $f(x)$. Например, функция $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{если } x\neq 0;\\ 0, & \text{если } x=0\end{cases}$ в точке $a=0$ имеет производные всех порядков, равные нулю. Поэтому ее ряд Маклорена имеет вид $0+0x+0x^2+\ldots$, который сходится, но не к нашей функции $f(x)$, не равной нулю ни в какой точке $x\neq 0$.

Представляет интерес тот случай, когда ряд Тейлора функции $f(x)$ сходится к $f(x)$ в некоторой окрестности точки a.

Из ряда Тейлора (10.11.1) следует, что его n-й частичной суммой является многочлен Тейлора

$$P_n(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Отсюда, если ряд Тейлора сходится к функции $f(x)$, справедливо равенство

$$f(x)=P_n(x)+r_n(x), \qquad (10.11.2)$$

где $r_n(x)$ – остаток ряда. Для сходимости ряда Тейлора (10.11.1) к функции $f(x)$ необходимо и достаточно выполнения условия

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x)=0, \qquad (10.11.3)$$

где x принадлежит некоторой окрестности точки a.

Разложим функцию по формуле Тейлора:

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+$$

$$+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_n(x), \qquad (10.11.4)$$

где остаточный член представим одним из следующих видов:

$R_n(x)=f^{(n+1)}(C)\dfrac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}=f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))\dfrac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$ – форма Лагранжа (C находится между a и x, $0<\theta<1$);

$$R_n(x)=0\left(|x-a|^n\right) \text{ – форма Пеано.}$$

Из формулы (10.11.4) и равенств (10.11.2) и (10.11.3) вытекает, что остаток ряда Тейлора $r_n(x)$ равен остаточному члену формулы Тейлора $R_n(x)$, т.е. $r_n(x)=R_n(x)$, при выполнении условия (10.11.3).

Итак, если ряд Тейлора функции $f(x)$, для которой он составлен, сходится в окрестности точки $x=0$ к этой функции, то имеет место равенство

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots$$

Если для какой-нибудь функции формально написан ряд Тейлора, то чтобы доказать, что написанный ряд представляет именно данную функцию, нужно либо доказать, что остаточный член стремится к нулю, либо каким-либо иным способом убедиться, что написанный ряд сходится к данной функции.

10.12. Разложение по степеням x функций e^x, $\sin x$, $\cos x$, $(1+x)^m$

Рассмотрим примеры разложения некоторых функций в ряд Маклорена.

1. $f(x)=e^x$, $a=0$.

Так как $f'(x)=f''(x)=\ldots=f^{(n)}(x)=f^{(n+1)}(x)=e^x$, а $f'(0)=f''(0)=\ldots=1$, то

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots,$$

где $R_n(x)=e^{\theta x}\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ $(0<\theta<1)$.

Покажем, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}=0$ для любого x. Для этого рассмотрим степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ и покажем, что он абсолютно сходится для всех $x\in R$. Действительно, $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{C_n}{C_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{(n+1)!}\cdot\dfrac{(n+2)!}{1}=\lim\limits_{n\to\infty}(n+2)=\infty$.

Так как ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ сходится для всех x, то из необходимого признака сходимости следует, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}=0$ для всех $x\in R$.

Функция $e^{\theta x}$ для всех $x\le 0$ удовлетворяет неравенству

$$0<e^{\theta x}\le 1.$$

Если $x\in(0,M]$, то $e^{\theta x}<e^{M}$, так как $0<\theta<1$.

Тогда $R_n(x)=e^{\theta x}\cdot\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$, как произведение функции ограниченной на бесконечно малую.

Следовательно, для всех значений x полученный ряд Маклорена сходится и представляет функцию e^{x}.

2. $f(x)=\sin x$, $a=0$.

$f'(x)=\cos x=\sin\left(x+1\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)$, $\quad f''(x)=-\sin x=\sin\left(x+2\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)$,

$f'''(x)=-\cos x=\sin\left(x+3\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)$, $\quad f^{IY}(x)=\sin x=\sin\left(x+4\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)$, …,

$f^{(n+1)}(x)=\sin\left(x+(n+1)\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Тогда $f(0)=0$, $f'(0)=1$, $f''(0)=0$, $f'''(0)=-1$, $f^{IY}(0)=0$, … и мы имеем разложение $f(x)=\sin x$ в ряд Маклорена

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-...+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+...=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!},$$

где $R_n(x)=\sin\left(C+(n+1)\dfrac{\pi}{2}\right)\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ (C находится между 0 и x).

$\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x)=0$, так как $\left|\sin\left(C+(n+1)\dfrac{\pi}{2}\right)\right|\le 1$, а $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}=0$.

3. $f(x)=\cos x$, $a=0$.

Аналогично, как в предыдущем примере, получаем

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

где $R_n(x)=\cos\left(C+(n+1)\dfrac{\pi}{2}\right)\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ (C находится между 0 и x).

Очевидно, $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x)=0$.

4. Биномиальный ряд и его частные случаи.

Разложим в ряд Маклорена функцию $f(x)=(1+x)^m$, где m - произвольное постоянное число.

Здесь оценка остаточного члена представляет некоторые трудности, и потому к оценке условий разложимости подойдем несколько иначе.

Сначала формально найдем коэффициенты разложения $(1+x)^m$ в ряд Маклорена. $f(0)=1$; $f'(x)=m(1+x)^{m-1} \Rightarrow f'(0)=m$;

$f''(x)=m(m-1)(1+x)^{m-2} \Rightarrow f''(0)=m(m-1)$;

$f'''(x)=m(m-1)(m-2)(1+x)^{m-3} \Rightarrow f'''(0)=m(m-1)(m-2) \Rightarrow$,

………………………………………………,

$f^{(n)}(0)=m(m-1)(m-2)\cdot\ldots\cdot(m-(n-1))$.

Поэтому

$$(1+x)^m = x+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\ldots+$$
$$+\frac{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-(n-1))}{n!}x^n+\ldots$$

Этот ряд называется *биномиальным*, найдем его интервал сходимости.

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_n}{C_{n+1}}\right|=\left|\frac{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-(n-1))}{n!}\cdot\frac{(n+1)!}{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-(n-1))(m-n)}\right|=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{m-n}\right|=|-1|=1.$$

Значит, ряд сходится абсолютно при $|x|<1$. Покажем, что суммой этого ряда является $(1+x)^m$.

В самом деле, нетрудно проверить, что функция $f(x)$, определяемая биномиальным рядом, является решением задачи Коши для дифференциального уравнения $(1+x)\,f'(x)=m\,f(x)$, $f(0)=1$. Но решением этой же задачи является функция $y=(1+x)^m$, так как $y'=m(1+x)^{m-1}$ и $(1+x)m(1+x)^{m-1}=m(1+x)^m \quad \Rightarrow \quad m(1+x)^m \equiv m(1+x)^m$. Отсюда в силу единственности решения задачи Коши получаем $f(x)=(1+x)^m$, $|x|<1$, т.е. биномиальный ряд сходится абсолютно в интервале $(-1,\ 1)$ к $f(x)=(1+x)^m$. На концах интервала для некоторых m ряд сходится, для некоторых – расходится, об этом сказано в практической части модуля.

Заметим, что если m – целое положительное число, то биномиальный ряд превращается в бином Ньютона.

Рассмотрим частные случаи биномиального ряда:

1) при $m=-1$ получаем

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\ldots+(-1)^n x^n+\ldots;$$

2) при $m=\frac{1}{2}$ имеем

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2\cdot 4}x^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4+\ldots;$$

3) при $m=-\frac{1}{2}$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3+\ldots$$

Применим разложение биномиального ряда к разложению других функций. Разложим в ряд Маклорена функцию $f(x)=\arcsin x$.

Подставляя в последнее равенство вместо x выражение $-x^2$, получим $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4+\dfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6+\ldots+\dfrac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n}x^{2n}+\ldots$

На основании теоремы об интегрировании степенных рядов получаем:

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x=x+\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5}+\ldots+\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots$$

Этот ряд сходится для $-1\le x\le 1$.

10.13. Приложение рядов к приближенным вычислениям

Приближенное вычисление значений функций

Допустим, что функция $f(x)$ в окрестности точки x_0 разлагается в ряд Тейлора. Тогда точное ее значение $f(x_0)$ может быть вычислено по ряду Тейлора, а приближенное ее значение – по частичной сумме этого ряда. Возникающую при этом ошибку можно оценивать при помощи остаточного члена $R_n\left(x_0\right)$, либо непосредственно оценивая остаток ряда. Если получился числовой ряд знакочередующимся, то по теореме Лейбница ошибка не превышает первого отброшенного члена ряда, взятого по абсолютной величине; в случае знакоположительного ряда – подбирают другой ряд (обычно геометрическую прогрессию), члены которого больше членов остатка и сумму которого можно найти.

Пример 10.13.1. Вычислить $\sqrt[5]{34}$ с точностью до 10^{-4}.

Решение. Имеем $\sqrt[5]{34}=\sqrt[5]{32+2}=2\left(1+\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{5}}$. Воспользуемся биномиальным рядом при $x=\frac{1}{16}$, $m=\frac{1}{5}$.

$$\left(1+\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{5}}=1+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{16}-\frac{2}{25}\cdot\frac{1}{16^2}+\frac{6}{125}\cdot\frac{1}{16^3}+\ldots$$

Получили знакочередующийся ряд, остаток которого не превышает первого отброшенного члена. Так как $\frac{6}{125}\cdot\frac{1}{16^3}=\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{3200}<10^{-3}$, то с указанной точностью $\left(1+\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{5}}\cong 1+\frac{1}{80}-\frac{1}{3200}=1{,}0122$, так что $\sqrt[5]{34}\cong 2{,}0244$.

Пример 10.13.2. Вычислить число e с точностью 10^{-5}.

Решение. $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots$. Пусть $x = 1$.

$$e=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots.$$

Остаточный член имеет вид $R_n\left(x\right)=e^{\theta x}\frac{x^{n+1}}{\left(n+1\right)!}$ $(0<\theta<1)$.

Тогда $R_n\left(1\right)=e^{\theta}\frac{1}{\left(n+1\right)!}<\frac{3}{\left(n+1\right)!}<10^{-5}$.

Решая подбором n последнее неравенство, получим $n = 8$, т.е.

$$e \cong 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{8!}=2,71828.$$

Покажем, как можно оценивать ошибку, пользуясь остатком ряда.

$$r_n(1)=\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\ldots=\frac{1}{(n+1)!}\left(1+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}+\ldots\right)<$$

$$<\frac{1}{(n+1)!}\left(1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}+\ldots\right)=\frac{1}{(n+1)!}\frac{1}{1-\frac{1}{n+1}}=\frac{1}{n!n}.$$

Получилась оценка в три раза более точная, чем $\frac{3}{(n+1)!}$.

Вычисление определенных интегралов

Существуют определенные интегралы, у которых первообразные от подынтегральных функций не выражаются через элементарные функции. Такие интегралы иногда удобно вычислять приближенно с помощью рядов. Покажем на примере, как это делается.

П р и м е р 10.13.3. Вычислить $\int\limits_0^a e^{-x^2}dx$.

Решение. Здесь первообразная от e^{-x^2} не является элементарной функцией. Используем разложение $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots$ $(-\infty < x < \infty)$.

Пусть $x=-x^2$, тогда $e^{-x^2}=1-x^2+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\ldots$ $(-\infty < x < \infty)$,

а $$\int\limits_0^a e^{-x^2}dx=\int\limits_0^a\left(1-x^2+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\ldots\right)dx=\left(x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{2!5}-\frac{x^7}{3!7}+\ldots\right)\Bigg|_0^a=$$

$$=a-\frac{a^3}{3}+\frac{a^5}{2!5}-\frac{a^7}{3!7}+\ldots$$

С помощью этого равенства можно для любого a вычислить данный интеграл с любой заданной точностью.

Применение рядов к решению дифференциальных уравнений

Если интегрирование дифференциального уравнения не сводится к квадратурам, то прибегают к приближенным методам. Одним из таких методов является представление решения в виде ряда Тейлора; сумма конечного числа членов этого ряда будет приближенно равняться искомому частному решению.

Пусть, например, требуется найти решение дифференциального уравнения второго порядка

$$y'' = F\left(x, y, y'\right), \tag{10.13.1}$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$y\left(x_0\right) = y_0, \quad y'\left(x_0\right) = y_0'. \tag{10.13.2}$$

Допустим, что решение $y = f(x)$ существует и представимо в виде ряда Тейлора

$$y = f\left(x\right) = f\left(x_0\right) + f'\left(x_0\right)\left(x - x_0\right) + \frac{f''\left(x_0\right)}{2!}\left(x - x_0\right)^2 + \ldots \tag{10.13.3}$$

Нам нужно найти $f(x_0)$, $f'(x_0)$, $f''(x_0)$, …. Это можно сделать при помощи условий (10.13.2) и уравнения (10.13.1).

Действительно, из условий (10.13.2) следует

$$f\left(x_0\right) = y_0, \quad f'\left(x_0\right) = y_0';$$

из уравнения (10.13.1) получаем

$$f''\left(x_0\right) = y''\left(x_0\right) = F\left(x_0, y_0, y_0'\right).$$

Дифференцируя обе части уравнения по x, получим

$$y''' = F_x'\left(x, y, y'\right) + F_y'\left(x, y, y'\right) \cdot y' + F_{y'}'\left(x, y, y'\right) \cdot y'' \tag{10.13.4}$$

и, подставляя значения x_0, y_0, y_0' и y_0'', получаем

$$f'''\left(x_0\right) = y'''\left(x_0\right).$$

Дифференцируя соотношение (10.13.4) еще раз, найдем

$$f^{IY}\left(x_0\right) = y^{IY}\left(x_0\right)$$

и.т.д.

Найденные значения производных подставляем в равенство (10.13.3). Для тех значений x, для которых этот ряд сходится, он представляет решение уравнения.

Пример 10.13.4. Найти решение уравнения $y'' = -yx^2$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=1$, $y'(0)=2$.

Решение. Имеем $f(0)=1$, $f'(0)=2$.

Из данного уравнения находим $y''\left(0\right) = f''\left(0\right) = -1 \cdot 0 = 0$;

далее $y''' = -y'x^2 - 2xy$, $y'''\left(0\right) = f'''\left(0\right) = 0$;

$y^{IY} = -y''x^2 - 2xy' - 2y - 2xy'$, $y^{IY}\left(0\right) = -2$;

$y^{Y} = -y'''x^2 - 2xy'' - 4y' - 4xy'' - 2y'$, $y^{Y}\left(0\right) = -6 \cdot 2 = -12$.

………………………………………………………………

Подставляя найденные значения производных в ряд Маклорена, получаем приближенное решение $y = 1 + 2x - \frac{2}{4!}x^4 - \frac{12}{5!}x^5 + \ldots$

Если уравнение линейное, то удобнее искать коэффициенты разложения частного решения по методу неопределенных коэффициентов. Для этого подставляем ряд $y = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \ldots + C_n x^n + \ldots$ в дифференциальное уравнение и приравниваем коэффициенты, стоящие при одинаковых степенях x, в обеих частях уравнения.

Пример 10.13.5. Найти решение уравнения

$$y'' = 2xy' + 4y,$$

удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Решение. Решение ищем в виде степенного ряда

$$y = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \ldots + C_n x^n + \ldots$$

На основании начальных условий находим $C_0 = 0$, $C_1 = 1$.

Следовательно,

$$y = x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \ldots + C_n x^n + \ldots,$$

$$y' = 1 + 2C_2 x + 3C_3 x^2 + \ldots + n \cdot C_n x^{n-1} + \ldots,$$

$$y'' = \quad 2C_2 + 6C_3 x + \ldots + (n-1)n \cdot C_n x^{n-2} + \ldots$$

$$2C_2 + 6C_3 x + \ldots + (n-1)n \cdot C_n x^{n-2} =$$

$$= 2x\left(1 + 2C_2 x + 3C_3 x^2 + \ldots + n \cdot C_n x^{n-1} + \ldots\right) + 4\left(x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \ldots + C_n x^n + \ldots\right).$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x:

x^0: $2C_2 = 0$, откуда $C_2=0$,

x^1: $6C_3 = 2 + 4$, откуда $C_3=1$,

x^2: $4 \cdot 3C_4 = 4C_2 + 4C_2$, откуда $C_4=0$,

…………………………………………………………..

x^{n-2}: $n(n-1)C_n = (n-2) \cdot 2C_{n-2} + 4C_{n-2}$, откуда $C_n = \frac{2C_{n-2}}{n-1}$.

…………………………………………………………….

Следовательно,

$$C_5 = \frac{2C_3}{5-1} = \frac{2 \cdot 1}{4} = \frac{1}{2!}, \qquad C_7 = \frac{2C_5}{7-1} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{6} = \frac{1}{3!}, \quad C_9 = \frac{1}{4!}, \ldots,$$

$$C_{2n+1}=\frac{2\cdot\dfrac{1}{(n-1)!}}{2n}=\frac{1}{n!},\ \dots\ .$$

$C_4=0,\quad C_6=0,\quad \dots,\quad C_{2n}=0,\quad \dots\ .$

Подставляя найденные коэффициенты, получаем искомое решение

$$y=x+\frac{x^3}{1!}+\frac{x^5}{2!}+\frac{x^7}{3!}+\ldots+\frac{x^{2n+1}}{n!}+\ldots$$

Полученный ряд сходится при всех значениях x.

Заметим, что найденное частное решение можно выразить через элементарные функции: вынося x за скобку, получим в скобках разложение в ряд функции e^{x^2}. Следовательно, $y=xe^{x^2}$.

10.14. Ряды Фурье. Коэффициенты Фурье

Функциональный ряд вида

$$\frac{a_0}{2}+a_1\cos x+b_1\sin x+a_2\cos 2x+b_2\sin 2x+\ldots+a_n\cos nx+b_n\sin nx+\ldots$$

или ряд вида

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right), \qquad (10.14.1)$$

называется *тригонометрическим рядом*. Постоянные числа $a_0,a_1,\ldots,a_n,\ldots$, $b_0,b_1,\ldots,b_n,\ldots$ называются *коэффициентами* тригонометрического ряда.

Если ряд (10.14.1) сходится, то его сумма есть периодическая функция с периодом 2π, так как $\sin nx$ и $\cos nx$ являются периодическими функциями с периодом 2π.

Пусть периодическая с периодом 2π функция $f(x)$ такова, что она представляется тригонометрическим рядом, сходящимся к данной функции в интервале $(-\pi, \pi)$, т.е. является суммой этого ряда

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right). \qquad (10.14.2)$$

Предположим, что интеграл от функции $f(x)$ равняется сумме интегралов от членов ряда. Это, например, будет выполняться, если предположить, что числовой ряд

$$\left|\frac{a_0}{2}\right|+|a_1|+|b_1|+|a_2|+|b_2|+\ldots+|a_n|+|b_n|+\ldots$$

сходится. Тогда ряд (10.14.1) мажорируем и, следовательно, его можно интегрировать в промежутке $(-\pi, \pi)$. Используем это для вычисления коэффициента a_0.

Проинтегрируем обе части равенства (10.14.2) в пределах от $-\pi$ до π:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos nx\,dx + \int_{-\pi}^{\pi} b_n \sin nx\,dx \right).$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}dx = \frac{a_0}{2}x\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{a_0}{2}(\pi+\pi) = \pi a_0,$$

$\int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos nxdx = a_n \frac{\sin nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} = a_n\left(\sin n\pi - \sin(-n\pi)\right) = 0$, так как $\sin n\pi = 0$ для любого $n=1, 2, \ldots$.

$\int_{-\pi}^{\pi} b_n \sin nxdx = -b_n \frac{\cos nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} = -b_n\left(\cos n\pi - \cos(-n\pi)\right) = -b_n \cdot 0 = 0$, так как $\cos(-n\pi) = \cos n\pi$.

Следовательно, $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \pi a_0$, откуда

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx. \qquad (10.14.3)$$

Неизвестные коэффициенты a_n и b_n можно найти по следующим формулам (вывод этих формул можно найти в любом учебнике по высшей математике)

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \qquad (10.14.4)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx. \qquad (10.14.5)$$

Коэффициенты, определенные по формулам (10.14.3) - (10.14.5), называются *коэффициентами Фурье* функции $f(x)$, а тригонометрический ряд с такими коэффициентами называется *рядом Фурье* функции $f(x)$.

Выясним, далее, вопрос: какими свойствами должна обладать функция, чтобы построенный для нее ряд Фурье сходился и чтобы сумма этого ряда равнялась значениям данной функции в соответствующих точках?

Определение 10.14.1. Функция $f(x)$ называется *кусочно-монотонной* на $[a, b]$, если этот отрезок можно разбить конечным числом точек $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ на интервалы $(a, x_1), (x_1, x_2), \ldots, (x_{n-1}, b)$, в каждом из которых функция монотонна, т.е. либо невозрастающая, либо неубывающая.

Из этого определения следует, что если функция $f(x)$ кусочно-монотонная и ограниченная на $[a, b]$, то она может иметь только точки разрыва первого рода. Действительно, если $x = C$ есть точка разрыва функции $f(x)$, то в силу ее монотонности и ограниченности существуют конечные пределы $\lim\limits_{x \to C-0} f(x) = f(C-0)$, $\lim\limits_{x \to C+0} f(x) = f(C+0)$.

З а м е ч а н и е. В некоторых учебниках функцию $f(x)$, определенную на $[a, b]$, называют кусочно-гладкой (кусочно-дифференцируемой), если она и ее производная имеют не более конечного числа точек разрыва, и притом лишь первого рода, т.е. если функция кусочно-монотонная и ограниченная, то она кусочно-гладкая.

Сформулируем теперь следующую теорему.

Т Е О Р Е М А 10.14.1 (Дирихле). Если периодическая функция с периодом 2π кусочно-монотонная и ограниченная на $[-\pi, \pi]$, то ряд Фурье, построенный для этой функции, сходится во всех точках. Сумма полученного ряда $S(x)$ равна значению функции $f(x)$ в точках непрерывности функции. В точках разрыва функции $f(x)$ сумма ряда равна среднему арифметическому пределов функции $f(x)$ слева и справа, т.е., если $x = C$ – точка разрыва первого рода функции $f(x)$, то

$$S(x)\Big|_{x=C} = \frac{f(C-0) + f(C+0)}{2}.$$

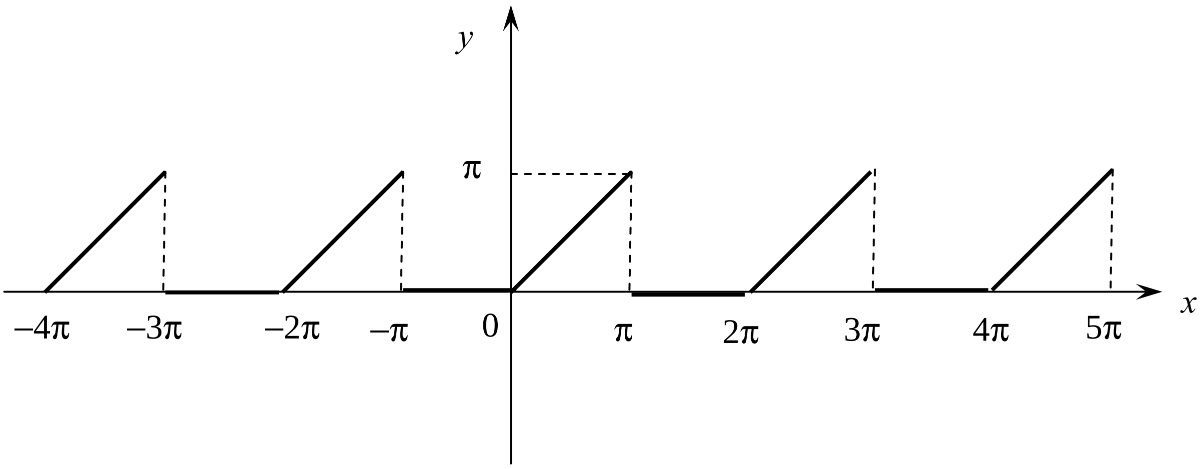
Из этой теоремы следует, что класс функций, представимых рядами Фурье, довольно широк. Поэтому ряды Фурье нашли широкое применение в различных разделах математики. Особенно успешно ряды Фурье применяются в математической физике и ее приложениях к конкретным задачам механики и физики.

Рассмотрим пример разложения функции в ряд Фурье.

П р и м е р 10.14.1. Периодическая с периодом 2π функция

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \textit{при} -\pi < x \le 0, \\ x & \textit{при} \quad 0 < x \le \pi. \end{cases}$$

Очевидно, что функция кусочно-монотонная и ограниченная, т.е. удовлетворяет всем условиям теоремы Дирихле.



Определим коэффициенты Фурье:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\left(\int\limits_{-\pi}^{0} 0\cdot dx+\int\limits_{0}^{\pi} x\,dx\right)=\frac{1}{\pi}\frac{x^2}{2}\bigg|_0^{\pi}=\frac{\pi}{2};$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} x\cos nx\,dx=\begin{vmatrix} u=x, & dv=\cos nx\,dx \\ du=dx, & v=\dfrac{\sin nx}{n}\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{x\cdot\sin nx}{n}\bigg|_0^{\pi}-\frac{1}{n}\int\limits_0^{\pi}\sin nx\,dx\right)=\frac{1}{\pi n}\frac{\cos nx}{n}\bigg|_0^{\pi}=\frac{1}{\pi n^2}(\cos n\pi-1)=$$

$$=\begin{cases}-\dfrac{2}{\pi n^2} & \text{при } n \text{ нечетном,}\\ 0 & \text{при } n \text{ четном;}\end{cases}=-\frac{2}{\pi}\frac{1}{(2k-1)^2}=-\frac{2}{\pi}\frac{1}{(2n-1)^2}.$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} x\sin nx\,dx=\begin{vmatrix} u=x, & dv=\sin nx\,dx \\ du=dx, & v=-\dfrac{\cos nx}{n}\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{x\cdot\cos nx}{n}\bigg|_0^{\pi}+\frac{1}{n}\int\limits_0^{\pi}\cos nx\,dx\right)=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi\cos nx}{n}+\frac{1}{n^2}\sin nx\bigg|_0^{\pi}\right)=$$

$$=-\frac{1}{n}\cos n\pi=-(-1)^n\frac{1}{n}=(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n}.$$

Таким образом, ряд Фурье будет иметь вид:

$$f(x)=\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\ldots+\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}+\ldots\right)+$$

$$+\left(\frac{\sin x}{1}-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}+\ldots\right).$$

В точках разрыва сумма ряда $S(x)\Big|_{x=\pi} = \dfrac{f(\pi-0)+f(\pi+0)}{2} = \dfrac{\pi+0}{2} = \dfrac{\pi}{2}$.

Полагая в полученном равенстве x=0, получаем

$$0 = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)^2}+\ldots\right), \qquad \text{откуда}$$

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{8}.$$

Ранее мы доказывали, что такой числовой ряд сходится (его можно считать обобщенным гармоническим рядом, где $p=2>1$), а сейчас при помощи ряда Фурье нашли его сумму $S=\dfrac{\pi^2}{8}$.

Так как по предположению $f(x)$ – 2π-периодическая функция, то отрезок интегрирования $[-\pi, \pi]$ в формулах (10.14.3) – (10.14.5) может быть заменен произвольным отрезком $[a, a+2\pi]$ длиной 2π. Тогда коэффициенты Фурье могут быть вычислены по формулам:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi} f(x)\,dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi} f(x)\cos nx\,dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi} f(x)\sin nx\,dx.$$

10.15. Разложение в ряд Фурье четных и нечетных функций

Пусть $f(x)$ – четная 2π-периодическая функция. Тогда $f(x)\cdot\sin nx$ является нечетной, а $f(x)\cdot\cos nx$ – четной функцией. Следовательно, $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = 0$, $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = 2\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$. Согласно формулам (10.14.3) – (10.14.5) для коэффициентов ряда Фурье получаем

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx, \quad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \quad b_n = 0,$$

то есть ряд Фурье для четной функции имеет вид

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx.$$

Аналогично, если $f(x)$ – нечетная 2π-периодическая функция, то $f(x)\cos nx$ – нечетная, а $f(x)\sin nx$ – четная функция. В этом случае имеем

$$a_0=0,\quad a_n=0,\quad b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\,dx,$$

а ряд Фурье для нечетной функции имеет вид

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx.$$

Таким образом, четная 2π-периодическая функция разлагается в ряд Фурье только по косинусам, а нечетная 2π-периодическая функция раскладывается в ряд Фурье только по синусам.

П р и м е р 10.15.1. Разложить в ряд Фурье 2π-периодическую функцию $y=x^2$, заданную на $[-\pi,\pi]$.

Решение. Функция $y=x^2$ – четная, поэтому $b_n=0$.

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2dx=\frac{2}{\pi}\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^{\pi}=\frac{2}{3\pi}\pi^3=\frac{2}{3}\pi^2.$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos nx\,dx=\begin{vmatrix}u=x^2, & dv=\cos nx\,dx\\ du=2x\,dx, & v=\dfrac{\sin nx}{n}\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\left.\frac{x^2\cdot\sin nx}{n}\right|_0^{\pi}-\frac{2}{n}\int_0^{\pi}x\sin nx\,dx\right)=\begin{vmatrix}u=x, & dv=\sin nx\,dx\\ du=dx, & v=-\dfrac{\cos nx}{n}\end{vmatrix}=$$

$$=-\frac{4}{\pi n}\left(-\left.\frac{x\cos nx}{n}\right|_0^{\pi}+\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nx\,dx\right)=-\frac{4}{\pi n}\left(-\frac{\pi\cos n\pi}{n}+\left.\frac{\sin nx}{n^2}\right|_0^{\pi}\right)=$$

$=\dfrac{4}{n^2}\cos n\pi=\dfrac{4}{n^2}(-1)^n$. Значит, ряд Фурье данной функции имеет вид

$$x^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos nx}{n^2}=\frac{\pi^2}{3}-4\left(\cos x-\frac{\cos 2x}{2^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}-\ldots\right).$$

Так как функция кусочно-монотонна, ограничена и непрерывна, то это равенство выполняется во всех точках.

Полагая $x = \pi$ в этом равенстве, получим

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4\left(-1 - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} - \ldots\right) \Rightarrow \frac{2}{3}\pi^2 = 4\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots\right) \Rightarrow$$

$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{6}$. Мы нашли сумму обобщенного гармонического ряда для $p = 2$, $S = \frac{\pi^2}{6}$.

Полагая $x = 0$, получаем $\frac{\pi^2}{12} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \ldots$

10.16. Разложение в ряд Фурье функций, заданных на $[-\ell, \ell]$

Пусть $f(x)$ есть периодическая функция с периодом 2ℓ, вообще говоря, отличным от 2π. Разложим ее в ряд Фурье.

Сделаем замену переменной по формуле

$$x = \frac{\ell}{\pi} t.$$

Тогда функция $f\left(\frac{\ell}{\pi} t\right)$ будет периодической функцией от t с периодом 2π. Действительно,

$$f\left(\frac{\ell}{\pi}(t + 2\pi)\right) = f\left(\frac{\ell}{\pi} t + 2\ell\right) = f\left(\frac{\ell}{\pi} t\right).$$

Ее можно разложить в ряд Фурье на $[-\pi, \pi]$:

$$f\left(\frac{\ell}{\pi} t\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos nt + b_n \sin nt\right), \qquad (10.16.1)$$

где $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{\ell}{\pi} t\right) dt$, $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{\ell}{\pi} t\right) \cos ntdt$, $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{\ell}{\pi} t\right) \sin ntdt$.

Вернемся теперь к старой переменной x:

$$x = \frac{\ell}{\pi} t, \quad t = \frac{\pi}{\ell} x, \quad dt = \frac{\pi}{\ell} dx.$$

Тогда будем иметь

$$a_0 = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x) dx, \qquad a_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x) \cos\frac{n\pi}{\ell} x\, dx, \qquad b_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x) \sin\frac{n\pi}{\ell} x\, dx,$$

а формула (10.16.1) примет вид

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{\ell}x+b_n\sin\frac{n\pi}{\ell}x\right).$$

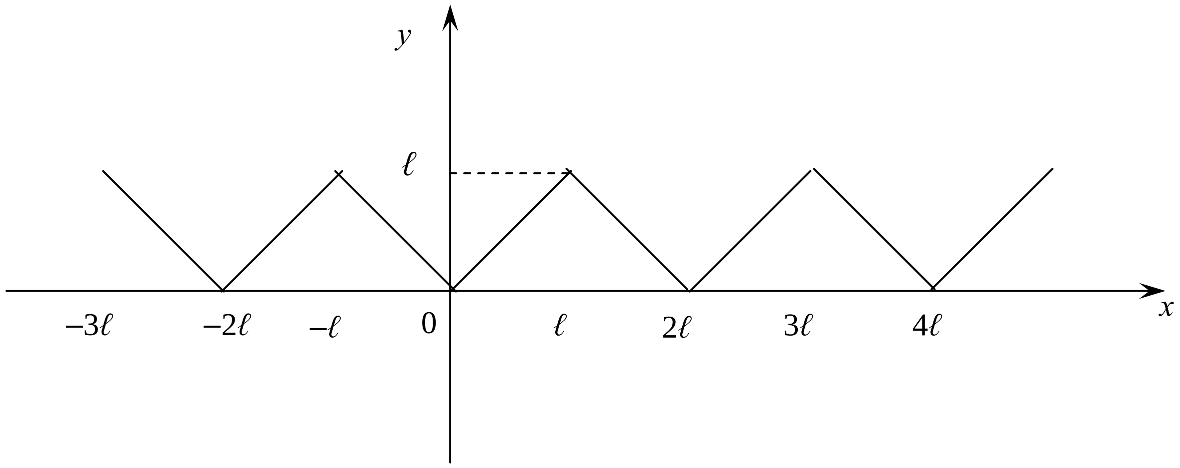
Если $f(x)$ – четная функция, то

$$b_n=0,\quad a_0=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\,dx,\quad a_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\cos\frac{n\pi}{\ell}x\,dx;$$

если же $f(x)$ – нечетная функция, то

$$a_0=0,\quad a_n=0,\quad b_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\sin\frac{n\pi}{\ell}x\,dx.$$

П р и м е р 10.16.1. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(x)$ с периодом 2ℓ, которая на $[-\ell,\ell]$ задается равенством $f(x)=|x|$.



Решение. Все условия теоремы Дирихле выполняются. Так как функция четная, то $b_n=0$,

$$a_0=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\,dx=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} x\,dx=\frac{2}{\ell}\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^{\ell}=\ell,$$

$$a_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\cos\frac{n\pi}{\ell}x\,dx=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} x\cos\frac{n\pi}{\ell}x\,dx=\left|\begin{matrix}u=x, & dv=\cos\frac{n\pi}{\ell}x\,dx\\ du=dx, & v=\frac{\ell}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{\ell}x\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{2}{\ell}\left(\frac{\ell}{n\pi}x\cdot\sin\frac{n\pi}{\ell}x\Bigg|_0^{\ell}-\frac{\ell}{n\pi}\int_0^{\ell}\sin\frac{n\pi}{\ell}x\,dx\right)=\frac{2}{\ell}\left(0+\left(\frac{\ell}{n\pi}\right)^2\cos\frac{n\pi}{\ell}x\,dx\Bigg|_0^{\ell}\right)=$$

$$=\frac{2\ell}{n^2\pi^2}(\cos n\pi-1)=\begin{cases}-\dfrac{4\ell}{n^2\pi^2} & \text{при } n \text{ нечетном,}\\ 0 & \text{при } n \text{ четном}\end{cases}=-\frac{4\ell}{\pi^2(2n-1)^2}.$$

Следовательно, $|x|=\dfrac{\ell}{2}-\dfrac{4\ell}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos(2n-1)\cdot\frac{\pi}{\ell}x}{(2n-1)^2}=$

$$=\frac{\ell}{2}-\frac{4\ell}{\pi^2}\left(\cos\frac{\pi}{\ell}x+\frac{1}{3^2}\cos\frac{3\pi}{\ell}x+...+\frac{1}{(2n-1)^2}\cdot\cos(2n-1)\frac{\pi}{\ell}x+...\right).$$

Пусть $x = 0$, $0=\dfrac{\ell}{2}-\dfrac{4\ell}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2} \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2}=\dfrac{\pi^2}{8}$.

10.17. О разложении в ряд Фурье непериодических функций

Пусть функция $f(x)$ задана на $[0, \pi]$. Чтобы разложить $f(x)$ на этом отрезке в ряд Фурье, доопределим ее на отрезке $[-\pi, 0]$. В результате получим функцию, заданную на всем отрезке $[-\pi, \pi]$, которую уже можно разложить в ряд Фурье. Ясно, что получившийся ряд будет зависеть от характера продолжения первоначальной функции на $[-\pi, 0]$. Рассмотрим два возможных случая.

1. Если продолжить (доопределить) $f(x)$ четным образом с отрезка $[0, \pi]$ на отрезок $[-\pi, 0]$ (рис. 10.17.1), то получим четную функцию, которая, как известно, раскладывается в ряд Фурье только по косинусам.

2. Аналогично, продолжая $f(x)$ нечетным образом с отрезка $[0, \pi]$ на отрезок $[-\pi, 0]$ (рис. 10.17.2), получим нечетную функцию, разлагающуюся в ряд Фурье только по синусам.

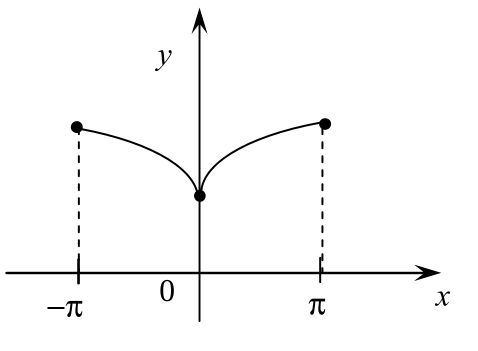


Рис. 10.17.1

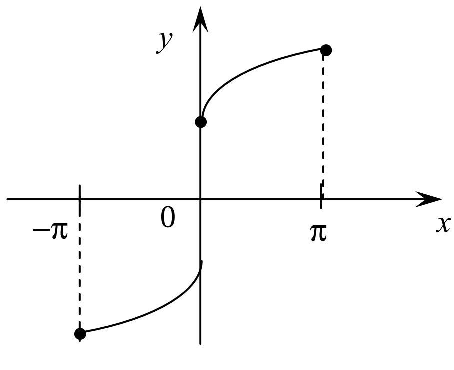


Рис. 10.17.2

Вопросы к экзамену по модулю 10

1. Числовые ряды. Сходимость и сумма ряда.
2. Простейшие действия над рядами. Необходимый признак сходимости. Гармонический ряд.
3. Ряды с положительными членами. Теоремы сравнения.
4. Признаки сходимости Даламбера и Коши.
5. Знакочередующиеся ряды. Теорема Лейбница.
6. Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость.
7. Функциональные ряды. Область сходимости.
8. Степенные ряды. Теорема Абеля.
9. Интервал и радиус сходимости степенных рядов.
10. Интегрирование и дифференцирование степенных рядов.
11. Ряды Тейлора и Маклорена. Достаточные условия разложения функций.
12. Разложение в ряд Маклорена e^x, $\sin x$, $\cos x$, $(1+x)^m$.
13. Приложения рядов к приближенному вычислению значений функций и определенных интегралов.
14. Приложения рядов к решению дифференциальных уравнений.
15. Ряд Фурье. Коэффициенты Фурье. Теорема Дирихле.
16. Разложение в ряд Фурье четных и нечетных функций, заданных на $(-\pi, \pi)$.
17. Разложение в ряд Фурье 2ℓ-периодических функций.
18. О разложении в ряд Фурье непериодических функций.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ПРОВЕДЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

Учебно-информационный блок для проведения практических занятий

Тема занятия	Тип занятия	Кол-во часов
I. Числовые ряды. Сходимость и сумма ряда	Усвоение и закрепление изученного на лекции материала	2
II. Необходимый признак сходимости. Ряды с положительными членами. Теоремы сравнения	Углубление и расширение полученных знаний. Усвоение нового материала. Текущий контроль	2
III. Признак Даламбера. Радикальный и интегральный признаки Коши	Углубление и расширение полученных знаний. Решение различных примеров с применением достаточных признаков сходимости	2
IV. Знакочередующиеся и знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимости	Обобщение, систематизация и применение полученных знаний к исследованию знакопеременных рядов. Текущий контроль	2
V. Степенные ряды. Нахождение радиуса и интервала сходимости	Усвоение и закрепление изученного на лекции материала. Текущий контроль	2
VI. Разложение функций в ряды Тейлора и Маклорена. Приложение рядов к приближенным вычислениям	Обобщение, систематизация и применение полученных на лекции знаний. Использование ранее изученного материала. Текущий контроль	2
VII. Контрольная работа по теме «Ряды»	Промежуточный контроль практических навыков и знаний	2
VIII. Разложение функций в ряд Фурье, заданных на $[-\pi; \pi]$	Усвоение и закрепление изученного на лекции материала	2
IX. Разложение функций в ряд Фурье, заданных на $[-\ell; \ell]$	Обобщение рядов Фурье на 2ℓ-периодические функции. Текущий контроль	2

Основная и дополнительная литература

1. Бугров, Я.С. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. – М.: Наука, 1980.
2. Гусак, А.А. Справочник по высшей математике / А.А. Гусак, Г.М. Гусак. – Минск: Навука и тэхника, 1991.
3. Жевняк, Р.М. Высшая математика. В 3 ч. Ч. 3 / Р.М. Жевняк, А.А. Карпук. – Минск: Выш. шк., 1985.
4. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. В 2 т. Т. 2 / Н.С. Пискунов. – М.: Наука, 1985.
5. Берман, Г.М. Сборник задач по курсу математического анализа / Г.М. Берман. – М.: Наука, 1971.
6. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 3 ч. Ч. 2 / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – М.: Высш. шк., 1980.
7. Сборник задач по математике для втузов: Специальные разделы математического анализа / под ред. А.В. Ефимова и Б.П. Демидовича. – М.: Наука, 1981.
8. Индивидуальные задания по высшей математике / под общ. ред. А.П. Рябушко. – Мн.: Выш. шк., 2004.

I. Числовые ряды. Сходимость и сумма ряда

1. Краткий теоретический обзор с использованием лекционного материала, графической схемы, информационной таблицы. Основной акцент сделать на то, что для большинства числовых рядов сумму ряда найти трудно и что для практических целей достаточно ответить на вопрос: сходится ряд или расходится?

Бесконечная сумма

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n ,$$

где $a_n \in R$, называется числовым рядом. Числа $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ называются *членами* ряда, а число a_n – общим членом ряда.

Конечные суммы $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2$, ..., $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, … называются частичными суммами, а S_n – n-ной частичной суммой ряда.

Ряд называется сходящимся, если его n-ная частичная сумма S_n при неограниченном возрастании n стремится к конечному пределу, т.е. если $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$. Число S называют суммой ряда. Если же $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не существует (в частности, бесконечен), то ряд называется расходящимся.

В теоретической части модуля рассмотрен в качестве примера ряд, составленный из членов геометрической прогрессии,

$$a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \ldots + a_1 q^{n-1} + \ldots,$$

который сходится, если $|q| < 1$ (его сумма $S = \dfrac{a_1}{1-q}$) и расходится, если $|q| \geq 1$.

2. Студенты самостоятельно работают с УМК. Обратить внимание на обучающие примеры.

Обучающий пример 1. Дан общий член ряда $a_n = \dfrac{n}{10^n + 1}$. Написать первые четыре члена ряда.

Решение. Если $n = 1$, то $a_1 = \dfrac{1}{11}$; если $n = 2$, то $a_2 = \dfrac{2}{101}$; если $n = 3$, то $a_3 = \dfrac{3}{1001}$; если $n = 4$, то $a_4 = \dfrac{4}{10001}$; …. Ряд можно записать в виде

$$\frac{1}{11} + \frac{2}{101} + \frac{3}{1001} + \frac{4}{10001} + \ldots + \frac{n}{10^n + 1} + \ldots$$

Обучающий пример 2. Найти общий член ряда

$$\frac{2}{3}+\left(\frac{3}{7}\right)^2+\left(\frac{4}{11}\right)^3+\left(\frac{5}{15}\right)^4+\ldots$$

Решение. Показатель степени каждого члена совпадает с номером этого члена, поэтому показатель степени n-ного члена равен n. Числители дробей 2, 3, 4, 5, … образуют арифметическую прогрессию с первым членом 2 и разностью 1, поэтому n-ный числитель равен $n + 1$. Знаменатели образуют арифметическую прогрессию с первым членом 3 и разностью 4, следовательно, $a_n = a_1 + d(n-1) = 3+4(n-1) = 3+4n-4 = 4n-1$. Итак, общий член ряда $a_n = \left(\frac{n+1}{4n-1}\right)^n$.

Обучающий пример 3. Исследовать сходимость ряда

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{24}+\ldots$$

Решение. Ряд составлен из членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии, где $q=\frac{1}{2}<1$, поэтому он сходится и его сумма

$$S=\frac{a_1}{1-q}=\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{4}{3}.$$

Обучающий пример 4 (решает преподаватель у доски). Найти сумму ряда

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\ldots$$

Решение. Очевидно, общий член ряда $a_n=\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$. Представим его в виде суммы простейших дробей

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+1}+\frac{C}{n+2}.$$

Умножая на знаменатель левой части, придем к тождеству

$$1\equiv A(n+1)(n+2)+Bn(n+2)+Cn(n+1).$$

Пусть $n = 0$, тогда $1 = 2A \Rightarrow A=\frac{1}{2}$;

пусть $n = -1$, тогда $1 = -B \Rightarrow B = -1$;

пусть $n = -2$, тогда $1 = 2C \Rightarrow C=\frac{1}{2}$.

Таким образом, $a_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n+2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{2}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)$. Тогда

$$S_n=\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\frac{1}{3\cdot4\cdot5}+\ldots+\frac{1}{(n-1)n(n+1)}+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{2}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{2}{4}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{n-1}-\frac{2}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n}-\frac{2}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right),\ \text{а}\ \lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{4}.$$

Итак, ряд сходится и имеет сумму $\frac{1}{4}$.

3. Два студента у доски решают примеры:

Пример 1. Найти общий член ряда $\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\frac{7}{2^4}+\ldots$

Ответ: $a_n=\frac{2n-1}{2^n}$.

Пример 2.

1) найти сумму n первых членов ряда (S_n);

2) доказать сходимость ряда, пользуясь непосредственно определением сходимости;

3) найти сумму ряда (S).

$$\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\ldots$$

Ответ: $S=\frac{1}{2}$.

Пример 3. Записать первые три члена ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+2^n}{6^n}$ и найти его сумму.

Ответ: 1,5.

4. Студенты самостоятельно решают примеры I уровня сложности:

1) Составить формулы общих членов рядов:

а) $\frac{10}{7}+\frac{100}{9}+\frac{1000}{11}+\frac{10000}{13}+\ldots$ б) $-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\ldots$

Ответ: $a_n=\frac{10^n}{2n+5}$; *Ответ*: $a_n=\frac{(-1)^n}{2n+1}$.

2) Найти сумму рядов:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{5^n + 2^n}{10^n}$.

Ответ: $S = \dfrac{5}{4}$.

б) $1 + \dfrac{m-1}{m} + \left(\dfrac{m-1}{m}\right)^2 + \left(\dfrac{m-1}{m}\right)^3 + \ldots$ ($m>1$).

Ответ: $S = m$.

3) Найти сумму n первых членов ряда, доказать сходимость ряда, найти сумму ряда:

а) $\dfrac{1}{1\cdot 4} + \dfrac{1}{4\cdot 7} + \ldots + \dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)} + \ldots$ *Ответ*: $S = \dfrac{1}{3}$;

б) $\dfrac{1}{1\cdot 3\cdot 5} + \dfrac{1}{3\cdot 5\cdot 7} + \dfrac{1}{5\cdot 7\cdot 9} + \ldots$ *Ответ*: $S = \dfrac{1}{12}$.

Домашнее задание

1. Изучить по теоретической части модуля материал к следующему практическому занятию по теме «Необходимый признак сходимости, теоремы сравнения для числовых рядов с положительными членами».

2. Выполнить следующие задания:

1) Написать формулы общих членов рядов:

а) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{4} + \dfrac{5}{6} + \dfrac{7}{8} + \ldots$

б) $\dfrac{2}{1} + \dfrac{2^2}{1\cdot 2} + \dfrac{2^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \dfrac{2^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \ldots$

2) Найти суммы рядов:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n + 5^n}{15^n}$. *Ответ*: $S = \dfrac{3}{4}$;

б) $\dfrac{1}{1\cdot 4} + \dfrac{1}{2\cdot 5} + \ldots + \dfrac{1}{n(n+3)} + \ldots$ *Ответ*: $S = \dfrac{11}{18}$;

в) $\dfrac{1}{1\cdot 7} + \dfrac{1}{3\cdot 9} + \ldots + \dfrac{1}{(2n-1)(2n+5)} + \ldots$ *Ответ*: $S = \dfrac{23}{90}$;

г) $\dfrac{3}{4} + \dfrac{5}{36} + \ldots + \dfrac{2n+1}{n^2(n+1)^2} + \ldots$ *Ответ*: $S = 1$.

II. Необходимый признак сходимости. Ряды с положительными членами. Теоремы сравнения

1. Краткий теоретический опрос. Отметить, что необходимый признак (из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$) не является достаточным, то есть, если $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, то ничего нельзя сказать о сходимости или расходимости данного ряда. А вот, если $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд расходится (это достаточный признак расходимости).

Признак сравнения 1. Если для всех $n \geq n_0$ выполняется неравенство $0 < a_n \leq b_n$, то:

1) если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$;

2) если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, то расходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ с большими членами.

Признак сравнения 2. Если существует конечный и отличный от нуля $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$, то оба ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ одновременно сходятся или одновременно расходятся.

В качестве рядов для сравнения часто выбирают ряд, составленный из членов геометрической прогрессии, $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$, который сходится для всех $|q| < 1$ и сумма которого $S = \frac{a}{1-q}$, а также, так называемый, обобщенный гармонический ряд (ряд Дирихле) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, который сходится для всех $p > 1$ и расходится, если $p \leq 1$.

Следует также обратить внимание студентов на то, что сходимость или расходимость числового ряда не нарушается, если в нем отбросить или добавить любое конечное количество членов. Но его сумма, если она существует, при этом изменяется.

2. Студенты работают с УМК. Обратить внимание на обучающие примеры.

Обучающий пример 1. Исследовать сходимость ряда

$$\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\dots$$

Решение. Данный ряд получается из гармонического ряда

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}+\dots,$$

который расходится как частный случай ряда Дирихле (p = 1), отбрасыванием первых десяти членов. Следовательно, он расходится.

Обучающий пример 2. Исследовать сходимость ряда

$$0{,}6 + 0{,}51 + 0{,}501 + 0{,}5001 + \dots$$

Решение. Здесь $a_n = 0{,}5 + 0{,}1^n$ (n = 1, 2, …),

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(0{,}5+\frac{1}{10^n}\right) = 0{,}5 \neq 0$ и ряд расходится по достаточному признаку расходимости.

Обучающий пример 3. Доказать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 3^n}=\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3^2}+\dots+\frac{1}{n\cdot 3^n}+\dots$$

Решение. Воспользуемся неравенством $\frac{1}{n\cdot 3^n}<\frac{1}{3^n}$ ($n \ge 2$) и сравним данный ряд со сходящимся рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$, $q=\frac{1}{3}<1$. Согласно первому признаку сравнения данный ряд сходится.

Обучающий пример 4. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2-1}}.$$

Решение. Так как $\frac{1}{\sqrt{n^2-1}}>\frac{1}{n}$ для любого $n \ge 2$, то члены данного ряда больше соответствующих членов расходящегося гармонического ряда. Значит, исходный ряд тоже расходится.

Обучающий пример 5 (решает преподаватель у доски). Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1+n^2}{1+n^3}\right)^2$.

Решение. Если общим членом ряда является отношение двух многочленов, то в качестве ряда для сравнения рекомендуется брать ряд Дирихле $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$, где p равно разности степеней многочленов, стоящих в знаменателе и числителе (если степень числителя больше либо равна степени знаменателя, то, очевидно, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$ и ряд расходится в этом случае).

В нашем примере степень знаменателя – 6 (содержит n^6), а числителя – 4 (содержит n^4), поэтому $p = 6 - 4 = 2$ и в качестве ряда для сравнения берем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$, который сходится, так как $p = 2 > 1$. Применим второй признак сравнения

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{1+n^2}{1+n^3}\right)^2 \div \frac{1}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+n^2\right)^2\cdot n^2}{\left(1+n^3\right)^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+2n^2+n^4\right)n^2}{1+2n^3+n^6} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n^6+2n^4+n^2}{n^6+2n^3+1} = 1 \neq 0.$$

Получили конечный, отличный от нуля, предел. Значит, данный ряд тоже сходится. Заметим, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

3. Два студента у доски (параллельно) решают примеры

Исследовать сходимость рядов:

а) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{5}+\dfrac{3}{8}+\ldots+\dfrac{n}{3n-1}+\ldots$ *Ответ*: расходится;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n+1}$. *Ответ*: сходится;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2-4n+5}$. *Ответ*: сходится.

4. Студенты самостоятельно решают примеры:
Исследовать сходимость рядов:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)$.

Ответ: расходится;

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{tg}\frac{\pi}{4n}$.

Ответ: расходится;

в) $\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln 3}+\ldots+\frac{1}{\ln(n+1)}+\ldots$

Ответ: расходится;

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)$.

Ответ: сходится;

д) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{n+1}{n}}$.

Ответ: расходится;

е) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(5n-4)(4n-1)}$.

Ответ: сходится.

Домашнее задание

1. Исследовать на сходимость следующие ряды:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n^3}$.

Ответ: расходится;

б) $1+\frac{2}{3}+\ldots+\frac{n}{2n-1}+\ldots$

Ответ: расходится;

в) $\sin\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{4}+\ldots+\sin\frac{\pi}{2^n}+\ldots$

Ответ: сходится;

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1}\right)$.

Ответ: расходится;

д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^4+1}}$.

Ответ: сходится;

е) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4\cdot 2^n-3}$.

Ответ: сходится;

ж) $\frac{2+1}{5+1}+\frac{2^2+1}{5^2+1}+\frac{2^3+1}{5^3+1}+\ldots$

Ответ: сходится.

2. Изучить теоретический материал по теме «Признак Даламбера. Признаки Коши».

III. Признак Даламбера. Радикальный и интегральный признаки Коши

1. Опрос теоретического материала. Отметить, что достаточные признаки:

Признак Даламбера: $p=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ (при $p<1$ ряд сходится, при $p>1$ ряд расходится, при $p=1$ нужны дополнительные исследования);

Радикальный признак Коши: $p=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$ (при $p<1$ ряд сходится, при $p>1$ ряд расходится);

Интегральный признак Коши: если сходится (расходится) несобственный интеграл $\int\limits_1^{\infty} f(x)dx$ $\left(a_n=f(n)\right)$, то сходится (расходится) и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, применяются только к рядам с положительными членами.

2. Студенты работают с УМК, самостоятельно изучают обучающие примеры.

Обучающий пример 1. Исследовать сходимость ряда

$$\frac{2}{1}+\frac{2^2}{2^{10}}+\frac{2^3}{3^{10}}+\ldots+\frac{2^n}{n^{10}}+\ldots$$

Решение. Применим признак Даламбера; имеем $a_n=\dfrac{2^n}{n^{10}}$,

$$a_{n+1}=\frac{2^{n+1}}{(n+1)^{10}},\ \text{значит}\ p=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^{n+1}}{(n+1)^{10}}\div\frac{2^n}{n^{10}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}\cdot n^{10}}{(n+1)^{10}\cdot 2^n}=$$

$$=2\lim_{n\to\infty}\frac{n^{10}}{(n+1)^{10}}=2\cdot 1=2>1,\quad \text{ряд расходится.}$$

Обучающий пример 2. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}.$$

Решение. Имеем $a_n=\dfrac{1}{2^n}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$. Здесь удобнее применить радикальный признак Коши:

$$p=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=\frac{e}{2}>1,$$

т.е. данный ряд расходится.

Обучающий пример 3 (решает преподаватель у доски). Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n}{\left(n^2+1\right)^2}$.

Решение. Применим интегральный признак Коши, т.е. рассмотрим несобственный интеграл

$$\int_1^{\infty}\frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}dx=\lim_{b\to\infty}\int_1^b\left(x^2+1\right)^{-2}d\left(x^2+1\right)=\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{x^2+1}\right)\Bigg|_1^b=$$

$$=-\lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{b^2+1}-\frac{1}{2}\right)=-\left(0-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}.$$

Несобственный интеграл сходится, значит, сходится и данный ряд.

Заметим, что данный ряд можно было сравнить со сходящимся рядом Дирихле $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ ($p > 1$).

Обучающий пример 4 (решает преподаватель у доски). Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^n}{(2n)!}=0$.

Решение. Рассмотрим числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(2n)!}$ и исследуем его сходимость при помощи признака Даламбера.

$$p=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{\left(2(n+1)\right)!}\cdot\frac{(2n)!}{n^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}(1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot2n)}{n^n\cdot(1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot2n)(2n+1)(2n+2)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n(2n+1)2(n+1)}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^n}{n^n}\cdot\frac{1}{2n+1}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}=$$

$=\frac{e}{2}\cdot0=0<1$. Значит, ряд сходится и из необходимого признака сходимости следует, что $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^n}{(2n)!}=0$.

3. Два студента у доски решают (параллельно) примеры:

1) исследовать на сходимость ряды:

а) $\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}+\ldots+\frac{1}{(2n+1)!}+\ldots$ *Ответ*: сходится;

б) $\arcsin1+\arcsin^2\frac{1}{2}+\ldots+\arcsin^n\frac{1}{n}+\ldots$ *Ответ*: сходится;

в) $\frac{1}{2\ln^2 2}+\frac{1}{3\ln^2 3}+\ldots+\frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}+\ldots$ *Ответ*: сходится;

2) доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n!)^n}{n^{n^2}}=0$.

Домашнее задание

1. Исследовать на сходимость ряды:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{n!}$.

Ответ: сходится;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{100n+1}$.

Ответ: расходится;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2n^2+2n+1}{5n^2+2n+1}\right)^n$.

Ответ: сходится;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\ln^n(n+1)}$.

Ответ: сходится;

д) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}\ln\dfrac{n+1}{n-1}$.

Ответ: сходится;

е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$.

Ответ: расходится;

ж) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1+n}{1+n^2}\right)^2$.

Ответ: сходится;

з) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln n(\ln\ln n)^2}$.

Ответ: сходится.

2. Доказать, что

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n)!}{a^{n!}}=0$, $(a>1)$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^n}{(n!)^2}=0$.

3. Изучить теоретический материал по теме «Знакочередующиеся и знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость».

IV. Знакочередующиеся и знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость

1. Краткий теоретический опрос по теме практического занятия. Отметить, что знакочередующийся ряд

$$a_1-a_2+a_3-a_4+\ldots+(-1)^{n+1}a_n+\ldots\quad(a_n>0)$$

является частным случаем знакопеременного ряда

$$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots,$$

у которого члены ряда могут иметь любые знаки. Знакопеременные ряды исследуются на абсолютную или условную сходимость.

Если сходится ряд, составленный из абсолютных величин соответствующих членов знакопеременного ряда,

$$|a_1|+|a_2|+|a_3|+...+|a_n|+...,$$

то сходится и сам знакопеременный ряд, при этом он называется *абсолютно сходящимся*.

Если же ряд из абсолютных величин расходится, а сам ряд сходится, то он называется *условно сходящимся*.

К исследованию знакочередующихся рядов можно применить достаточный признак – теорему Лейбница:

Если выполняются для знакочередующегося ряда условия:

1) $a_1 > a_2 > a_3 > ...$ ($a_n > 0$, начиная с некоторого номера n_0);

2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$,

то этот ряд сходится.

2. Студенты работают с УМК, самостоятельно разбирают обучающие примеры.

Обучающий пример 1. Исследовать на абсолютную или условную сходимость ряд $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}+...$

Решение. Рассмотрим ряд из абсолютных величин

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+...$$

Этот ряд составлен из членов геометрической прогрессии со знаменателем $q=\frac{1}{2}<1$ и, следовательно, сходится. Значит, и данный ряд сходится, причем абсолютно.

Обучающий пример 2. Исследовать на абсолютную или условную сходимость ряд 1,1 – 1,01 + 1,001 – 1,0001 + …

Решение. Ряд из абсолютных величин

$$1{,}1 + 1{,}01 + 1{,}001 + 1{,}0001 + \dots$$

расходится, так как $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{10^n}\right)=1\neq 0$.

Первое условие теоремы Лейбница выполняется:

$$1{,}1 > 1{,}01 > 1{,}001 > 1{,}0001 > \dots,$$

но $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, как только что было показано. Ряд расходится.

Обучающий пример 3. Исследовать на абсолютную или условную сходимость ряд $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-...+(-1)^{n+1}\frac{1}{2n-1}+...$

Решение. Рассмотрим ряд из абсолютных величин

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-...+\frac{1}{2n-1}+...$$

и сравним его с расходящимся гармоническим рядом $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-...+\frac{1}{n}+...$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n-1}\cdot\frac{n}{1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n-1}=\frac{1}{2}\neq 0.$$

Значит, оба ряда расходятся.

Проверим для самого знакочередующегося ряда выполнение условий теоремы Лейбница:

1) $1>\frac{1}{3}>\frac{1}{5}>...;$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2n-1}=0.$

Следовательно, данный ряд сходится и называется условно сходящимся.

Обучающий пример 4 (решает преподаватель у доски). Исследовать на сходимость ряд

$$\frac{\cos\alpha}{1^5}+\frac{\cos 2\alpha}{2^5}+\frac{\cos 3\alpha}{3^5}+...+\frac{\cos n\alpha}{n^5}+... \tag{1}$$

Решение. Этот ряд знакопеременный, так как $\cos n\alpha$ (n= 1, 2, 3, …) в зависимости от угла $n\alpha$ может принимать значения любого знака. Исследуем его на абсолютную или условную сходимость, для чего рассмотрим ряд из абсолютных величин

$$\frac{|\cos\alpha|}{1^5}+\frac{|\cos 2\alpha|}{2^5}+\frac{|\cos 3\alpha|}{3^5}+...+\frac{|\cos n\alpha|}{n^5}+... \tag{2}$$

Члены ряда (2) не превосходят соответствующих членов ряда

$$\frac{1}{1^5}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{3^5}+...+\frac{1}{n^5}+..., \tag{3}$$

так как $|\cos n\alpha|\leq 1$.

Ряд (3) сходится как ряд Дирихле (p = 5 > 1). Тогда по первому признаку сравнения сходится ряд (2), а, стало быть, сходится и ряд (1), причем абсолютно.

3. Два студента у доски решают (параллельно) примеры:

1) показать, что ряд $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ расходится.

Предложить одному студенту использовать обычную схему исследования знакопеременных рядов на абсолютную и условную сходимость, а второму – определение сходимости числовых рядов с помощью частичных сумм;

2) выяснить, какие из указанных рядов сходятся абсолютно, какие условно, какие расходятся:

а) $1-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n-1)^3}+\ldots$

Ответ: сходится абсолютно;

в) $\frac{1}{2}-\frac{8}{4}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{n^3}{2^n}+\ldots$

Ответ: сходится абсолютно;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{n^2}}{n!}$.

Ответ: расходится;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-\ln n}$.

Ответ: сходится условно.

Домашнее задание

1. Проработать теоретический материал к следующему практическому занятию по теме «Степенные ряды. Нахождение радиуса и интервала сходимости».

2. Выяснить, какие из следующих рядов сходятся абсолютно, какие условно и какие расходятся.

а) $\frac{1}{\ln 2}-\frac{1}{\ln 3}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{\ln(n+1)}+\ldots$ *Ответ*: сходится условно;

б) $\frac{\sin\alpha}{1^4}+\frac{\sin 2\alpha}{2^4}+\frac{\sin 3\alpha}{3^4}+\ldots+\frac{\sin n\alpha}{n^4}+\ldots$ *Ответ*: сходится абсолютно;

в) $2-\frac{3}{2}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{n+1}{n}+\ldots$ *Ответ*: расходится;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}$. *Ответ*: сходится абсолютно;

д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2n-1}{3n+2}\right)^n$. *Ответ*: сходится абсолютно;

е) $\frac{1}{3}-\frac{1\cdot 4}{3\cdot 5}+\frac{1\cdot 4\cdot 7}{3\cdot 5\cdot 7}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots\cdot(3n-2)}{3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot(2n+1)}+\ldots$ *Ответ*: расходится;

ж) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{5n-2}$. *Ответ*: расходится;

з) $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{\ln n}{n}$. *Ответ*: сходится условно;

и) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n!}{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}$. *Ответ*: сходится абсолютно;

к) $\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n\ln n(\ln\ln n)^3}$. *Ответ*: сходится абсолютно;

л) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{(\ln 3)^n}$. *Ответ*: сходится абсолютно.

3. Предложить студентам самостоятельно решить следующий пример:

Вычислить сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2\cdot 2^n}$ с точностью $\delta = 0{,}001$.

Указание. Так как данный ряд знакочередующийся, сходящийся (почему?), то величина отброшенного остатка ряда, который также является знакочередующимся, не превосходит первого отброшенного члена (на основании теоремы Лейбница), т.е. должно выполняться неравенство

$$\frac{1}{n^2\cdot 2^n} \le 0{,}001.$$

Решая перебором $n = 1, 2, 3, \ldots$ это неравенство, определяется нужное число членов частичной суммы, взятой для приближенного вычисления суммы данного ряда.

Ответ: 0,449.

V. Степенные ряды. Нахождение радиуса и интервала сходимости

1. Проверка выполнения домашнего задания. Обратить внимание на выполнение последнего примера, где $n = 6$,

$$S \cong S_5 = \frac{1}{2} - \frac{1}{16} + \frac{1}{72} - \frac{1}{256} + \frac{1}{800} = 0{,}449.$$

2. Краткий теоретический опрос. Обратить внимание, что областью сходимости степенного ряда является интервал $(-R, R)$, где R – радиус сходимости можно определить по одной из формул

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_n}{C_{n+1}}\right|; \qquad R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|C_n|}};$$

здесь C_n – коэффициент при x^n степенного ряда

$$C_0 + C_1x + C_2x^2 + \ldots + C_nx^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} C_nx^n .$$

Внутри интервала $(-R,\ R)$ сходимость должна быть абсолютной. На концах интервала (при $x = -R$ и $x = R$) получившийся числовой ряд исследуется дополнительно.

3. Обучающий пример 1. Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n^3 \cdot 5^n} .$$

Решение. $C_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^3 \cdot 5^n} \Rightarrow |C_n| = \dfrac{1}{n^3 \cdot 5^n},\ |C_{n+1}| = \dfrac{1}{(n+1)^3 \cdot 5^{n+1}}$.

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{C_n}{C_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3 \cdot 5^n} \cdot \frac{(n+1)^3 \cdot 5^{n+1}}{1} = 5 \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3}{n^3} = 5 .$$

Положим $x = -5$, имеем числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(-5)^n}{n^3 \cdot 5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{5^n \cdot (-1)^n}{n^3 \cdot 5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n+1}}{n^3} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} ,$$

который сходится как ряд Дирихле ($p = 3 > 1$). Значит, при $x = -5$ ряд абсолютно сходится.

Пусть $x = 5$, имеем ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{5^n}{n^3 \cdot 5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^3}$. Ряд из его абсолютных величин $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ сходится ($p = 3 > 1$), поэтому при $x = 5$ степенной ряд тоже сходится абсолютно.

Итак, отрезок $[-5, 5]$ является областью сходимости данного ряда.

Обучающий пример 2. Исследовать сходимость ряда

$$1!(x-5) + 2!(x-5)^2 + 3!(x-5)^3 + \ldots$$

Решение. Пусть $X = x - 5$, имеем ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n!X^n$. Здесь $C_n = n!$, $C_{n+1} = (n+1)!$, $\displaystyle R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{C_n}{C_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$. Ряд сходится только при $X = 0$, т.е. при $x - 5 = 0$, $x = 5$.

Обучающий пример 3. Исследовать сходимость ряда

$$1+\frac{x^3}{10}+\frac{x^6}{10^2}+\frac{x^9}{10^3}+\ldots$$

Решение. Ряд составлен из членов геометрической прогрессии со знаменателем $q=\frac{x^3}{10}$. Как известно, он сходится, если $|q|<1$, и расходится, если $|q|\ge 1$. Следовательно, $\left|\frac{x^3}{10}\right|<1 \quad\Rightarrow\quad \left|x^3\right|<10 \quad\Rightarrow\quad |x|<\sqrt[3]{10} \quad\Rightarrow$ $-\sqrt[3]{10}<x<\sqrt[3]{10}$, т.е. $\left(-\sqrt[3]{10},\sqrt[3]{10}\right)$ – область сходимости данного ряда.

4. Два студента у доски (параллельно) решают следующие примеры:
Найти области сходимости степенных рядов:

а) $x-\frac{x^2}{2}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+\ldots$

Ответ: (– 1, 1), при $x = 1$ ряд сходится условно;

б) $\frac{\ln 2}{2}x^2+\frac{\ln 3}{3}x^3+\ldots\frac{\ln(n+1)}{n+1}x^{n+1}+\ldots$

Ответ: (– 1, 1), при $x = -1$ ряд сходится условно;

в) $(x-2)+\frac{1}{2^2}(x-2)^2+\frac{1}{3^2}(x-2)^3+\ldots$ *Ответ*: $1\le x\le 3$.

5. Заметим, что в формулах для нахождения радиуса сходимости C_n – это коэффициент при x^n. Если же дан ряд по степеням, например, x^{2n}, x^{2n+1} и других, то радиус сходимости может быть найден неверно (смотри соответствующий пример в теоретической части модуля).

Обучающий пример 4 (решает преподаватель у доски). Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n!}$.

Решение. Рассмотрим ряд из абсолютных величин и применим признак Даламбера, полагая $|a_n|=\frac{|x|^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n!}$, $|a_{n+1}|=\frac{|x|^{\frac{(n+1)n}{2}}}{(n+1)!}$. Тогда

$$p=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{\frac{(n+1)n}{2}}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{|x|^{\frac{n(n-1)}{2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^n}{(n+1)}=\begin{cases}0 & \text{при } |x|\le 1,\\ \infty & \text{при } |x|>1.\end{cases}$$

Итак, ряд сходится на отрезке [– 1, 1], где $p = 0 < 1$.

П р и м е р (решает студент у доски). Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^{n}(x-2)^{2n}.$$

Ответ: $\left(2-\sqrt{2},\, 2+\sqrt{2}\right)$.

О б у ч а ю щ и й п р и м е р 5 (решает преподаватель у доски). Найти сумму ряда $1+2x+3x^2+4x^3+\ldots$, продифференцировав почленно ряд $1+x+x^2+x^3+\ldots$ $\left(|x|<1\right)$.

Решение. Последний ряд имеет сумму $S=\dfrac{1}{1-q}=\dfrac{1}{1-x}$, т.е.

$$1+x+x^2+x^3+\ldots=\frac{1}{1-x}.$$

Ряд слева (как степенной ряд) мажорируем в интервале (–1, 1), поэтому его можно почленно дифференцировать

$$1+2x+3x^2+4x^3+\ldots=\frac{1}{(1-x)^2},$$

интервал сходимости при этом не изменяется, т.е. $-1< x < 1$.

П р и м е р (решает студент у доски). Найти сумму ряда $x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^4}{4}+\ldots$, проинтегрировав почленно ряд

$$1+x+x^2+x^3+\ldots \quad \left(|x|<1\right).$$

Ответ: $-\ln(1-x)$.

Домашнее задание

1. Изучить по теоретической части модуля материал к следующему практическому занятию по теме «Ряды Тейлора и Маклорена и их приложения».

2. Решить следующие примеры.

Найти области сходимости степенных рядов:

а) $x-\dfrac{x^3}{3\cdot 3!}+\ldots+(-1)^{n+1}\dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)(2n-1)!}+\ldots$ *Ответ*: $(-\infty, \infty)$;

б) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot x^n}{3^n\cdot\sqrt{n}}$. *Ответ*: $\left(-\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$, при $x=-\dfrac{3}{2}$ условно сходится;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(x-2)^n}{2^n\sqrt{n+1}}$. *Ответ*: (0, 4), при $x = 4$ условно сходится;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(nx)^n}{n!}$. *Ответ*: $\left(-\dfrac{1}{e},\dfrac{1}{e}\right)$, при $x=-\dfrac{1}{e}$ условно сходится.

Указание. При исследовании сходимости на концах интервала учесть, что факториалы больших чисел могут быть приближенно выражены формулой Стирлинга

$$n!\simeq\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}\,.$$

д) Найти сумму ряда $x+\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}+\ldots$, проинтегрировав ряд $1+x^2+x^4+\ldots$ $(|x|<1)$. *Ответ*: $S(x)=\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right|$ $(|x|<1)$.

VI. Ряды Тейлора и Маклорена и их приложения

1. Преподаватель у доски выписывает ряды Тейлора и Маклорена, формулу для остаточного члена, разложения в ряды функций e^x, $\sin x$, $\cos x$, а также биномиальный ряд и его частные случаи.

$$f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots \qquad (1)$$

$$R_n(x)=f^{(n+1)}(C)\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}=f^{(n+1)}\big(a+\theta(x-a)\big)\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!},$$

где C находится между x и a, $0<\theta<1$ (в форме Лагранжа).

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots \qquad (2)$$

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots \qquad (-\infty<x<\infty) \qquad (3)$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots \qquad (-\infty<x<\infty) \qquad (4)$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots \qquad (-\infty<x<\infty) \qquad (5)$$

$$(1+x)^m = x + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \ldots +$$

$$+\frac{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-(n-1))}{n!}x^n + \ldots \quad (-1<x<1) \qquad (6)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + \ldots \qquad (-1<x<1) \quad (7)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots \qquad (-1<x<1) \quad (8)$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2\cdot 4}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 + \ldots \quad (-1\le x\le 1) \quad (9)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \ldots \qquad (-1<x\le 1) \quad (10)$$

Ряд (6) называется биномиальным, на концах интервала сходимости он ведет себя по разному: при $m \geq 0$ он абсолютно сходится в точках $x = \pm 1$; при $-1 < m < 0$ расходится в точке $x = -1$ и условно сходится в точке $x = 1$; при $m \le -1$ расходится в точках $x = \pm 1$.

В теоретической части модуля показано, что для всех этих рядов $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ в области сходимости.

2. Преподаватель у доски решает

Обучающий пример 1. Разложить функцию $f(x) = \sin 2x$ в ряд Тейлора по степеням $\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

Решение.

1) решим сначала этот пример, используя формулу (1).

$a = \frac{\pi}{4}$, $\qquad f(a) = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1;$

$f'(x) = 2\cos 2x$, $\qquad f'(0) = 2\cos\frac{\pi}{2} = 0;$

$f''(x) = -2^2\sin 2x$, $\qquad f''(0) = -2^2;$

$f'''(x) = -2^3\cos 2x$, $\qquad f'''(0) = 0;$

$f^{IY}(x) = 2^4\sin 2x$, $\qquad f^{IY}(0) = 2^4;$

……………………………………..

Имеем

$$\sin 2x = 1-\frac{2^2}{2!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2+\frac{2^4}{4!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^4-\ldots+(-1)^n\frac{2^{2n}}{(2n)!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{2n}+\ldots;$$

2) решим этот пример, используя известное разложение $\cos x$ в ряд Маклорена.

$$\sin 2x=\sin 2\left(x-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\pi}{2}\right)=\cos 2\left(x-\frac{\pi}{4}\right).$$

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots \quad (-\infty<x<\infty).$$

Пусть $x=2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ в левой и правой части этого равенства, тогда

$$\sin 2x=\cos 2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=$$

$$=1-\frac{2^2}{2!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2+\frac{2^4}{4!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^4-\ldots+(-1)^n\frac{2^{2n}}{(2n)!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{2n}+\ldots,$$

причем $-\infty<2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)<\infty \;\Rightarrow\; -\infty<x<\infty$, т.е. область сходимости не изменилась.

3. Два студента у доски (параллельно) решают:

П р и м е р 1. Разложить функцию $y=\ln x$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0 = 1$.

Ответ: $\ln x=(x-1)-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{(x-1)^n}{n}+\ldots$

П р и м е р 2. Разложить в ряд Маклорена $f(x)=\operatorname{ch} x$.

Ответ: $\operatorname{ch} x=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots$

П р и м е р 3. Найти первые пять членов ряда Маклорена функции $y=e^{\cos x}$.

Ответ: $e\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{6}-\ldots\right)$.

П р и м е р 4. Используя известные разложения, разложить в ряд Маклорена функцию $y = \cos^2 x$.

У к а з а н и е. $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$.

Ответ: $1 - \left(x^2 - \frac{(2x)^4}{2 \cdot 4!} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1} \cdot x^{2n}}{(2n)!} + \ldots \right)$.

4. Решить самостоятельно следующие примеры:

П р и м е р 1. Разложить функцию $y = \sin \frac{\pi x}{4}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0 = 2$.

Ответ: $1 - \left(\frac{\pi}{4} \right)^2 \frac{(x-2)^2}{2!} + \ldots + (-1)^{n+1} \left(\frac{\pi}{4} \right)^{2n-2} \frac{(x-2)^{2n-2}}{(2n-2)!} + \ldots$

П р и м е р 2. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x) = \operatorname{sh} x$.

Ответ: $\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots$

П р и м е р 3. Найти первые пять членов ряда Маклорена функции $y = e^x \cdot \sin x$.

Ответ: $x + x^2 + \frac{2x^3}{3!} - \frac{4x^5}{5!} + \ldots$

П р и м е р 4. Используя известные разложения, разложить в степенной ряд по степеням x функцию $y = (x - \operatorname{tg} x)\cos x$.

Ответ: $-\frac{2x^3}{3!} + \frac{4x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{2nx^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$

5. Как уже было показано ранее, для разложения функций в степенные ряды можно использовать известные разложения и теоремы о почленном дифференцировании и интегрировании степенных рядов.

О б у ч а ю щ и й п р и м е р 1. Разложить в ряд Маклорена

$$y = \ln(10 + x).$$

Решение. $\ln(10+x)=\ln 10\left(1+\frac{x}{10}\right)=\ln 10+\ln\left(1+\frac{x}{10}\right).$

Используем ряд (7)

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\ldots+(-1)^n x^n+\ldots \qquad (-1<x<1).$$

Положим $x=\frac{x}{10}$, тогда $\frac{1}{1+\frac{x}{10}}=1-\frac{x}{10}+\frac{x}{10^2}^2-\ldots+(-1)^n\frac{x}{10^n}^n+\ldots$

$\left(-1<\frac{x}{10}<1 \quad\Rightarrow\quad -10<x<10\right).$

Интегрируя последний ряд, получим

$$10\ln\left(1+\frac{x}{10}\right)=x-\frac{x^2}{10\cdot 2}+\frac{x^3}{10^2\cdot 3}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{10^n(n+1)}+\ldots$$

(интервал сходимости (– 10, 10) при этом не меняется).

Таким образом,

$$\ln(10+x)=\ln 10+\frac{x}{10}-\frac{x^2}{10^2\cdot 2}+\frac{x^3}{10^3\cdot 3}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{10^{n+1}(n+1)}+\ldots$$

$(-10<x<10)$.

6. Студент у доски решает

П р и м е р 1. Разложить в ряд Маклорена arctg x.

Ответ: $x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots$

7. Так как приложение рядов Тейлора и Маклорена к приближенному вычислению значений функции и определенных интегралов достаточно подробно (с соответствующими примерами) освещено в теоретической части модуля, остановимся только на применении степенных рядов к нахождению приближенных решений дифференциальных уравнений.

О б у ч а ю щ и й п р и м е р 1 (решает преподаватель у доски). Найти пять первых членов разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения $y'=x^2+y^2$, если $y(1)=1$.

Решение. Решение ищем в виде ряда Тейлора

$$y = y(1) + \frac{y'(1)}{1!}(x-1) + \frac{y''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{y'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \ldots$$

По условию $y(1) = 1$, из самого уравнения $y'(1) = 1^2 + 1^2 = 2$. Дифференцируя исходное уравнение, получаем

$y'' = 2x + 2y \cdot y'$, $\qquad y''(1) = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 2 = 6$,

$y''' = 2 + 2y'^2 + 2yy''$, $\qquad y'''(1) = 22$,

$y^{IY} = 4y' \cdot y'' + 2y'y'' + 2y \cdot y'''$, $\qquad y^{IY}(1) = 116$ и т.д.

В результате, частное решение найдено в виде

$$y(x) = 1 + 2(x-1) + \frac{6(x-1)^2}{2} + \frac{22}{6}(x-1)^3 + \frac{116}{24}(x-1)^4 + \ldots =$$

$$= 1 + 2(x-1) + 3(x-1)^2 + \frac{11}{3}(x-1)^3 + \frac{29}{6}(x-1)^4 + \ldots$$

8. Два студента у доски (параллельно) решают

Пример 1. Найти первых шесть членов разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения $y'' - \left(1 + x^2\right)y = 0$, $y(0) = -2$, $y'(0) = 2$.

Ответ: $y = -2 + 2x - x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{7}{60}x^5 + \ldots$

Домашнее задание

1. Найти первые пять членов ряда Маклорена функции $y = \ln\left(1 + e^x\right)$.

Ответ: $\ln 2 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{192} + \ldots$

2. Разложить функцию $y = \frac{1}{x}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x = 3$.

Ответ: $\frac{1}{3} - \frac{x-3}{9} + \frac{(x-3)^2}{27} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{(x-3)^{n-1}}{3^n} + \ldots$

3. Пользуясь известными формулами разложения в ряд Маклорена, разложить в окрестности $a = 0$, следующие функции:

а) $y = e^{2x}$. *Ответ*: $1 + 2x + \frac{(2x)^2}{2!} + \ldots + \frac{(2x)^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots$;

б) $y = \sin\frac{x}{2}$. *Ответ*: $\frac{x}{2} - \frac{x^3}{2^3 \cdot 3!} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{2^{2n-1}\cdot(2n-1)!} + \ldots$;

в) $y = x\ln(1+x)$. *Ответ*: $x^2 - \frac{x^3}{2} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{n} + \ldots$;

г) Функцию $y = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$ разложить в ряд Маклорена исходя из соотношения $\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) = \int\limits_0^x \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ и указать интервал сходимости полученного ряда.

Ответ: $x - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} - \ldots \quad (-1 \le x \le 1)$.

4. Вычислить приближенное значение определенного интеграла, взяв три члена разложения подынтегральной функции в ряд, указать погрешность вычислений
$$\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{x}\,dx.$$

Ответ: 0,3230; погрешность $\delta = 0{,}0001$.

5. Найти первые пять членов разложения решения дифференциального уравнения в степенной ряд: $y'' = y\cos x + x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Ответ: $y(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{5x^6}{6!} + \ldots$

6. Подготовиться к выполнению контрольной работы на следующем практическом занятии.

VII. Контрольная работа по теме «Ряды»

Студенты в обязательном порядке выполняют соответствующий вариант I уровня теста, каждая задача оценивается в 1 балл. По желанию можно решать задачи II уровня (каждая по 2 балла) и III уровня (3 – 5 баллов).

VIII. Разложение функций в ряд Фурье, заданных на [– π, π]

Рядом Фурье на [– π, π] называется ряд вида

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right), \tag{1}$$

где a_0, a_n, b_n – коэффициенты, вычисляемые по формулам:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(x\right)dx, \tag{2}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(x\right)\cos nx\,dx, \tag{3}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(x\right)\sin nx\,dx. \tag{4}$$

Если функция $f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Дирихле (смотри теоретическую часть модуля), то ряд справа в формуле (1) сходится к этой функции; в точках непрерывности сумма этого ряда равна значению функции в этих точках. Если $x = x_0$ – точка разрыва I рода, то

$$S\left(x_0\right)=\frac{f\left(x_0-0\right)+f\left(x_0+0\right)}{2}.$$

Если функция $f(x)$ – четная, то она раскладывается в ряд Фурье только по косинусам, тогда

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f\left(x\right)dx, \quad a_n=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f\left(x\right)\cos nx\,dx, \quad b_n=0.$$

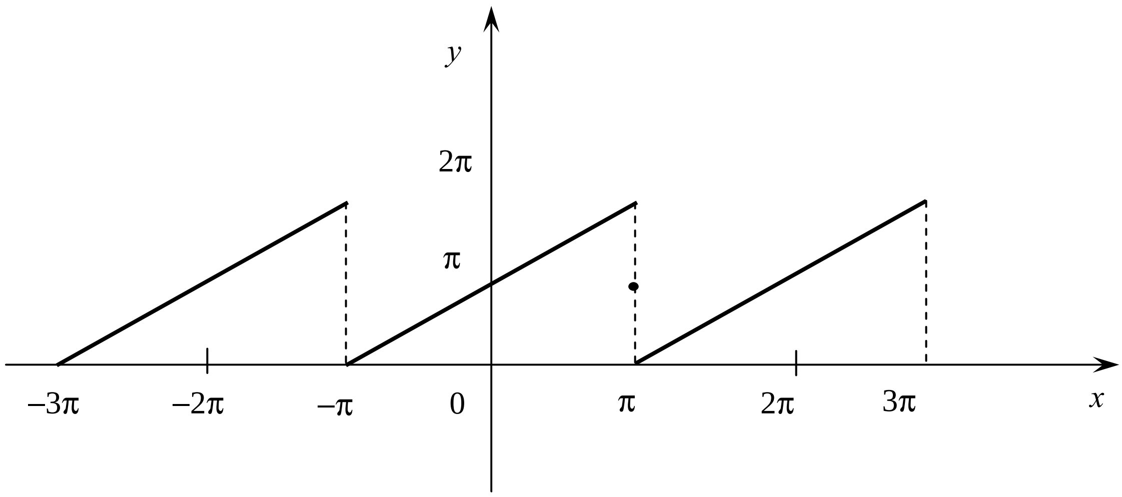
Если функция $f(x)$ – нечетная, то она раскладывается в ряд Фурье только по синусам, тогда

$$a_0=0, \quad a_n=0, \quad b_n=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f\left(x\right)\sin nx\,dx.$$

1. Обучающий пример 1 (решает преподаватель у доски). Разложить в ряд Фурье 2π-периодическую функцию, заданную на [– π, π] уравнением $f\left(x\right)=x+\pi$.

Решение.

Функция кусочно-монотонная и ограниченная.



Определим коэффициенты ряда Фурье:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x+\pi)dx=\frac{1}{\pi}\left(\frac{x^2}{2}+\pi x\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi}=\frac{1}{\pi}\left(\pi^2+\pi^2\right)=2\pi;$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x+\pi)\cos nx\,dx=\begin{vmatrix}u=x+\pi, & dv=\cos nx\,dx\\ du=dx, & v=\dfrac{\sin nx}{n}\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{(x+\pi)\sin nx}{n}\Bigg|_{-\pi}^{\pi}-\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx dx\right)=\text{ (так как } \sin n\pi=0\ \ \forall n\text{) }=$$

$$=\frac{1}{\pi n^2}\cos nx\Bigg|_{-\pi}^{\pi}=\frac{1}{\pi n^2}\left(\cos n\pi-\cos n\pi\right)=0.$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x+\pi)\sin nx\,dx=\begin{vmatrix}u=x+\pi, & dv=\sin nx\,dx\\ du=dx, & v=-\dfrac{\cos nx}{n}\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{(x+\pi)\cos nx}{n}\Bigg|_{-\pi}^{\pi}+\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx dx\right)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{-2\pi\cos n\pi}{n}+\frac{1}{n^2}\sin nx\Bigg|_{-\pi}^{\pi}\right)=$$

$$=-\frac{2}{n}\cos n\pi=-\frac{2}{n}(-1)^n=\frac{2}{n}(-1)^{n+1}.$$

Следовательно,

$$\pi-x=\pi+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx=\pi+2\left(\sin x-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-...\right).$$

В точке разрыва $x=\pi$ $\quad S(\pi)=\dfrac{f(\pi-0)+f(\pi+0)}{2}=\dfrac{2\pi+0}{2}=\pi$.

2. Студенты у доски решают примеры:

1) Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)=\begin{cases} x & \text{при } -\pi\le x\le 0, \\ 2x & \text{при } \ 0<x<\pi, \end{cases}$ имеющую период 2π.

Ответ: $\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}+3\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{\sin nx}{n}$;

2) Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)=\begin{cases} -x & \text{при } -\pi< x\le 0, \\ 0 & \text{при } \ 0<x\le\pi. \end{cases}$

Построить графики данной функции и суммы ряда.

Ответ: $\dfrac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{(-1)^n-1}{\pi n^2}\cos nx+\dfrac{(-1)^n}{n}\sin nx\right)$.

3) Разложить в ряд Фурье 2π-периодическую функцию $f(x)=x$, если $-\pi<x\le\pi$.

Ответ: $2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{\sin nx}{n}$.

3. Студенты решают самостоятельно:

1) периодическая (с периодом 2π) функция определена следующим образом $\quad f(x)=\begin{cases} -1 & \textit{при } -\pi<x<0, \\ 1 & \textit{при } \ 0\le x\le\pi. \end{cases}$ Разложить ее в ряд Фурье.

Ответ: $f(x)=\dfrac{4}{\pi}\left(\sin x+\dfrac{\sin 3x}{3}+\dfrac{\sin 5x}{5}+\ldots+\dfrac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)}+\ldots\right)$;

2) $f(x)=|x|$ на [– π, π], 2π-периодическая. Разложить ее в ряд Фурье.

Ответ: $f(x)=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{4}{\pi}\left(\dfrac{\cos x}{1^2}+\dfrac{\cos 3x}{3^2}+\ldots+\dfrac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}+\ldots\right)$;

3) Найти разложение в ряд Фурье функции $f(x)=\begin{cases}-2 & при\ -\pi<x\le 0,\\ 1 & при\ \ 0<x\le\pi.\end{cases}$ Построить графики данной функции и суммы ряда.

Ответ: $f(x)=-\frac{1}{2}+\frac{6}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin(2n-1)x$.

Домашнее задание

1. Подготовить теоретический материал по теме «Ряды Фурье для функций, заданных на $[-\ell,\ell]$».

2. Решить следующие примеры:

а) разложить в ряд Фурье 2π-периодическую функцию $f(x)=\begin{cases}\pi+2x & при\ -\pi<x\le 0,\\ -\pi & при\ \ 0<x\le\pi.\end{cases}$

Ответ: $-\frac{\pi}{2}+2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\pi(2n-1)^2}\cos(2n-1)x-\frac{1}{n}\sin nx\right)$;

б) разложить функцию $y=x^2$ на $(0, \pi)$ в ряд только по синусам.

Ответ: $\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{\pi^2}{n}+\frac{2}{\pi^3}\left((-1)^n-1\right)\right)\sin nx$;

в) разложить функцию $y=x^3$ на $[-\pi, \pi]$ в ряд Фурье.

Ответ: $2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{6}{n^3}-\frac{\pi^2}{n}\right)\sin nx$.

IX. Разложение функций в ряд Фурье, заданных на $[-\ell,\ell]$

1. Опрос теоретического материала.

2ℓ-периодическая функция раскладывается в ряд Фурье следующим образом

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{\ell}x+b_n\sin\frac{n\pi}{\ell}x\right),$$

где a_0, a_n, b_n – коэффициенты вычисляются по формулам:

$$a_0=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)\,dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\ell}\int\limits_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos\frac{n\pi}{\ell}x\,dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\ell}\int\limits_{-\ell}^{\ell} f(x)\sin\frac{n\pi}{\ell}x\,dx.$$

Если в ряд Фурье раскладывается четная функция, то

$$a_0 = \frac{2}{\ell}\int\limits_0^{\ell} f(x)\,dx, \quad a_n = \frac{2}{\ell}\int\limits_0^{\ell} f(x)\cos\frac{n\pi}{\ell}x\,dx, \quad b_n = 0,$$

а если нечетная функция, то

$$a_0 = 0, \quad a_n = 0, \quad b_n = \frac{2}{\ell}\int\limits_0^{\ell} f(x)\sin\frac{n\pi}{\ell}x\,dx.$$

2. Обучающий пример 1 (решает преподаватель у доски). Найти разложение в ряд Фурье функции $y = x^2$ на $[-\ell, \ell]$.

Решение. Функция $y = x^2$ – четная, поэтому $b_n = 0$.

$$a_0 = \frac{2}{\ell}\int\limits_0^{\ell} f(x)\,dx = \frac{2}{\ell}\int\limits_0^{\ell} x^2\,dx = \frac{2}{\ell}\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^{\ell} = \frac{2}{3}\ell^2,$$

$$a_n = \frac{2}{\ell}\int\limits_0^{\ell} f(x)\cos\frac{n\pi}{\ell}x\,dx = \frac{2}{\ell}\int\limits_0^{\ell} x^2\cos\frac{n\pi}{\ell}x\,dx = \left|\begin{matrix} u = x^2, & dv = \cos\frac{n\pi}{\ell}x\,dx \\ du = 2x\,dx, & v = \frac{\ell}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{\ell}x \end{matrix}\right| =$$

$$= \frac{2}{\ell}\left(\frac{\ell}{n\pi}x^2\sin\frac{n\pi}{\ell}x\Bigg|_0^{\ell} - \frac{2\ell}{n\pi}\int\limits_0^{\ell} x\sin\frac{n\pi}{\ell}x\,dx\right) = \left|\begin{matrix} u = x, & dv = \sin\frac{n\pi}{\ell}x\,dx \\ du = dx, & v = -\frac{\ell}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{\ell}x \end{matrix}\right| =$$

$$= \frac{2}{\ell}\left(\frac{\ell^3}{n\pi}\sin n\pi - \frac{2\ell}{n\pi}\left(-\frac{\ell}{n\pi}x\cos\frac{n\pi}{\ell}x\Bigg|_0^{\ell} + \frac{\ell}{n\pi}\int\limits_0^{\ell}\cos\frac{n\pi}{\ell}x\,dx\right)\right) =$$

$$= -\frac{4}{n\pi}\left(-\ell^2\cos n\pi + \frac{\ell^2}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{\ell}x\Bigg|_0^{\ell}\right) = \frac{4\ell^2}{n^2\pi^2}\cos n\pi,$$

так как $\sin n\pi = 0$, то есть $a_n = \frac{4\ell^2}{\pi^2}\frac{(-1)^n}{n^2}$.

Таким образом, $x^2=\frac{\ell^2}{3}+\frac{4\ell^2}{\pi^2}\sum\frac{(-1)^n}{n^2}\cos\frac{n\pi}{\ell}x=$

$$=\frac{\ell^2}{3}-\frac{4\ell^2}{\pi^2}\left(\cos\frac{\pi}{\ell}x-\frac{1}{2^2}\cos\frac{2\pi}{\ell}x+\frac{1}{3^2}\cos\frac{3\pi}{\ell}x-...\right).$$

3. Студенты у доски решают следующие примеры:

Пример 1. Найти разложение в ряд Фурье периодической функции с периодом 4: $f(x)=\begin{cases}-1 & \text{при } -2<x<0,\\ 2 & \text{при } \ 0\le x\le 2.\end{cases}$

Ответ: $f(x)=\frac{1}{2}+\frac{6}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin\frac{(2n-1)\pi}{2}x$.

Пример 2. Найти разложение в ряд Фурье функции $f(x)=-x$ на отрезке [– 2, 2]. Построить графики данной функции и суммы ряда.

Ответ: $f(x)=4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin\frac{n\pi}{2}x$.

4. Студенты самостоятельно решают примеры:

Пример 1. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию с периодом $2\ell=4$, если $f(x)=\begin{cases}1+x & \textit{при } -2<x\le 0,\\ -1 & \textit{при } \ 0<x\le 2.\end{cases}$

Ответ: $-\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\pi(2n-1)^2}\cos\frac{\pi(2n-1)x}{2}-\frac{1}{n}\sin\frac{\pi nx}{2}\right)$.

Пример 2. Разложить в ряд Фурье только по синусам функцию $f(x)=1-\frac{x}{2}$ на [0, 2].

Ответ: $\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{\pi n}{2}x$.

5. Преподаватель у доски отмечает одно важное свойство периодических функций:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)dx=\int_{\lambda}^{\lambda+2\pi}\varphi(x)dx,$$

каким бы ни было число λ.

Это означает, что при вычислении коэффициентов Фурье можно заменить промежуток интегрирования $[-\pi,\pi]$ промежутком $[\lambda,\lambda+2\pi]$, где λ – любое число.

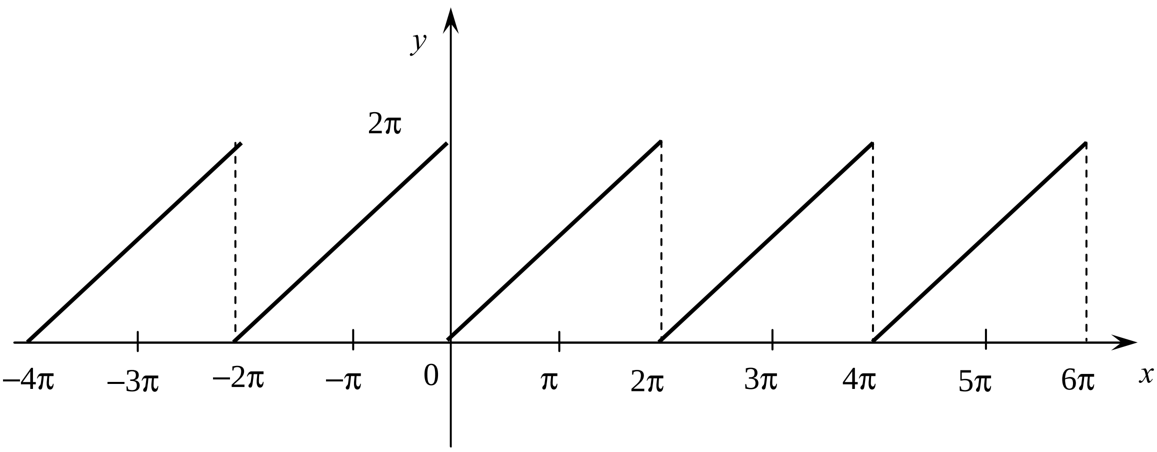
6. Обучающий пример 1. Пусть требуется разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$ с периодом 2π, которая на $[0, 2\pi]$ задана равенством $f(x) = x$.

Решение.

График функции изображен на рисунке. Эта функция на $[-\pi, \pi]$ задается двумя формулами: $f(x) = x + 2\pi$ на $[-\pi, 0]$ и $f(x) = x$ на $[0, \pi]$.

Для разложения этой функции выгоднее воспользоваться следующими формулами (приняв $\lambda = 0$):

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{\lambda}^{\lambda+2\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\,dx = \frac{1}{\pi}\frac{x^2}{2}\bigg|_0^{2\pi} = 2\pi;$$



$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{\lambda}^{\lambda+2\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\cos nx\,dx = \begin{vmatrix} u = x, & dv = \cos nx\,dx \\ du = dx, & v = \dfrac{\sin nx}{n} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{x\sin nx}{n}\bigg|_0^{2\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{2\pi} \sin nx \right) = \frac{1}{\pi n^2}\cos nx\bigg|_0^{2\pi} = 0.$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{\lambda}^{\lambda+2\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\sin nx\,dx = \begin{vmatrix} u = x, & dv = \sin nx\,dx \\ du = dx, & v = -\dfrac{\cos nx}{n} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{x\cos nx}{n}\bigg|_0^{2\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{2\pi} \cos nx \right) = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{2\pi\cos 2n\pi}{n} + \frac{1}{n^2}\sin nx\bigg|_0^{2\pi} \right) = -\frac{2}{n}.$$

Следовательно,

$$f(x) = \pi - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n} = \pi - 2\left(\sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \dots \right).$$

Пусть $x=\frac{\pi}{2}$, имеем

$$\frac{\pi}{2}=\pi-2\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\ldots\right) \Rightarrow 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{2n-1}+\ldots=\frac{\pi}{4}.$$

Домашнее задание

Пример 1. Разложить в ряд Фурье функцию, заданную на $[-\ell,\ell]$ следующим образом

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{если } -\ell\le x\le 0; \\ x, & \text{если } \quad 0<x\le\frac{\ell}{2}; \\ \frac{\ell}{2}, & \text{если } \quad \frac{\ell}{2}<x<\ell. \end{cases}$$

Ответ: $f(x)=\ell\left(\frac{3}{16}+\left(-\frac{1}{\pi^2}\cos\frac{\pi x}{\ell}+\frac{2+\pi}{2\pi^2}\sin\frac{\pi x}{\ell}\right)+\right.$

$\left.+\left(-\frac{1}{4\pi^2}\cos\frac{2\pi x}{\ell}+\frac{1}{4\pi}\sin\frac{2\pi x}{\ell}\right)+\left(-\frac{1}{9\pi^2}\cos\frac{3\pi x}{\ell}+\frac{-2+3\pi}{18\pi^2}\sin\frac{3\pi x}{\ell}\right)+\ldots\right).$

Пример 2. Разложить в ряд Фурье только по косинусам функцию $f(x)=1-2x$ на [0, 1].

Ответ: $\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\pi(2n-1)x}{(2n-1)^2}$.

Трехуровневые тестовые задания к разделу «*Ряды*»

Могут быть использованы для дополнительных заданий на практических занятиях, индивидуальных домашних заданий, проведения аудиторных контрольных работ, а также для индивидуальных заданий для внеаудиторных самостоятельных работ (контрольных работ, типовых или расчетно-графических работ), если они предусмотрены рабочим учебным планом для данной специальности.

Уровень I

Вариант 1

1. Доказать сходимость ряда и найти его сумму $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}$.

Ответ: $S=\frac{3}{4}$.

2. Исследовать на сходимость:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n(n+2)!}{n^5}$.

Ответ: расходится;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{10^n}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}$.

Ответ: расходится;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{4n^2+1}\right)^2$.

Ответ: сходится;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3+2}}$.

Ответ: сходится.

3. Исследовать на абсолютную или условную сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(n+1)\cdot 3^n}.$$

Ответ: абсолютно сходится.

4. Найти область сходимости рядов:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot x^n}{n^2+1}$.

Ответ: $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-4)^{2n-1}}{2n-1}$.

Ответ: $3<x<5$.

Вариант 2

1. Доказать сходимость ряда и найти его сумму $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+4^n}{12^n}$.

Ответ: $S=\frac{5}{6}$.

2. Исследовать на сходимость:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{7n-1}{5^n(n+1)!}$.

Ответ: сходится;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n-1}{5n}\right)^{n^2}$.

Ответ: сходится;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+2)\ln(3n+2)}$.

Ответ: расходится;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^5}}$.

Ответ: сходится.

3. Исследовать на абсолютную или условную сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$.

Ответ: условно сходится.

4. Найти область сходимости рядов:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{2^{n-1}\cdot 3^{n}}$.

Ответ: (–6, 6);

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^{n}}{n\cdot 5^{n}}$.

Ответ: $-2\le x<8$.

Вариант 3

1. Доказать сходимость ряда и найти его сумму $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+5)(2n+7)}$.

Ответ: $S=\frac{1}{10}$.

2. Исследовать на сходимость:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{7}{8}\right)^{n}\left(\frac{1}{n}\right)^{7}$.

Ответ: сходится;

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2n+1}\right)^{n}$.

Ответ: сходится;

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)\ln^{3}(2n+1)}$.

Ответ: сходится;

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5n+2}$.

Ответ: расходится.

3. Исследовать на абсолютную или условную сходимость $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\ln n}$.

Ответ: условно сходится.

4. Найти область сходимости рядов:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n}}{8^{n}}$.

Ответ: (–2, 2);

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^{n}}{2^{n}}$.

Ответ: $0<x<4$.

Вариант 4

1. Доказать сходимость ряда и найти его сумму $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n}+5^{n}}{10^{n}}$.

Ответ: $S=\frac{5}{4}$.

2. Исследовать на сходимость:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2n+1)\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4^n}$.

Ответ: сходится.

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(\ln(n+2))^n}$.

Ответ: сходится.

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt[4]{(4n+3)^3}}$.

Ответ: расходится.

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n^3+3n}}$.

Ответ: сходится.

3. Исследовать на абсолютную или условную сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{6n+5}.$$

Ответ: расходится.

4. Найти область сходимости рядов:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n\cdot 2^n}$.

Ответ: $[-2,2)$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-1)^n}{n^2}$.

Ответ: $0\le x\le 2$.

Вариант 5

1. Доказать сходимость ряда и найти его сумму $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(n+5)(n+6)}$.

Ответ: $S=\dfrac{1}{5}$.

2. Исследовать на сходимость:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^{\frac{n}{2}}}{3^n}$.

Ответ: расходится;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\arcsin\dfrac{1}{2^n}\right)^{3n}$.

Ответ: сходится;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(3n+4)\ln^2(3n+4)}$.

Ответ: сходится;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}$.

Ответ: расходится.

3. Исследовать на абсолютную или условную сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{\sqrt[4]{n^5}}$.

Ответ: абсолютно сходится.

4. Найти область сходимости рядов:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$.

Ответ: $[-1,1)$.

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+8)^n}{n^2}$.

Ответ: $-9 \le x \le -7$.

Вариант 6

1. Доказать сходимость ряда и найти его сумму $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n-2^n}{10^n}$.

Ответ: $S=\frac{3}{4}$.

2. Исследовать на сходимость:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4\cdot 5\cdot 6\cdot\ldots\cdot(n+3)}{5\cdot 7\cdot 9\cdot\ldots\cdot(2n+3)}$.

Ответ: сходится;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2+5n+8}{3n^2-2}\right)^n$.

Ответ: сходится;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[4]{(7n-5)^5}}$.

Ответ: сходится;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+2)}$.

Ответ: расходится.

3. Исследовать на абсолютную или условную сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Ответ: условно сходится.

4. Найти область сходимости рядов:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

Ответ: (–1, 1);

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2+x)^n$.

Ответ: $-3 < x < -1$.

Вариант 7

1. Доказать сходимость ряда и найти его сумму $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+7)(2n+9)}$.

Ответ: $S=\frac{1}{14}$.

2. Исследовать на сходимость:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{9}{10}\right)^n n^7$.

Ответ: сходится;

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{5^n}\right)^n$.

Ответ: сходится;

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{7+n}{49+n^2}\right)^2$.

Ответ: сходится;

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$.

Ответ: расходится.

3. Исследовать на абсолютную или условную сходимость $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}$.

Ответ: абсолютно сходится.

4. Найти область сходимости рядов:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^n}{2n-1}$.

Ответ: $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{2^n(n+3)}$.

Ответ: $-1\le x<3$.

Вариант 8

1. Доказать сходимость ряда и найти его сумму $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n-3^n}{12^n}$.

Ответ: $S=\frac{1}{6}$.

2. Исследовать на сходимость:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 7\cdot 13\cdot\ldots\cdot(6n-5)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot(n+1)}$.

Ответ: расходится;

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}}{2^n}$.

Ответ: сходится;

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-1)\ln(3n-1)}$.

Ответ: расходится;

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n-1}$.

Ответ: расходится.

3. Исследовать на абсолютную или условную сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n+1)n}.$$

Ответ: абсолютно сходится.

4. Найти область сходимости рядов:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}(\ln x)^n$.

Ответ: $\left(\frac{1}{e}, e\right)$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^n}{\sqrt[3]{n+1}\sqrt{n^2+1}}$.

Ответ: $-6 \le x \le -4$.

Вариант 9

1. Доказать сходимость ряда и найти его сумму $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+6)(n+7)}$.

Ответ: $S = \frac{1}{7}$.

2. Исследовать на сходимость:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n(n+1)}{5^n}$.

Ответ: сходится;

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\ln(n+1))^{2n}}$.

Ответ: сходится;

в) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\frac{n+1}{n-1}$.

Ответ: сходится;

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{tg}\frac{\pi}{3^n}$.

Ответ: сходится.

3. Исследовать на абсолютную или условную сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n+1}};$$

Ответ: условно сходится.

4. Найти область сходимости рядов:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$.

Ответ: $[-1,1]$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-5)^n}{n\cdot 3^n}$.

Ответ: $2 < x \le 8$.

Вариант 10

1. Доказать сходимость ряда и найти его сумму $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+5^n}{15^n}$.

Ответ: $S = \frac{3}{4}$.

2. Исследовать на сходимость:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+2)!}{n^n}$.

Ответ: сходится;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{5^n}\right)^{3n}$.

Ответ: сходится;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(5n-2)\ln(5n-2)}$.

Ответ: расходится;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{n(n+1)}$.

Ответ: расходится.

3. Исследовать на абсолютную или условную сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\sqrt[3]{n}}$.

Ответ: абсолютно сходится.

4. Найти область сходимости рядов:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n}}{8^n\left(n^2+1\right)}$.

Ответ: $[-2, 2]$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{2^n\ln(n+1)}$.

Ответ: $-1\le x<3$.

Вариант 11

1. Доказать сходимость ряда и найти его сумму $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+9)(n+10)}$.

Ответ: $S=\frac{1}{10}$.

2. Исследовать на сходимость:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\sin\frac{2\pi}{3^n}$.

Ответ: сходится;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\ln(n+3))^n}$.

Ответ: сходится;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{6+n}{36+n^2}$.

Ответ: расходится;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n-1}{n^2+1}$.

Ответ: расходится.

3. Исследовать на абсолютную или условную сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n(n+1)}.$$

Ответ: условно сходится.

4. Найти область сходимости рядов:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n$.

Ответ: (–1, 1);

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!(x+10)^n}{n^n}$.

Ответ: $-e-10<x<e-10$.

Вариант 12

1. Доказать сходимость ряда и найти его сумму $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^n-3^n}{15^n}$.

Ответ: $S=\frac{1}{4}$.

2. Исследовать на сходимость:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{\frac{n}{2}}}{n!}$.

Ответ: сходится;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n^2+4n+5}{6n^2-2n-1}\right)^{n^2}$.

Ответ: сходится;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[7]{(3+7n)^{10}}}$.

Ответ: сходится;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+3)}$.

Ответ: расходится.

3. Исследовать на абсолютную или условную сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+5}{3^n}$.

Ответ: абсолютно сходится.

4. Найти область сходимости рядов:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n \operatorname{tg}\frac{x}{2^n}$.

Ответ: (–2, 2);

б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(x+5)^{n^2}}{(n+1)^n}$.

Ответ: $-6 \le x \le -4$.

Вариант 13

1. Доказать сходимость ряда и найти его сумму $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+7)(n+8)}$.

Ответ: $S=\frac{1}{8}$.

2. Исследовать на сходимость:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{5^n(n+3)!}$.

Ответ: сходится;

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{2n}\right)^{n^2}$.

Ответ: сходится;

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[5]{(3n-1)^4}}$.

Ответ: расходится;

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{3n^2+5}$.

Ответ: расходится.

3. Исследовать на абсолютную или условную сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{3n-1}.$$

Ответ: расходится.

4. Найти область сходимости рядов:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^n x^n}{\sqrt{n}}$.

Ответ: $\left[-\frac{1}{10},\frac{1}{10}\right)$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^{2n}}{(n+1)\ln(n+1)}$.

Ответ: $2<x<4$.

Вариант 14

1. Доказать сходимость ряда и найти его сумму $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+7^n}{14^n}$.

Ответ: $S=\frac{7}{6}$.

2. Исследовать на сходимость:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 6\cdot 11\cdot\ldots\cdot(5n-4)}{3\cdot 7\cdot 11\cdot\ldots\cdot(4n-1)}$.

Ответ: расходится;

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sin\frac{\pi}{n^3}\right)^{2n}$.

Ответ: сходится;

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)\ln(n+2)}$.

Ответ: расходится;

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n^2-n+1}$.

Ответ: сходится.

3. Исследовать на абсолютную или условную сходимость $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}$.

Ответ: условно сходится.

4. Найти область сходимости рядов:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!x^n}{n^n}$.

Ответ: $(-e, e)$;

б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2-x)^n\sin\frac{\pi}{2^n}$.

Ответ: $0<x<4$.

Вариант 15

1. Доказать сходимость ряда и найти его сумму $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+2)(n+3)}$.

Ответ: $S=\frac{1}{2}$.

2. Исследовать на сходимость:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(n+3)!}$.

Ответ: расходится;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{4n}\right)^{3n}$.

Ответ: сходится;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(10n+5)\ln(10n+5)}$.

Ответ: расходится;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{2^{n-1}}$.

Ответ: сходится.

3. Исследовать на абсолютную или условную сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)3^n}$.

Ответ: абсолютно сходится.

4. Найти область сходимости рядов:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{5^{n+1}n}$.

Ответ: $[-5,5)$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(3-2x)^n}{n-\ln^2 n}$.

Ответ: $1<x\le 2$.

Вариант 16

1. Доказать сходимость ряда и найти его сумму $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{7^n-2^n}{14^n}$.

Ответ: $S=\frac{5}{6}$.

2. Исследовать на сходимость:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 \operatorname{tg}\frac{2\pi}{5^n}$.

Ответ: сходится;

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}$.

Ответ: расходится;

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[6]{(2n+3)^7}}$.

Ответ: сходится;

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n(n+4)}$.

Ответ: расходится.

3. Исследовать на абсолютную или условную сходимость $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n}$.

Ответ: условно сходится.

4. Найти область сходимости рядов:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$.

Ответ: $[-1,1]$;

б) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3n-2)(x-3)^n}{(n+1)^2 \cdot 2^{n+1}}$.

Ответ: $1 \le x < 5$.

Вариант 17

1. Доказать сходимость ряда и найти его сумму $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+3)(n+4)}$.

Ответ: $S = \frac{1}{3}$.

2. Исследовать на сходимость:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2+3)}{(n+1)!}$.

Ответ: сходится;

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln(n+1)) \cdot 3^n}$.

Ответ: сходится;

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5+n}{25+n^2}$.

Ответ: расходится;

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{2\pi}{3^n}$.

Ответ: сходится.

3. Исследовать на абсолютную или условную сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n}.$$

Ответ: расходится.

4. Найти область сходимости рядов:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(0{,}1)^n x^{2n}}{n}$.

Ответ: $\left(-\sqrt{10},\ \sqrt{10}\right)$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n^2}$.

Ответ: $1\le x\le 3$.

Вариант 18

1. Доказать сходимость ряда и найти его сумму $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n+5^n}{20^n}$.

Ответ: $S=\frac{7}{12}$.

2. Исследовать на сходимость:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(2n+3)!}$.

Ответ: сходится;

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n-1}{3n}\right)^{n^2}$.

Ответ: сходится;

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+3)\ln(n+3)\ln(\ln(n+3))}$.

Ответ: расходится;

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+3)}$.

Ответ: сходится.

3. Исследовать на абсолютную или условную сходимость $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n^2+1}$.

Ответ: абсолютно сходится.

4. Найти область сходимости рядов:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}(\lg x)^n$.

Ответ: $\left(-\frac{1}{10},\ 10\right)$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{(n-1)\cdot 2^n}$.

Ответ: $0\le x<4$.

Вариант 19

1. Доказать сходимость ряда и найти его сумму $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+4)(n+5)}$.

Ответ: $S=\frac{1}{5}$.

2. Исследовать на сходимость:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^n}{n!}$.

Ответ: расходится;

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\arcsin\frac{1}{3^n}\right)^n$.

Ответ: сходится;

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3+2n)\ln^5(3+2n)}$.

Ответ: сходится;

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 3^{2n}}$.

Ответ: сходится.

3. Исследовать на абсолютную или условную сходимость $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}$.

Ответ: абсолютно сходится.

4. Найти область сходимости рядов:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{5^n}$.

Ответ: $(-5, 5)$;

б) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt[3]{n+2}}{n+1}(x-2)^n$.

Ответ: $1<x\le 3$.

Вариант 20

1. Доказать сходимость ряда и найти его сумму $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n-4^n}{20^n}$.

Ответ: $S=\frac{1}{12}$.

2. Исследовать на сходимость:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot 5\cdot 8\cdot\ldots\cdot(3n-1)}{3\cdot 7\cdot 11\cdot\ldots\cdot(4n-1)}$.

Ответ: сходится;

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n}\right)^{n^2}$.

Ответ: сходится;

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[8]{(4+9n)^5}}$.

Ответ: расходится;

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)\cdot 3^n}$.

Ответ: сходится.

3. Исследовать на абсолютную или условную сходимость $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot 5^n}$;

Ответ: абсолютно сходится.

4. Найти область сходимости рядов:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n x^n}{(2n+1)^2\sqrt{3^n}}$.

Ответ: $\left[-\frac{\sqrt{3}}{5}, \frac{\sqrt{3}}{5}\right]$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^{2n-1}}{2n\cdot 4^n}$.

Ответ: $-7<x<-3$.

Вариант 21

1. Доказать сходимость ряда и найти его сумму $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$.

Ответ: $S=\frac{1}{2}$.

2. Исследовать на сходимость:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(3n-1)\sin\frac{\pi}{4^n}$.

Ответ: сходится;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n^2-n-1}{7n^2+3n+4}\right)^n$.

Ответ: сходится;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(9n-4)\ln^2(9n-4)}$.

Ответ: сходится;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n\sqrt[3]{n}}$.

Ответ: расходится.

3. Исследовать на абсолютную или условную сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n!}$.

Ответ: абсолютно сходится.

4. Найти область сходимости рядов:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n}}$.

Ответ: $[-1,1)$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)^n(x+1)^n}{2^{n-1}n^n}$.

Ответ: $-2<x<0$.

Вариант 22

1. Доказать сходимость ряда и найти его сумму $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{7^n+3^n}{21^n}$.

Ответ: $S=\frac{2}{3}$.

2. Исследовать на сходимость:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n!}$.

Ответ: сходится;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n+1}\right)^{n}$.

Ответ: сходится;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3+n}{9+n^{2}-2n}$.

Ответ: расходится;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{2n-1}$.

Ответ: расходится.

3. Исследовать на абсолютную или условную сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{3}{\ln(n+1)}.$$

Ответ: условно сходится.

4. Найти область сходимости рядов:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n}x^{n}}{\sqrt{n}}$.

Ответ: $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^{n}}{n^{2}}$.

Ответ: $-4\le x\le -2$.

Вариант 23

1. Доказать сходимость ряда и найти его сумму $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+3)(2n+5)}$.

Ответ: $S=\frac{1}{6}$.

2. Исследовать на сходимость:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n-1}{\sqrt{n\cdot 7^{n}}}$.

Ответ: сходится;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\arcsin\frac{1}{3^{n}}\right)^{2n}$.

Ответ: сходится;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(5n+8)\ln^{3}(5n+8)}$.

Ответ: сходится;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{2}}{n^{3}+2}$.

Ответ: расходится.

3. Исследовать на абсолютную или условную сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{5n(n+1)}.$$

Ответ: условно сходится.

4. Найти область сходимости рядов:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-x)^{n+1}}{n^3}$.

Ответ: $[-1,1]$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^{n^2}}{n^n}$.

Ответ: $-3\le x\le -1$.

Вариант 24

1. Доказать сходимость ряда и найти его сумму $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{7^n-3^n}{21^n}$.

Ответ: $S=\frac{1}{3}$.

2. Исследовать на сходимость:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot5\cdot9\cdot\ldots\cdot(4n-3)}{1\cdot4\cdot7\cdot\ldots\cdot(3n-2)}$.

Ответ: расходится;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n}\right)^{5n}$.

Ответ: сходится;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[8]{(7n-5)^3}}$.

Ответ: расходится;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{4n}$.

Ответ: расходится.

3. Исследовать на абсолютную или условную сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$.

Ответ: условно сходится.

4. Найти область сходимости рядов:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n x^n}{\sqrt[3]{n}}$.

Ответ: $\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-2)^{2n}}{2n}$.

Ответ: $1\le x\le 3$.

Вариант 25

1. Доказать сходимость ряда и найти его сумму $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}$.

Ответ: $S=\frac{1}{6}$.

2. Исследовать на сходимость:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{4n!}$.

Ответ: сходится;

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{5^n}$.

Ответ: сходится;

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+4)\ln(n+4)\ln(\ln(n+4))}$.

Ответ: расходится;

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^3+1}$.

Ответ: сходится.

3. Исследовать на абсолютную или условную сходимость $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot 3^n}{(2n+1)^n}$;

Ответ: абсолютно сходится.

4. Найти область сходимости рядов:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^n\sqrt{3n-1}}$.

Ответ: $[-2, 2)$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{2n}}{n\cdot 9^n}$.

Ответ: $2<x<4$.

Уровень II

Вариант 1

1. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x)$, указать область сходимости $f(x)=\cos 5x$.

Ответ: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 5^{2n}x^{2n}}{(2n)!}$, $|x|<\infty$.

2. Вычислить указанную величину приближенно с заданной точностью δ, используя разложение в степенной ряд соответствующим образом подобранной функции. e, $\delta = 0{,}0001$.

Ответ: 2,7183.

3. Используя разложение подынтегральной функции в степенной ряд, вычислить указанный определенный интеграл с точностью до 0,001.

$$\int_0^{0{,}25}\ln\left(1+\sqrt{x}\right)dx.$$

Ответ: 0,070.

4. Найти разложение в степенной ряд по степеням x решения дифференциального уравнения (записать три первых, отличных от нуля, члена этого разложения). $y' = xy + e^y$, $y(0) = 0$.

Ответ: $y = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \ldots$

5. Методом последовательного дифференцирования найти первые k членов разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения при указанных начальных условиях.

$$y' = \arcsin y + x, \quad y(0) = \frac{1}{2}, \quad k = 4.$$

Ответ: $y = \frac{1}{2} + \frac{\pi x}{6} + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}\right)x^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{2\pi}{9} + \frac{\pi^2}{27\sqrt{3}}\right)x^3 + \ldots$

6. Разложить в ряд Фурье периодическую (с периодом $\omega = 2\pi$) функцию $f(x)$, заданную на отрезке $[-\pi; \pi]$.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \le x < 0, \\ x - 1, & 0 \le x \le \pi. \end{cases}$$

Ответ:

$$f(x) = \frac{\pi - 2}{4} - \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos((2k-1)x)}{(2k-1)^2} + \frac{\pi - 2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin((2k-1)x)}{2k-1} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2kx)}{2k}.$$

Вариант 2

1. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x)$, указать область сходимости $f(x) = x^3 \operatorname{arctg} x$.

Ответ: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n+2}}{2n-1}$, $|x| \le 1$.

2. Вычислить указанную величину приближенно с заданной точностью δ, используя разложение в степенной ряд соответствующим образом подобранной функции. $\sqrt[5]{250}$, $\delta = 0{,}001$.

Ответ: 3,017.

3. Используя разложение подынтегральной функции в степенной ряд, вычислить указанный определенный интеграл с точностью до 0,001.

$$\int_0^1 \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2}{2}\right)dx.$$

Ответ: 0,162.

4. Найти разложение в степенной ряд по степеням x решения дифференциального уравнения (записать три первых, отличных от нуля, члена этого разложения). $y' = x^2y^2 + 1, \quad y(0) = 1.$

Ответ: $y = 1 + x + \frac{1}{3}x^3 + \ldots$

5. Методом последовательного дифференцирования найти первые k членов разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения при указанных начальных условиях.

$$y' = xy + \ln(y + x), \quad y(1) = 0, \quad k = 5.$$

Ответ: $y = \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{6} + \frac{(x-1)^4}{6} + \ldots$

6. Разложить в ряд Фурье периодическую (с периодом $\omega = 2\pi$) функцию $f(x)$, заданную на отрезке $[-\pi; \pi]$.

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & -\pi \le x \le 0, \\ 0, & 0 < x \le \pi. \end{cases}$$

Ответ:

$$f(x) = -\frac{\pi+1}{2} + \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos((2k-1)x)}{(2k-1)^2} + \frac{2(\pi+1)}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin((2k-1)x)}{2k-1} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2kx)}{k}.$$

Вариант 3

1. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x)$, указать область сходимости $f(x) = \sin x^2$.

Ответ: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{4n-2}}{(2n-1)!}, \ |x| < \infty.$

2. Вычислить указанную величину приближенно с заданной точностью δ, используя разложение в степенной ряд соответствующим образом подобранной функции. $\sin 1, \ \delta = 0{,}00001.$

Ответ: 0,84147.

3. Используя разложение подынтегральной функции в степенной ряд, вычислить указанный определенный интеграл с точностью до 0,001.

$$\int_0^{0,2} \sqrt{x} e^{-x} dx.$$

Ответ: 0,054.

4. Найти разложение в степенной ряд по степеням x решения дифференциального уравнения (записать три первых, отличных от нуля, члена этого разложения). $y' = x^2 - y^2, \quad y(0) = \frac{1}{2}.$

Ответ: $y = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}x^2 + \ldots$

5. Методом последовательного дифференцирования найти первые k членов разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения при указанных начальных условиях.

$$y' = x + y^2, \quad y(0) = 1, \quad k = 3.$$

Ответ: $y = 1 + x + \frac{3}{2}x^2 + \ldots$

6. Разложить в ряд Фурье периодическую (с периодом $\omega = 2\pi$) функцию $f(x)$, заданную на отрезке $[-\pi; \pi]$.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \le x < 0, \\ x + 2, & 0 \le x \le \pi. \end{cases}$$

Ответ:

$$f(x) = \frac{\pi + 4}{4} - \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos((2k-1)x)}{(2k-1)^2} + \frac{\pi + 4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin((2k-1)x)}{2k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2kx)}{2k}.$$

Вариант 4

1. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x)$, указать область сходимости $f(x) = \frac{x^2}{1+x}$.

Ответ: $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{n+2}, \quad |x| < 1.$

2. Вычислить указанную величину приближенно с заданной точностью δ, используя разложение в степенной ряд соответствующим образом подобранной функции. $\sqrt{1{,}3}$, $\delta = 0{,}001$.

Ответ: 1,140.

3. Используя разложение подынтегральной функции в степенной ряд, вычислить указанный определенный интеграл с точностью до 0,001.

$$\int_0^{0{,}5} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,dx.$$

Ответ: 0,487.

4. Найти разложение в степенной ряд по степеням x решения дифференциального уравнения (записать три первых, отличных от нуля, члена этого разложения).

$$y' = x^3 + y^3, \quad y(0) = \frac{1}{2}.$$

Ответ: $y = \frac{1}{2} + \frac{1}{8}x + \frac{3}{64}x^2 + \ldots$

5. Методом последовательного дифференцирования найти первые k членов разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения при указанных начальных условиях.

$$y' = x + \frac{1}{y}, \quad y(0) = 1, \quad k = 5.$$

Ответ: $y = 1 + x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{3} + \ldots$

6. Разложить в ряд Фурье периодическую (с периодом $\omega = 2\pi$) функцию $f(x)$, заданную на отрезке $[-\pi; \pi]$.

$$f(x) = \begin{cases} -x + \frac{1}{2}, & -\pi \le x \le 0, \\ 0, & 0 < x \le \pi. \end{cases}$$

Ответ:

$$f(x) = \frac{\pi + 1}{4} - \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos((2k-1)x)}{(2k-1)^2} - \frac{\pi+1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin((2k-1)x)}{2k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2kx)}{2k}.$$

Вариант 5

1. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x)$, указать область сходимости $f(x)=\cos\frac{2x^3}{3}$.

Ответ: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2^{2n}x^{6n}}{3^{2n}(2n)!}$, $|x|<\infty$.

2. Вычислить указанную величину приближенно с заданной точностью δ, используя разложение в степенной ряд соответствующим образом подобранной функции. $\operatorname{arctg}\frac{\pi}{10}$, $\delta = 0{,}001$.

Ответ: 0,304.

3. Используя разложение подынтегральной функции в степенной ряд, вычислить указанный определенный интеграл с точностью до 0,001.

$$\int_0^{0,2}\sqrt{x}\cos x dx.$$

Ответ: 0,059.

4. Найти разложение в степенной ряд по степеням x решения дифференциального уравнения (записать три первых, отличных от нуля, члена этого разложения). $y'=x+y^2$, $y(0)=-1$.

Ответ: $y=-1+x-\frac{1}{2}x^2+\ldots$

5. Методом последовательного дифференцирования найти первые k членов разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения при указанных начальных условиях.

$$y^{IY}=xy+y'x^2,\quad y(0)=y'(0)=y''(0)=y'''(0)=1,\quad k=7.$$

Ответ: $y=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{4x^6}{6!}+\ldots$

6. Разложить в ряд Фурье периодическую (с периодом $\omega=2\pi$) функцию $f(x)$, заданную на отрезке $[-\pi;\pi]$.

$$f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x<0,\\ \frac{x}{2}-1, & 0\le x\le\pi.\end{cases}$$

Ответ:

$$f(x)=\frac{\pi-4}{8}-\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos((2k-1)x)}{(2k-1)^2}+\frac{\pi-4}{2\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin((2k-1)x)}{2k-1}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2kx)}{4k}.$$

Вариант 6

1. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x)$, указать область сходимости $f(x)=\dfrac{2}{1-3x^2}$.

Ответ: $2\sum\limits_{n=0}^{\infty} 3^n x^{2n}$, $|x|<\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

2. Вычислить указанную величину приближенно с заданной точностью δ, используя разложение в степенной ряд соответствующим образом подобранной функции. $\ln 3$, $\delta = 0{,}0001$.

Ответ: 1,0986.

3. Используя разложение подынтегральной функции в степенной ряд, вычислить указанный определенный интеграл с точностью до 0,001.

$$\int\limits_0^{0,5} \ln\left(1+x^3\right)dx.$$

Ответ: 0,015.

4. Найти разложение в степенной ряд по степеням x решения дифференциального уравнения (записать три первых, отличных от нуля, члена этого разложения). $y'=x+x^2+y^2$, $y(0)=1$.

Ответ: $y=1+x+\dfrac{3}{2}x^2+\ldots$

5. Методом последовательного дифференцирования найти первые k членов разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения при указанных начальных условиях.

$$y'=2x-0{,}1y^2,\quad y(0)=1,\quad k=3.$$

Ответ: $y=1-0{,}1x+1{,}01x^2+\ldots$

6. Разложить в ряд Фурье периодическую (с периодом $\omega=2\pi$) функцию $f(x)$, заданную на отрезке $[-\pi;\pi]$.

$$f(x)=\begin{cases}2x+3, & -\pi\le x<0,\\ 0, & 0<x\le\pi.\end{cases}$$

Ответ:

$$f(x)=\frac{3-\pi}{2}+\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos\left((2k-1)x\right)}{(2k-1)^2}+\frac{2(\pi-3)}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\left((2k-1)x\right)}{2k-1}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2kx)}{k}.$$

Вариант 7

1. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x)$, указать область сходимости $f(x)=e^{3x}$.

Ответ: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{3^n x^n}{n!}$, $|x|<\infty$.

2. Вычислить указанную величину приближенно с заданной точностью δ, используя разложение в степенной ряд соответствующим образом подобранной функции. ch 2, δ = 0,0001.

Ответ: 3,7622.

3. Используя разложение подынтегральной функции в степенной ряд, вычислить указанный определенный интеграл с точностью до 0,001.

$$\int_0^1 x^2 \sin x\, dx.$$

Ответ: 0,223.

4. Найти разложение в степенной ряд по степеням x решения дифференциального уравнения (записать три первых, отличных от нуля, члена этого разложения).

$$y'=2\cos x - xy^2, \quad y(0)=1.$$

Ответ: $y=1+2x-\frac{1}{2}x^2+\ldots$

5. Методом последовательного дифференцирования найти первые k членов разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения при указанных начальных условиях.

$$y'''=y''+y'^2+y^3+x, \quad y(0)=1, \quad y'(0)=2, \quad y''(0)=0{,}5, \ k=6.$$

Ответ: $y=1+2x+\frac{x^2}{4}+\frac{11}{12}x^3+\frac{29}{48}x^4+\frac{25}{48}x^5+\ldots$

6. Разложить в ряд Фурье периодическую (с периодом $\omega=2\pi$) функцию $f(x)$, заданную на отрезке $[-\pi;\pi]$.

$$f(x)=\begin{cases} 0, & -\pi \le x < 0, \\ 3-x, & 0 \le x \le \pi. \end{cases}$$

Ответ:

$$f(x)=\frac{6-\pi}{4}+\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos((2k-1)x)}{(2k-1)^2}+\frac{6-\pi}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin((2k-1)x)}{2k-1}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2kx)}{2k}.$$

Вариант 8

1. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x)$, указать область сходимости $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$.

Ответ: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n, \; |x|<1$.

2. Вычислить указанную величину приближенно с заданной точностью δ, используя разложение в степенной ряд соответствующим образом подобранной функции. $\lg e$, $\delta = 0{,}0001$.

Ответ: 0,4343.

3. Используя разложение подынтегральной функции в степенной ряд, вычислить указанный определенный интеграл с точностью до 0,001.

$$\int\limits_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx.$$

Ответ: 0,855.

4. Найти разложение в степенной ряд по степеням x решения дифференциального уравнения (записать три первых, отличных от нуля, члена этого разложения).

$$y' = e^x - y^2, \quad y(0)=0.$$

Ответ: $y = x + \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{6}x^3 + \ldots$

5. Методом последовательного дифференцирования найти первые k членов разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения при указанных начальных условиях.

$$y' = x^2 - xy, \quad y(0)=0{,}1, \quad k = 3.$$

Ответ: $y = \dfrac{1}{10} - \dfrac{1}{20}x^2 + \dfrac{1}{3}x^3 + \ldots$

6. Разложить в ряд Фурье периодическую (с периодом $\omega = 2\pi$) функцию $f(x)$, заданную на отрезке $[-\pi;\,\pi]$.

$$f(x)=\begin{cases} x-2, & -\pi \le x \le 0, \\ 0, & 0 < x \le \pi. \end{cases}$$

Ответ:

$$f(x) = -\frac{\pi+4}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos((2k-1)x)}{(2k-1)^2} + \frac{4+\pi}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin((2k-1)x)}{2k-1} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2kx)}{2k}.$$

Вариант 9

1. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x)$, указать область сходимости $f(x)=\operatorname{ch}\left(2x^3\right)$.

Ответ: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n x^{6n}}{n!}$, $|x|<\infty$.

2. Вычислить указанную величину приближенно с заданной точностью δ, используя разложение в степенной ряд соответствующим образом подобранной функции. π, $\delta = 0{,}00001$.

Ответ: 3,14159.

3. Используя разложение подынтегральной функции в степенной ряд, вычислить указанный определенный интеграл с точностью до 0,001.

$$\int_0^{0,5}\sqrt{1+x^2}\,dx.$$

Ответ: 0,480.

4. Найти разложение в степенной ряд по степеням x решения дифференциального уравнения (записать три первых, отличных от нуля, члена этого разложения).

$$y'=x+y+y^2,\quad y(0)=1.$$

Ответ: $y=1+2x+\frac{7}{2}x^2+\ldots$

5. Методом последовательного дифференцирования найти первые k членов разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения при указанных начальных условиях.

$$y''=2yy',\quad y(0)=0,\quad y'(0)=1,\quad k=3.$$

Ответ: $y=x+\frac{2}{3!}x^3+\frac{16}{5!}x^5+\ldots$

6. Разложить в ряд Фурье периодическую (с периодом $\omega=2\pi$) функцию $f(x)$, заданную на отрезке $[-\pi;\pi]$.

$$f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x<0,\\ 4x-3, & 0\le x\le\pi.\end{cases}$$

Ответ:

$$f(x)=\frac{2\pi-3}{2}-\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos\left((2k-1)x\right)}{(2k-1)^2}+\frac{2(2\pi-3)}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\left((2k-1)x\right)}{2k-1}-4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2kx)}{2k}.$$

Вариант 10

1. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x)$, указать область сходимости $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{e^x}}$.

Ответ: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x^n}{2^n n!}$, $|x|<\infty$.

2. Вычислить указанную величину приближенно с заданной точностью δ, используя разложение в степенной ряд соответствующим образом подобранной функции. e^2, $\delta = 0{,}001$.

Ответ: 7,389.

3. Используя разложение подынтегральной функции в степенной ряд, вычислить указанный определенный интеграл с точностью до 0,001.

$$\int\limits_0^{0,5}\frac{dx}{1+x^5}.$$

Ответ: 0,484.

4. Найти разложение в степенной ряд по степеням x решения дифференциального уравнения (записать три первых, отличных от нуля, члена этого разложения).

$$y'=x^2+y^2,\quad y(0)=1.$$

Ответ: $y=1+x+x^2+\ldots$

5. Методом последовательного дифференцирования найти первые k членов разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения при указанных начальных условиях.

$$y'=2x+\cos y,\quad y(0)=0,\quad k=5.$$

Ответ: $y=x+x^2-\dfrac{x^3}{6}-\dfrac{x^4}{4}+\ldots$

6. Разложить в ряд Фурье периодическую (с периодом $\omega=2\pi$) функцию $f(x)$, заданную на отрезке $[-\pi;\pi]$.

$$f(x)=\begin{cases}5-x, & -\pi\le x\le 0,\\ 0, & 0<x\le\pi.\end{cases}$$

Ответ:

$$f(x)=\frac{\pi+10}{4}-\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos((2k-1)x)}{(2k-1)^2}-\frac{\pi+10}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin((2k-1)x)}{2k-1}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2kx)}{2k}.$$

Вариант 11

1. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x)$, указать область сходимости $f(x)=\operatorname{sh}x$.

Ответ: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$, $|x|<\infty$.

2. Вычислить указанную величину приближенно с заданной точностью δ, используя разложение в степенной ряд соответствующим образом подобранной функции. $\cos 2°$, $\delta = 0{,}001$.

Ответ: 0,999.

3. Используя разложение подынтегральной функции в степенной ряд, вычислить указанный определенный интеграл с точностью до 0,001.

$$\int\limits_0^1\sqrt[3]{1+\frac{x^2}{4}}\,dx.$$

Ответ: 1,026.

4. Найти разложение в степенной ряд по степеням x решения дифференциального уравнения (записать три первых, отличных от нуля, члена этого разложения).

$$y'=x^2y^2+y\sin x,\quad y(0)=\frac{1}{2}.$$

Ответ: $y=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}x^2+\frac{x^3}{12}+\ldots$

5. Методом последовательного дифференцирования найти первые k членов разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения при указанных начальных условиях.

$$y'''=ye^x-xy'^2,\quad y(0)=1,\quad y'(0)=y''(0)=1,\quad k=6.$$

Ответ: $y=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+0\cdot x^5+\ldots$

6. Разложить в ряд Фурье периодическую (с периодом $\omega=2\pi$) функцию $f(x)$, заданную на отрезке $[-\pi;\pi]$.

$$f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x<0,\\ 3x-1, & 0\le x\le\pi.\end{cases}$$

Ответ:

$$f(x)=\frac{3\pi-2}{4}-\frac{6}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos((2k-1)x)}{(2k-1)^2}+\frac{3\pi-2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin((2k-1)x)}{2k-1}-3\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2kx)}{2k}.$$

Вариант 12

1. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x)$, указать область сходимости $f(x)=e^{-x^4}$.

Ответ: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{4n}}{n!}$, $|x|<\infty$.

2. Вычислить указанную величину приближенно с заданной точностью δ, используя разложение в степенной ряд соответствующим образом подобранной функции. $\sqrt[3]{80}$, $\delta = 0{,}001$.

Ответ: 4,309.

3. Используя разложение подынтегральной функции в степенной ряд, вычислить указанный определенный интеграл с точностью до 0,001.

$$\int_0^{0,5}\frac{\sin x^2}{x}dx.$$

Ответ: 0,493.

4. Найти разложение в степенной ряд по степеням x решения дифференциального уравнения (записать три первых, отличных от нуля, члена этого разложения).

$$y'=2y^2+ye^x, \quad y(0)=\frac{1}{3}.$$

Ответ: $y=\frac{1}{3}+\frac{5}{9}x+\frac{22}{27}x^2+\ldots$

5. Методом последовательного дифференцирования найти первые k членов разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения при указанных начальных условиях.

$$y'=3x-y^2, \quad y(0)=2, \ k=3.$$

Ответ: $y=2-4x+\frac{19}{2}x^2-\ldots$

6. Разложить в ряд Фурье периодическую (с периодом $\omega=2\pi$) функцию $f(x)$, заданную на отрезке $[-\pi;\pi]$.

$$f(x)=\begin{cases}3-2x, & -\pi\le x\le 0,\\ 0, & 0<x\le\pi.\end{cases}$$

Ответ:

$$f(x)=\frac{\pi+3}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos((2k-1)x)}{(2k-1)^2}-\frac{2(\pi+3)}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin((2k-1)x)}{2k-1}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2kx)}{k}.$$

Вариант 13

1. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x)$, указать область сходимости $f(x)=2^{-x^2}$.

Ответ: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n \ln^n 2}{n!}x^{2n}$, $|x|<\infty$.

2. Вычислить указанную величину приближенно с заданной точностью δ, используя разложение в степенной ряд соответствующим образом подобранной функции. $\ln 5$, $\delta = 0{,}001$.

Ответ: 1,609.

3. Используя разложение подынтегральной функции в степенной ряд, вычислить указанный определенный интеграл с точностью до 0,001.

$$\int\limits_0^{0,1}\frac{e^x-1}{x}dx.$$

Ответ: 0,103.

4. Найти разложение в степенной ряд по степеням x решения дифференциального уравнения (записать три первых, отличных от нуля, члена этого разложения).

$$y'=e^{3x}+2xy^2,\qquad y(0)=1.$$

Ответ: $y=1+x+\dfrac{5}{2}x^2+\ldots$

5. Методом последовательного дифференцирования найти первые k членов разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения при указанных начальных условиях.

$$y''=xyy',\qquad y(0)=y'(0)=1,\quad k=6.$$

Ответ: $y=1+x+\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{2x^4}{4!}+\dfrac{3x^5}{5!}+\ldots$

6. Разложить в ряд Фурье периодическую (с периодом $\omega=2\pi$) функцию $f(x)$, заданную на отрезке $[-\pi;\pi]$.

$$f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x<0,\\ \dfrac{\pi-x}{2}, & 0\le x\le\pi.\end{cases}$$

Ответ: $f(x)=\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{1}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\cos((2k-1)x)}{(2k-1)^2}+\dfrac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\sin(kx)}{k}$.

Вариант 14

1. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x)$, указать область сходимости $f(x)=5^x$.

Ответ: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n\ln^n 5}{n!}$, $|x|<\infty$.

2. Вычислить указанную величину приближенно с заданной точностью δ, используя разложение в степенной ряд соответствующим образом подобранной функции. $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$, $\delta = 0{,}001$.

Ответ: 0,464.

3. Используя разложение подынтегральной функции в степенной ряд, вычислить указанный определенный интеграл с точностью до 0,001.

$$\int\limits_0^{0,5} x^2\cos 3x\,dx.$$

Ответ: 0,018.

4. Найти разложение в степенной ряд по степеням x решения дифференциального уравнения (записать три первых, отличных от нуля, члена этого разложения).

$$y'=x+e^y,\qquad y(0)=0.$$

Ответ: $y=x+x^2+\frac{1}{2}x^3+\ldots$

5. Методом последовательного дифференцирования найти первые k членов разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения при указанных начальных условиях.

$$y'=x^2-2y,\quad y(0)=1,\quad k=3.$$

Ответ: $y=1-2x+2x^2+\ldots$

6. Разложить в ряд Фурье периодическую (с периодом $\omega=2\pi$) функцию $f(x)$, заданную на отрезке $[-\pi;\pi]$.

$$f(x)=\begin{cases}5x+1, & -\pi\le x\le 0,\\ 0, & 0<x\le\pi.\end{cases}$$

Ответ:

$$f(x)=\frac{2-5\pi}{4}+\frac{10}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos((2k-1)x)}{(2k-1)^2}+\frac{5\pi-2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin((2k-1)x)}{2k-1}-5\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2kx)}{2k}.$$

Вариант 15

1. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x)$, указать область сходимости $f(x) = x\cos\sqrt{x}$.

Ответ: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(2n)!}$, $0 \le x < +\infty$.

2. Вычислить указанную величину приближенно с заданной точностью δ, используя разложение в степенной ряд соответствующим образом подобранной функции. $\sqrt[6]{738}$, $\delta = 0{,}001$.

Ответ: 3,006.

3. Используя разложение подынтегральной функции в степенной ряд, вычислить указанный определенный интеграл с точностью до 0,001.

$$\int\limits_0^{0,5} \ln\left(1+x^2\right)dx.$$

Ответ: 0,385.

4. Найти разложение в степенной ряд по степеням x решения дифференциального уравнения (записать три первых, отличных от нуля, члена этого разложения).

$$y' = y\cos x + 2\cos y, \quad y(0) = 0.$$

Ответ: $y = 2x + x^2 - x^3 + \ldots$

5. Методом последовательного дифференцирования найти первые k членов разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения при указанных начальных условиях.

$$y'' = \frac{y'}{y} - \frac{1}{x}, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 0, \quad k = 4.$$

Ответ: $y = 1 - \frac{(x-1)^2}{2!} - \frac{2(x-1)^4}{4!} + \frac{6(x-1)^5}{5!} + \ldots$

6. Разложить в ряд Фурье периодическую (с периодом $\omega = 2\pi$) функцию $f(x)$, заданную на отрезке $[-\pi; \pi]$.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \le x < 0, \\ 1 - 4x, & 0 \le x \le \pi. \end{cases}$$

Ответ:

$$f(x) = \frac{1-2\pi}{2} + \frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos\left((2k-1)x\right)}{(2k-1)^2} + \frac{2-4\pi}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin\left((2k-1)x\right)}{2k-1} + 4\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2kx)}{2k}.$$

Вариант 16

1. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x)$, указать область сходимости $f(x)=\dfrac{\sin 3x}{x}$.

Ответ: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}\cdot 3^{2n-1}}{(2n-1)!}x^{2n-2}$, $|x|<\infty, x\neq 0$.

2. Вычислить указанную величину приближенно с заданной точностью δ, используя разложение в степенной ряд соответствующим образом подобранной функции $\sqrt[3]{e}$, $\delta = 0{,}00001$.

Ответ: 1,3956.

3. Используя разложение подынтегральной функции в степенной ряд, вычислить указанный определенный интеграл с точностью до 0,001.

$$\int\limits_0^{0,4}\sqrt{x}e^{-\frac{x}{4}}dx.$$

Ответ: 0,159.

4. Найти разложение в степенной ряд по степеням x решения дифференциального уравнения (записать три первых, отличных от нуля, члена этого разложения).

$$y'=x^2+2y^2,\quad y(0)=0{,}2.$$

Ответ: $y=0{,}2+0{,}08x+0{,}032x^2+\ldots$

5. Методом последовательного дифференцирования найти первые k членов разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения при указанных начальных условиях.

$$y'=x^2+0{,}2y^2,\quad y(0)=0{,}1,\quad k=3.$$

Ответ: $y=0{,}1+0{,}002x+0{,}00004x^2+\ldots$

6. Разложить в ряд Фурье периодическую (с периодом $\omega=2\pi$) функцию $f(x)$, заданную на отрезке $[-\pi;\pi]$.

$$f(x)=\begin{cases}3x+2, & -\pi\le x\le 0,\\ 0, & 0<x\le\pi.\end{cases}$$

Ответ:

$$f(x)=\frac{4-3\pi}{4}+\frac{6}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos\left((2k-1)x\right)}{(2k-1)^2}+\frac{3\pi-4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\left((2k-1)x\right)}{2k-1}-3\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2kx)}{2k}.$$

Вариант 17

1. Разложить в ряд Тейлора функцию $f(x)$ в окрестности указанной точки x_0. Найти его область сходимости. $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $x_0=-2$.

Ответ: $-\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(x+2)^n}{2^n}$, $-4<x<0$.

2. Вычислить указанную величину приближенно с заданной точностью δ, используя разложение в степенной ряд соответствующим образом подобранной функции $\sin 1°$, $\delta = 0{,}0001$.

Ответ: 0,0175.

3. Используя разложение подынтегральной функции в степенной ряд, вычислить указанный определенный интеграл с точностью до 0,001.

$$\int\limits_{0,3}^{0,5}\frac{1+\cos x}{x^2}dx.$$

Ответ: 2,568.

4. Найти разложение в степенной ряд по степеням x решения дифференциального уравнения (записать три первых, отличных от нуля, члена этого разложения).

$$y'=x^2+xy+y^2,\quad y(0)=0{,}5.$$

Ответ: $y=0{,}5+0{,}25x+0{,}375x^2+\ldots$

5. Методом последовательного дифференцирования найти первые k членов разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения при указанных начальных условиях.

$$y''=y'^2+xy,\quad y(0)=4,\quad y'(0)=-2,\quad k=5.$$

Ответ: $y=4-2x+2x^2-2x^3+\dfrac{19}{6}x^4+\ldots$

6. Разложить в ряд Фурье периодическую (с периодом $\omega=2\pi$) функцию $f(x)$, заданную на отрезке $[-\pi;\pi]$.

$$f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x<0,\\ 4-2x, & 0\le x\le\pi.\end{cases}$$

Ответ:

$$f(x)=\frac{4-\pi}{2}+\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos((2k-1)x)}{(2k-1)^2}+\frac{2(4-\pi)}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin((2k-1)x)}{2k-1}+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2kx)}{2k}$$

Вариант 18

1. Разложить в ряд Тейлора функцию $f(x)$ в окрестности указанной точки x_0. Найти его область сходимости. $f(x)=\dfrac{1}{x+3}$, $x_0=-2$.

Ответ: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x+2)^n$, $-3<x<-1$.

2. Вычислить указанную величину приближенно с заданной точностью δ, используя разложение в степенной ряд соответствующим образом подобранной функции. $\sqrt[3]{8{,}36}$, $\delta = 0{,}001$.

Ответ: 2,030.

3. Используя разложение подынтегральной функции в степенной ряд, вычислить указанный определенный интеграл с точностью до 0,001.

$$\int\limits_0^{0{,}5}\frac{\operatorname{arctg} x^2}{x^2}\,dx.$$

Ответ: 0,498.

4. Найти разложение в степенной ряд по степеням x решения дифференциального уравнения (записать три первых, отличных от нуля, члена этого разложения).

$$y'=e^{\sin x}+x,\quad y(0)=0.$$

Ответ: $y=x+x^2+\dfrac{1}{6}x^3+\ldots$

5. Методом последовательного дифференцирования найти первые k членов разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения при указанных начальных условиях.

$$y'=xy+y^2,\quad y(0)=0{,}1,\quad k=3.$$

Ответ: $y=0{,}1+0{,}01x+0{,}051x^2+\ldots$

6. Разложить в ряд Фурье периодическую (с периодом $\omega=2\pi$) функцию $f(x)$, заданную на отрезке $[-\pi;\pi]$.

$$f(x)=\begin{cases} x+\dfrac{\pi}{2}, & -\pi\le x\le 0,\\ 0, & 0<x\le\pi.\end{cases}$$

Ответ: $f(x)=\dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\cos((2k-1)x)}{(2k-1)^2}-\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\sin(2kx)}{2k}$.

Вариант 19

1. Разложить в ряд Тейлора функцию $f(x)$ в окрестности указанной точки x_0. Найти его область сходимости. $f(x)=e^x$, $x_0=1$.

Ответ: $e\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n!}$, $|x|<\infty$.

2. Вычислить указанную величину приближенно с заданной точностью δ, используя разложение в степенной ряд соответствующим образом подобранной функции. $\ln 10$, $\delta = 0{,}0001$.

Ответ: 2,3026.

3. Используя разложение подынтегральной функции в степенной ряд, вычислить указанный определенный интеграл с точностью до 0,001.

$$\int_0^{0,8}\frac{1-\cos x}{x}dx.$$

Ответ: 0,156.

4. Найти разложение в степенной ряд по степеням x решения дифференциального уравнения (записать три первых, отличных от нуля, члена этого разложения).

$$y'=xy-y^2,\quad y(0)=0{,}2.$$

Ответ: $y=0{,}2-0{,}04x+0{,}108x^2+\ldots$

5. Методом последовательного дифференцирования найти первые k членов разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения при указанных начальных условиях.

$$y''=e^y\sin y',\quad y(\pi)=1,\quad y'(\pi)=\frac{\pi}{2},\quad k=3.$$

Ответ: $y=1+\frac{\pi}{2}(x-\pi)+\frac{e}{2}(x-\pi)^2+\ldots$

6. Разложить в ряд Фурье периодическую (с периодом $\omega=2\pi$) функцию $f(x)$, заданную на отрезке $[-\pi;\pi]$.

$$f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x<0,\\ 6x-5, & 0\le x\le\pi.\end{cases}$$

Ответ:

$$f(x)=\frac{3\pi-5}{2}-\frac{12}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos((2k-1)x)}{(2k-1)^2}+\frac{2(3\pi-5)}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin((2k-1)x)}{2k-1}-6\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2kx)}{2k}.$$

Вариант 20

1. Разложить в ряд Тейлора функцию $f(x)$ в окрестности указанной точки x_0. Найти его область сходимости. $f(x)=\dfrac{1}{2x+5}$, $x_0=3$.

Ответ: $\dfrac{1}{11}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\dfrac{2}{11}\right)^n(x-3)^n$, $-\dfrac{5}{2}<x<\dfrac{17}{2}$.

2. Вычислить указанную величину приближенно с заданной точностью δ, используя разложение в степенной ряд соответствующим образом подобранной функции. $\arcsin\dfrac{1}{3}$, $\delta = 0{,}001$.

Ответ: 0,340.

3. Используя разложение подынтегральной функции в степенной ряд, вычислить указанный определенный интеграл с точностью до 0,001.

$$\int_0^1 \sin x^2 dx.$$

Ответ: 0,310.

4. Найти разложение в степенной ряд по степеням x решения дифференциального уравнения (записать три первых, отличных от нуля, члена этого разложения).

$$y' = 2x + y^2 + e^x, \quad y(0)=1.$$

Ответ: $y = 1 + 2x + 3{,}5x^2 + \ldots$

5. Методом последовательного дифференцирования найти первые k членов разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения при указанных начальных условиях.

$$y' = 0{,}2x + y^2, \quad y(0)=1, \quad k = 3.$$

Ответ: $y = 1 + x + 1{,}1x^2 + \ldots$

6. Разложить в ряд Фурье периодическую (с периодом $\omega = 2\pi$) функцию $f(x)$, заданную на отрезке $[-\pi;\pi]$.

$$f(x)=\begin{cases} 7-3x, & -\pi \le x \le 0, \\ 0, & 0 < x \le \pi. \end{cases}$$

Ответ:

$$f(x)=\frac{3\pi+14}{4}-\frac{6}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos((2k-1)x)}{(2k-1)^2}-\frac{14+3\pi}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin((2k-1)x)}{2k-1}+3\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2kx)}{2k}.$$

Вариант 21

1. Разложить в ряд Тейлора функцию $f(x)$ в окрестности указанной точки x_0. Найти его область сходимости. $f(x)=\dfrac{1}{(x-3)^2}$, $x_0=1$.

Ответ: $\dfrac{1}{4}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n+1}{2^n}(x-1)^n$, $-1<x<3$.

2. Вычислить указанную величину приближенно с заданной точностью δ, используя разложение в степенной ряд соответствующим образом подобранной функции. $\lg 7$, $\delta = 0{,}001$.

Ответ: 0,8451.

3. Используя разложение подынтегральной функции в степенной ряд, вычислить указанный определенный интеграл с точностью до 0,001.

$$\int\limits_0^{0,1}\frac{\ln(1+x)}{x}dx.$$

Ответ: 0,098.

4. Найти разложение в степенной ряд по степеням x решения дифференциального уравнения (записать три первых, отличных от нуля, члена этого разложения).

$$y'=x\sin x-y^2,\quad y(0)=1.$$

Ответ: $y=1-x+x^2+\ldots$

5. Методом последовательного дифференцирования найти первые k членов разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения при указанных начальных условиях.

$$y''=x^2+y^2,\quad y(-1)=2,\quad y'(-1)=0{,}5,\quad k=4.$$

Ответ: $y=2+\dfrac{1}{2}(x+1)+\dfrac{5}{2}(x+1)^2+\dfrac{15}{16}(x+1)^4+\ldots$

6. Разложить в ряд Фурье периодическую (с периодом $\omega=2\pi$) функцию $f(x)$, заданную на отрезке $[-\pi;\pi]$.

$$f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x<0,\\ \dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{2}, & 0\le x\le\pi.\end{cases}$$

Ответ: $f(x)=\dfrac{1}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\cos((2k-1)x)}{(2k-1)^2}+\dfrac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\sin(2kx)}{2k}$.

Вариант 22

1. Разложить в ряд Тейлора функцию $f(x)$ в окрестности указанной точки x_0. Найти его область сходимости. $f(x)=\sin\frac{\pi x}{4}$, $x_0=2$.

Ответ: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2n}\frac{(x-2)^{2n}}{(2n)!}$, $|x|<\infty$.

2. Вычислить указанную величину приближенно с заданной точностью δ, используя разложение в степенной ряд соответствующим образом подобранной функции. $\sqrt{e}$, $\delta = 0{,}0001$.

Ответ: 1,6487.

3. Используя разложение подынтегральной функции в степенной ряд, вычислить указанный определенный интеграл с точностью до 0,001.

$$\int_0^1 \cos\sqrt[3]{x}\,dx.$$

Ответ: 0,718.

4. Найти разложение в степенной ряд по степеням x решения дифференциального уравнения (записать три первых, отличных от нуля, члена этого разложения).

$$y'=2x^2-xy,\quad y(0)=0.$$

Ответ: $y=\frac{4}{3!}x^3-\frac{16}{5!}x^5+\frac{96}{7!}x^7-\ldots$

5. Методом последовательного дифференцирования найти первые k членов разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения при указанных начальных условиях.

$$y'=x^2+xy+e^{-x},\quad y(0)=0,\quad k=3.$$

Ответ: $y=x-\frac{x^2}{2!}+\frac{5x^3}{3!}+\ldots$

6. Разложить в ряд Фурье периодическую (с периодом $\omega=2\pi$) функцию $f(x)$, заданную на отрезке $[-\pi;\pi]$.

$$f(x)=\begin{cases}6x-2, & -\pi\le x\le 0,\\ 0, & 0<x\le\pi.\end{cases}$$

Ответ:

$$f(x)=-\frac{3\pi+2}{2}+\frac{12}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos((2k-1)x)}{(2k-1)^2}+\frac{2(3\pi+2)}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin((2k-1)x)}{2k-1}-6\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2kx)}{2k}.$$

Вариант 23

1. Разложить в ряд Тейлора функцию $f(x)$ в окрестности указанной точки x_0. Найти его область сходимости. $f(x) = \ln(5x+3)$, $x_0 = \frac{2}{5}$.

Ответ: $\ln 5 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(x - \frac{2}{5}\right)^n$, $-\frac{3}{5} < x \le \frac{7}{5}$.

2. Вычислить указанную величину приближенно с заданной точностью δ, используя разложение в степенной ряд соответствующим образом подобранной функции. $\cos 10°$, $\delta = 0{,}0001$.

Ответ: 0,9848.

3. Используя разложение подынтегральной функции в степенной ряд, вычислить указанный определенный интеграл с точностью до 0,001.

$$\int\limits_0^1 \sqrt{x}\sin x\,dx.$$

Ответ: 0,364.

4. Найти разложение в степенной ряд по степеням x решения дифференциального уравнения (записать три первых, отличных от нуля, члена этого разложения).

$$y' = x - 2y^2, \quad y(0) = 0{,}5.$$

Ответ: $y = 0{,}5 - 0{,}5x + x^2 + \ldots$

5. Методом последовательного дифференцирования найти первые k членов разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения при указанных начальных условиях.

$$y' = \frac{1-x^2}{y} + 1, \quad y(0) = 1, \quad k = 5.$$

Ответ: $y = 1 + 2x - x^2 + \frac{4}{3}x^3 - \frac{17}{19}x^4 + \ldots$

6. Разложить в ряд Фурье периодическую (с периодом $\omega = 2\pi$) функцию $f(x)$, заданную на отрезке $[-\pi; \pi]$.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \le x < 0, \\ 4 - 9x, & 0 \le x \le \pi. \end{cases}$$

Ответ:

$$f(x) = \frac{8-9\pi}{4} + \frac{18}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos((2k-1)x)}{(2k-1)^2} + \frac{8-9\pi}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin((2k-1)x)}{2k-1} + 9\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2kx)}{2k}.$$

Вариант 24

1. Разложить в ряд Тейлора функцию $f(x)$ в окрестности указанной точки x_0. Найти его область сходимости. $f(x)=\ln\dfrac{1}{x^2-2x+2}$, $x_0=1$;

Ответ: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}(x-1)^{2n}$, $0\le x\le 2$.

2. Вычислить указанную величину приближенно с заданной точностью δ, используя разложение в степенной ряд соответствующим образом подобранной функции. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{30}}$, $\delta = 0{,}001$.

Ответ: 0,322.

3. Используя разложение подынтегральной функции в степенной ряд, вычислить указанный определенный интеграл с точностью до 0,001.

$$\int\limits_0^{25}\frac{e^{-2x^2}}{\sqrt{x}}dx.$$

Ответ: 0,976.

4. Найти разложение в степенной ряд по степеням x решения дифференциального уравнения (записать три первых, отличных от нуля, члена этого разложения).

$$y' = xe^x + 2y^2,\quad y(0)=0.$$

Ответ: $y=\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{8}x^4+\ldots$

5. Методом последовательного дифференцирования найти первые k членов разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения при указанных начальных условиях.

$$y''+y=0,\quad y(0)=0,\quad y'(0)=1,\quad k=3.$$

Ответ: $y=x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}+\ldots$

6. Разложить в ряд Фурье периодическую (с периодом $\omega=2\pi$) функцию $f(x)$, заданную на отрезке $[-\pi;\pi]$.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{3}-3, & -\pi\le x\le 0,\\ 0, & 0<x\le\pi.\end{cases}$$

Ответ:

$$f(x)=-\frac{\pi+18}{12}+\frac{2}{3\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos((2k-1)x)}{(2k-1)^2}+\frac{18+\pi}{3\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin((2k-1)x)}{2k-1}-\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2kx)}{2k}.$$

Вариант 25

1. Разложить в ряд Тейлора функцию $f(x)$ в окрестности указанной точки x_0. Найти его область сходимости. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{4+x}}$, $x_0=-3$;

Ответ: $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\cdot 1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n)}(x+3)^n$, $-4<x\le -2$.

2. Вычислить указанную величину приближенно с заданной точностью δ, используя разложение в степенной ряд соответствующим образом подобранной функции. $\sqrt[10]{1080}$, δ = 0,001.

Ответ: 2,031.

3. Используя разложение подынтегральной функции в степенной ряд, вычислить указанный определенный интеграл с точностью до 0,001.

$$\int\limits_0^1 \cos\frac{x^2}{4}\,dx.$$

Ответ: 0,994.

4. Найти разложение в степенной ряд по степеням x решения дифференциального уравнения (записать три первых, отличных от нуля, члена этого разложения).

$$y'=xy+x^2+y^2,\quad y(0)=1.$$

Ответ: $y=1+x+\dfrac{3}{2}x^2+\ldots$

5. Методом последовательного дифференцирования найти первые k членов разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения при указанных начальных условиях.

$$y''=y\cos y'+x,\quad y(0)=1,\quad y'(0)=\frac{\pi}{3},\quad k=3.$$

Ответ: $y=1+\dfrac{\pi}{3}x+\dfrac{1}{4}x^2+\ldots$

6. Разложить в ряд Фурье периодическую (с периодом $\omega=2\pi$) функцию $f(x)$, заданную на отрезке $[-\pi;\pi]$.

$$f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x<0,\\ 10x-3, & 0\le x\le\pi.\end{cases}$$

Ответ:

$$f(x)=\frac{5\pi-3}{2}-\frac{20}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos((2k-1)x)}{(2k-1)^2}+\frac{2(5\pi-3)}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin((2k-1)x)}{2k-1}-10\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2kx)}{2k}.$$

Уровень III

1. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)(2n+1)(2n+5)}$.

Ответ: $\frac{1}{90}$.

2. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(C+n)(C+n+1)}$, где C – постоянная ($C\neq -n$, n = 1, 2, 3, …).

Ответ: $\frac{1}{C+1}$.

3. Используя результат предыдущего примера, показать, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\pi+1)(\pi+n+1)}=\frac{1}{\pi+1}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}+n+1\right)}=\frac{1}{\sqrt{2}+1}$.

4. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(C+n)(C+n+2)}$, где C – постоянная ($C\neq -n$, n = 1, 2, 3, …). Показать, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}=\frac{3}{4}$.

Ответ: $S=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{C+1}+\frac{1}{C+2}\right)=\frac{2C+3}{2(C+1)(C+2)}$.

5. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(C+n-1)(C+n)(C+n+1)}$, где C – постоянная ($C\neq - n$; n = 1, 2, 3, …). Показать, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{4}$.

Ответ: $S=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{C}-\frac{1}{C+1}\right)=\frac{1}{2C(C+1)}$.

6. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(5n)!}{2^{n^2}}=0$.

7. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n)!}{a^{n!}}=0$, ($a > 1$).

8. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^n}{(2n)!}=0$.

9. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^n}{(n!)^2}=0$.

10. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n!)^n}{n^{n^2}}=0$.

11. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n^p(\ln n)^{\alpha}}$ при различных действительных значениях p и α.

Ответ:

Если $p > 1$, то ряд сходится при всех α, а если $p < 1$, то расходится.
Если $p = 1$, то ряд сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \le 1$.

12. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{1}{n^p(\ln n)^{\alpha}(\ln\ln n)^{\beta}}$ при различных действительных значениях p, α и β.

Ответ:

Если $p > 1$, то ряд сходится при всех α и β; если $p < 1$, то расходится.
Если $p = 1$, то ряд сходится при $\alpha > 1$ и любых β и расходится при $\beta \le 1$.

13. Исследовать условия сходимости гипергеометрического ряда

$$\frac{\alpha\beta}{1\cdot\gamma}+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot 2\cdot\gamma(\gamma+1)}+\frac{\alpha(\alpha+1)...(\alpha+n-1)(\alpha+n)\beta(\beta+1)...(\beta+n)}{(n+1)!\gamma(\gamma+1)...(\gamma+n)},$$

где $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$.

Ответ: ряд сходится при $\gamma - \alpha - \beta > 0$
и расходится при $\gamma - \alpha - \beta \le 0$.

14. Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится $(a_n \ge 0)$. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ тоже сходится. Показать, что обратное утверждение неверно.

15. Убедиться, что признак Даламбера неприменим к ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_{2n-1} = \dfrac{2^{n-1}}{3^n}$, $a_{2n} = \dfrac{2^n}{3^n}$, тогда как радикальный признак Коши показывает, что этот ряд сходится.

16. Показать, что если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ абсолютно сходится, то и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+1}{n} a_n$ также абсолютно сходится.

17. При каких значениях x сходится ряд

$$\sin x + 2\sin\frac{x}{3} + 4\sin\frac{x}{9} + \ldots + 2^n \sin\frac{x}{3^n} + \ldots$$

Ответ: $-\infty < x < \infty$.

18. Определить область сходимости ряда $\ln x + \ln^2 x + \ldots + \ln^n x + \ldots$

Ответ: $\dfrac{1}{e} < x < e$.

19. Найти область сходимости ряда $\dfrac{1}{1+x^2} + \dfrac{1}{1+x^4} + \dfrac{1}{1+x^6} + \ldots$

Ответ: $|x| > 1$.

20. Найти область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot 3^n \sqrt{(x+2)^n}}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad x > -2.$$

Ответ: $\left[-\dfrac{17}{9}, +\infty\right)$.

21. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} x(1-x)^n$, $0 \le x \le 1$.

Ответ: $S(x) = \begin{cases} 0, & \textit{если} \ \ x = 0,\ x = 1; \\ 1, & \textit{если} \ \ 0 < x < 1. \end{cases}$

22. Найти сумму ряда $\dfrac{1}{a} + \dfrac{2x}{a^2} + \dfrac{3x^2}{a^3} + \dfrac{4x^3}{a^4} + \ldots$, если $|x| < a$.

Ответ: $\dfrac{a}{(a-x)^2}$.

23. Найти сумму ряда $\frac{x^2}{2a}+\frac{x^3}{3a^2}+\frac{x^4}{4a^3}+\ldots$, если $-a \le x < a$.

Ответ: $\frac{a\ln a}{a-x}-x$.

24. Найти сумму ряда $\frac{1\cdot 2}{a^2}+\frac{2\cdot 3}{a^3}x+\frac{3\cdot 4}{a^4}x^2+\ldots$, если $|x|<a$.

Ответ: $\frac{2a}{(a-x)^3}$.

25. Найти сумму ряда $-2x+4x^3-6x^5+8x^7-\ldots$, если $|x|<1$.

Ответ: $-\frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}$.

26. Функцию $f(x)=(1+x)e^{-x}-(1-x)e^{x}$ разложить в ряд Маклорена. Пользуясь разложением, найти сумму ряда $\frac{1}{3!}+\frac{2}{5!}+\ldots+\frac{n}{(2n+1)!}+\ldots$

Ответ: $4\left(\frac{x^3}{3!}+\frac{2x^5}{5!}+\ldots+\frac{nx^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots\right)$, $\frac{1}{2e}$.

27. Показать, что для суммы ряда $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$ выполняется соотношение $S''(x)=S(x)$.

28. В прямоугольном треугольнике катеты равны 1 и 5 см. Определить острый угол треугольника, лежащий против меньшего катета, с точностью до 0,001 радиана.

Ответ: $\alpha \cong 0{,}197$.

29. Найти наименьшее положительное значение *x*, удовлетворяющие тригонометрическому уравнению $2\sin x-\cos x=0$.

Ответ: 0,4636.

30. Вычислить площадь овала $x^4+y^4=1$ с точностью δ = 0,01.

Ответ: 3,71.

31. Вычислить длину одной полуволны синусоиды $y=\sin x$ с точностью δ = 0,001.

Ответ: 3,821.

32. Фигура, ограниченная линией $y = \operatorname{arctg} x$, осью абсцисс и прямой $x = \frac{1}{2}$, вращается вокруг оси абсцисс. Вычислить объем тела вращения с точностью до 0,001.

Ответ: 0,119.

33. Пользуясь разложением функций в ряд Маклорена, вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x + \ln\left(\sqrt{1+x^2} - x\right)}{x^3}$. *Ответ*: $\frac{1}{6}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2(\operatorname{tg} x - \sin x) - x^3}{x^5}$. *Ответ*: $\frac{1}{4}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x^2} - \operatorname{ctg}^2 x\right)$. *Ответ*: $\frac{2}{3}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0} \left(x - x^2 \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)\right)$. *Ответ*: $\frac{1}{2}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{2 + \cos x}{x^3 \sin x} - \dfrac{3}{x^4}\right)$. *Ответ*: $\frac{1}{60}$.

34. Дано уравнение $xy + e^x = y$. Пользуясь методом неопределенных коэффициентов, найти разложение неизвестной функции в ряд Маклорена. Решить задачу, находя коэффициенты ряда Маклорена последовательным дифференцированием.

Ответ: $1 + 2x + \frac{5}{2}x^2 + \ldots + \left(2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{(n-1)!}\right)x^{n-1} + \ldots$

35. Дано уравнение $y = \ln(1+x) - xy$. Пользуясь методом неопределенных коэффициентов, найти разложение неизвестной функции в ряд Маклорена. Решить задачу, находя коэффициенты ряда Маклорена последовательным дифференцированием.

Ответ: $x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{6}x^3 - \ldots + (-1)^{n+1}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right)x^n + \ldots$

36. Найти явное выражение для y с помощью ряда Маклорена двумя способами: методом неопределенных коэффициентов и последовательным дифференцированием:

а) $y^3 + xy = 1$ (найти три члена разложения).

Ответ: $1 - \frac{x}{3} + \frac{x^3}{81} - \ldots$;

б) $2\sin x + \sin y = x - y$ (найти два члена разложения).

Ответ: $-\frac{x}{2} + \frac{5x^3}{32} - \ldots$;

в) $e^x - e^y = xy$ (найти три члена разложения).

Ответ: $x - x^2 + 2x^3 - \ldots$

37. Показать, что функция $y = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n n!}$ является решением дифференциального уравнения $y' - xy = 0$.

38. Разложить в ряд Фурье 2ℓ-периодическую функцию

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -2 \le x < 0, \\ x, & 0 \le x < 1, \quad \ell = 3. \\ 2 - x, & 1 \le x \le 2. \end{cases}$$

Ответ: $\frac{1}{4} - \frac{1}{\pi^2} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi x}{n^2} + \frac{8}{\pi^2} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2}$.

39. Воспользовавшись разложением $f(x)$ в ряд Фурье в указанном интервале, найти сумму данного числового ряда:

а) $f(x) = |\sin x|$, $(-\pi, \pi)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}$. *Ответ*: $\frac{1}{2}$.

б) $f(x) = x$, $[0, \pi]$, по косинусам, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$. *Ответ*: $\frac{\pi^2}{8}$.

в) $f(x) = \begin{cases} -x, & -\pi \le x \le 0, \\ \frac{x^2}{\pi}, & 0 < x \le \pi. \end{cases}$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3 - (-1)^n}{n^2}$. *Ответ*: $\frac{5\pi^2}{12}$.

г) $f(x) = \frac{\pi}{4}$, $(0, \pi)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$. *Ответ*: $\frac{\pi}{4}$.

д) $f(x) = \cos x$, $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)(2n+1)}$. *Ответ*: $\frac{2-\pi}{4}$.

е) $f(x)=x(\pi-x)$, $(0, \pi)$, по синусам, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}$. *Ответ*: $\frac{\pi^3}{32}$.

ж) $f(x)=\begin{cases}-2x, & -\pi\le x\le 0,\\ 3x, & 0<x\le\pi.\end{cases}$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^2}$. *Ответ*: $\frac{\pi^2}{4}$.

и) $f(x)=\pi^2-x^2$, $(-\pi, \pi)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$. *Ответ*: $\frac{\pi^2}{12}$.

к) $f(x)=x\sin x$, $[-\pi, \pi]$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2-1}$. *Ответ*: $\frac{1}{4}$.

л) $f(x)=x^2$, $(-\pi, \pi)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. *Ответ*: $\frac{\pi^2}{6}$.

40. Исследовать на сходимость ряд с общим членом $a_n=\int\limits_0^{\frac{1}{n}}\frac{\sqrt{x}\,dx}{x^2+1}$.

Ответ: сходится.

ГЛОССАРИЙ

Новые понятия	Содержание
1	2
1. ***Ряд***	бесконечная сумма
2. Числовой ряд	выражение вида $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$, где $a_1, a_2, \ldots, a_n, ...$ – последовательность чисел
3. Общий член ряда	выражение для a_n, чаще всего $a_n = f(n)$
4. n-ная частичная сумма	сумма конечного числа n первых членов ряда, $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$
5. Сумма ряда	конечный предел частичной суммы при $n \to \infty$, если он существует. $S = \lim_{n\to\infty} S_n$
6. Сходящийся ряд	ряд, имеющий конечную сумму $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$
7. Расходящийся ряд	если предел частичной суммы не существует или бесконечен, то ряд называется *расходящимся*
8. Остаток ряда	$r_n = a_{n+1} + a_{n+2} + ...$. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится $\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} r_n = 0$.
9. Необходимый признак сходимости	если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$ (обратное утверждение неверно)
10. Достаточный признак расходимости	если $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится
11. Ряды с положительными членами	$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ (a_n \geq 0)$
12. Признаки сравнения	1. Пусть для рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (1) и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ (2) $\forall n \geq n_0,\ a_n \geq b_n$. Тогда: если сходится ряд (1), то сходится и ряд (2); если расходится ряд (2), то расходится и ряд (1) 2. Если $\exists$ конечный $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \neq 0$, то ряды (1) и (2) сходятся или расходятся одновременно

1	2
13. Ряд Дирихле (обобщенный гармонический ряд)	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$; если $p>1$ сходится, если $p\le 1$ расходится
14. Гармонический ряд	$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ – расходится
15. Признак Даламбера	$p=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$, ряд сходится, если $p < 1$; ряд расходится, если $p > 1$; если $p = 1$, вопрос о сходимости остается открытым
16. Радикальный признак Коши	$p=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$, если $p < 1$, ряд сходится; если $p > 1$, ряд расходится. если $p = 1$, вопрос о сходимости остается открытым
17. Интегральный признак Коши	Пусть для ряда $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ $(a_n\ge 0)$ $\exists$ непрерывная и монотонно убывающая на $[a,+\infty)$ $(a\ge 1)$ функция *f*(*x*) такая, что $f(n)=a_n$. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ и $\int_a^{\infty}f(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно
18. Знакопеременный ряд	содержит как положительные, так и отрицательные числа.
19. Абсолютная и условная сходимость	Пусть дан знакопеременный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ (1). Тогда, если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\lvert a_n\rvert$ (2) сходится, то сходится и данный ряд (1), при этом он называется *абсолютно сходящимся*. Если же ряд (2) расходится, а данный ряд (1) сходится, то он называется *условно сходящимся*.

1	2
20. Знакочередующийся ряд	$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$, $a_n>0$ (у которого члены положительны, а знаки чередуются).
21. Теорема Лейбница	достаточный признак сходимости знакочередующихся рядов: если 1) $a_1 > a_2 > a_3 > \ldots$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то ряд сходится и его сумма $0 < S < a_1$.
22. Функциональный ряд	$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$, члены которого $u_n(x)$ – некоторые функции от x. Его сумма $S(x) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)$
23. Область сходимости функционального ряда	множество всех точек сходимости этого ряда.
24. Степенной ряд	функциональный ряд, составленный из степенных функций, имеет вид $C_0 + C_1x + C_2x^2 + \ldots + C_nx^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} C_nx^n$.
25. Степенной ряд по степеням (x – a)	имеет вид $\sum_{n=0}^{\infty} C_n(x-a)^n$.
26. Интервал сходимости степенного ряда	(-*R*, *R*), в каждой точке которого степенной ряд сходится абсолютно. На концах интервала ($x=-R$ и $x=R$) ряд исследуется дополнительно.
27. Радиус сходимости	число R из интервала (-*R*, *R*). Может быть найден по формулам: $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left\lvert\frac{C_n}{C_{n+1}}\right\rvert$, $\quad R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\lvert C_n\rvert}}$.
28. Ряды Тейлора и Маклорена	$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 +$ $+ \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots$ – ряд Тейлора;

1	2
	если a=0, $f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots$ $+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots$ – ряд Маклорена.
29. Биномиальный ряд	разложение в ряд Маклорена функции $f(x)=(1+x)^m$.
30. Тригонометрический ряд Фурье	ряд вида $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$, где коэффициенты Фурье a_0, a_n и b_n вычисляются по формулам $a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx$, $a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx$, $b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx$.
31. Теорема Дирихле (об условиях разложимости функции в ряд Фурье)	если 2π-периодическая функция $f(x)$ на [-π, π] кусочно-монотонная и ограниченная, то ряд справа сходится к данной функции $f(x)$.
32. Ряд Фурье только по косинусам	если непериодическую функцию, заданную на $[0,\ell]$ продолжить на $[-\ell,0]$ четным образом $(f(-x)=f(x))$, то ряд Фурье для нее будет содержать только косинусы, $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi}{\ell}x$, так как $b_n=0$. Коэффициенты a_0, a_n вычисляются по формулам $a_0=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}f(x)dx$, $a_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}f(x)\cos\frac{n\pi}{\ell}x\,dx$
33. Ряд Фурье только по синусам	если функцию продолжить влево на $[-\ell,0]$ нечетным образом $(f(-x)=-f(x))$, то $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi}{\ell}x$, где $b_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}f(x)\sin\frac{n\pi}{\ell}x\,dx$, $a_0=0$, $a_n=0$.

ИСПОЛЬЗУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Бабко, Г.И. Учебно-методический комплекс: теория и практика проектирования (Метод. рек. для препод. вузов) / Г.И. Бабко. – Мн.: РИВШ, 2004.
2. Берман, Г.М. Сборник задач по курсу математического анализа / Г.М. Берман. – М.: Наука, 1985.
3. Беспалько, В.П. Системно-методическое обеспечение учебно-воспитательного процесса подготовки специалистов / В.П. Беспалько, Ю.Г. Татур. – М., 1989.
4. Бугров, Я.С. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. – М.: Наука, 1980.
5. Гусак, А.А. Справочник по высшей математике / А.А. Гусак, Г.М. Гусак. – Мн.: Навука и тэхника, 1991.
6. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 3 ч. Ч. 2 / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – М.: Высш. шк., 1980.
7. Зуев Д.Д. Повышение эффективности учебно-методического комплекса как средств интенсификации учебно-воспитательного процесса: Проблемы школьного учебника / Д.Д. Зуев. – М.: Просвещение, 1987.
8. Жевняк, Р.М. Высшая математика. В 3 ч. Ч. 3 / Р.М. Жевняк, А.А. Карпук. –Мн.: Выш. шк., 1985.
9. Матвеев, Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений / Н.М. Матвеев. – Мн.: Выш. шк., 1974.
10. Мышкис, А.Д. Лекции по высшей математике / А.Д. Мышкис. – М.: Наука, 1973.
11. Пальчевский, Б.В. Концепция УМК / Б.В. Пальчевский, Л.С. Фридман. – Мн., 1993.
12. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. В 2 т. Т. 2. / Н.С. Пискунов. – М.: Наука, 1978.
13. Пономарев, К.К. Составление дифференциальных уравнений / К.К. Пономарев. – Мн.: Выш. шк., 1973.
14. Проектирование и разработка учебно-методических комплексов по циклу социально-гуманитарных дисциплин в вузе: материалы для слушателей курсов повышения квалификации / под общ. ред. А.В. Макарова. – Мн.: РИВШ, 2003.

15. Сборник задач по математике для втузов: спец. разделы мат. анализа / под ред. А.В. Ефимова и Б.П. Демидовича. – М.: Наука, 1981.
16. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике. В 2 ч. Ч. 2. / под общ. ред. А.П. Рябушко. –Мн.: Выш. шк., 1991.
17. Индивидуальные задания по высшей математике / под общ. ред. А.П. Рябушко. – Мн.: Выш. шк., 2004.
18. Сергеенкова, В.В. Управляемая самостоятельная работа студентов. Модульно-рейтиноговая и рейтинговая системы / В.В. Сергеенкова. – Мн.: РИВШ, 2000.
19. Столяр, А.А. Педагогика математики: учеб. пособие для физ.-мат. фак. пед. ин-тов / А.А. Столяр. – Мн.: Выш. шк., 1986.
20. Элементы линейной алгебры. Введение в математический анализ. Дифференциальное исчисление функции одной переменной: учеб.-метод. комплекс для студентов техн. спец. / сост. и общ. ред. В.С. Вакульчик. – Новополоцк: ПГУ, 2007.
21. Яско, Ф.Ф. Методические рекомендации о порядке разработки, утверждения и распространения учебно-методических комплексов / Ф.Ф. Яско. – Новополоцк: ПГУ, 2004.
22. Яско, Ф.Ф. Положение о подготовке и выпуске научных и учебных изданий / Ф.Ф. Яско. – Новополоцк: ПГУ, 2005.

Учебное издание

ЯСКО Федор Филиппович

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
РЯДЫ

Учебно-методический комплекс
для студентов технических специальностей

Редактор *О. П. Михайлова*

Дизайн обложки *В. А. Виноградовой*

Подписано в печать 23.12.08. Формат 60 × 84 1/16. Гарнитура Таймс. Бумага офсетная.
Ризография. Усл. печ. л. 18,56. Уч.-изд. л. 17,91. Доп. тираж 105 экз. Заказ № 2079

Издатель и полиграфическое исполнение:
учреждение образования «Полоцкий государственный университет»

ЛИ 02330/0133020 от 30.04.04 ЛП № 02330/0133128 от 27.05.04

211440 г. Новополоцк, ул. Блохина, 29