

Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования  
«Полоцкий государственный университет»

О. Е. ШЕСТОПАЛОВА

**АВТОМАТИЧЕСКОЕ УПРАВЛЕНИЕ  
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ**

Учебно-методический комплекс  
для студентов специальностей  
1-36 01 01 «Технология машиностроения»,  
1-39 02 01 «Моделирование и компьютерное  
проектирование радиоэлектронных средств»

В двух частях

Часть 1

Новополоцк

ПГУ

2014

УДК 681.52(075.8)  
ББК 32.965я73  
Ш52

Рекомендовано к изданию методической комиссией  
радиотехнического факультета  
в качестве учебно-методического комплекса  
(протокол № 6 от 12.06.2013)

**РЕЦЕНЗЕНТЫ:**

нач. службы по эксплуатации и ремонту КИП и А цеха 200  
завода «Полимир» ОАО «Нафтан» О. Е. ДРОВОСЕКОВ;  
д-р техн. наук, проф., зав. каф. технологии и оборудования  
машиностроительного производства Н. Н. ПОПОК;  
канд. техн. наук, доц., декан радиотехнического факультета Ю. Г. ГРОЗБЕРГ

**Шестопалова, О. Е.**

Ш52 Автоматическое управление технологическими системами : учеб.-  
метод. комплекс для студентов специальностей 1-36 01 01, 1-39 02 01.  
В 2 ч. Ч. 1 / О. Е. Шестопалова. – Новополоцк : ПГУ, 2014. – 172 с.

ISBN 978-985-531-437-1.

Первая часть посвящена основам теории автоматического управления и предназначена для формирования у студентов понятийного аппарата в области автоматического и автоматизированного управления современными технологическими процессами. Представлен математический аппарат синтеза и анализа систем автоматического управления: рассмотрены типовые звенья систем, структурные схемы, понятие астатизма, обеспечение качества управления по результатам анализа переходных режимов, частотных характеристик и устойчивости.

Предназначен для студентов специальностей 1-36 01 01 «Технология машиностроения» и 1-39 02 01 «Моделирование и компьютерное проектирование радиоэлектронных средств». Может быть рекомендован студентам технических специальностей для самостоятельного изучения теории автоматического управления и ее применения в задачах инженерного проектирования и исследовательских работах.

**УДК 681.52(075.8)**  
**ББК 32.965я73**

**ISBN 978-985-531-437-1 (Ч. 1)**  
**ISBN 978-985-531-132-5**

© О. Е. Шестопалова, 2014  
© УО «ПГУ», 2014

## ВВЕДЕНИЕ

В учебно-методическом комплексе излагаются базовые основы теории автоматического управления, традиционно изучаемые студентами технических специальностей в рамках дисциплин, связанных с автоматическим и автоматизированным управлением объектами профессиональной деятельности. В первую этот материал знакомит со структурой современных автоматизированных систем управления технологическими процессами, принципами автоматического управления и классификацией систем автоматического управления. Далее рассматриваются методы анализа и синтеза линейных непрерывных систем автоматического управления, обеспечения качества управления по результатам анализа переходных режимов, частотных характеристик и устойчивости.

Комплекс содержит значительное количество примеров и задач, иллюстрирующих теоретический материал. Кроме этого, в мультимедийных презентациях лекционного материала рассматриваются дополнительные примеры, часто – с пошаговым разбором, ссылки на которые в тексте пособия отмечены специальным значком, например:

*ПРИМЕР* следящей САУ углом поворота с сельсинной обратной связью.



Для понимания изложенного материала нужно иметь базовые представления о производных и интегралах, дифференциальных уравнениях, линейной алгебре, матрицах и комплексных числах.

Для практического освоения методов проектирования систем автоматического управления рекомендуется вторая часть УМК, в которой значительное внимание уделяется применению пакета Mathcad для моделирования систем автоматического управления и принятия решений по его результатам.

Обе части пособия могут быть рекомендованы студентам технических специальностей для самостоятельного изучения теории автоматического управления и ее применения в задачах инженерного проектирования и исследовательских работах.

## ЛЕКЦИОННЫЙ КУРС

### 1. ВВЕДЕНИЕ В АВТОМАТИЧЕСКОЕ УПРАВЛЕНИЕ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

Предметом дисциплины «Автоматическое управление технологическими системами» для специальности 1-39 02 01 «Моделирование и компьютерное проектирование радиоэлектронных средств» и дисциплины «Теория автоматического управления технологическими системами» для специальности 1-36 01 01 «Технология машиностроения» являются основы теории автоматического управления, изучаемые применительно к технологическим системам с учетом их специфических особенностей как объектов управления. Теория автоматического управления изучает принципы построения и методы исследования процессов в системах автоматического управления (САУ); решает задачи синтеза, анализа, коррекции, экспериментального исследования и наладки САУ.

Под *объектом управления* в технологической системе (ТС) понимают осуществляемый с использованием оборудования технологический процесс, в котором один или несколько параметров, характеризующих состояние процесса, поддерживаются на заданном уровне или изменяются по заданному закону.

В промышленности к *технологическим объектам управления* (ТОУ) относят технологическое оборудование, осуществляющее активное воздействие на обрабатываемый материал или вещество (механическое, термическое, химическое и др.) и представленное отдельными механизмами, машинами, аппаратами или целыми производственными комплексами. Для ТОУ характерно наличие множества возможных состояний (режимов).

*Управлением* называется целенаправленное изменение режима работы ТОУ, достигаемое воздействием на ТОУ. Определение величины и характера необходимого воздействия, а также его осуществление при автоматической реализации управления осуществляется специальными техническими устройствами, называемыми *управляющими*. Управление современными ТС является высокоавтоматизированным [1 – 3].

Автоматическая система, которая в течение длительного времени требуемым образом изменяет или поддерживает неизменными какие-либо параметры ТОУ (положение, скорость перемещения или частоту вращения рабочих органов, температуру, давление и т. п.), называется *системой ав-*

*томатического управления.* САУ осуществляет управление без участия человека и формирует воздействия, обеспечивающие требуемый режим работы ТОО – изменение выходных величин, характеризующих состояние объекта управления, в соответствии с заданным законом или обеспечение их постоянства. Полностью автоматическое управление может быть реализовано только для относительно простых объектов (отдельных устройств, агрегатов, технологических операций), поведение которых является детерминированным и для которых процесс управления может быть строго формализован.

Современный технологический процесс в целом как объект управления характеризуется структурной сложностью и территориальной распределенностью, функциональной сложностью и многопараметричностью. Поведение таких объектов управления имеет вероятностную (недетерминированную) природу и не подлежит полной формализации. Поэтому при управлении технологическим процессом в целом формализованные операции управления выполняются автоматически, а неформализованные, например, принятие решений в нестандартных ситуациях, требуют участия человека. Такое управление называется *автоматизированным*.

Системы управления технологическими процессами, в которых функции управления осуществляются автоматическими устройствами локальных САУ, вычислительной техникой и человеком, называются *автоматизированными системами управления технологическими процессами* (АСУ ТП). Кроме термина АСУ ТП, широкое распространение для обозначения систем такого уровня получил термин SCADA-системы (Supervisory Control and Data Acquisition – диспетчерское управление и сбор данных). САУ являются подсистемой первого уровня общей, иерархической структуры АСУ ТП. На уровне АСУ ТП осуществляется управление параллельной работой систем локальных уровней, контроля над работой всех систем, централизованного учета отказов в работе и др. На этом уровне для обработки большого объема информации используется вычислительная техника (контроллеры, компьютеры). Результат обработки информации представляется оперативному персоналу в форме, удобной для принятия решений (*режим ручного дистанционного управления*), или используется для непосредственной корректировки задающих воздействий для САУ локального уровня (*супервизорный режим*).

Иерархическая структура АСУ ТП показана на рис. 1.

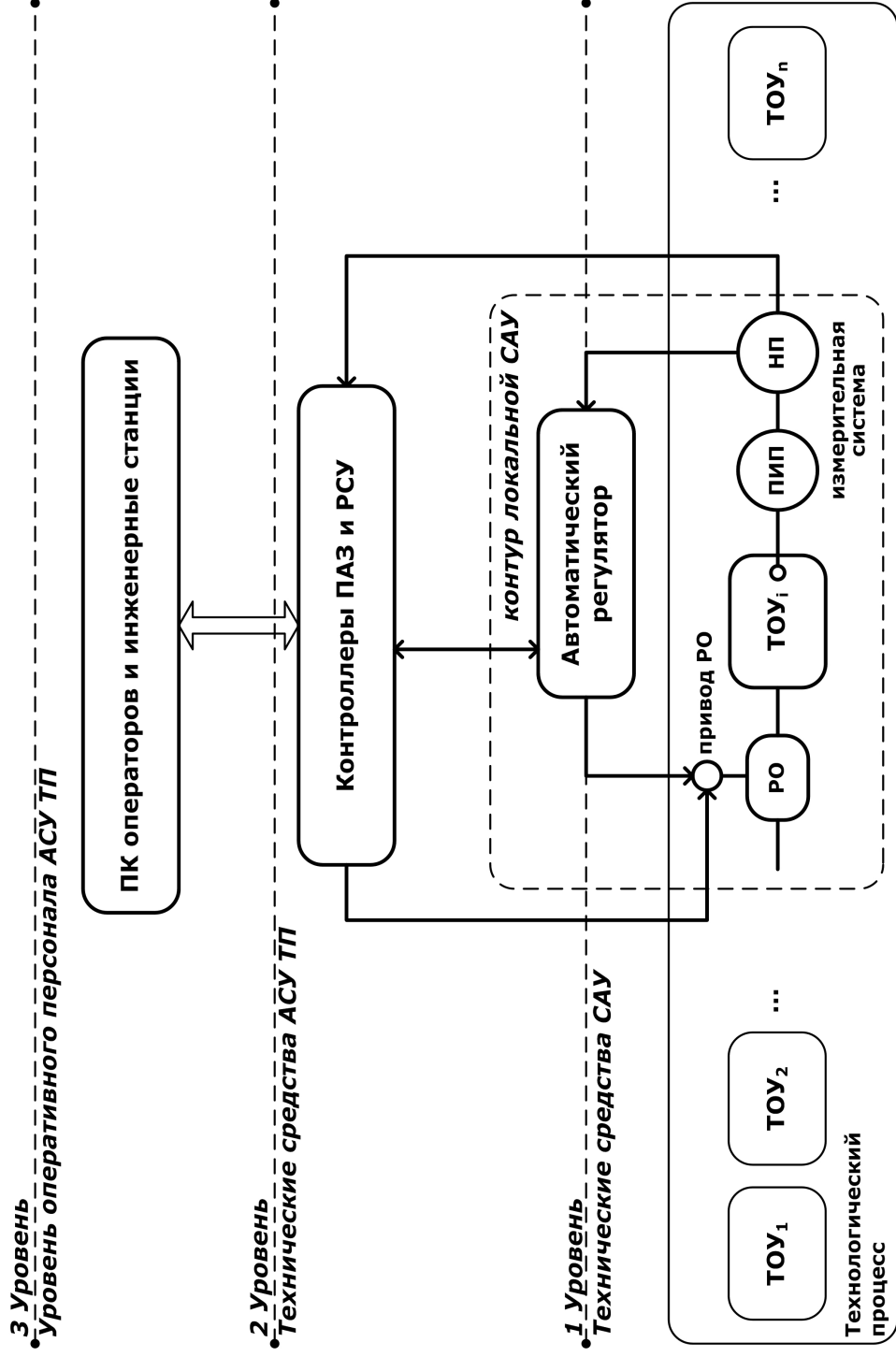


Рис. 1. АСУ ТП – автоматизированная система управления технологическим процессом; НП – нормирующий преобразователь; ПАЗ – противоаварийная защита; ПИП – первичный измерительный преобразователь; ПК – персональный компьютер; РО – регулирующий орган; РСУ – распределенная система управления; САУ – система автоматического управления; TOU – технологический объект управления

Иерархическая структура АСУ ТП (см. рис. 1) включает в себя:

1) уровень технических средств САУ – управляющие устройства, к которым относятся:

- первичные измерительные преобразователи (ПИП), предназначенные для преобразования контролируемого параметра в сигнал определенной формы, удобной для дальнейшей обработки и преобразований (например, термопара преобразует температуру в термоЭДС);

- нормирующие преобразователи (НП), осуществляющие преобразование сигналов от ПИП в эквивалентные унифицированные сигналы (например, преобразование термоЭДС в унифицированный токовый сигнал от 4 до 20 мА или в унифицированный пневматический сигнал от 20 до 100 кПа);

- локальные автоматические регуляторы;

- приводы, непосредственно изменяющие состояние ТООУ (например, двигатель, приводящий в действие исполнительный механизм) или приводящие в действие регулирующие органы, непосредственно изменяющие состояние ТООУ (например, привод регулирующего клапана, изменяющего расход жидкости в трубопроводе);

2) уровень технических средств АСУ ТП – контроллеры и управляемые автоматические регуляторы;

3) уровень оперативного персонала АСУ ТП – автоматизированные рабочие места оператора-технолога и инженера, реализованные с использованием персональных компьютеров.

Технические средства первого уровня размещаются непосредственно на объекте управления, второго и третьего уровня – в помещениях аппаратных и операторных. Контроллеры АСУ ТП являются многофункциональными программируемыми устройствами. Они выполняют следующие функции:

- воспринимают результаты контроля состояния ТООУ (аналоговые и дискретные сигналы нормирующих преобразователей) и выполняют их обработку;

- формируют аналоговые и дискретные управляющие сигналы исполнительных устройств и/или сигналы и команды на изменение функции автоматических регуляторов САУ.

Технические средства третьего уровня обеспечивают ведение базы данных, визуализацию состояния технологического оборудования, формирование отчетности, ручное дистанционное управление технологическим оборудованием.

Информация, предоставляемая оператору АСУ ТП, может иметь различные виды:

- обобщенная мнемосхема объекта автоматизации;
- мнемосхемы отдельных ТОУ с индикацией величин контролируемых параметров;
- диаграммы изменения контролируемых параметров (текущие и за отчетные промежутки времени – смена, сутки, месяц);
- панели контроля и управления регуляторами;
- аварийные и технологические сообщения.

Проектирование АСУ ТП осуществляется поэтапно. На первом этапе разрабатывается структурная схема управления. На втором – функциональные схемы автоматизации, которые являются основным документом, определяющим функциональную структуру узлов автоматического контроля и автоматического регулирования, а также оснащения их техническими средствами автоматизации. Завершающим этапом проектирования является разработка принципиальных электрических, гидравлических и пневматических схем контроля, автоматического регулирования, сигнализации и питания [4 – 6].

## **2. Основы автоматического управления**

### **2.1. Принципы автоматического управления**

САУ состоит из *управляющих устройств (УУ)* и *объекта управления (ОУ)*. Величины, характеризующие состояние ОУ, называются *выходными* или *управляемыми*. Воздействия, поступающие на вход УУ и несущие в себе информацию о требуемом значении управляемого параметра, называются *задающими*. Воздействия, вырабатываемые регулятором в составе УУ и непосредственно изменяющие состояние ОУ через исполнительные механизмы, называются *управляющими*. Регулятор может быть реализован в виде отдельного технического устройства, например, регулятор температуры в холодильнике – это электронная схема, которая включает охлаждение, если температура становится выше заданной. В современных системах управления ТС роль регуляторов выполняют микропроцессорные устройства (контроллеры) и компьютеры.

Воздействия внешней среды, вызывающие несанкционированное отклонение управляемой величины от заданного значения, называются *возмущающими воздействиями*. Возмущения носят случайный характер и



мешают осуществлению управления. Задающие и возмущающие воздействия объединяют в группу *входных воздействий*.

САУ может быть реализована с использованием следующих фундаментальных принципов управления [1 – 3, 7]:

- 1) управление по задающему воздействию, или *принцип разомкнутого управления*;
- 2) управление по отклонению, или *принцип обратной связи*;
- 3) управление по возмущению, или *принцип компенсации*.

### 2.1.1. Принцип разомкнутого управления (управление по задающему воздействию)

Сущность принципа *разомкнутого управления* состоит в том, что управление строится только на основе заданного алгоритма функционирования и не контролируется по фактическому значению управляемой величины, то есть текущее состояние ОУ не учитывается при выработке управляющих воздействий. Процесс работы системы не зависит непосредственно от результата ее воздействия на объект управления.

Структурная схема управления имеет вид разомкнутой цепи (рис. 2), т. е. управляющие устройства оказывают воздействие на объект управления, но обратное воздействие отсутствует.

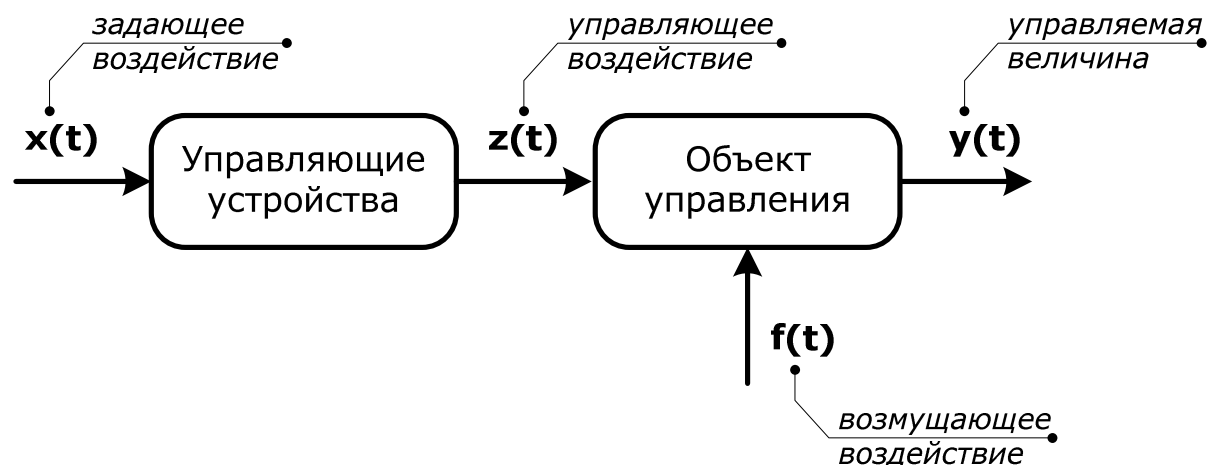
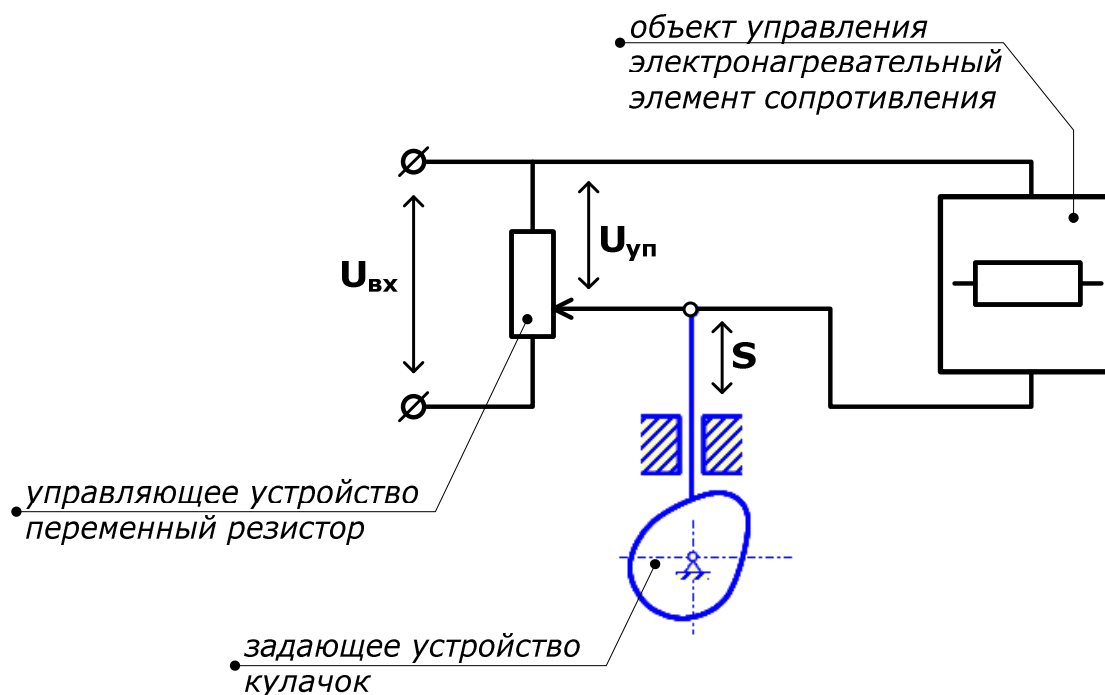


Рис. 2

Задающее устройство подает задающее воздействие  $x(t)$ , которое преобразуется управляющими устройствами в управляющее воздействие  $z(t)$ . Под воздействием управления состояние объекта управления ОУ, характеризуемое управляемой величиной  $y(t)$ , изменяется так, чтобы значе-

ние  $y(t)$  было равно требуемому значению, величина которого определяется задающим воздействием  $x(t)$ . Наличие возмущающего воздействия  $f(t)$  приводит к тому, что действительное значение управляемой величины  $y(t)$  отличается от заданного, то есть появляется ошибка управления. Если действие возмущений является постоянным или периодическим, ошибка управления накапливается и в пределе может произойти отказ системы. Таким образом, принцип разомкнутого управления не применим в условиях значительных помех и возмущений. В отсутствие возмущений воспроизведение заданной величины обеспечивается жесткостью характеристик устройств, входящих в состав схемы. Разомкнутое управление в чистом виде применяется редко и только в простых схемах [1 – 3, 7].

Рассмотрим разомкнутую систему управления температурой электронагревательного элемента (рис. 3).



$x(t) = S(t)$  - перемещение или угол поворота подвижного контакта

$y(t) = T_{0y}(t)$  - температура нагревательного элемента

$z(t) = U_{yn}(t)$  - напряжение на подвижном контакте

Рис. 3

В качестве управляющего устройства в схеме (см. рис. 3) используется потенциометр – переменный резистор, положение подвижного контакта которого определяет величину управляющего напряжения  $U_{yn}$  как долю от 0 до 100% входного напряжения  $U_{ex}$ , подаваемую на электронагревательный элемент. В бытовых электрообогревателях необходимая температура задается вручную с использованием регулятора или позиционного переключателя. В промышленных системах, например в хлебопекарных печах, закон изменения температуры нагрева может задаваться профилем кулачка [8].

Рассмотрим ситуацию, связанную с возникновением в разомкнутой САУ ошибки управления в условиях действия возмущения на примере диаграмм работы разомкнутой САУ температурой нагрева *бытового электрообогревателя* с двухпозиционным переключателем (рис. 4). Пусть переключатель, кроме положения «выкл.», имеет два положения, соответствующие минимальной и максимальной температуре нагрева. До момента времени  $t_0$  электрообогреватель какое-то время был включен на минимальную температуру нагрева – положение переключателя соответствовало  $S_{min}$  и температура уже достигла значения  $T_{min}$ . Система находится в установленном состоянии равновесия, которое описывается равенством

$$T_{min} = k \cdot S_{min} ,$$

где  $k$  – коэффициент статического преобразования САУ.

Состояние равновесия сохраняется в системе до момента времени  $t_1$ , но в момент времени  $t_1$  пользователь электрообогревателя решает увеличить температуру нагрева до максимума и переключает регулятор в положение «max».

Поскольку изменение положения переключателя происходит практически мгновенно, изменение величины задающего воздействия  $S(t)$  в момент времени  $t_1$  можно изобразить идеальной ступенькой (см. рис. 4). Однако процесс преобразования электрической энергии в тепловую является более инерционным, поэтому температура нового значения достигнет не сразу, а за некоторое время – время переходного процесса  $t_p$ . Закон изменения температуры во время переходного процесса носит плавный характер. После завершения переходного процесса равновесие в системе восстановится – с момента времени  $t_1 + t_p$  выполняется равенство

$$T_{max} = k \cdot S_{max} .$$

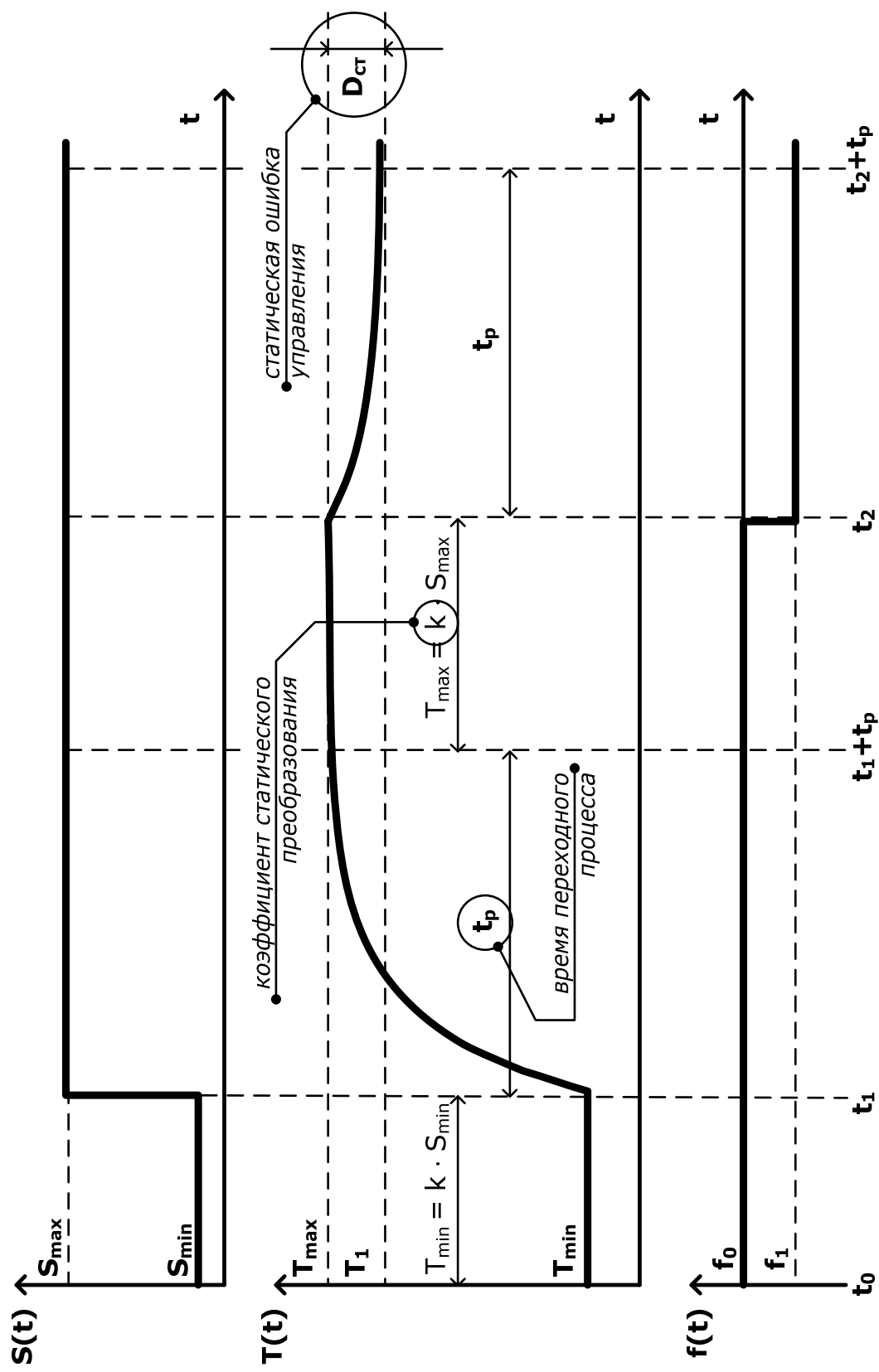


Рис. 4

Установленное равновесие будет сохраняться в системе до момента времени  $t_2$ , в который в системе начинает действовать некое возмущение (см. рис. 3).

Предположим, что это возмущение состоит в падении входного напряжения управляющего устройства (см. рис. 3). В результате при неизменном положении регулятора  $S(t_2) = S_{\max}$  температура электрообогревателя начнет понижаться и после завершения переходного процесса в момент времени  $t_2 + t_p$  достигнет некоторого нового значения  $T_1$ , отличного от требуемого  $T_{\max}$ .

Система придет в состояние равновесия, но в этом состоянии будет иметь место *статическая ошибка управления*  $D_{cm}$ , равная величине отклонения фактического, установившегося после завершения переходного процесса значения управляемой величины от заданного значения (см. рис. 4):

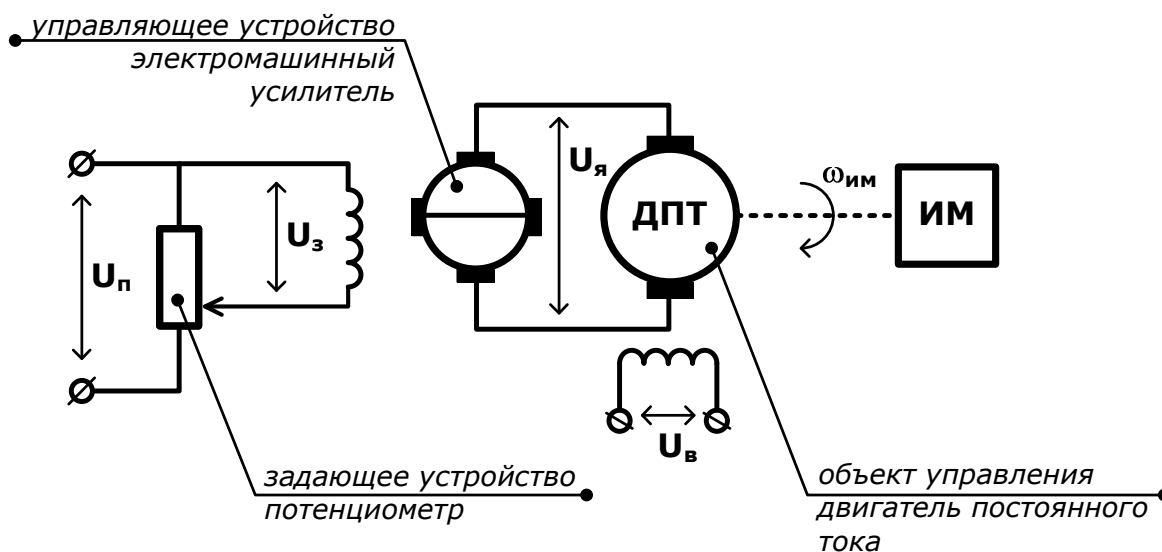
$$D_{cm} = y_{zd} - \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = k \cdot x(t) - \lim_{t \rightarrow \infty} y(t);$$

$$D_{cm} = T_{zd} - \lim_{t \rightarrow \infty} T(t) = k \cdot S_{\max} - T(t_2 + t_p) = T_{\max} - T_1.$$

Рассмотрим пример еще одной разомкнутой системы – САУ скоростью вращения привода исполнительного механизма (ИМ) технологической системы (рис. 5), состоящей из электромашинного усилителя мощности и двигателя постоянного тока.

Чтобы ротор двигателя вращался с требуемой скоростью (частотой)  $\omega_{\text{им}}(t)$ , необходимо на его вход (якорную обмотку) подавать определенное напряжение  $U_{\text{я}}(t)$  для обеспечения необходимого момента вращения. Это напряжение снимается с выхода электромашинного усилителя. В свою очередь, на обмотку управления усилителя подается задающее напряжение  $U_3(t)$ , снимаемое с подвижного контакта потенциометра  $R$  (переменного резистора). Для задания требуемого значения скорости контакт потенциометра устанавливается в соответствующее положение, т. е. он является задающим устройством.

В процессе управления скорость может отклониться от заданного значения под действием возмущений, например, при изменении момента нагрузки на валу двигателя. В этом случае в системе возникнет неустранимая внутрисистемными средствами, т. е. без вмешательства человека, статическая ошибка управления.



$x(t) = U_{з}(t)$  - задающее напряжение

$y(t) = \omega_{им}(t)$  - угловая скорость вращения ИМ

$z(t) = U_{я}(t)$  - напряжение якоря ДПТ

Рис. 5

### 2.1.2. Принцип обратной связи (управление по отклонению)

При реализации *управления по отклонению* управляющее воздействие на ОУ вырабатывается как функция отклонения текущего значения управляемой величины  $y(t)$  от ее заданного значения  $y_{зд}(t)$ , которое определяется задающим воздействием

$$y_{зд}(t) = k \cdot x(t),$$

где  $k$  – коэффициент пропорциональности между величиной задающего воздействия  $x(t)$  и заданным значением управляемой величины  $y_{зд}(t)$ , равный коэффициенту статического преобразования САУ. Схема управления содержит обратную связь, т. е. управляемая величина с выхода системы подается на ее вход – такая обратная связь называется *общей*. Структурная схема системы является замкнутой (рис. 6, а).

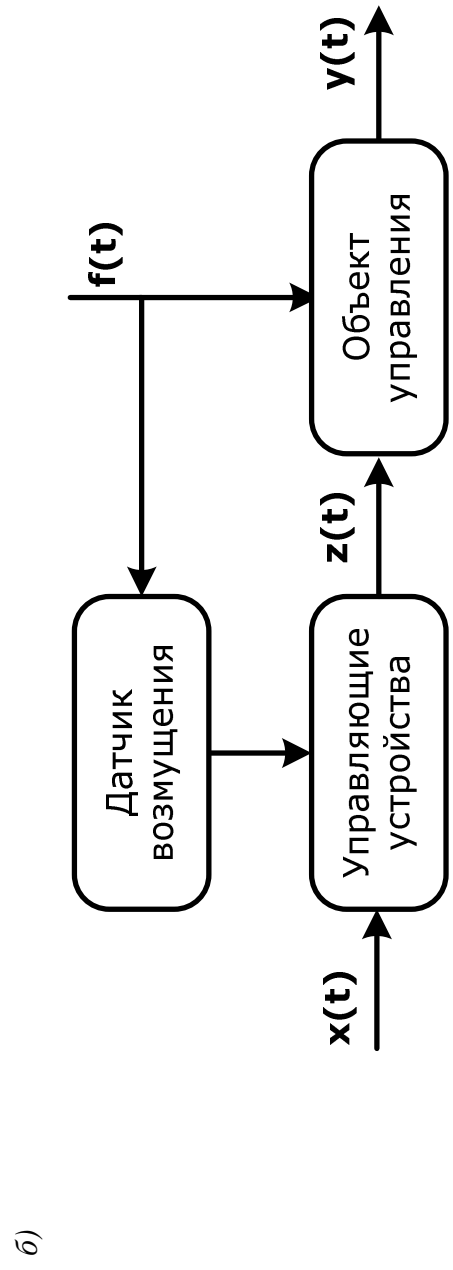
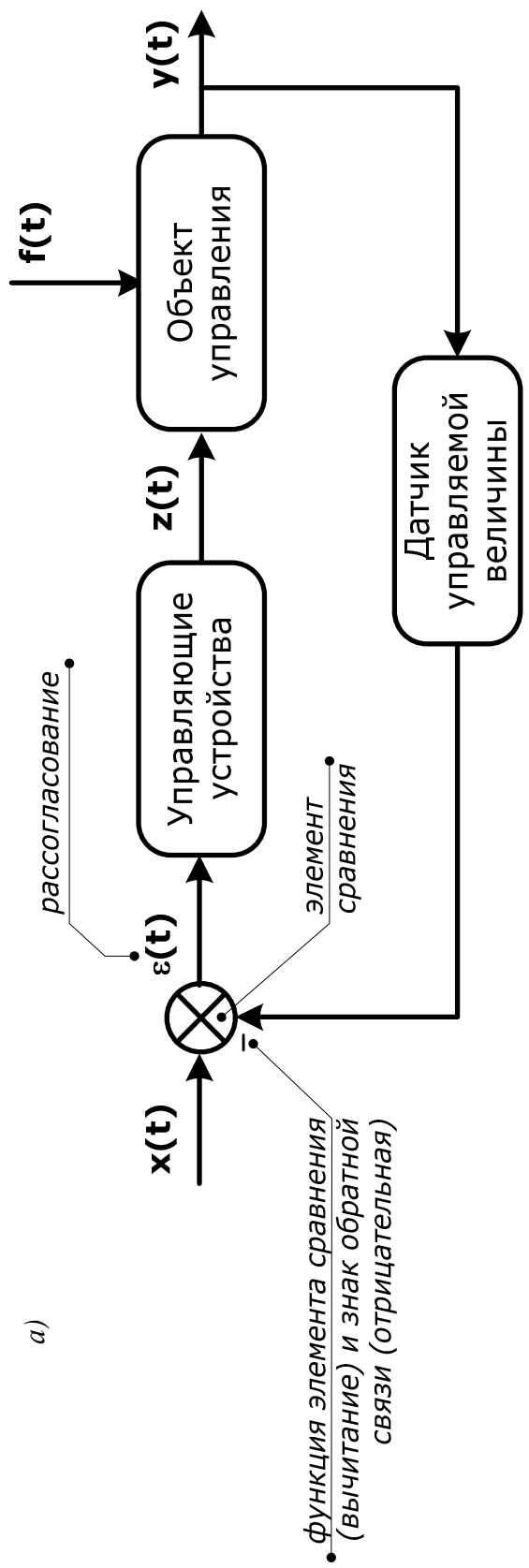


Рис. 6

На входе системы (см. рис. 6, а) элементом сравнения производится определение величины *рассогласования*  $\varepsilon(t)$  между заданным и действительным значением управляемой величины:

$$\varepsilon(t) = y_{\text{зад}}(t) - y(t) = k \cdot x(t) - y(t).$$

Обратная связь такого типа называется *отрицательной*. Управляющие устройства в системах управления по отклонению работают таким образом, чтобы все время сводить рассогласование к нулю. Универсальность и эффективность принципа управления по отклонению состоит в том, что он позволяет реализовать заданный закон изменения управляемой величины  $y(t)$  независимо от того, изменение какого из входных воздействий – задающего  $x(t)$ , внутреннего и внешнего возмущения  $f(t)$  – вызвало возникновение рассогласования.

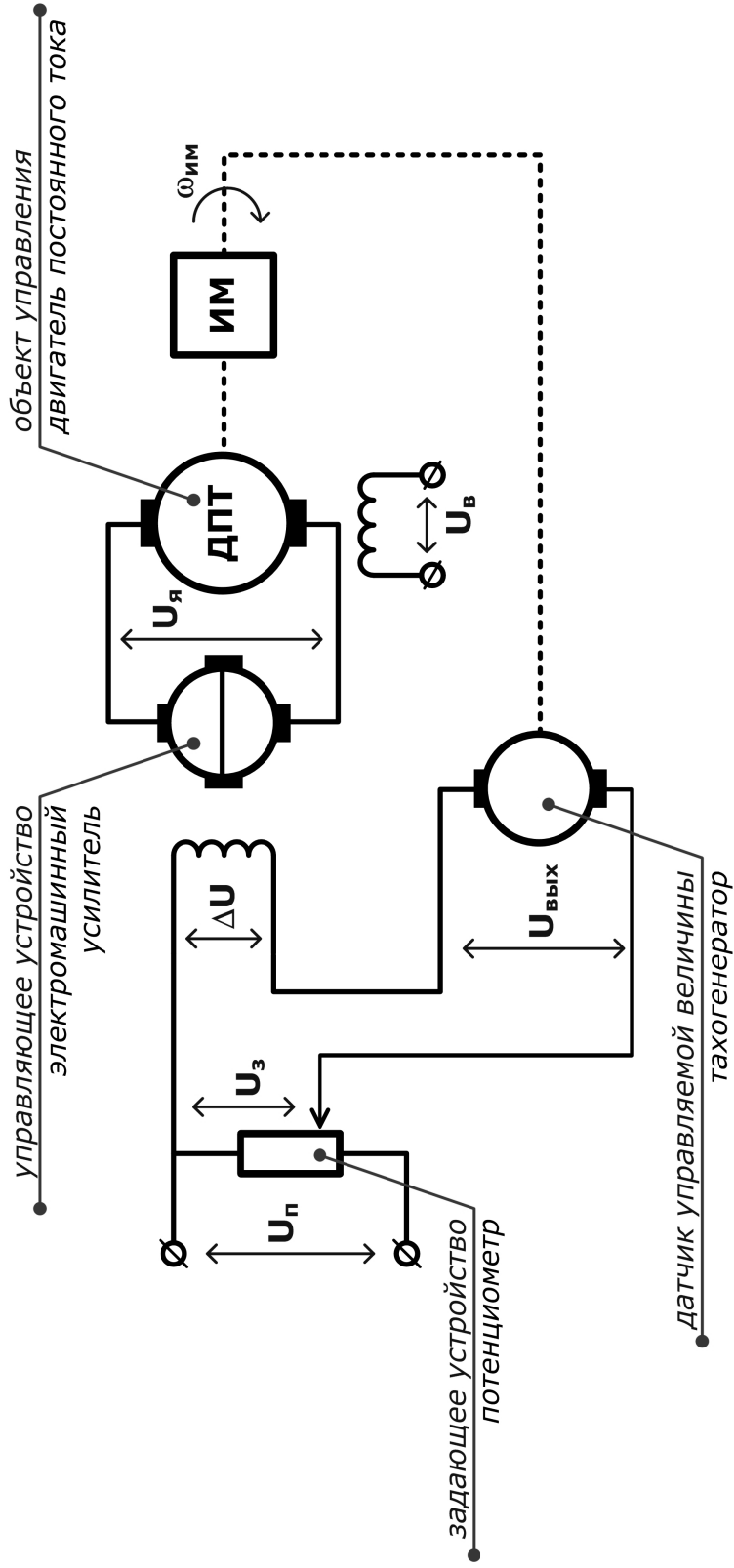
САУ по отклонению реагирует на интегрированное внешнее воздействие, проявляющееся в изменении управляемой величины. К достоинствам САУ по отклонению относятся простота технической реализации, удовлетворительная точность управления, меньшая чувствительность к изменениям внутренних параметров системы.

К недостаткам систем с обратной связью следует отнести невысокое быстродействие, обусловленное тем, что действие системы направлено на ликвидацию рассогласования: САУ сначала допускает изменение управляемой величины под воздействием внешних или внутренних возмущений, а потом его ликвидирует. При управлении по отклонению влияние возмущающих воздействий на управляемую величину не устраняется, а только уменьшаются последствия этого влияния. Принцип ориентирован не на причину, вызывающую отклонение управляемой величины от заданного значения, а на следствие в виде возникающего рассогласования [1 – 3, 7].

Рассмотрим в качестве примера управления по отклонению САУ скоростью вращения привода исполнительного механизма (ИМ) технологической системы (рис. 7). Двигатели постоянного тока применяются в качестве промышленных электроприводов благодаря возможности плавного регулирования скорости (частоты) вращения за счет изменения напряжения на якорной обмотке при постоянном напряжении на обмотке возбуждения.

Целью управления в рассматриваемой САУ является обеспечение заданного значения скорости вращения исполнительного механизма  $\omega_{\text{им}}(t)$ .





$x(t) = U_3(t)$  - задающее напряжение

$z(t) = U_я(t)$  - напряжение якоря ДПТ

$y(t) = \omega_{ИМ}(t)$  - угловая скорость вращения ИМ

$\varepsilon(t) = \Delta U = U_3(t) - U_{вых}(t)$  - напряжение рассогласования

Рис. 7

Задатчиком желаемого значения скорости вращения (см. рис. 7) является потенциометр (переменный резистор) – положение его подвижного контакта определяет величину задающего напряжения  $U_з(t)$  как долю от напряжения питания  $U_n(t)$ . В качестве датчика используется тахогенератор – преобразователь мгновенного значения угловой скорости вращения вала в пропорциональный электрический сигнал:

$$U_{вых}(t) = k_{mxz} \cdot \omega_{им}(t),$$

где  $k_{mxz}$  – коэффициент пропорциональности (статического преобразования) тахогенератора.

Разность напряжений (рассогласование)  $\Delta U(t) = U_з(t) - U_{вых}(t)$  подается на обмотку управления управляющего устройства – электромашинного усилителя, что приводит к изменению управляющего воздействия – напряжения якоря ДПТ  $U_я(t)$ . Это приводит к изменению скорости вращения ротора ДПТ и, соответственно, к ликвидации рассогласования между действительным текущим значением скорости вращения ИМ и требуемым (заданным) значением.

Заметим, что в качестве источника энергии для ДПТ может быть использован не только электромашинный усилитель, но и генератор постоянного тока или тиристорный преобразователь.

Возмущениями в этой САУ могут быть изменение момента нагрузки на валу двигателя, изменение коэффициента усиления электромашинного усилителя и т. д. [2, 9, 10].

Рассмотрим особенности управления по отклонению на примере диаграмм работы САУ скорости вращения ИМ (рис. 8).

До момента времени  $t_0$  САУ уже некоторое время функционировала и пришла к установившемуся состоянию равновесия, которое описывается равенством заданного и реального значений скорости вращения ИМ, и, соответственно, равенством значений задающего напряжения и напряжения обратной связи, снимаемого с датчика скорости – тахогенератора:

$$U_{з0} = U_{вых0}.$$

При этом величина рассогласования  $\Delta U = 0$ . Состояние равновесия сохраняется в системе до момента времени  $t_1$ .

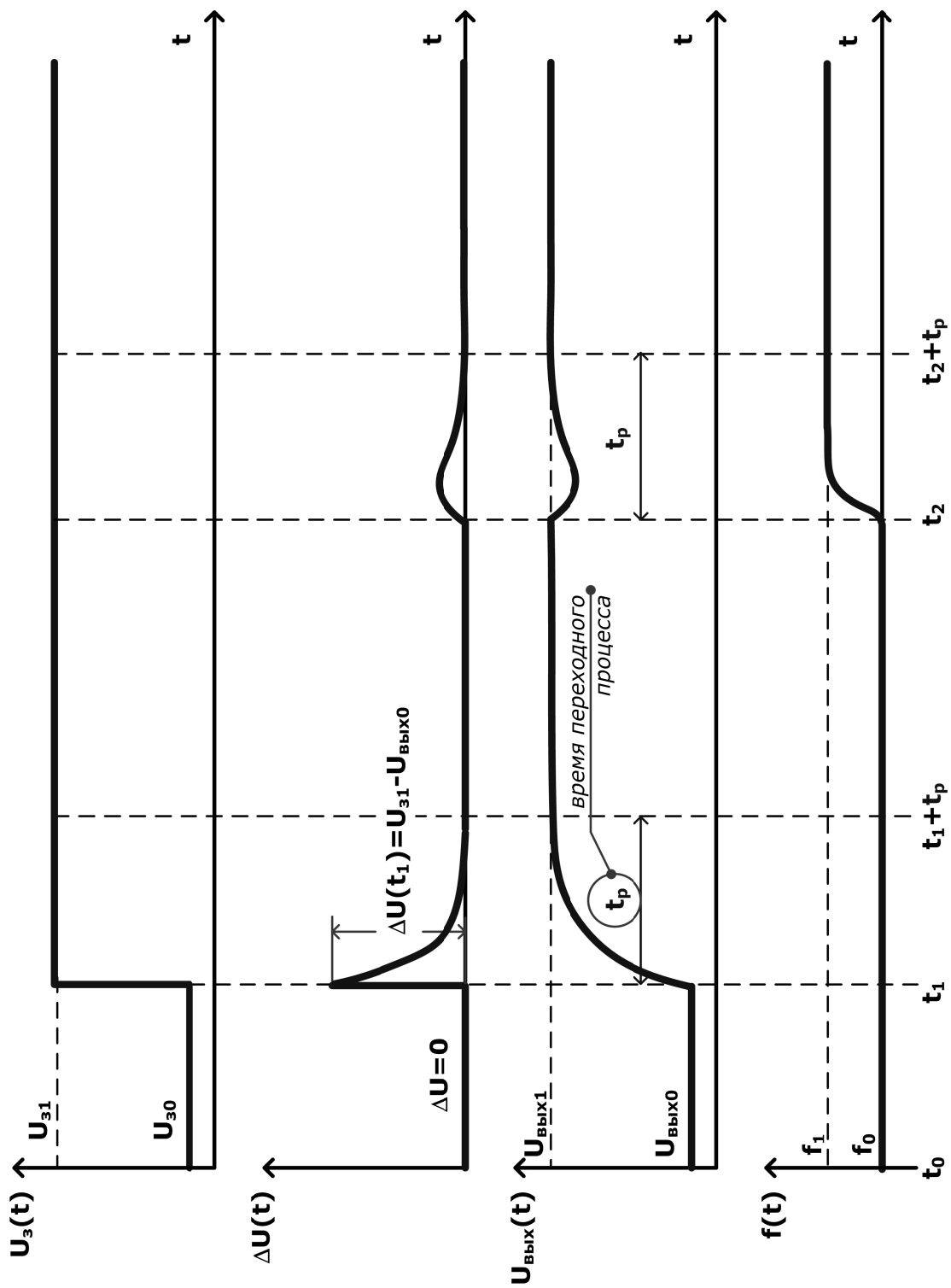


Рис. 8

В момент времени  $t_1$  (см. рис. 8) величина задающего напряжения в соответствии с алгоритмом управления возрастает до значения  $U_{з1}$ . Это приводит к нарушению равновесия в системе и возникновению рассогласования, которое имеет максимальное значение в момент ступенчатого изменения задающего воздействия:

$$\Delta U(t_1) = U_{з}(t_1) - U_{вых}(t_1) = U_{з1} - U_{вых0}.$$

Управляющее устройство – электромашинный усилитель – отработает возникшее рассогласование увеличением напряжения якоря двигателя, и требуемое значение скорости вращения установится за время переходного процесса  $t_p$ , определяемое инерционностью элементов САУ, а рассогласование снова станет равным нулю (см. рис. 8). Установленное равновесие будет сохраняться в системе до момента времени  $t_2$ , в который в системе начинает действовать некое возмущение. Предположим, что возмущение состоит в несанкционированном увеличении нагрузки на валу двигателя, т. е. до момента времени  $t_2$  нагрузка имела номинальное значение, на которое рассчитана работа САУ, и возмущение в системе отсутствовало ( $f_0 = 0$ ). Но в момент времени  $t_2$  нагрузка начинает возрастать и за некоторое время достигает значения  $f_1$ .

Под действием возмущения начнет уменьшаться скорость вращения ИМ (см. рис. 8), а величина рассогласования согласованно возрастать, т. к. при постоянном значении задающего воздействия  $U_{з1}$  с момента времени  $t_2$  убывает величина  $U_{вых}(t)$ . Но вне зависимости от причины возникновения рассогласования усилитель будет его отрабатывать изменением напряжения якоря. Скорость вращения ИМ вернется к заданному значению за время переходного процесса  $t_p$ , и к моменту времени  $t_2 + t_p$  рассогласование снова станет равным нулю, т. е. система придет к состоянию равновесия:

$$U_{з}(t_2 + t_p) = U_{вых}(t_2 + t_p).$$

Таким образом, в САУ, реализованной по принципу управления по отклонению в процессе функционирования в течение переходного процесса, имеет место динамическая ошибка управления, что обусловлено инерционностью элементов САУ по сравнению с источником задающего воздействия. Однако в установившемся режиме статическая ошибка управления отсутствует, даже если предшествующий переходной процесс был вызван действием возмущения.

Важно заметить, что САУ по отклонению не способны ликвидировать последствия влияния вообще всех возмущений. Вышесказанное отно-

сится только к тем возмущениям, последствия влияния которых устранимы управляющим воздействием САУ. Например, если в САУ управления скоростью вращения привода (см. рис. 7) произойдет разрыв обмотки возбуждения двигателя, то никакими средствами САУ ликвидировать последствия этого не удастся – двигатель остановится.

ПРИМЕРЫ других систем управления по отклонению.



### 2.1.3. Принцип компенсации (управление по возмущению)

В случае когда изменение состояния ОУ под действием одного или нескольких наиболее критических возмущений недопустимо, используют принцип управления по возмущению. Сущность принципа состоит в том, что измеренное датчиком возмущение преобразуется в воздействие, подаваемое на УУ, которое формирует управляющее воздействие  $z(t)$  с учетом не только величины задающего воздействия  $x(t)$ , но и величины возмущения  $f(t)$ . В результате управляющее воздействие на ОУ компенсирует (предотвращает) влияния данного возмущения на управляемую величину  $y(t)$ . Структурная схема САУ по возмущению приведена на рис. 6, б.

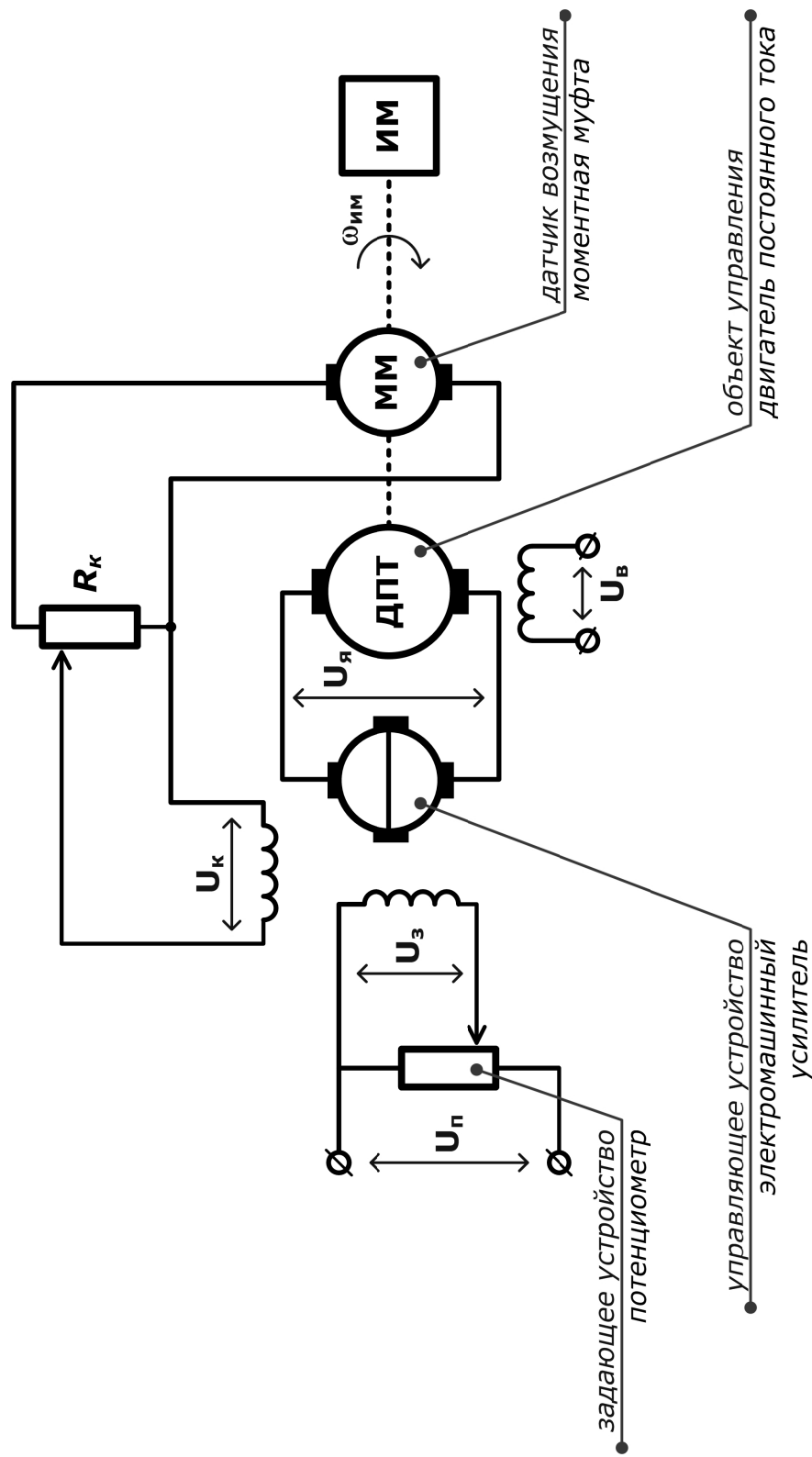
Принцип управления по возмущению ориентирован не на следствие, как принцип обратной связи, а на причину, нарушающую равновесие объекта управления, т. е. основное возмущающее воздействие, и преобразование его в управляющее воздействие. К достоинствам САУ, реализованных по принципу управления по возмущению, относится большая оперативность по сравнению с системами управления по отклонению, т. к. возмущение может быть скомпенсировано до появления значимого рассогласования между заданным и текущим значениями управляемой величины.

Недостатком систем управления по возмущению является то, что они компенсируют влияние одного или нескольких заранее определенных возмущений и не могут предотвратить влияние на управляемую величину других возмущающих воздействий. По отношению к неучтенным возмущениям, для которых не реализован контур компенсации, эти системы ведут себя как системы разомкнутого управления. Процесс управления не зависит от результатов – управляемая величина не измеряется и не производится никаких действий, если она не соответствует требуемому значению, и под действием неучтенных возмущений возникает статическая ошибка управления [2, 7, 10, 11].

Рассмотрим в качестве примера управления по возмущению САУ скоростью вращения привода исполнительного механизма (ИМ) технологической системы (рис. 9). Целью управления в рассматриваемой САУ является обеспечение заданного значения скорости вращения исполнительного механизма  $\omega_{\text{им}}(t)$  в условиях изменяющейся нагрузки на валу двигателя (основное возмущение). Задатчиком желаемого значения скорости вращения, как и в схеме с обратной связью (см. рис. 7), является потенциометр – положение его подвижного контакта определяет величину задающего напряжения  $U_z(t)$  как долю от напряжения питания  $U_n(t)$ . В качестве датчика возмущения используется моментная муфта – ее выходное напряжение (напряжение компенсации) пропорционально моменту нагрузки. Доля этого напряжения, определяемая положением подвижного контакта потенциометра контура компенсации  $R_k$ , составляет величину напряжения компенсации  $U_k(t)_n$ . Задающее напряжение и напряжение компенсации подаются на обмотки управления, и их магнитодвижущие силы складываются в электромашинном усилителе, который в этой схеме выполняет две функции: сумматора и усилителя.

При увеличении момента нагрузки  $M_n$  напряжение компенсации  $U_k$  увеличивается, что приводит к возрастанию магнитодвижущей силы обмотки управления в контуре компенсации, результирующей магнитодвижущей силы электромашинного усилителя, и в результате – напряжения якоря двигателя. Момент вращения двигателя возрастает, что позволяет преодолеть возросший момент нагрузки и сохранить неизменной заданную скорость вращения  $\omega_{\text{им}}(t)$ . Чувствительность контура компенсации к изменению момента нагрузки  $M_n$  определяется коэффициентом статического преобразования контура компенсации и настраивается потенциометром  $R_k$ .

Быстродействие и точность управления САУ скоростью вращения привода по возмущению (см. рис. 9) в условиях действия основного возмущения будет выше, чем в САУ по отклонению (см. рис. 7), т. к. инерционность контура компенсации определяется, в основном, быстродействием моментной муфты (передача и взаимодействие электрических сигналов не вносят существенного запаздывания). Кроме того, в САУ по возмущению формирование управляющего воздействия начнется по факту возникновения возмущения, раньше, чем оно значимым образом скажется на скорости вращения привода.



$x(t) = U_3(t)$  - задающее напряжение       $z(t) = U_я(t)$  - напряжение якоря ДПТ

$y(t) = \omega_{им}(t)$  - угловая скорость вращения ИМ       $U_к(t)$  - напряжение компенсации

**Компенсируемое возмущение** - изменение нагрузки на валу двигателя

Рис. 9

В САУ скоростью вращения привода по отклонению (см. рис. 7) в тех же условиях длительность переходного процесса САУ определяется инерционностью объекта управления (двигателя) и датчика выходной величины (тахогенератора), и, кроме того, формирование управляющего воздействия начинается по факту отклонения скорости от заданного значения, поэтому во время более длительного переходного процесса отклонение скорости вращения от заданного значения будет больше, чем в САУ по возмущению.

Однако в условиях действия прочих возмущений, например, при изменении коэффициента усиления электромашинного усилителя, САУ по возмущению не обеспечивает достижение цели управления – скорость вращения отклонится от заданной. В тех же условиях САУ по отклонению достижение цели управления обеспечит: благодаря контролю управляемой величины и величины рассогласования вследствие влияния изменившегося коэффициента усиления электромашинного усилителя будет ликвидировано изменением напряжения, подаваемого на обмотку управления [10].

*ПРИМЕРЫ других систем управления по возмущению.*



#### **2.1.4. Комбинированное управление**

Улучшение качества управления в условиях действия различных возмущений может быть достигнуто с использованием *комбинированного управления*, объединяющим достоинства управления по отклонению и по возмущению. Структурная схема САУ с комбинированным управлением приведена на рис. 10.

В системах комбинированного управления на вход управляющих устройств, помимо рассогласования, вычисляемого по задающему воздействию и сигналу обратной связи, поступает сигнал, получаемый путем измерения возмущающих воздействий. Обычно в комбинированных схемах измеряется, и, соответственно, компенсируется, только основное возмущение. Последствие влияния остальных возмущений, для которых не предусмотрены контуры компенсации, ликвидируется по обратной связи [1, 3, 10].



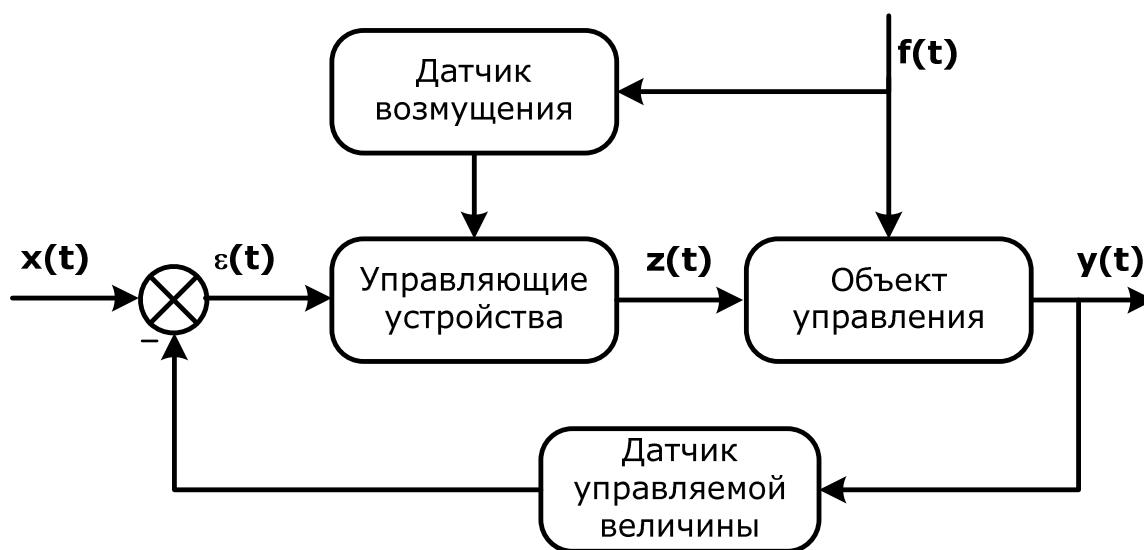
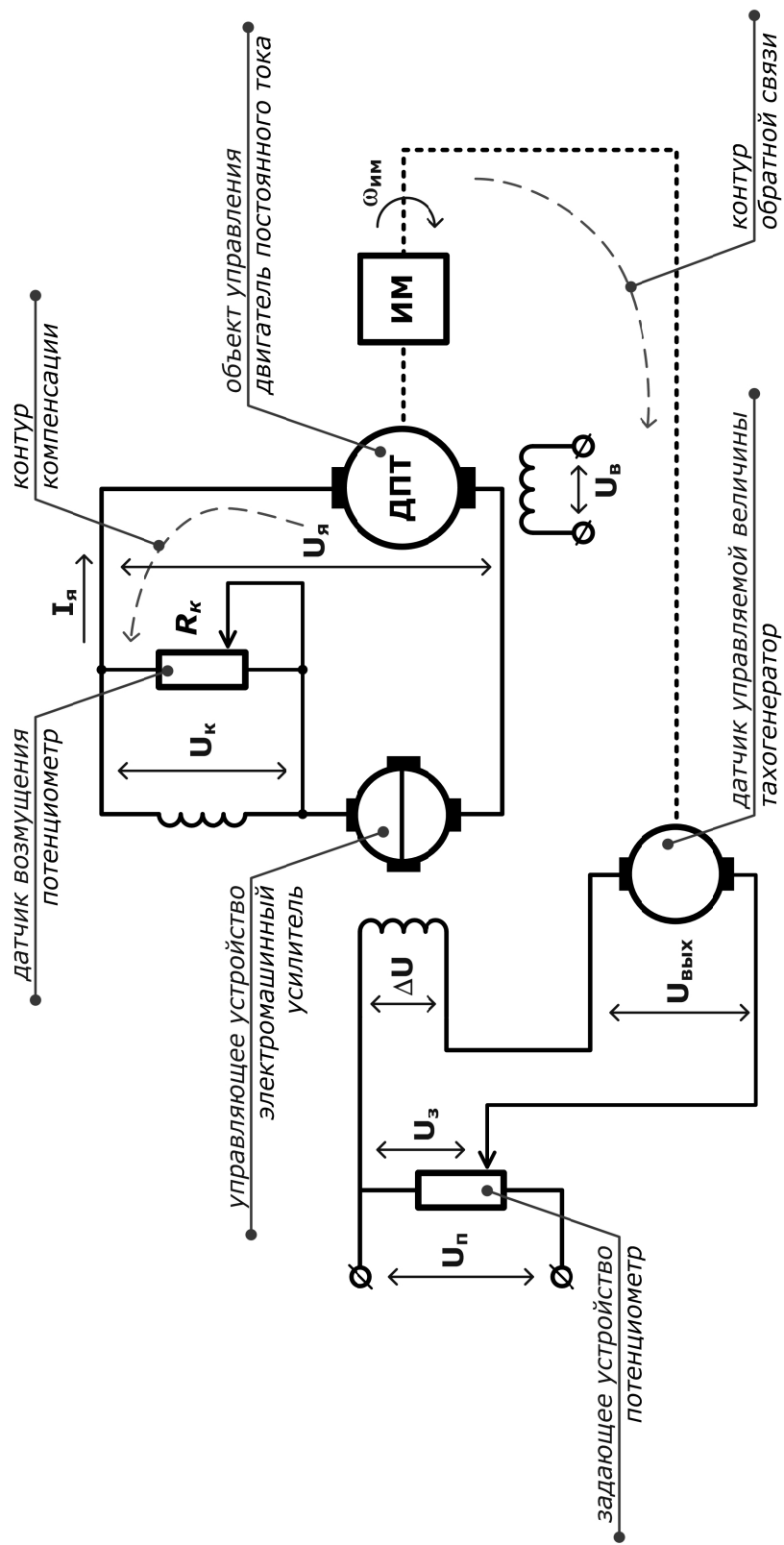


Рис. 10

Рассмотрим реализацию комбинированной САУ скоростью вращения привода исполнительного механизма (ИМ) технологической системы. Такую систему с контуром компенсации основного возмущения – изменения нагрузки на валу двигателя и общей обратной связью – можно реализовать объединением схем САУ по отклонению и по возмущению, показанных на рис. 7 и рис. 9. Рассмотрим альтернативный вариант реализации – с использованием компенсационной обмотки, включенной последовательно в цепь якоря двигателя (рис. 11).

В случаях, когда невозможно применить моментную муфту, измеряют не момент нагрузки  $M_n$ , а ток якоря  $I_a(t)$ . Ток якоря связан с моментом нагрузки  $M_n$  зависимостью, которую с некоторым приближением можно считать линейной. Контур компенсации возмущения в этом случае реализуется с использованием компенсационной обмотки электромашинного усилителя, включенной в цепь якоря. При увеличении момента нагрузки  $M_n$  ток якоря увеличивается, что приводит к возрастанию общей магнитодвижущей силы электромашинного усилителя и, в результате, его выходного напряжения. Момент вращения двигателя возрастает, компенсируя возросший момент нагрузки и обеспечивая независимость скорости вращения  $\omega_{им}(t)$  от  $M_n$ .



$x(t) = U_3(t)$  - задающее напряжение

$z(t) = U_я(t)$  - напряжение якоря ДПТ

$y(t) = \omega_{им}(t)$  - угловая скорость вращения ИМ

$\varepsilon(t) = \Delta U = U_3(t) - U_{вых}(t)$  - напряжение рассогласования

$U_к(t)$  - напряжение компенсации

**Компенсированное возмущение** - изменение нагрузки на валу двигателя

Рис. 11

Чувствительность контура компенсации к изменению момента нагрузки  $M_n$  настраивается потенциометром контура компенсации  $R_k$  (см. рис. 11). Контур общей обратной связи, реализованный с использованием датчика управляемой величины – тахогенератора, работает так же, как в САУ по отклонению [10].

*ПРИМЕРЫ других систем комбинированного управления.*



## **2.2. Классификация систем автоматического управления**

Основным классификационным признаком САУ является используемый для ее построения принцип управления (см. п. 2.1.). При этом существуют еще ряд признаков, которые используются для классификации систем управления.

### **2.2.1. По характеру изменения задающего воздействия (цели управления)**

В зависимости от характера изменения задающего воздействия  $x(t)$  системы управления делятся на [2, 3, 10]:

- 1) *обычные САУ*, к которым относятся:
  - САУ автоматической стабилизации;
  - САУ программного регулирования;
- 2) *следающие САУ*.

В обычных САУ значение или закон изменения задающего воздействия  $x(t)$  заранее известны, заданы, а целью управления является обеспечение соответствующего значения или закона изменения управляемой величины  $y(t)$ .

В системах *автоматической стабилизации* задающее воздействие представляет собой постоянную величину. Областью применения таких САУ являются непрерывные технологические процессы, в которых управляемый параметр нужно поддерживать в постоянном значении.

В системах *программного управления* задающее воздействие является заранее известной функцией времени (изменяется по закону, заданному программой). Такие системы оснащаются программными задатчиками, формирующими задающее воздействие, изменяющееся во времени (см.,

например, кулачок в составе САУ температурой электронагревательного элемента на рис. 3). Область применения: управление периодическими процессами.

Все примеры САУ, рассмотренные в п. 2.1, относятся к классу обычных САУ.

Особой разновидностью САУ являются *следающие системы*, в которых задающее воздействие представляет собой неизвестную заранее функцию времени, связанную с внешним, по отношению к системе управления, параметром. Этот параметр может изменяться случайным образом, и целью управления является воспроизведение случайного закона его изменения управляемой величиной  $y(t)$ . Такие САУ применяются для управления одним технологическим параметром (*ведомым*) в зависимости от значения другого технологического параметра (*ведущего*), изменяющегося по случайному закону – например, управление расходом воздуха, подаваемого на горелку, в зависимости от расхода топлива; управление расходом теплоносителя на подаче в отопительную систему в зависимости от температуры наружного воздуха и т.п.

Заметим, что следящие САУ, как и обычные системы, могут быть реализованы с использованием любого из рассмотренных в п. 2.1 принципов управления.

В электромеханических системах следящие САУ часто используются для воспроизведения одним устройством перемещения другого устройства без механической связи между ними. Для реализации таких систем может быть использована потенциометрическая обратная связь (для постоянного тока) или сельсинная обратная связь (для переменного тока).

Пример следящей САУ положением (углом поворота вала) исполнительного механизма с *потенциометрической обратной связью* показан на рис. 12. Целью управления является обеспечение равенства углов поворота задающего вала и вала исполнительного механизма дистанционно, т. е. без непосредственной механической связи:  $\alpha_z = \alpha_{им}$ .

На входе вращением задающего вала (например, при помощи рукоятки – см. рис. 12) задается произвольный закон изменения угла поворота. Измерительная система, реализованная с использованием двух поворотных потенциометров, включенных в общую цепь питания, обеспечивает формирование напряжения рассогласования, пропорциональное разности между углами поворотов задающего вала и вала исполнительного механизма.

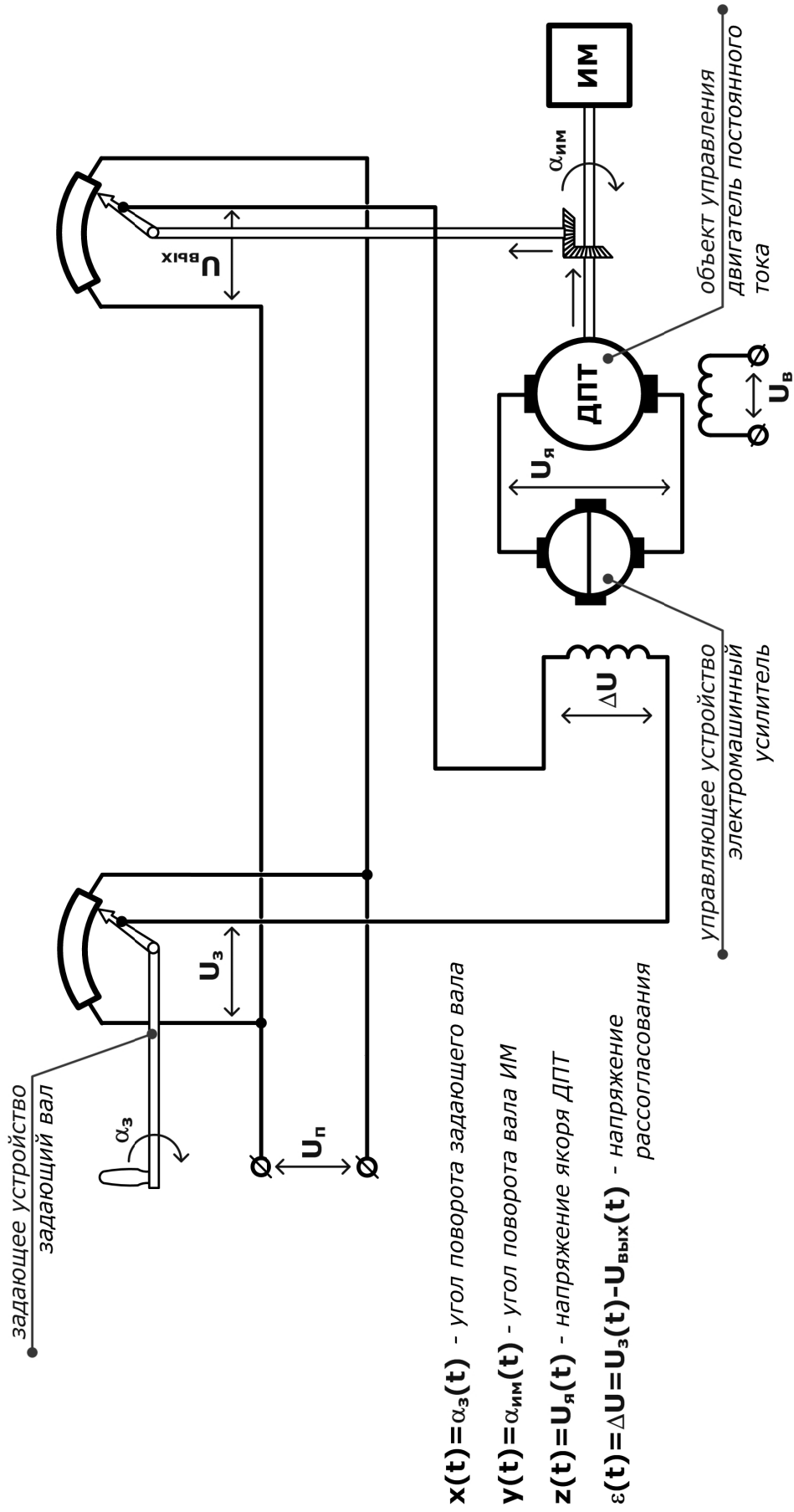


Рис. 12

Задающее напряжение  $U_3(t)$ , пропорциональное  $\alpha_3(t)$ , снимается с подвижного контакта первого потенциометра; напряжение  $U_{вых}(t)$ , пропорциональное  $\alpha_{ум}(t)$ , снимается с подвижного контакта второго потенциометра (см. рис. 12). Таким образом, напряжение рассогласования определяется как

$$\Delta U(t) = U_3(t) - U_{вых}(t).$$

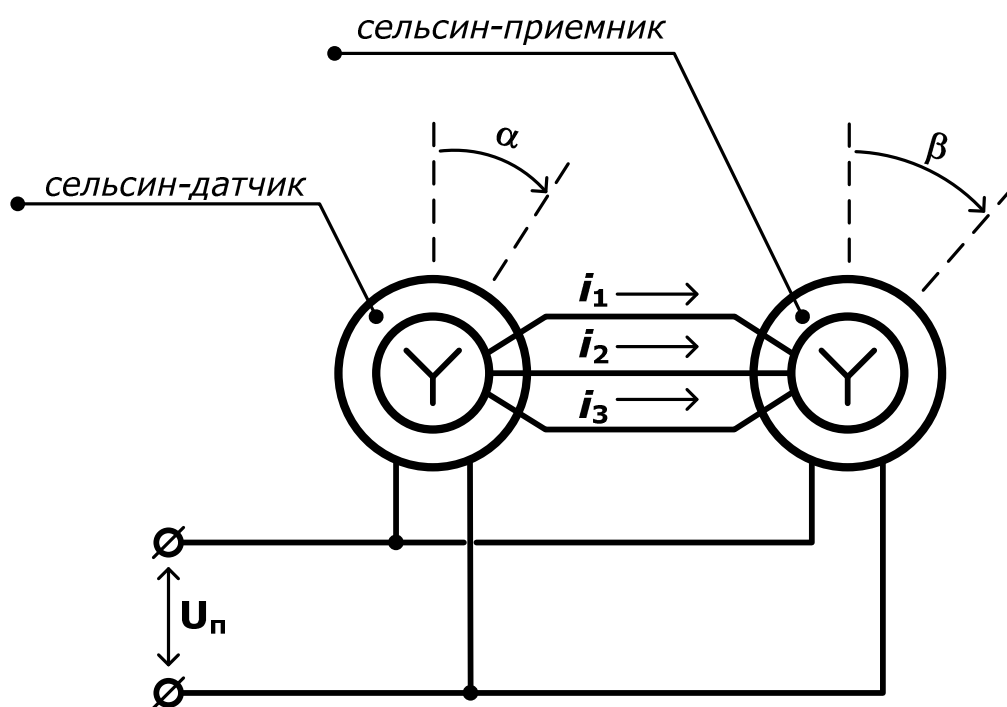
Напряжение  $\Delta U(t)$  подается на обмотку управления управляющего устройства – электромашинного усилителя, что приводит к возникновению управляющего воздействия – напряжения якоря ДПТ  $U_я(t)$ . Двигатель начинает вращаться, поворачивая контакт второго потенциометра в сторону уменьшения рассогласования углов. При достижении  $\alpha_3 = \alpha_{ум}$  напряжение  $\Delta U(t)$  станет равным нулю и двигатель остановится [1, 2].

В качестве примера следящей САУ, реализующей принцип *разомкнутого управления*, рассмотрим сельсинную пару, работающую в индикаторном режиме.

*Сельсин* – это электрическая машина переменного тока, по принципу действия представляющая собой поворотный трансформатор, у которого при вращении ротора происходит плавное изменение взаимной индуктивности между обмотками – однофазной первичной обмоткой возбуждения и трехфазной вторичной обмоткой синхронизации, соединенной в звезду.

Принцип действия сельсина не зависит от места расположения каждой из обмоток. Часто в сельсинах обмотку синхронизации размещают на статоре, а обмотку возбуждения – на роторе (для уменьшения количества контактных колец и повышения надежности работы). Далее будем рассматривать сельсины с обмоткой возбуждения на статоре и обмоткой синхронизации на роторе, соединенной в звезду.

Для передачи угла поворота на расстояние без непосредственной механической связи используется сельсинная пара, состоящая из сельсин-датчика (СД) и сельсин-приемника (СП), работающих в *индикаторном режиме* (рис. 13). Обмотки возбуждения СД и СП включены в общую цепь переменного напряжения  $U_n$ . Обмотки синхронизации СД соединены с обмотками синхронизации СП. При повороте ротора СД на угол  $\alpha$  в цепях обмотки синхронизации создадутся токи  $i_1 \dots i_3$ , которые вызовут изменение магнитного потока в обмотке СП. Взаимодействие этого потока с магнитным потоком ротора СП вызовет вращающий момент, и ротор СП повернется на угол  $\beta$ .



$x(t) = \alpha(t)$  - угол поворота СД

$y(t) = \beta(t)$  - угол поворота СП

$z(t) = M(t)$  - величина вращающего момента

Рис. 13

Величина вращающего момента определяется по формуле

$$M = M_{\max} \sin(\alpha - \beta),$$

где  $M_{\max}$  – максимальный синхронизирующий момент, определяемый параметрами сельсинной пары. Если СД идентичен СП, то  $\alpha = \beta$ . При том же условии, если сельсины вращаются с одинаковой угловой скоростью, то режим работы сельсинной пары называется *синфазным*.

Таким образом, если сельсин-датчик механически связан с ведущим (задающим) валом, а сельсин-приемник передает вращение валу ведомого исполнительного механизма, то рассмотренная САУ будет обеспечивать синхронизацию углов поворотов валов без непосредственной механической связи между ними. Данная схема является разомкнутой, и в условиях действия возмущений (например, при изменении нагрузки на валу сельсина-приемника) может возникнуть статическая ошибка управления.

Следует отметить, что мощности сельсин-приемника не всегда достаточно для непосредственного приведения в действие исполнительного механизма, поэтому чаще используется *трансформаторный режим* (рис. 14). Назначение этого режима – создавать напряжение рассогласования, которое по величине и знаку однозначно определяется углом рассогласования между сельсинами. Задающий вал поворачивает ротор СД, вал исполнительного механизма – ротор СП. Выходное напряжение на зажимах обмотки возбуждения СП является напряжением рассогласования, которое пропорционально разнице углов поворота СП и СД:

$$\Delta U = \Delta U_{\max} \sin(\alpha - \beta),$$

где  $\Delta U_{\max}$  – максимально возможная величина переменного напряжения рассогласования, определяемая параметрами сельсинной пары. Нетрудно заметить, что реализованный с использованием трансформаторного режима измерительный узел может быть использован в качестве сельсинной обратной связи, аналогичной по принципу действия потенциметрической обратной связи в примере на рис. 12 [2, 10].

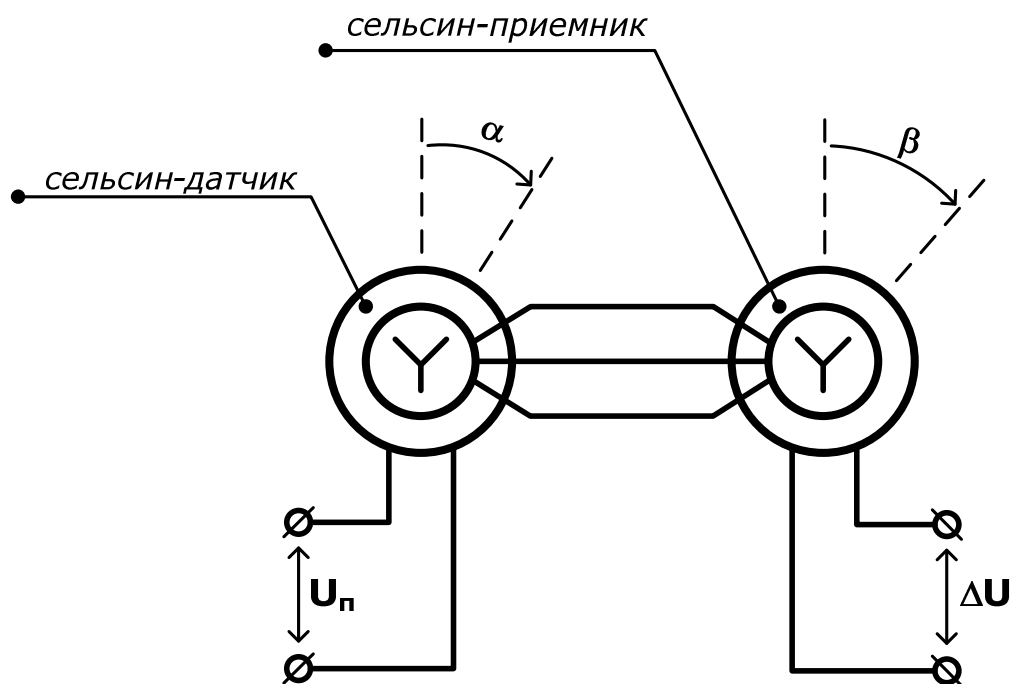


Рис. 14

*ПРИМЕР* следящей САУ углом поворота с сельсинной обратной связью.





### 2.2.2. По принципу формирования сигналов управления

По принципу формирования сигналов управления различают следующие разновидности САУ:

1) САУ с непрерывным (аналоговым) управлением, в которых сигналы управления  $s(t)$ , т. е.  $x(t)$ ,  $\varepsilon(t)$  и/или  $z(t)$ , представляют собой непрерывную функцию времени (рис. 15, а) и на любом ограниченном временном интервале могут иметь неограниченное число состояний;

2) САУ с дискретным управлением, в которых сигнал управления на любом ограниченном временном интервале может иметь конечное, фиксированное число состояний.

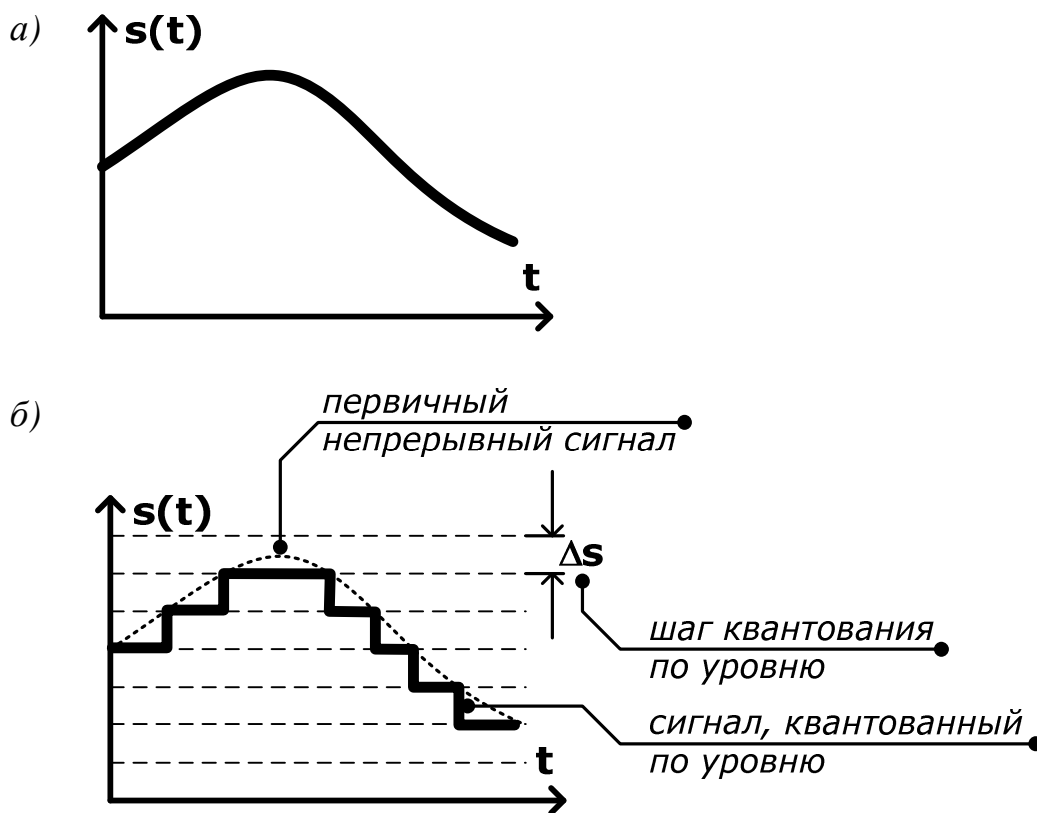


Рис. 15

Для источников аналоговых сигналов характерна бóльшая, чем у дискретных, чувствительность к помехам и инструментальным погрешностям преобразователей (дрейф нуля, температурные колебания коэффициентов усиления и т. п.). Источники дискретных сигналов лишены этих недостатков, так как образующие их элементы работают не в усилительном, а в релейном режиме, поэтому дискретные сигналы обеспечивают бóльшую надежность при передаче на большие расстояния.

САУ с дискретным управлением делятся на цифровые, импульсные и релейные.

В *цифровых* САУ используется дискретное преобразование первичного непрерывного сигнала, которое называется *квантованием по уровню* и сводится к замене бесконечного числа исходных значений конечным числом уровней (см. рис. 15, б). Разность уровней называется шагом квантования по уровню  $\Delta s$ . Пока значение исходного непрерывного сигнала не изменится на величину, равную шагу квантования, преобразователь фиксирует предыдущее значение уровня. Разрядность современных цифровых устройств позволяет использовать столь малые значения шага квантования по уровню, что погрешности такого представления становятся пренебрежимо малыми. После квантования цифровой сигнал подвергается кодированию – значение каждой величины уровня выражается цифровым кодом (числом). В цифровых САУ соответствующую форму обычно имеют задающее воздействие  $x(t)$ , и, после преобразования, сигналы в обратных связях. Цифровой сигнал рассогласования  $\varepsilon(t)$  может быть преобразован в непрерывное управляющее воздействие  $z(t)$ .

В *импульсных* САУ используется *квантование по времени* – замена бесконечного числа значений исходного непрерывного сигнала конечным числом его значений, фиксируемых через определенный промежуток времени  $\Delta t$  – шаг квантования по времени (рис. 16, а).

В зависимости от того, какая характеристика последовательности – амплитуда импульсов (см. рис. 16, а), частота следования импульсов (см. рис. 16, б) или ширина импульсов (см. рис. 16, в) – пропорциональна величине входного сигнала, различают типы модуляции импульсных сигналов.

В *релейных* САУ управляющее воздействие формируется с использованием релейных регуляторов, у которых при непрерывном изменении входной величины регулирующий орган занимает ограниченное число положений.

На рис. 16, г приведена характеристика двухпозиционного релейного регулятора с зоной неоднозначности, у которого в зависимости от величины непрерывно изменяющегося задающего воздействия  $x(t)$  регулирующий орган занимает одно из двух возможных положений, определяемых двумя значениями управляющего воздействия –  $z_{\max}$  и  $z_{\min}$ . У такого регулятора, в зависимости от знака и величины задающего воздействия, регулирующий орган или полностью открыт (приток вещества или энергии максимальный), или полностью закрыт (приток вещества или энергии равен нулю).

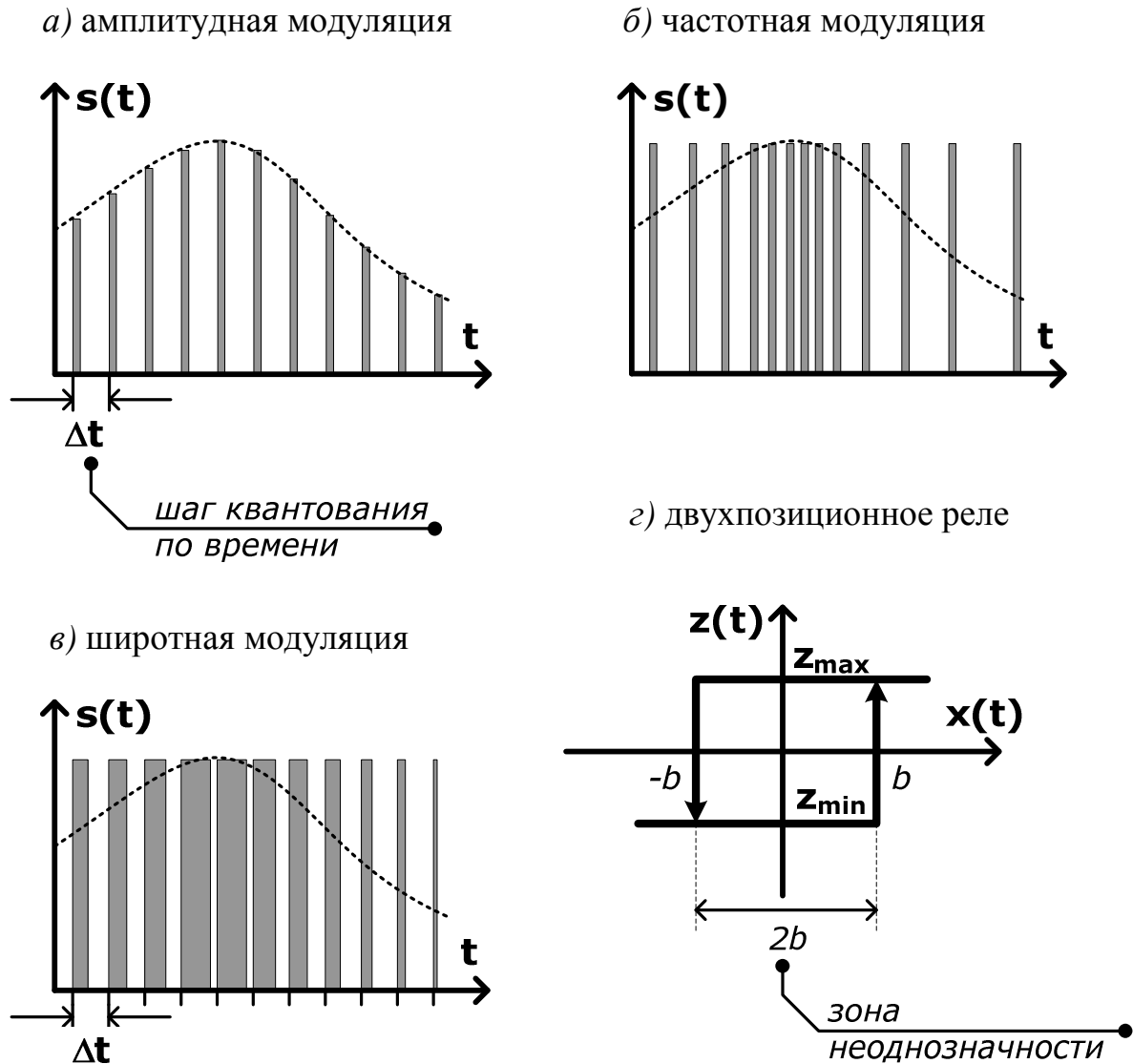


Рис. 16

Примерами двухпозиционных устройств являются электроконтактный термометр, который замыкает и размыкает электрическую цепь в зависимости от величины температуры; пневматический клапан в трубопроводе подачи жидкого или газового потока, который либо полностью открыт, либо полностью перекрывает подачу потока, и т. д.

В практике управления сложными технологическими системами непрерывное и дискретное управление используют совместно.

Рассмотрим примеры реализации дискретных систем управления.

Чтобы наглядно представить себе принцип работы *импульсной САУ*, покажем, как ее можно получить из обычной САУ непрерывного (аналогового) действия. Рассмотрим САУ температурой технологического объекта (рис. 17).

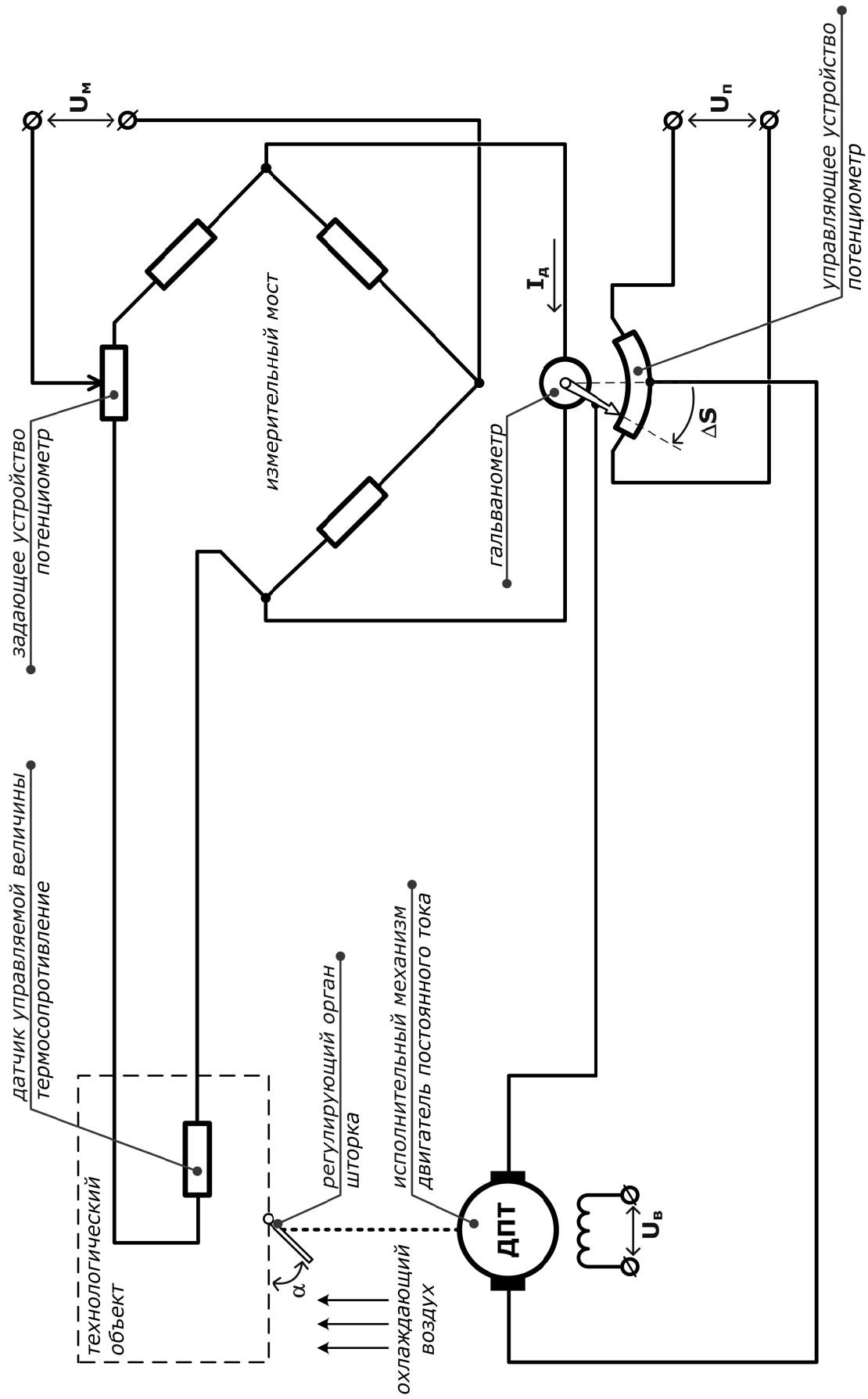


Рис. 17

Целью управления в данной САУ (см. рис. 17) является обеспечение заданной постоянной температуры технологического объекта за счет подачи охлаждающего воздуха. Регулирующим органом являются шторки, угол поворота которых определяет интенсивность поступления охлаждающего воздуха. Измерительный узел САУ состоит из термосопротивления, включенного в качестве одного из плеч измерительного моста, и гальванометра, измеряющего ток в диагонали моста. Мост настраивается так, чтобы при заданном значении температуры ток в диагонали моста  $I_d$  был равен нулю и стрелка гальванометра занимала вертикальное положение.

При отклонении температуры от заданного значения стрелка гальванометра (см. рис. 17) отклоняется от нулевой точки в ту или другую сторону в зависимости от знака отклонения, т. е. перемещение стрелки  $\Delta S$  пропорционально величине рассогласования:

$$\varepsilon(t) = \Delta T(t) = T^{\circ}_z - T^{\circ}_{об}(t) = n \cdot \Delta S,$$

где  $T^{\circ}_z$  – заданное значение температуры объекта;  $T^{\circ}_{об}(t)$  – текущее реальное значение температуры в момент времени  $t$ ;  $n$  – коэффициент пропорциональности.

Стрелка гальванометра скользит по потенциометру, управляющему работой двигателя постоянного тока, который, в свою очередь, вращает шторку (изменяет угол поворота  $\alpha$ ).

Недостатком рассмотренной САУ с обратной связью непрерывного действия является то, что стрелка гальванометра испытывает значительную механическую нагрузку в виде трения об обмотку потенциометра. Это существенно снижает чувствительность измерительного узла, а, следовательно, и всей САУ к малым отклонениям управляемой величины – температуры. Целесообразно было бы предоставить стрелке гальванометра возможность двигаться свободно, без нагрузки. Вариант технического решения этой задачи показан на рис. 18.

На рис. 18 изображен вид на стрелку гальванометра с торца (с носика). Носик стрелки движется влево и вправо свободно, не прикасаясь к обмотке потенциометра. Над стрелкой размещена падающая дужка, опирающаяся на кулачок-эксцентрик, который вращается с постоянной частотой  $\omega$ . Когда падающая дужка приходит в нижнее положение, она прижимает стрелку гальванометра к обмотке потенциометра на короткое время  $\tau$ . В течение остального периода колебаний дужки (шага квантования)  $\Delta t = 1/\omega$  стрелка свободна.

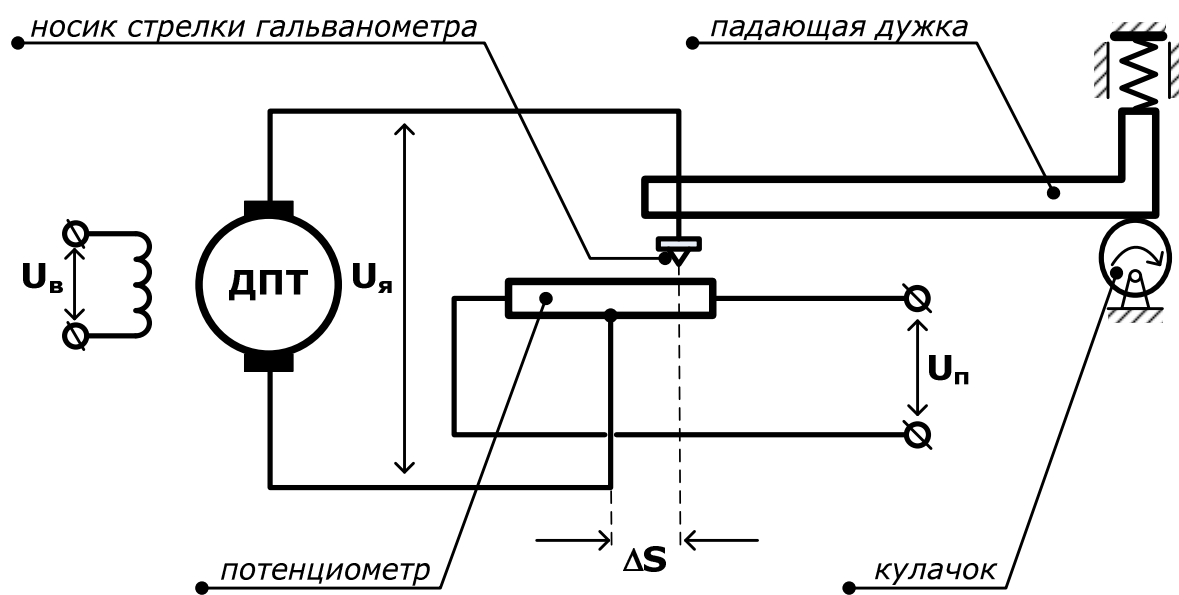


Рис. 18

В результате при непрерывном перемещении стрелки  $S$  напряжение якоря двигателя  $U_{\text{я}}$  будет подаваться с потенциометра в виде коротких импульсов (рис. 19).

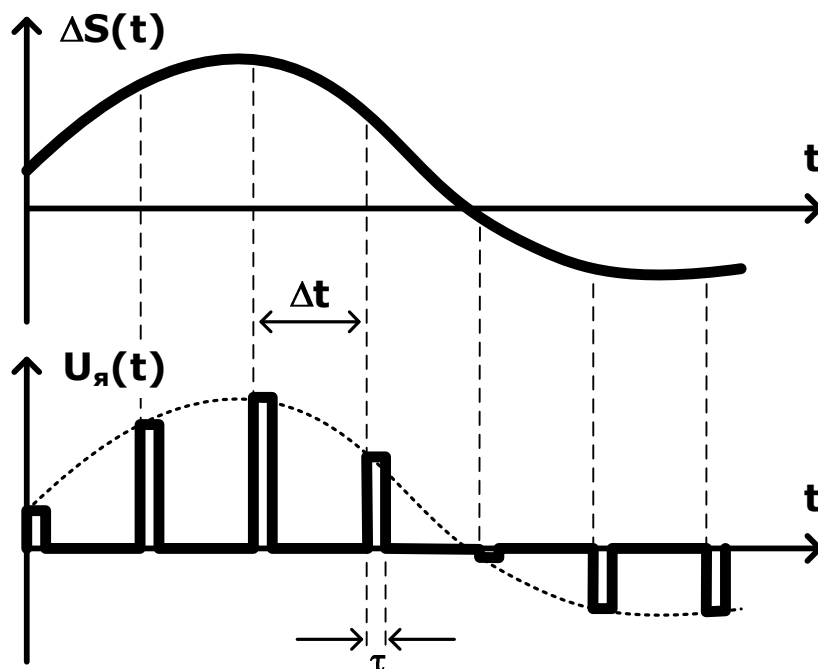


Рис. 19

Постоянный период чередования импульсов  $\Delta t$  (см. рис. 19) задается системе принудительно извне и определяется частотой вращения кулачка независимым от САУ приводом. Длительность импульсов  $\tau$  тоже постоянна. Поскольку перемещение стрелки  $\Delta S(t)$  пропорционально рассогласованию – отклонению  $\Delta T^\circ(t)$  температуры от заданного значения, а скорость вращения вала электродвигателя  $d\alpha/dt$  примерно пропорциональна напряжению  $U_{\text{я}}(t)$ , то в первом приближении получается импульсная зависимость скорости вращения исполнительного механизма (привода) регулирующего органа от отклонения управляемой величины, показанная на рис. 20.

На рис. 20 также приведен вытекающий закон движения регулирующего органа – угла поворота шторки  $\alpha(t)$ . В первом приближении шторка поворачивается во время подачи импульса (в течение интервала времени  $\tau$ ) и стоит на месте в промежутке между импульсами.

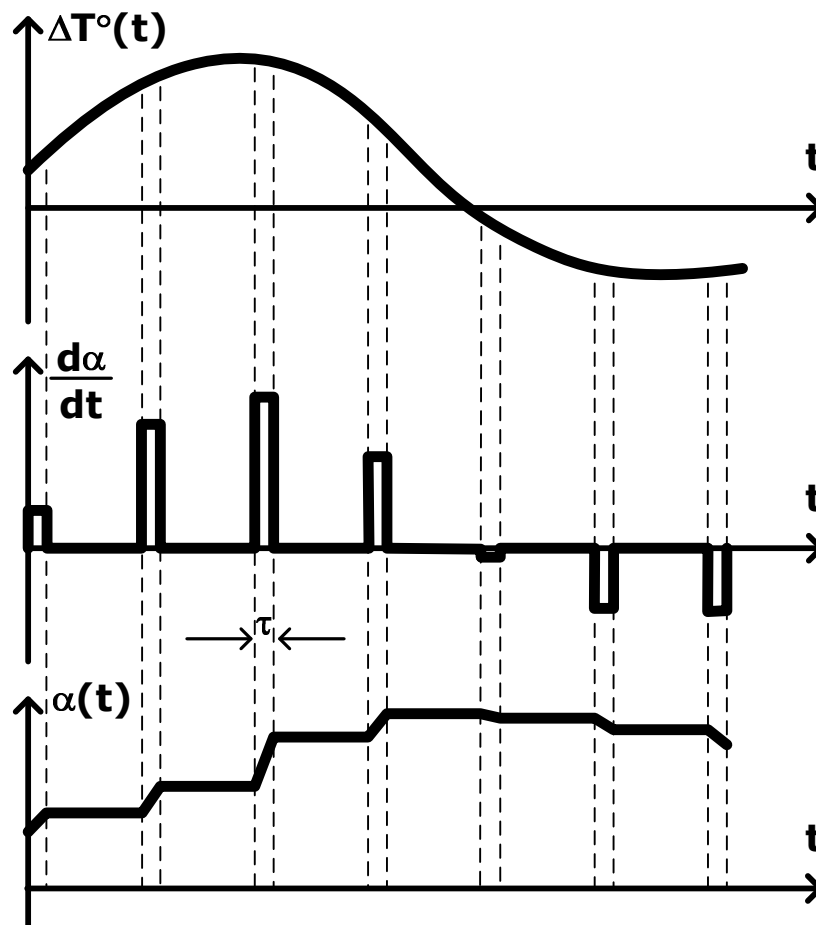


Рис. 20

В действительности, из-за инерционности двигателя при подаче импульса напряжения нарастание и убывание скорости  $d\alpha/dt$  будут происходить не мгновенно, как показано на рис. 20, а плавно, за время переходного процесса. Аналогично и управляющее воздействие  $\alpha(t)$  будет иметь на ломаный, а сглаженный вид (рис. 21). Отсюда следует, что выбрать величину периода чередования импульсов (шаг квантования)  $\Delta t$  и длительность импульсов  $\tau$  необходимо с учетом инерционности двигателя.

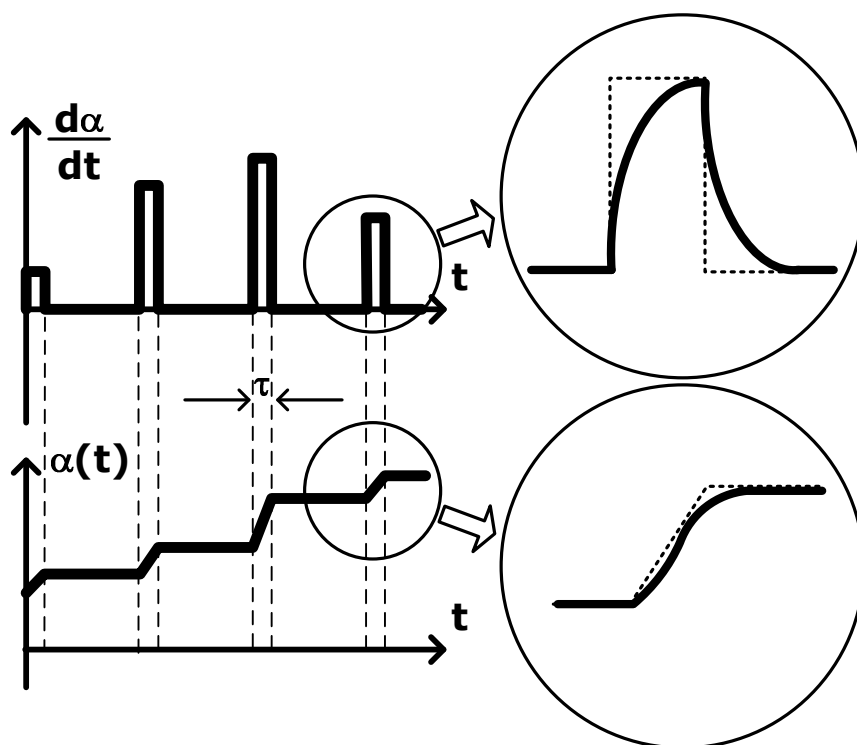


Рис. 21

Устройство, которое осуществляет преобразование непрерывной величины (см., например,  $\Delta S(t)$  на рис. 19) в дискретную импульсную величину (см.  $U_d(t)$  на рис. 19), т. е. в последовательность импульсов с постоянным периодом их чередования, называется *импульсным звеном*. В рассмотренном примере использовано механическое импульсное звено с электрическим выходом. Чаще в реализациях импульсных САУ используются электронные импульсные звенья, в особенности если требуется малый период чередования импульсов  $\Delta t$ .

Импульсное звено на рис. 18 осуществляет амплитудную модуляцию исходной непрерывной величины. В импульсной САУ также может быть



использована и широтная модуляция (см. рис. 16, в), при которой величина импульсов  $U_{\text{я}}(t)$  и период чередования импульсов  $\Delta t$  постоянны, а длительность  $\tau$  переменна и пропорциональна значению входной величины  $\Delta S$  в момент начала импульса. Импульсное звено такого типа можно реализовать с помощью падающей дужки переменного профиля, заменив потенциометр на контактные пластины (рис. 22).

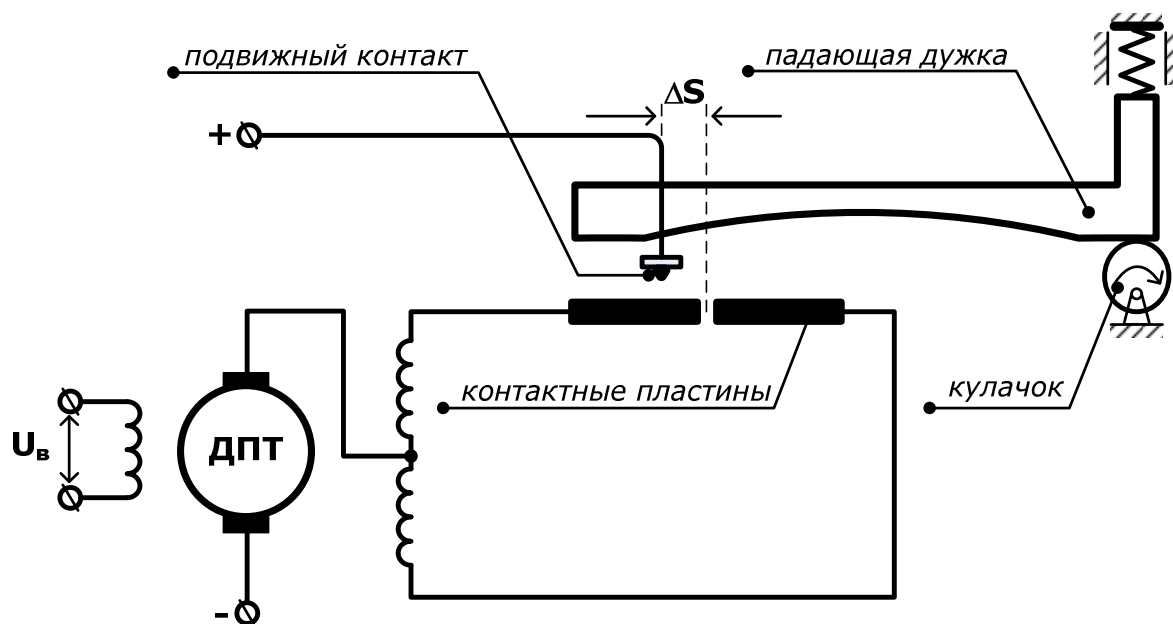


Рис. 22

Из-за переменного профиля дужки получается, что чем больше величина отклонения  $\Delta S$  от нулевого положения, тем позже при повороте кулачка дужка перестает прижимать подвижный контакт к контактной пластине и тем больше оказывается длительность формируемого импульса  $\tau$ . Так, на рис. 23 длительность первого импульса  $\tau_1 = m \cdot \Delta S_1$ , второго импульса  $\tau_2 = m \cdot \Delta S_2$  и т. д. (здесь  $m$  – коэффициент пропорциональности).

Основной смысл введения импульсного звена в САУ заключается в освобождении измерительного узла от нагрузки на его выходе. Это позволяет применить более точное маломощное устройство для измерения отклонения регулируемой величины, т. е. обеспечивает большую чувствительность САУ. Кроме того, при импульсном режиме управления уменьшается расход энергии на привод регулирующего органа [1, 2, 10].

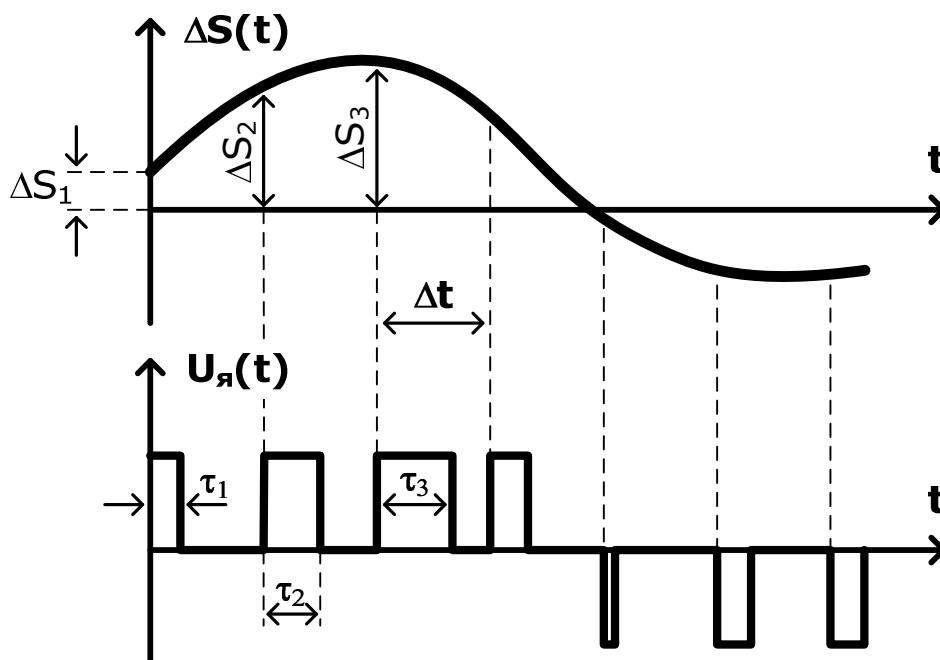


Рис. 23

ПРИМЕР релейной САУ.



### 2.2.3. По числу контуров управления

Данный классификационный признак характеризует структурную сложность САУ. В соответствии с ним САУ делятся на одноконтурные и многоконтурные.

В *одноконтурных* САУ управляющее воздействие является функцией единственного контролируемого параметра – управляемой величины в САУ по отклонению или возмущения в САУ по возмущению. Соответственно, структура САУ имеет единственный контур общей обратной связи или контур компенсации.

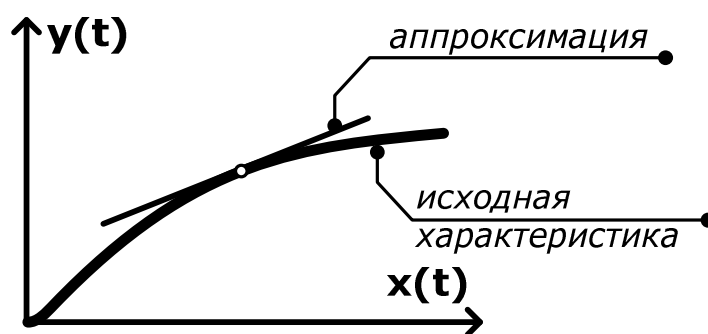
*Многоконтурные* САУ имеют несколько независимых или связанных контуров управления, реализованных, например, с использованием местных обратных связей по параметрам, реагирующим на изменение управляющих воздействий быстрее, чем управляемая величина. Использование многоконтурного связанного регулирования позволяет улучшить качественные характеристики управления [12].

## 2.2.4. По характеру зависимости управляемых переменных от входных воздействий

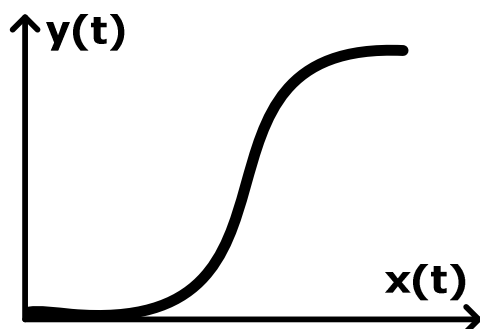
По названному характеру зависимости САУ делятся на *линейные* и *нелинейные*.

Строго говоря, все практически реализуемые системы являются нелинейными. Однако во многих случаях нелинейность рабочей характеристики системы является несущественной и система может приближенно рассматриваться как *линейная*. Пример несущественно нелинейной характеристики САУ с линейной аппроксимацией в ограниченной области рабочей точки показан на рис. 24, а.

а) линейаризация несущественной нелинейности



б) существенная нелинейность



в) существенная неоднозначная нелинейность

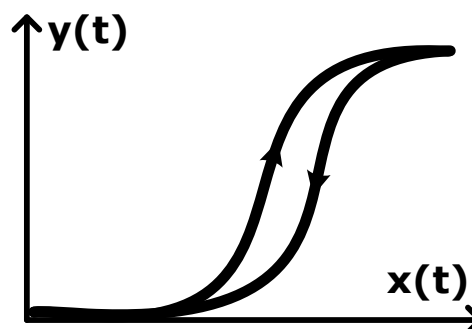


Рис. 24

В системах, обладающих *существенной нелинейностью*, для достижения требуемого качества управления необходимо учитывать нелинейность объекта управления и использовать нелинейные управляющие устройства (чаще всего — регуляторы).

Нелинейные характеристики могут быть *неоднозначными*, если при увеличении входного сигнала выходная величина изменяется по одной зависимости, а при уменьшении входного сигнала – по другой. Пример неоднозначной нелинейной характеристики *кусочно-линейного* типа для релейного элемента САУ показан на рис. 16, *г*, а примеры гладких нелинейных характеристик – однозначной и неоднозначной – приведены на рис. 24, *б* и рис. 24, *в* соответственно. Заметим, что характеристику вида, приведенного на рис. 24, *б*, следует относить к существенно нелинейным только в том случае, если по условиям работы САУ она используется на всем своем протяжении.

Для нелинейных систем характерна работа в режимах, неосуществимых в линейных системах: автоколебания, дискретные изменения сигналов и т. д. [1 – 3].

### 2.2.5. По характеру изменения ошибки управления

Данный признак классификации характеризует различия результатов работы САУ в установившемся состоянии, после завершения переходного процесса. По характеру изменения ошибки управления (отклонения управляемой величины от заданного значения) различают *статические* и *астиатические* САУ.

У *статических* САУ при постоянном задающем воздействии ошибка управления стремится к постоянному значению, зависящему от величины возмущения, т. е. при действии возмущения после завершения переходного процесса имеет место статическая ошибка управления (рис. 25).

Для характеристик работы статической САУ (см. рис. 25) выполняется условие:

$$y_{зд} = k \cdot x_0,$$

где  $x_0$  – постоянная величина (модуль) задающего воздействия после его ступенчатого изменения в момент времени  $t_0$ .

Как уже отмечалось, инерционность ТСА и ОУ обычно существенно больше, чем у источников задающих воздействий, поэтому после изменения задающего воздействия, которое можно приближенно считать близким к идеальной ступеньке, новое установившееся значение управляемой величины  $y(t)$  достигается плавно, за время переходного процесса  $t_p$ . За это же время динамическая ошибка управления  $D(t)$ , имеющая максимальное значение в момент времени  $t_0$ , убывает до конечного постоянного значения  $D_{ст}$ , определяемого величиной действующего возмущения (см. рис. 25):

$$\lim_{\substack{t \rightarrow \infty \\ t \geq t_0}} D(t) \rightarrow D_{cm};$$

$$D_{cm} = y_{3\partial} - \lim_{\substack{t \rightarrow \infty \\ t \geq t_0}} y(t) = y_{3\partial} - y(t_0 + t_p) = y_{3\partial} - y_{уст}.$$

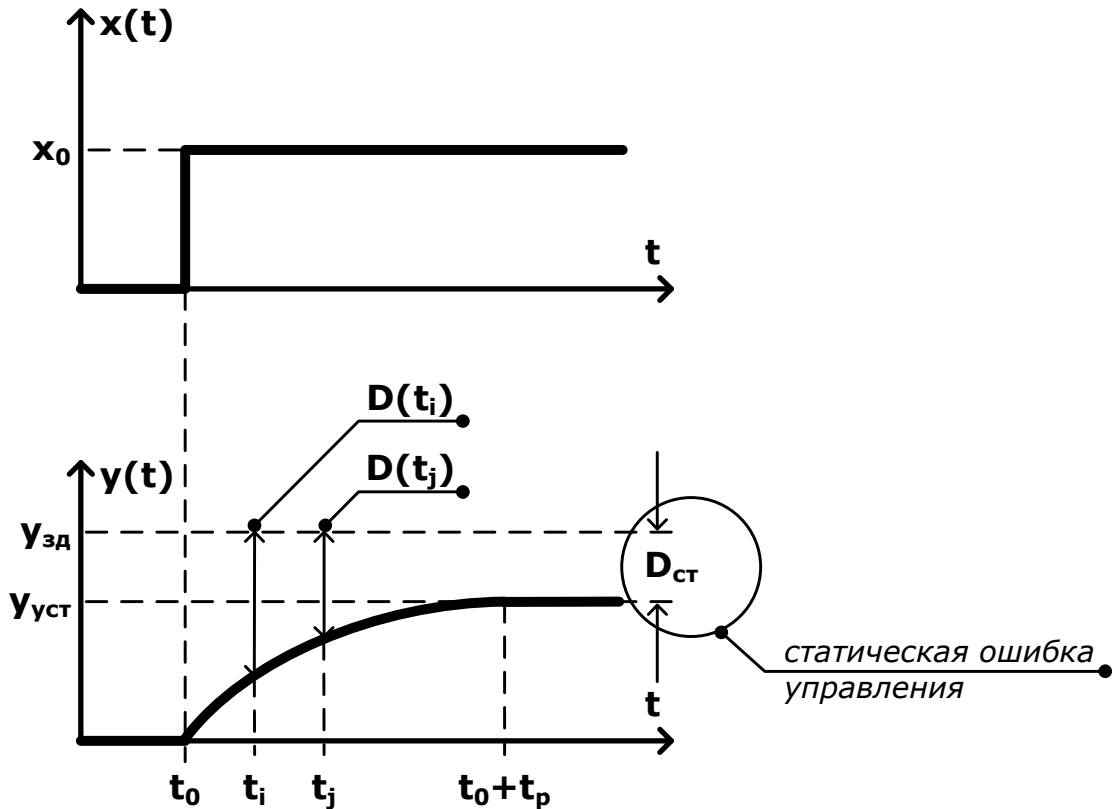


Рис. 25

При наличии возмущающих воздействий статические системы не могут точно стабилизировать управляемую величину. Разомкнутые САУ являются статическими в целом, по отношению к любым возмущениям. Системы управления по возмущению являются статическими по отношению к возмущениям, для которых не предусмотрен контур компенсации.

У *астатических* САУ при постоянном задающем воздействии с течением времени переходного процесса ошибка управления стремится к нулю вне зависимости от величины возмущения, т. е. даже при действии возмущения после завершения переходного процесса статическая ошибка управления *отсутствует*.

Для астатической САУ (рис. 26) выполняется условие:

$$\lim_{\substack{t \rightarrow \infty \\ t \geq t_0}} D(t) \rightarrow 0;$$

$$\lim_{\substack{t \rightarrow \infty \\ t \geq t_0}} y(t) = y(t_0 + t_p) = y_{зд}.$$

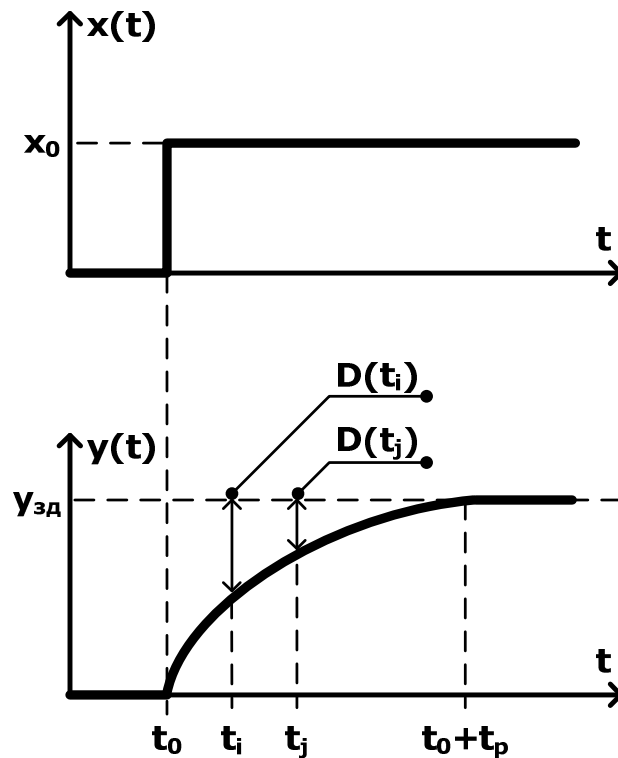


Рис. 26

Системы управления по отклонению являются астатическими в целом, т. е. при действии любых возмущений, последствие действия которых на объект управления может быть ликвидировано управляющим воздействием, после завершения переходного процесса статическая ошибка управления будет равна нулю. Комбинированные системы также являются астатическими в целом. Системы управления по возмущению обладают астатизмом только по отношению к возмущающему воздействию, для которого реализован контур компенсации.

Полная схема классификации систем автоматического управления по всем рассмотренным признакам приведена на рис. 27.

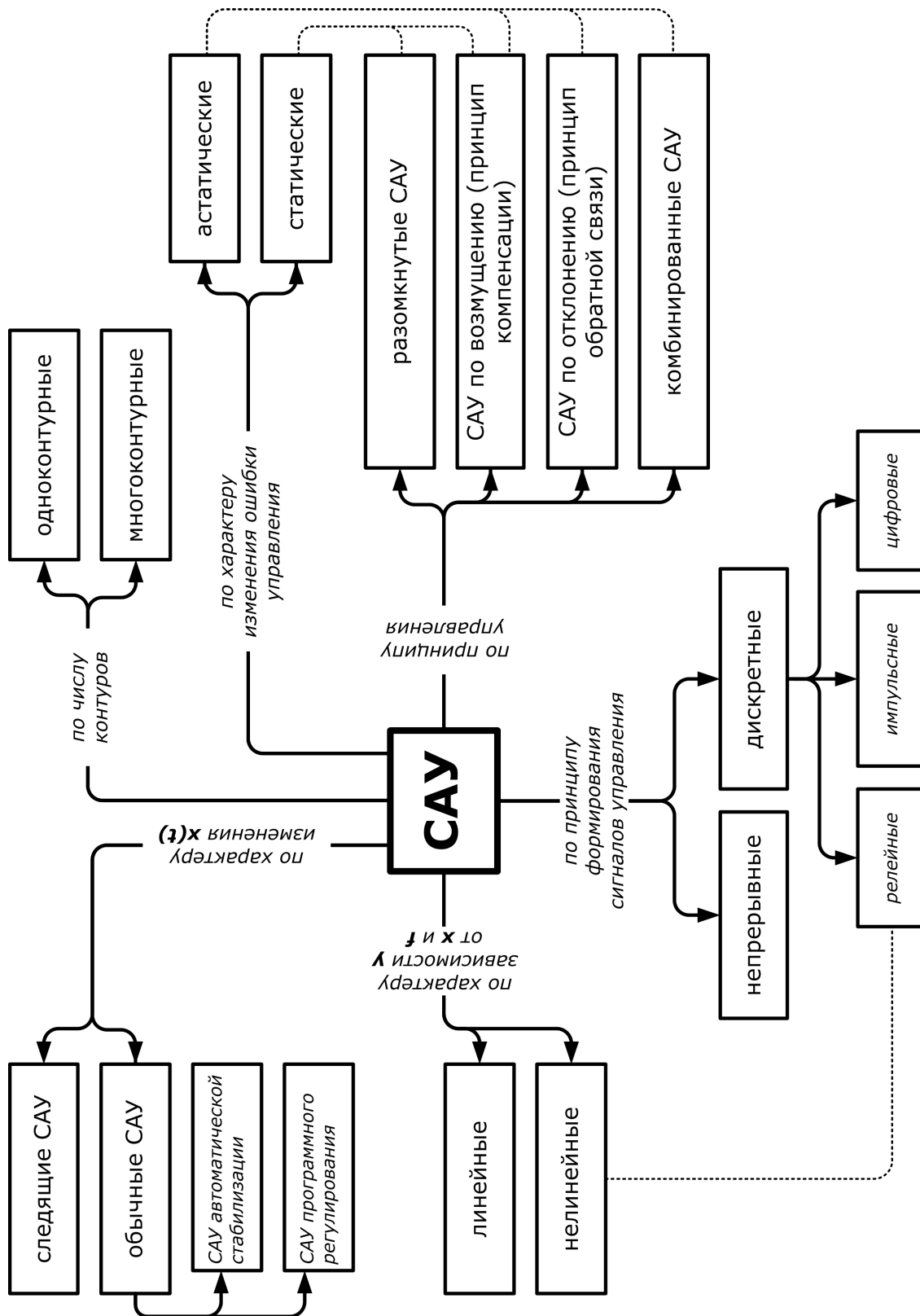


Рис. 27

## 2.3. Моделирование и анализ систем автоматического управления

### 2.3.1. Модели статике и динамики САУ

Оценка качества функционирования САУ основана на исследовании статических и динамических характеристик.

*Статическими* называются характеристики, отображающие связь между входными воздействиями и управляемыми величинами в *установившемся режиме*, при котором входные воздействия и управляемые величины не изменяются. Если управляемая величина изменяется, т. е. переходной процесс в САУ еще не завершен, то состояние системы будет *неустановившимся*. Режим работы САУ при этом называют *динамическим*.

Для исследования статических и динамических характеристик САУ используют математические модели, имеющие вид уравнений связи между входными воздействиями и управляемыми величинами.

Дифференциальные уравнения описывают функционирование САУ в динамическом режиме и называются уравнениями *динамики*. При составлении уравнений динамики САУ разбивают на отдельные элементы – звенья, и записывают уравнение каждого звена в отдельности.

Уравнение звена выражает зависимость между величинами на входе и выходе данного звена, то есть между величинами, представляющими воздействие предыдущего звена на данное и воздействие данного звена на последующее звено. Уравнения всех звеньев образуют систему уравнений, из которой можно получить уравнение САУ в целом путем исключения промежуточных переменных.

Алгебраические уравнения, описывающие установившийся режим, получаются из модели динамики САУ для случая, когда входные воздействия и управляемые величины не изменяются и, соответственно, их производные равны нулю. Такие уравнения называют уравнениями *статике*.

Рассмотрим произвольное звено САУ (рис. 28). На вход звена поступает входное воздействие  $x(t)$ . Звено в процессе функционирования формирует на выходе выходную величину  $y(t)$  в условиях действия внешнего возмущения  $f(t)$ . В общем случае дифференциальное уравнение звена имеет нелинейный вид, т. е. переменные  $x(t)$ ,  $y(t)$  и  $f(t)$ , а также их производные разных порядков могут входить в уравнение в виде аргумента степенных, показательных, логарифмических и других нелинейных функций:

$$F_1(x, x' \dots x^{(m)}, y, y' \dots y^{(n)}) = F_2(f, f' \dots f^{(k)}).$$



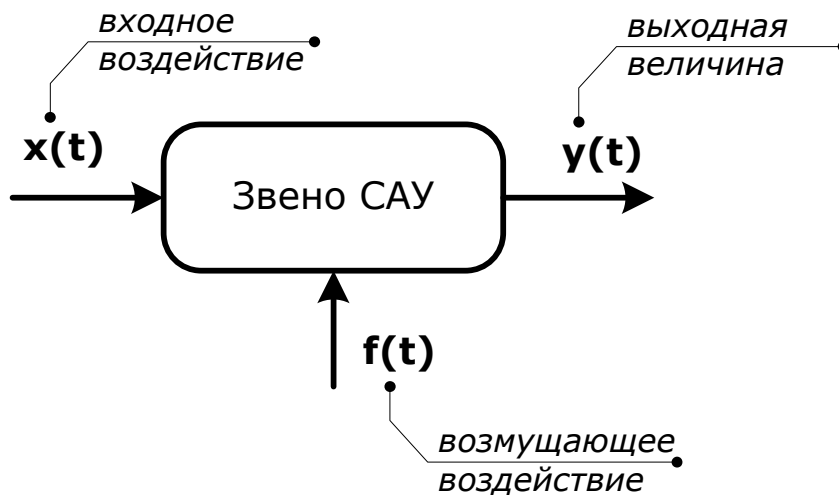


Рис. 28

В основе линеаризации нелинейных уравнений лежит предположение о том, что в исследуемом процессе переменные изменяются так, что их отклонения от установившихся значений остаются все время достаточно малыми. Это условие для звена САУ и САУ в целом выполняется в отношении входной и выходной величин, поскольку этого требует сама идея работы САУ – система все время стремится свести к минимуму отклонения выходных величин от их заданных значений.

Но в отношении возмущения  $f(t)$  условие малости отклонений не выполняется, т. к. возмущения имеют случайную природу и их отклонения от номинального значения могут быть сколь угодно большими. Поэтому правая часть уравнения звена САУ линеаризации не подлежит и при линеаризации ее приравнивают к нулю:

$$F_1(x, x' \dots x^{(m)}, y, y' \dots y^{(n)}) = 0.$$

**Важно!** Линеаризованные модели являются приближенными и описывают функционирование САУ в отсутствии возмущений. Их применение ограничено начальным этапом проектирования. Исключение составляют модели систем, реализованных по принципу компенсации или комбинированных систем: возмущения, влияние которых компенсируется системой, относят к входным воздействиям, подлежащим линеаризации.

Геометрически линеаризация является заменой реальной нелинейной (криволинейной) характеристики звена САУ или системы в целом на прямую линию (касательную, проведенную к кривой в рабочей точке).

*ПРИМЕР* геометрической линеаризации статической характеристики звена САУ.



В общем виде линеаризованное дифференциальное уравнение (модель динамики) отдельного звена САУ или системы в целом имеет вид:

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = \\ = b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $x(t)$  – входное воздействие звена (системы);  $y(t)$  – выходная величина звена (системы);  $a_i$  и  $b_j$  – постоянные коэффициенты, определяемые физическими параметрами звена (системы).

**Важно!** Обратите внимание на то, что уравнение (1) имеет линейную форму: переменные  $x(t)$  и  $y(t)$ , а также их производные по  $n$ -й и  $m$ -й порядок соответственно, входят в уравнение в первой степени, т. е. не являются аргументами нелинейных функций.

Модель статики звена (системы) получается из модели динамики (1) при  $x(t) = \text{const}$  и  $y(t) = \text{const}$ . В этом случае производные  $x(t)$  и  $y(t)$  равны 0:

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} = 0, \quad \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} = 0 \dots; \quad \frac{d^m x(t)}{dt^m} = 0, \quad \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} = 0 \dots$$

и, следовательно, модель статики принимает вид

$$\begin{aligned} a_0 y(t) &= b_0 x(t); \\ y(t) &= \frac{b_0}{a_0} x(t) = k \cdot x(t), \end{aligned}$$

где  $k$  – коэффициент статического преобразования звена (системы).

Модели динамики звеньев САУ в виде (1) получают экспериментальным или теоретическим способом.

При *экспериментальном* получении моделей динамики используют следующий алгоритм:

- на вход реального устройства подают сгенерированное ступенчатое воздействие  $x(t)$ ;
- с выхода устройства прямым измерением получают график зависимости  $y(t)$ , т. е. экспериментальную кривую переходного процесса;
- подбирают аналитическую функцию, описывающую кривую переходного процесса  $y(t)$ ;
- подбирают линейное дифференциальное уравнение, аналитическая форма решения которого совпадает с найденной функцией  $y(t)$ .

*ПРИМЕР* получения модели динамики звена САУ экспериментальным способом.



В *теоретическом* способе модель динамики звена САУ в виде (1) получают с использованием известных теоретических описаний процессов функционирования звена.

Для примера покажем, как построить модель двигателя постоянного тока, используя известные законы механики и электротехники. Параметризация двигателя постоянного тока как звена САУ показана на рис. 29. Входное воздействие для этого звена – напряжение якоря  $U_{я}(t)$  – измеряется в вольтах, выходная величина – угловая скорость вращения  $\omega(t)$  – измеряется в радианах в секунду.

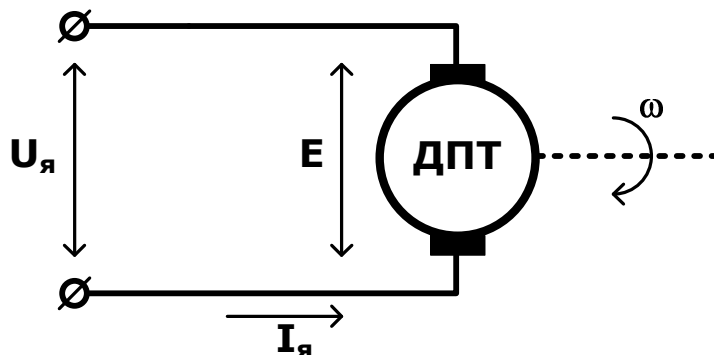


Рис. 29

Вал двигателя начинает вращаться, когда приложено некоторое напряжение. Если напряжение не меняется, угловая скорость вращения  $\omega(t)$  остается постоянной, при этом угол поворота вала двигателя равномерно увеличивается. Чем больше напряжение, тем быстрее вращается вал. Если подключить нагрузку, например, заставить двигатель вращать механизм, скорость вращения постепенно уменьшится до нового значения, при котором вращающий момент двигателя будет равен моменту сопротивления (нагрузки). Пока эти моменты равны, скорость вращения остается постоянной и ее производная равна нулю.

Переведем эти рассуждения на язык математики. В механике уравнение вращательного движения записывают в виде:

$$J \cdot \frac{d\omega(t)}{dt} = M(t) - M_n(t),$$

где  $M(t)$  – вращающий момент (Н·м);  $M_n(t)$  – момент нагрузки (Н·м);  $J$  – суммарный момент инерции якоря и нагрузки (кг·м<sup>2</sup>).

Величина момента инерции говорит о том, насколько легко «разогнать» двигатель до нового значения скорости (чем больше момент, тем сложнее «разогнать»). С точки зрения управления нагрузка на валу является возмущением, а при получении линеаризованной формы модели звена САУ возмущения не рассматриваются (считаются равными нулю). Следовательно, уравнение движения принимает вид:

$$J \cdot \frac{d\omega(t)}{dt} = M(t).$$

Перейдем к электротехнике. Для двигателя постоянного тока момент  $M(t)$  – это электромагнитный момент, который вычисляется по формуле

$$M(t) = c_M \cdot \Phi \cdot I_\alpha(t),$$

где  $c_M$  – постоянный коэффициент;  $\Phi$  – магнитный поток, создаваемый обмоткой возбуждения (измеряется в *веберах*);  $I_\alpha(t)$  – ток якоря (А), который может быть найден из уравнения

$$U_\alpha(t) = E(t) + R \cdot I_\alpha(t) + L \frac{dI_\alpha(t)}{dt},$$

где  $E(t)$  – электродвижущая сила (ЭДС) якоря (В);  $R$  – сопротивление якоря (Ом);  $L$  – индуктивность якоря (Гн).

В свою очередь, ЭДС рассчитывается через магнитный поток и угловую скорость вращения:

$$E(t) = c_{\omega} \cdot \Phi \cdot \omega(t),$$

где  $c_{\omega}$  – постоянный коэффициент.

Введя новые постоянные  $k_1 = c_M \cdot \Phi$  и  $k_2 = c_{\omega} \cdot \Phi$ , можно записать модель двигателя в виде системы уравнений:

$$\begin{cases} J \cdot \frac{d\omega(t)}{dt} = k_1 \cdot I_{я}(t); \\ E(t) = k_2 \cdot \omega(t); \\ U_{я}(t) = E(t) + R \cdot I_{я}(t) + L \frac{dI_{я}(t)}{dt}. \end{cases}$$

Полученная система уравнений не соответствует стандартному виду линеаризованной модели САУ (1), т. к. содержит промежуточные переменные, в то время как нас интересует зависимость выходной величины  $\omega(t)$  от напряжения якоря  $U_{я}(t)$ . Взаимной подстановкой и переносом всех членов, зависящих от  $\omega(t)$ , в левую часть получим окончательный вид дифференциальной модели двигателя постоянного тока:

$$\begin{aligned} I_{я}(t) &= \frac{J}{k_1} \cdot \frac{d\omega(t)}{dt}; \\ k_2 \cdot \omega(t) + \frac{R \cdot J}{k_1} \cdot \frac{d\omega(t)}{dt} + \frac{L \cdot J}{k_1} \frac{d^2\omega(t)}{dt^2} &= U_{я}(t); \\ \frac{L \cdot J}{k_1 \cdot k_2} \cdot \frac{d^2\omega(t)}{dt^2} + \frac{R \cdot J}{k_1 \cdot k_2} \cdot \frac{d\omega(t)}{dt} + \omega(t) &= \frac{1}{k_2} \cdot U_{я}(t). \end{aligned}$$

В общем виде полученное дифференциальное уравнение модели двигателя имеет вид, точно соответствующий уравнению (1) для  $n = 2$  и  $m = 0$  (уравнения такого вида называются уравнениями второго порядка):

$$\begin{aligned} a_2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) &= b_0 x(t); \\ a_2 &= \frac{L \cdot J}{k_1 \cdot k_2}; \quad a_1 = \frac{R \cdot J}{k_1 \cdot k_2}; \quad a_0 = 1; \quad b_0 = \frac{1}{k_2}. \end{aligned}$$

Для анализа САУ чаще используют модели динамики в виде передаточных функций. *Передаточной функцией*  $W(p)$  называется отношение

операторных изображений по Лапласу выходной и входной величин звена или САУ при нулевых начальных условиях.

Изображением по Лапласу произвольной функции времени  $f(t)$ , называемой *оригиналом*, является ее операторное изображение вида

$$L(f(t)) = F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt,$$

где  $t$  – время;  $p$  – оператор дифференцирования,  $p = d/dt$ .

Исследуем свойства изображений производных разных порядков и интеграла от исходной функции времени – оригинала. Найдем изображение по Лапласу первой производной оригинала:

$$L(f'(t)) = L\left(\frac{df(t)}{dt}\right) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f'(t) dt = e^{-pt} f(t) dt \Big|_0^{\infty} + p \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt = pF(p) - f(0),$$

где  $F(p)$  – изображение оригинала функции  $f(t)$ .

Аналогично для второй производной:

$$L(f''(t)) = L\left(\frac{d^2 f(t)}{dt^2}\right) = p^2 F(p) - pf(0) - f'(0),$$

и для производной любого порядка:

$$L(f^{(n)}(t)) = L\left(\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right) = p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0).$$

Заметим, что передаточная функция определяется при нулевых начальных условиях, т. е. для  $f(0) = 0$ , и следовательно, для этого частного случая свойства изображений запишутся в виде

$$L\left(\frac{df(t)}{dt}\right) = pF(p); \quad L\left(\frac{d^2 f(t)}{dt^2}\right) = p^2 F(p); \quad \dots \quad L\left(\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right) = p^n F(p).$$

Таким образом, при нулевых начальных условиях переход от оригинала функции к ее изображению по Лапласу может быть осуществлен формальной заменой дифференцирования на символическое умножение на  $p$ . Например, для производной входного воздействия

$$L\left(\frac{dx(t)}{dt}\right) = px(p),$$

где  $x(p)$  – изображение оригинала функции  $x(t)$ .

**Важно!** Обратите внимание на то, что, строго говоря, запись  $px(p)$  означает не умножение оператора  $p$  на  $x(p)$ , а действие этого оператора, т. е. дифференцирование  $x(p)$ .

Аналогичным образом можно найти изображение интеграла от оригинала произвольной функции времени  $f(t)$ :

$$L\left(\int f(t)dt\right) = \frac{1}{p} \left[ F(p) + \int f(t)dt \Big|_{t=0} \right],$$

и для нулевых начальных условий получить:

$$L\left(\int f(t)dt\right) = \frac{F(p)}{p}.$$

Таким образом, при нулевых начальных условиях интегрированию по времени оригинала функции  $f(t)$  соответствует символическое деление изображения на  $p$ .

С учетом рассмотренного выше, из модели динамики САУ в виде уравнения (1) передаточная функция может быть получена переходом к операторной форме записи формальной подстановкой вместо оператора дифференцирования  $d/dt$  оператора  $p$  и выражением из получившегося уравнения отношения изображений  $y(p)$  к  $x(p)$ :

$$\begin{aligned} a_n p^n y(p) + a_{n-1} p^{n-1} y(p) + \dots + a_0 y(p) &= \\ &= b_m p^m x(p) + b_{m-1} p^{m-1} x(p) + \dots + b_0 x(p); \\ y(p)(a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0) &= x(p)(b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_0); \\ W(p) = \frac{y(p)}{x(p)} &= \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0} = \frac{\sum_{i=0}^m b_i p^i}{\sum_{j=0}^n a_j p^j}, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $p = d/dt$ ;  $y(p)$  и  $x(p)$  – изображения оригиналов функций  $y(t)$  и  $x(t)$  соответственно [2, 3, 7, 13].

Рассмотрим примеры взаимного преобразования моделей динамики САУ. Пусть звено САУ описывается дифференциальным уравнением второго порядка:

$$0,8 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 4,1 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 150x(t).$$

Осуществим вывод передаточной функции для этого звена:

$$\begin{aligned} 0,8p^2 y(p) + 4,1 \cdot py(p) + y(p) &= 150x(p); \\ y(p)(0,8p^2 + 4,1p + 1) &= 150x(p); \\ W(p) = \frac{y(p)}{x(p)} &= \frac{150}{(0,8p^2 + 4,1p + 1)}. \end{aligned}$$

Рассмотрим пример обратного преобразования. Пусть модель динамики звена САУ задана передаточной функцией вида

$$W(p) = \frac{1,5p + 1}{p^2}.$$

Осуществим вывод дифференциального уравнения для этого звена:

$$\begin{aligned} \frac{y(p)}{x(p)} = \frac{1,5p + 1}{p^2}; \quad x(p)(1,5p + 1) &= p^2 y(p); \\ 1,5px(p) + x(p) &= p^2 y(p); \\ 1,5 \frac{dx(t)}{dt} + x(t) &= \frac{d^2 y(t)}{dt^2}. \end{aligned}$$

### 2.3.2. Модельные режимы анализа САУ. Качество процесса управления

Математические модели САУ, рассмотренные в предыдущем пункте, используют для анализа качественных характеристик управления на стадии проектирования САУ. Поскольку заранее неизвестно, каким в реальных условиях будет задающее воздействие, при анализе качества используют типовые *модельные тестовые воздействия*, по виду которых различают модельные режимы анализа. К типовым тестовым воздействиям относятся ступенчатое, гармоническое, линейно возрастающее и др.

Реакция САУ на ступенчатое воздействие наиболее показательна, т. к. в процессе управления системы подвергаются внешним воздействиям, очень близким к ступенчатым. Поэтому для анализа САУ ступенчатое воздействие используют в первую очередь.

Пусть на САУ, находящуюся в установившемся режиме, в момент времени  $t_0$  воздействует ступенчатое воздействие вида

$$x(t) = \begin{cases} x_0, & t \geq t_0; \\ 0, & t < t_0, \end{cases}$$

где  $x_0 = \text{const}$  – модуль ступенчатого воздействия.



До момента времени  $t_0$  воздействие  $x(t)$  равно нулю, следовательно, такой режим исследует запуск работы САУ с заданием начального значения задающего воздействия, равного  $x_0$ . Закон изменения управляемой величины (форма и длительность переходного процесса) определяется динамическими свойствами САУ – порядком дифференциального уравнения САУ и значениями его коэффициентов, а также величиной  $x_0$ . Примеры переходных процессов различных форм с одинаковой длительностью  $t_p$  приведены на рис. 30. Предпочтительным является монотонный переходной процесс экспоненциальной формы – он обеспечивает максимальную скорость убывания динамической ошибки управления (см. рис. 26). Наименее желательной является колебательная форма, т. к. в таком переходном процессе имеют место отклонения выходной величины  $y(t)$  от конечного значения, как со знаком «плюс», так и со знаком «минус».

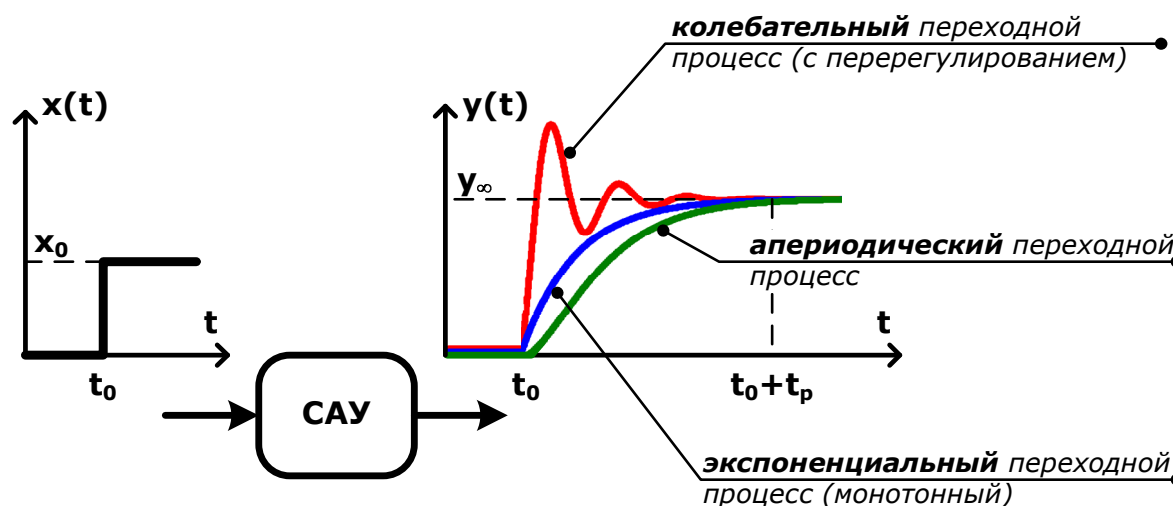


Рис. 30

Закон изменения  $y(t)$  после приложения ступенчатого воздействия (для  $t \geq t_0$ ) можно представить в виде суммы двух составляющих: *переходной*  $y_n(t)$  и *вынужденной*  $y_s(t)$ :

$$y(t) = y_n(t) + y_s(t), \quad t \geq t_0.$$

Переходная составляющая устойчивой системы с течением времени переходного процесса затухает (стремится к нулю), и система приходит в новый установившийся режим, характеризуемый конечным значением вынужденной составляющей  $y_\infty$  (см. рис. 30):

$$\text{для } t \geq t_0 \text{ при } t \rightarrow \infty, \quad y_n(t) \rightarrow 0 \quad y_s(t) \rightarrow y_\infty = \text{const.}$$

Если САУ является астатической и после завершения переходного процесса обеспечивает строгое равенство выходной величины заданному значению (т. е. отсутствие статической ошибки управления), то

$$y_{\varepsilon}(t) \rightarrow y_{\infty} = \text{const} = k \cdot x_0,$$

где  $k$  – коэффициент статического преобразования САУ.

Как видно (см. рис. 30), при подаче ступенчатого воздействия система переходит из одного установившегося режима (до момента времени  $t_0$ ) в другой (после момента времени  $t_0 + t_p$ ) через динамический режим *переходного процесса*.

Ступенчатое воздействие, модуль которого  $x_0 = 1$ , называется *единичным скачком (единичной ступенькой)* и обозначается  $1(t)$ :

$$x(t) = 1(t) = \begin{cases} 0, & t < t_0; \\ 1, & t \geq t_0. \end{cases}$$

График изменения  $y(t)$ , полученный при подаче на вход САУ единичного скачка, называется *переходной характеристикой САУ*. Переходная характеристика может быть получена экспериментально или решением уравнения (1). В отсутствие статической ошибки управления переходная характеристика сходится к значению, равному коэффициенту статического преобразования САУ:

$$y_{\varepsilon}(t) \rightarrow y_{\infty} = y_{\text{зд}} = k.$$

По переходной характеристике определяют ряд показателей качества управления.

К показателям *быстродействия* относят:

– *время переходного процесса САУ*  $t_p$  – время, начиная с которого  $y(t)$  не отличается от нового установившегося значения более чем на величину  $\delta$  ( $\delta \leq \Delta \cdot y_{\infty}$ , где  $\Delta = 0,01 \dots 0,05$ ), т.е.  $|y_{\infty} - y(t)| \leq \delta$  при  $t \geq t_p$  (рис. 31);

– *время установления САУ*  $t_y$  – время достижения переходной характеристикой первого максимума (определяется только для переходных процессов колебательного вида, см. рис. 31).

Точность управления определяется разницей между заданным и текущим значением управляемой величины, т. е. ошибкой управления:

$$D(t) = y_{\text{зд}}(t) - y(t) = k \cdot x(t) - y(t).$$

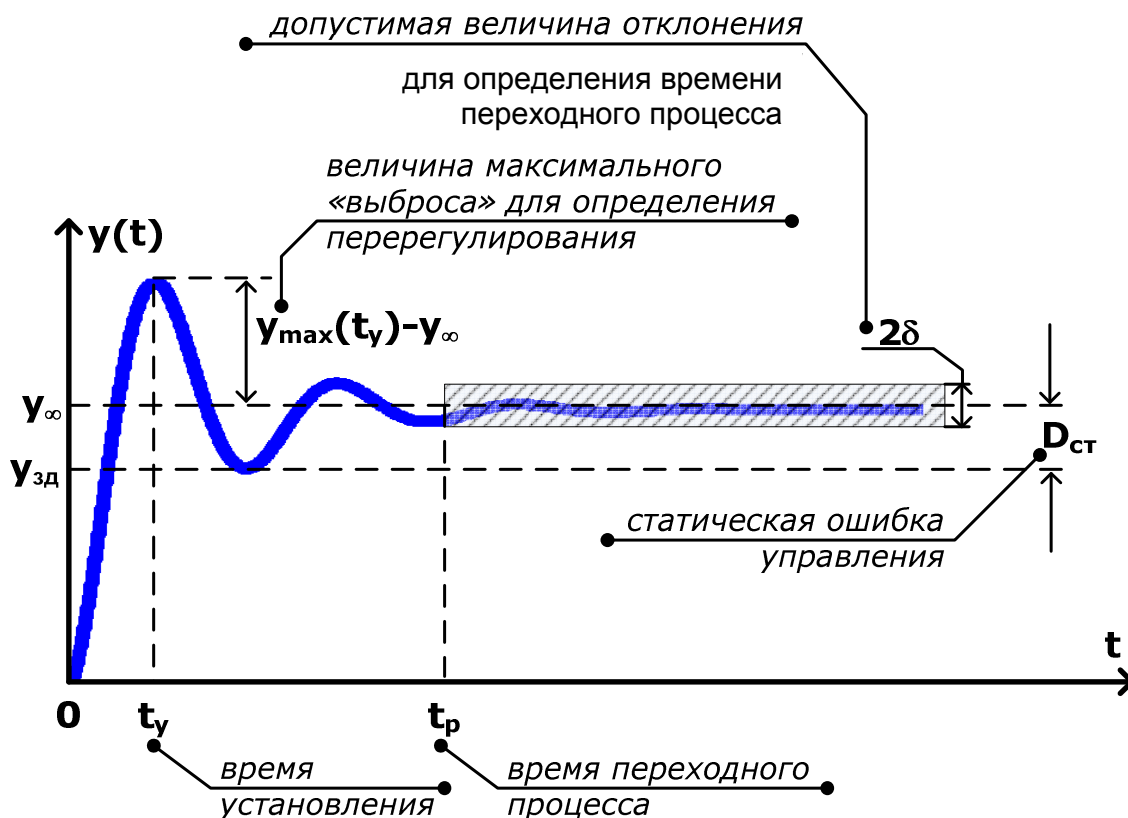


Рис. 31

Основным показателем точности управления является *статическая ошибка управления*  $D_{ст}$  (см. рис. 31):

$$\lim_{\substack{t \rightarrow \infty \\ t \geq t_0}} D(t) \rightarrow D_{ст};$$

$$D_{ст} = y_{зд} - \lim_{\substack{t \rightarrow \infty \\ t \geq t_0}} y(t) = k \cdot x(t) - y_{\infty} = k - y_{\infty}.$$

Как уже отмечалось, колебательная форма переходного процесса является наименее желательной. В качестве дополнительных показателей качества управления для нее используют:

- *перерегулирование*  $H_{\max}$  – относительную величину максимально-го «выброса» переходной характеристики (см. рис. 31):

$$H_{\max} = \frac{y_{\max}(t_y) - y_{\infty}}{y_{\infty}} \cdot 100\%;$$

– *колебательность переходной характеристики САУ*  $n$  – число полных колебаний характеристики за время  $t_p$ .

Все показатели качества управления САУ, определяемые по переходной характеристике, должны иметь минимально возможные значения.

К основным модельным тестовым воздействиям анализа САУ относится также *гармонический сигнал* вида

$$x(t) = \begin{cases} 0, & t < t_0; \\ A_{\text{вх}} \cdot \sin(\omega \cdot t), & t \geq t_0, \end{cases}$$

где  $A_{\text{вх}}$  – амплитуда входного сигнала;  $\omega$  – частота входного сигнала.

Если задающее воздействие САУ имеет гармонический вид, то на выходе устойчивой системы, после затухания свободных колебаний (переходной составляющей), установятся вынужденные колебания с той же частотой  $\omega$ , но отличающиеся амплитудой и сдвигом фазы (рис. 32):

$$y(t) = y_n(t) + y_{\text{в}}(t), \quad t \geq t_0;$$

для  $t \geq t_0$  при  $t \rightarrow \infty$   $y_n(t) \rightarrow 0$ ;

$$y_{\text{в}}(t) \rightarrow A_{\text{вых}} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi).$$

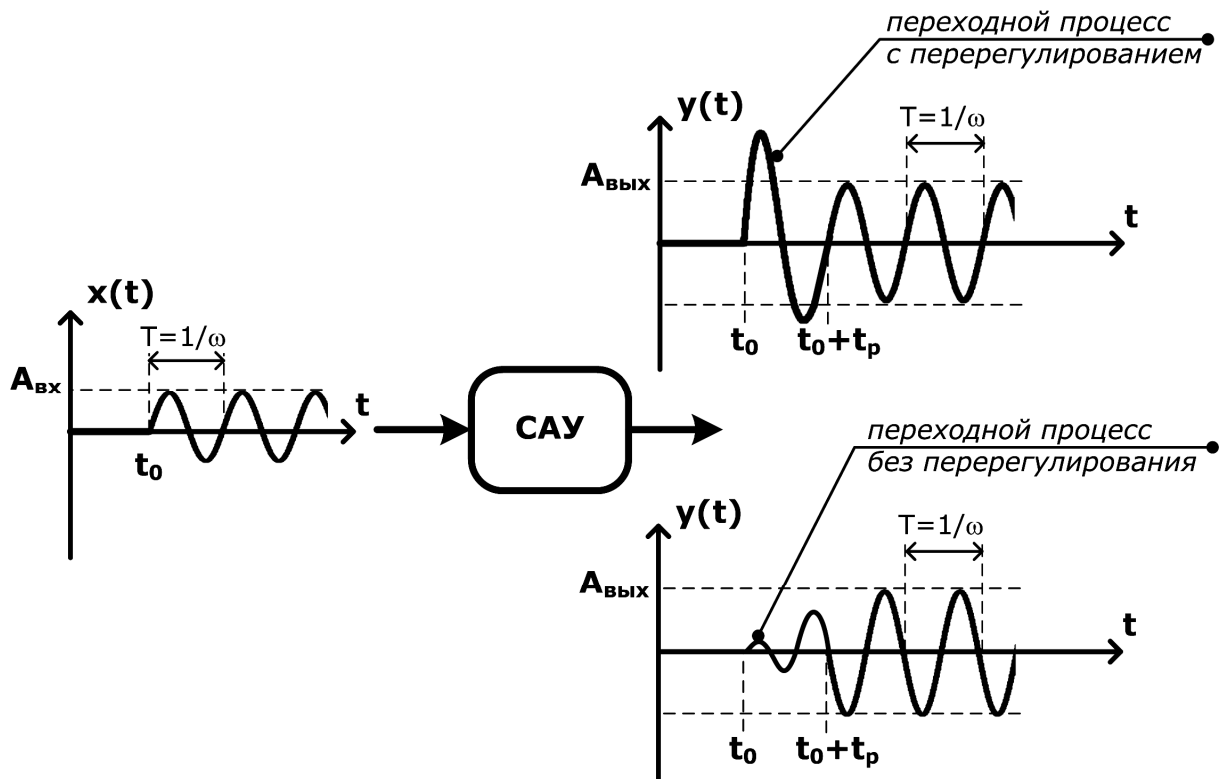


Рис. 32

Состояние САУ, в котором после завершения переходного процесса амплитуда выходной величины  $A_{вых}$  и сдвиг фазы  $\varphi$  больше не изменяются (см. на рис. 32 с момента времени  $t_0 + t_p$ ), является установившимся состоянием особого вида, которое называется *стационарным режимом колебаний*. Важной особенностью этого режима является то, что ослабление или усиление амплитуды выходной величины по сравнению с входной  $A_{вых}/A_{вх}$  и сдвиг фазы  $\varphi$  не являются постоянными для конкретной САУ, а зависят от частоты входного воздействия  $\omega$ . Исследование этих зависимостей относится к задачам частотного анализа САУ и позволяет предсказать поведение реальной системы в условиях действия реальных входных воздействий периодического вида.

Наличие сдвига фазы выходного гармонического сигнала относительно входного объясняется инерционностью САУ. По сути, сдвиг фазы является временной задержкой выходного сигнала, обусловленной конечной длительностью переходного процесса. Однако, поскольку эта величина является аргументом функции синуса, она должна выражаться в радианах или градусах, а не в единицах измерения времени. При этом величину задержки по времени выходного сигнала относительно входного  $\tau$  можно рассчитать с учетом того, что фаза гармонического сигнала за время периода изменяется на  $360^\circ$ :

$$\frac{T}{360^\circ} = \frac{\tau}{\varphi}; \quad \tau = \frac{\varphi \cdot T}{360^\circ},$$

где  $T = 1/\omega$  – период гармонического сигнала.

Пример работы САУ при подаче тестового гармонического воздействия показан на рис. 33. До момента времени  $t_0$  и задающее воздействие, и, соответственно, управляемая величина равны нулю. С момента времени  $t_0$  задающее воздействие САУ  $x(t)$  начинает изменяться по гармоническому закону, что вызывает переход системы в режим переходного процесса, за время которого амплитуда колебаний  $y(t)$  плавно возрастает, пока не достигнет конечного постоянного (*стационарного*) значения  $A_{вых}$ . С этого момента система работает в стационарном режиме колебаний.

В частотной зависимости характеристик САУ можно убедиться, сравнив пример на рис. 33 с примером работы той же САУ при подаче гармонического воздействия с бóльшей частотой (рис. 34). Как видно, для нового значения частоты стационарное значение амплитуды колебаний  $y(t)$   $A_{вых}$  меньше, чем в примере на рис. 33, а задержка по времени  $\tau$  (и, соответственно, сдвиг фазы  $\varphi$ ) – бóльше.

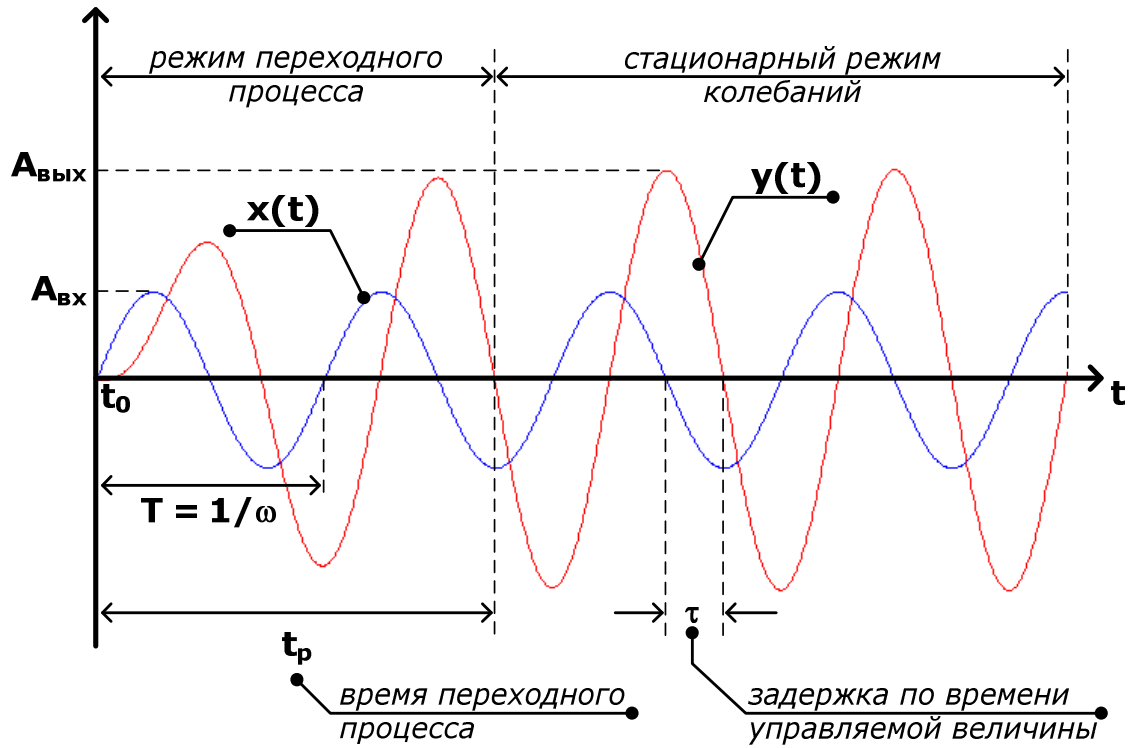


Рис. 33

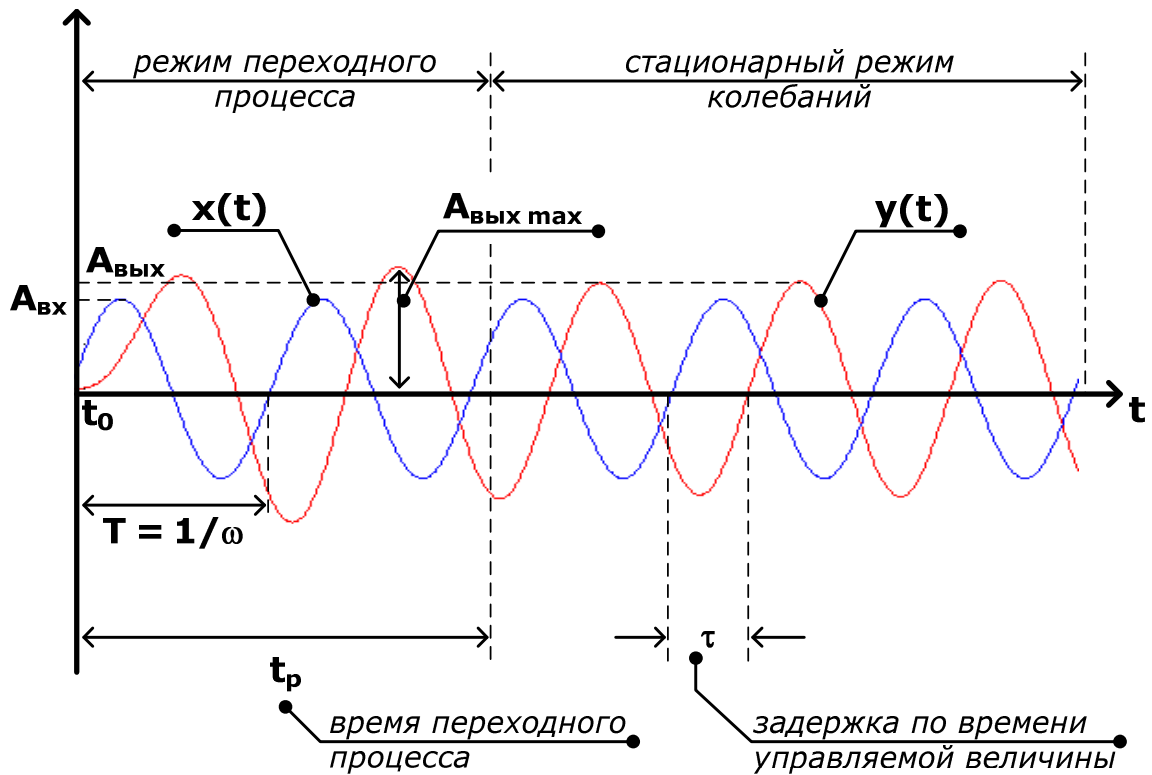


Рис. 34

Кроме того, в переходном процессе имеет место перерегулирование – превышение амплитудой  $y(t)$  конечного стационарного значения (см. рис. 34):  $A_{\text{вых max}} > A_{\text{вых}}$ .

*Линейно возрастающее* тестовое воздействие вида  $x(t) = \alpha \cdot t$ , где  $\alpha$  – постоянный коэффициент, преимущественно применяется при исследовании динамики следящих систем.

Основные задачи анализа, решаемые при проектировании САУ, делятся:

- на задачу анализа статических состояний;
- на задачу анализа переходной характеристики (анализ функционирования САУ при подаче на вход единичной ступеньки);
- на задачу анализа частотных характеристик (анализ функционирования САУ при подаче на вход гармонических воздействий);
- на задачу анализ устойчивости.

Анализ статических состояний относится к задачам статики, а остальные виды анализа – к задачам динамики [1 – 3, 7, 10].

### **3. Типовые элементарные звенья систем автоматического управления**

На первом этапе проектирования САУ решаются задачи синтеза системы на основании данных о назначении системы и конструктивных особенностях объекта управления. При формировании структуры САУ на этом этапе используют функционально необходимые элементы систем, так называемые звенья САУ (датчики величин, преобразователи сигналов, регуляторы, исполнительные устройства и т. д.).

Вторым этапом проектирования САУ является анализ соответствия качественных характеристик проектируемой системы требуемым. Для проведения всех видов анализа САУ, рассмотренных в п. 3, необходимо иметь ее модель в виде дифференциального уравнения вида (1) или передаточной функции вида (2).

Для получения моделей САУ вводят понятие *типового элементарного звена*. Под типовым элементарным звеном понимают совокупность элементов САУ, динамические процессы в которых описываются линейным дифференциальным уравнением вида (1) не выше второго порядка ( $n \leq 2$ ). Введение элементарных звеньев дает возможность свести все многообразие технических устройств к небольшому количеству типовых звеньев, что позволяет использовать общие методы анализа для любых САУ. Типы элементарных звеньев САУ приведены в прил. 1.

### 3.1. Усилительное безынерционное звено

К звеньям этого типа относится любой элемент САУ, у которого в каждый момент времени существует пропорциональная зависимость между выходной величиной  $y(t)$  и входным воздействием  $x(t)$ , т. е. это звено не только в статике, но и в динамике описывается алгебраическим уравнением вида

$$y(t) = k \cdot x(t),$$

где  $k$  – коэффициент статического преобразования (коэффициент усиления) звена.

Строго говоря, усилительное звено не является динамическим, поскольку изменение  $y(t)$  происходит мгновенно, сразу вслед за изменением  $x(t)$ . Говорят, что дифференциальное уравнение звена имеет *нулевой* порядок. Передаточная функция звена имеет вид  $W(p) = k$ .

При подаче на вход единичной ступеньки  $x(t) = 1(t)$  на выходе мгновенно будет получен такой же сигнал, усиленный в  $k$  раз (рис. 35).

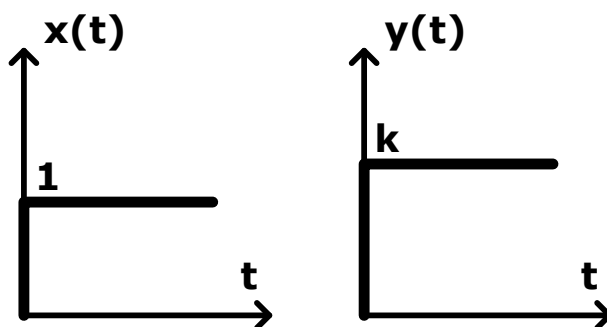


Рис. 35

Понятно, что ни одно реальное техническое устройство не может мгновенно преобразовывать входное воздействие, однако быстрое действие некоторых элементов САУ столь велико (длительность переходного процесса составляет величину менее секунды), что их можно считать звеньями этого типа. Примерами таких элементов являются потенциометр, рычаг, электронный усилитель. В первом приближении, без учета явления скручивания и люфта, усилительным безынерционным звеном можно считать редуктор.

В литературе встречаются и другие названия усилительного безынерционного звена: *усилитель, идеальное усилительное* или *пропорциональное* звено [1, 2, 10, 13].



### 3.2. Аperiodическое звено первого порядка

Звено этого типа (см. прил. 1) описывается дифференциальным уравнением первого порядка:

$$T \cdot \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k \cdot x(t),$$

где  $k$  – коэффициент статического преобразования (коэффициент усиления) звена;  $T$  – некоторая постоянная, имеющая размерность времени (постоянная времени звена).

На рис. 36 показаны переходные характеристики апериодических звеньев первого порядка с  $k = 10$  и разными постоянными времени  $T$ . Видно, что при увеличении  $T$  выходная величина звена  $y(t)$  медленнее достигает установившегося значения, равного  $k$ , т. е. постоянная времени  $T$  характеризует *инерционность* звена и определяет время переходного процесса  $t_p$ . В практических расчетах  $t_p$  для апериодического звена первого порядка принимают приближенно равным  $3 \cdot T$ .

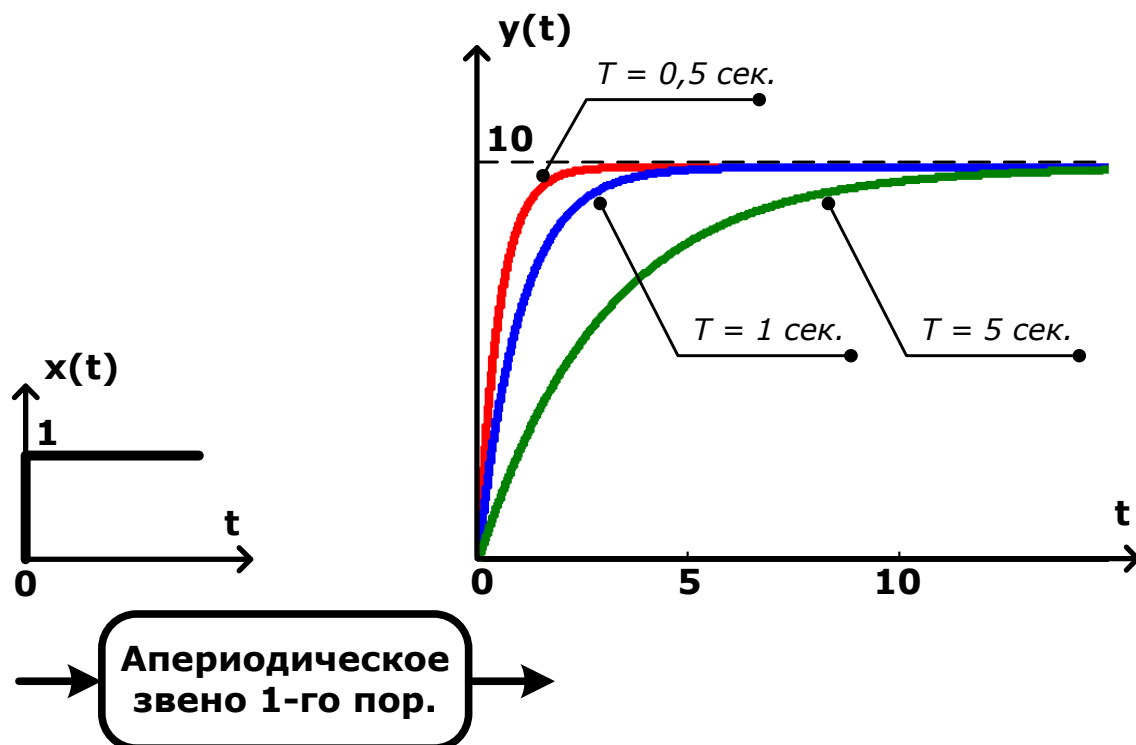


Рис. 36

Передаточная функция звена имеет вид:

$$W(p) = \frac{k}{(T \cdot p + 1)}.$$

Апериодическими звеньями первого порядка являются такие устройства САУ, как электрические  $RL$ - и  $RC$ -контуры (используются в качестве корректирующих устройств САУ), электрический генератор постоянного тока (используется в качестве управляющего устройства САУ), датчик температуры – терморезистор, проточный резервуар с жидкостью или газом (объекты управления в химико-технологических САУ) и многое другое.

Получим модель динамики  $RC$ -контура теоретическим способом: запишем уравнения входной и выходной цепей (рис. 37) по закону Кирхгофа:

$$U_{ex}(t) = U_{вых}(t) + i(t) \cdot R; \quad U_{вых}(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt.$$

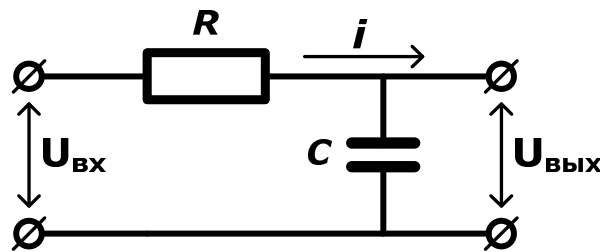


Рис. 37

Целью моделирования является получение дифференциального уравнения вида (1), связывающего входную  $U_{ex}(t)$  и выходную  $U_{вых}(t)$  переменные  $RC$ -контура. Для этого нужно в уравнениях входной и выходной цепей избавиться от промежуточной внутренней переменной контура – тока  $i(t)$ . Продифференцируем уравнение выходной цепи:

$$\frac{dU_{вых}(t)}{dt} = \frac{i(t)}{C}; \quad i(t) = C \cdot \frac{dU_{вых}(t)}{dt}$$

и подставим результат выражения  $i(t)$  в уравнение входной цепи:

$$R \cdot C \cdot \frac{dU_{вых}(t)}{dt} + U_{вых}(t) = U_{ex}(t).$$

Полученное уравнение соответствует дифференциальному уравнению апериодического звена первого порядка, для которого постоянная времени  $T = R \cdot C$ , т. е. определяется номиналами резистора и конденсатора, используемых в  $RC$ -контуре;  $k = 1$ ;  $y(t) = U_{\text{вых}}(t)$ ;  $x(t) = U_{\text{вх}}(t)$ .

*ПРИМЕР* получения модели динамики генератора  
постоянного тока.



В литературе встречаются и другие названия апериодического звена первого порядка: *инерционное звено первого порядка* или *релаксационное звено* [1, 2, 7, 12].

### 3.3. Апериодическое звено второго порядка и колебательное устойчивое звено

Апериодическое звено второго порядка и колебательное устойчивое звено имеют общую форму дифференциального уравнения (см. *прил. 1*):

$$T_2^2 \cdot \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + T_1 \cdot \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k \cdot x(t),$$

но *апериодическим* второго порядка звено с таким уравнением называется при условии  $T_1 \geq 2 \cdot T_2$ , а *колебательным* – при условии  $T_1 < 2 \cdot T_2$ .

Общий вид передаточной функции для обоих звеньев:

$$W(p) = \frac{k}{(T_2^2 \cdot p^2 + T_1 \cdot p + 1)}.$$

Заметим, что при условии  $T_1 > 2 \cdot T_2$  уравнение  $T_2^2 \cdot p^2 + T_1 \cdot p + 1 = 0$  будет иметь положительный дискриминант и, соответственно, действительные корни. Это позволяет разложить знаменатель передаточной функции апериодического звена второго порядка на множители вида

$$\frac{k}{(T_2^2 p + T_1 p + 1)} = \frac{k}{(T_3 p + 1)(T_4 p + 1)},$$

где

$$T_3 = \frac{T_1}{2} + \sqrt{\frac{T_1^2}{4} - T_2^2}, \quad T_4 = \frac{T_1}{2} - \sqrt{\frac{T_1^2}{4} - T_2^2}.$$

Если учесть, что при последовательном соединении звеньев их передаточные функции перемножаются, то получается, что апериодическое звено второго порядка эквивалентно двум апериодическим звеньям первого порядка, включенным последовательно друг за другом, с общим коэффициентом статического преобразования  $k$  и постоянными времени  $T_3$  и  $T_4$ .

На рис. 38 показаны переходные характеристики двух апериодических звеньев второго порядка с  $k = 5$  и разными постоянными времени  $T_1$  и  $T_2$ . Видно, что при увеличении  $T_1$  и  $T_2$  выходная величина звена  $y(t)$  медленнее достигает установившегося значения, равного  $k$ , т. е. постоянные времени и для этого звена определяют время переходного процесса.

**Важно!** Обратите внимание: несмотря на визуальное сходство переходных характеристик апериодических звеньев первого и второго порядков они имеют принципиальные отличия. Характеристика 2-го порядка имеет точку перегиба – в нулевой момент времени скорость изменения  $y(t)$  минимальна, затем она возрастает до точки перегиба, а после нее убывает. Начальный участок переходных характеристик звеньев второго порядка (для  $t$  от 0 до 0,5 секунд) показан на рис. 38 в выделенном увеличенном фрагменте. Там же для сравнения приведен аналогичный участок характеристик звеньев первого порядка, показанных на рис. 36. Видно, что для них скорость изменения  $y(t)$  максимальна в момент времени  $t = 0$ . Далее, за время  $t_p$ , скорость изменения  $y(t)$  убывает до нуля (см. рис. 36).

Интервал времени до точки перегиба переходной характеристики апериодического звена второго порядка рассчитывается по формуле

$$t_{\text{перегиба}} = \frac{T_3 \cdot T_4}{T_3 + T_4} \cdot \ln\left(\frac{T_3}{T_4}\right).$$

При условии  $T_1 < 2 \cdot T_2$ , т. е. для *колебательного устойчивого* звена, знаменатель передаточной функции  $T_2^2 \cdot p^2 + T_1 \cdot p + 1 = 0$  будет иметь отрицательный дискриминант и, соответственно, комплексно сопряженные корни. Из теории дифференциальных уравнений известно, что свободное движение такой системы содержит гармонические составляющие (синус, косинус), что дает колебания выходной величины при изменении входного сигнала.

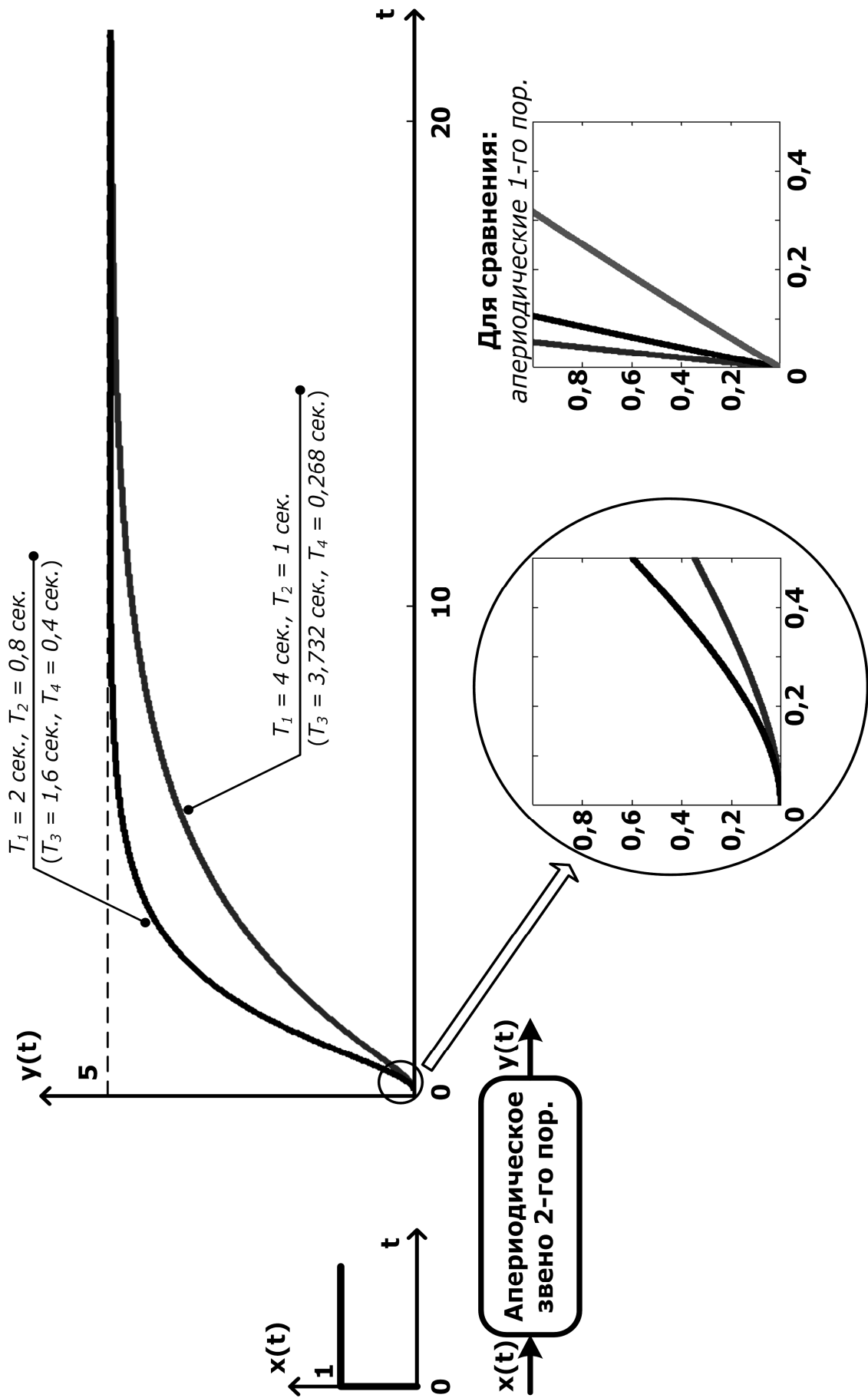


Рис. 38

Передаточную функцию колебательного звена принято записывать в виде:

$$W(p) = \frac{k}{(T_2^2 \cdot p^2 + T_1 \cdot p + 1)} = \frac{k}{(T^2 \cdot p^2 + 2 \cdot T \cdot \xi \cdot p + 1)};$$

$$T = T_2, \quad \xi = \frac{T_1}{2 \cdot T} = \frac{T_1}{2 \cdot T_2},$$

где  $T$  – постоянная времени колебательного звена;  $\xi$  – коэффициент затухания (для колебательного устойчивого звена  $0 < \xi < 1$ ). Чем больше  $\xi$ , тем быстрее затухают колебания переходной характеристики звена. При  $\xi = 0$  получается *колебательное гармоническое* звено, которое дает незатухающие колебания на выходе (см. прил. 1). При  $\xi \geq 1$  имеем апериодическое звено второго порядка.

На рис. 39 показаны переходные характеристики двух колебательных звеньев с *одинаковыми* значениями коэффициента статического преобразования  $k = 8$  и постоянной времени  $T = 1$ , и *разными* коэффициентами затухания  $\xi$ . Видно, что колебательность переходной характеристики и перерегулирование у звена с  $\xi = 0,25$  больше, чем у звена с  $\xi = 0,5$ .

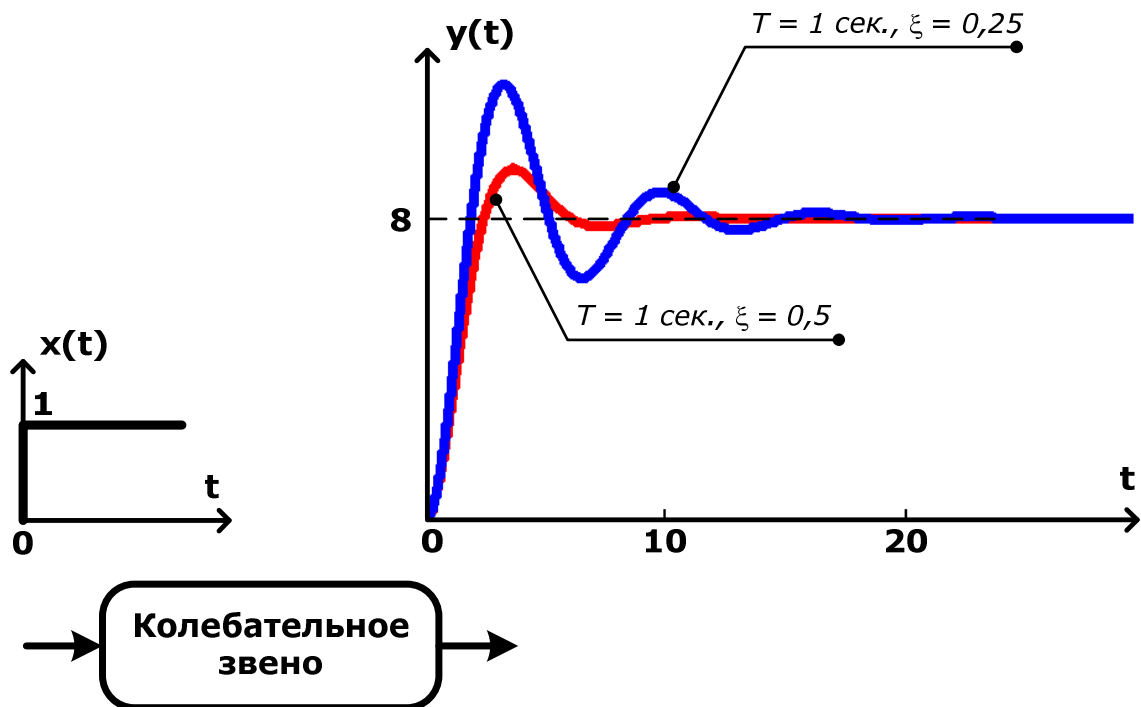


Рис. 39

На рис. 40 показаны переходные характеристики двух колебательных звеньев с *одинаковыми* значениями коэффициента статического преобразования  $k = 8$  и коэффициента затухания  $\xi = 0,3$ , и *разными* значениями постоянной времени  $T$ . Видно, что время переходного процесса у звена с  $T = 2$  больше, чем у звена с  $T = 1$ .

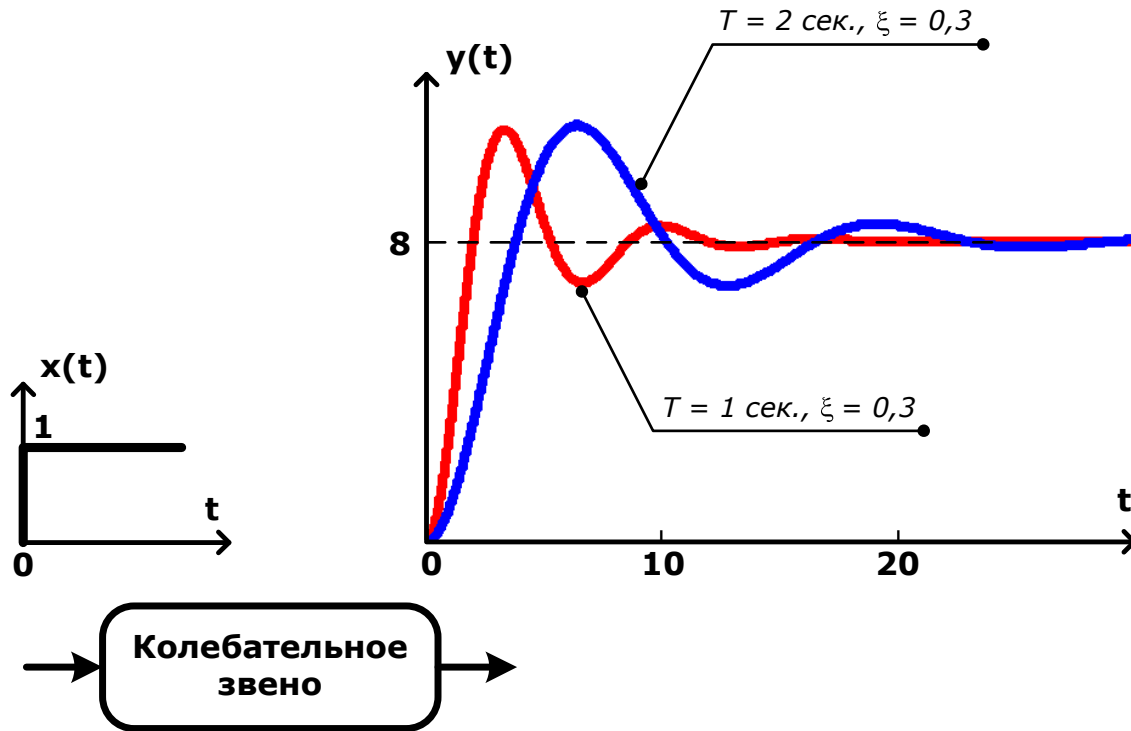


Рис. 40

Колебательными, или аperiodическими звеньями второго порядка (в зависимости от значений технических характеристик, определяющих соотношение постоянных времени  $T_1$  и  $T_2$ ), являются такие устройства САУ, как электрический  $RLC$ -контур, двигатель постоянного тока (см. вывод модели динамики в п. 2.3.1), упругие механические передачи, например, для передачи вращательного движения с упругостью, моментом инерции и коэффициентом скоростного трения, дифманометр (датчик для измерения перепада давления) и другие устройства.

Получим модель динамики  $RLC$ -контура теоретическим способом: запишем уравнения входной и выходной цепей (рис. 41) по закону Кирхгофа:

$$U_{\text{вх}}(t) = U_{\text{вых}}(t) + i(t) \cdot R + L \frac{di(t)}{dt}; \quad U_{\text{вых}}(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt.$$

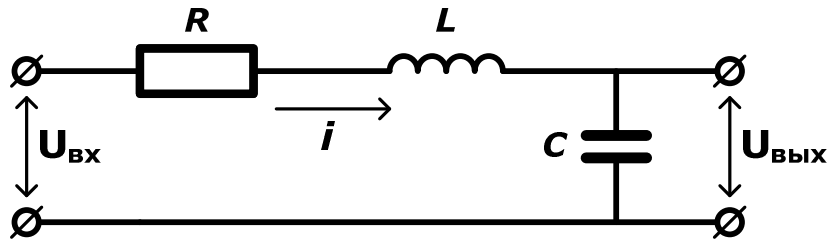


Рис. 41

Целью моделирования является получение дифференциального уравнения вида (1), связывающего входную  $U_{\text{вх}}(t)$  и выходную  $U_{\text{вых}}(t)$  переменные  $RC$ -контура. Для этого нужно в уравнениях входной и выходной цепей избавиться от промежуточной внутренней переменной контура – тока  $i(t)$ . Продифференцируем уравнение выходной цепи:

$$\frac{dU_{\text{вых}}(t)}{dt} = \frac{i(t)}{C}; \quad i(t) = C \cdot \frac{dU_{\text{вых}}(t)}{dt}$$

и подставим результат выражения  $i(t)$  в уравнение входной цепи:

$$L \cdot C \cdot \frac{d^2 U_{\text{вых}}(t)}{dt^2} + R \cdot C \cdot \frac{dU_{\text{вых}}(t)}{dt} + U_{\text{вых}}(t) = U_{\text{вх}}(t).$$

Полученное уравнение соответствует дифференциальному уравнению, для которого постоянные времени  $T_1 = R \cdot C$  и  $T_2 = \sqrt{L \cdot C}$ , т. е. определяются номиналами резистора, конденсатора и катушки индуктивности, используемых в  $RLC$ -контуре;  $k = 1$ ;  $y(t) = U_{\text{вых}}(t)$ ;  $x(t) = U_{\text{вх}}(t)$ . Конкретный тип звена – аperiodическое второго порядка или колебательное – зависит от соотношения постоянных времени  $T_1$  и  $T_2$  ( $T_1 \geq 2 \cdot T_2$  или  $T_1 < 2 \cdot T_2$  соответственно), т. е. в конечном счете определяется номиналами  $R$ ,  $L$  и  $C$ . Примеры переходных характеристик  $RLC$ -контуров показаны на рис. 42.

Получим модель динамики механической системы с линейным перемещением, параметрами механических элементов которой являются масса, демпфирование (трение) и упругость (рис. 43). Заметим, что в рассматриваемой системе движение происходит только в одном направлении, перемещение в поперечном направлении не допускается.



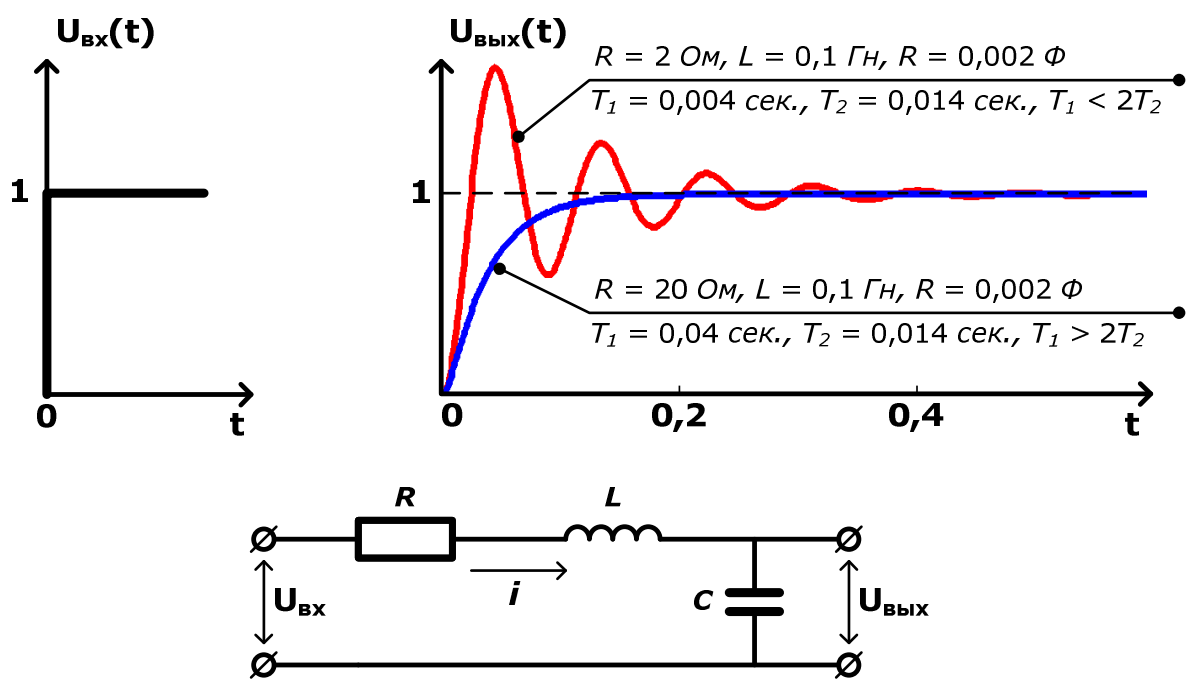


Рис. 42

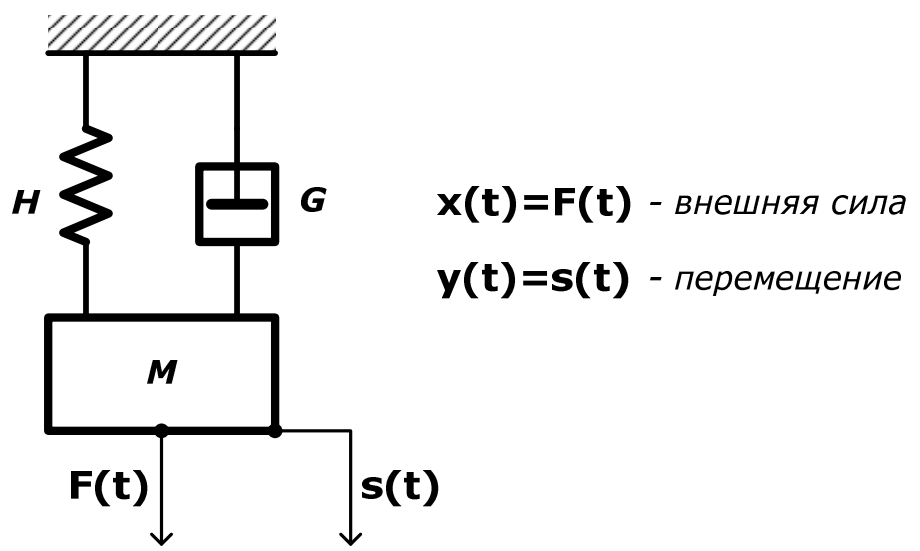


Рис. 43

Рассмотрим действие внешней силы  $F(t)$  на изолированные механические элементы по отдельности. Для массы  $M$  по второму закону Ньютона

$$F(t) = M \cdot a(t) = M \cdot \frac{dv(t)}{dt} = M \cdot \frac{d^2s(t)}{dt^2},$$

где  $v(t)$  – скорость;  $a(t)$  – ускорение, а  $s(t)$  – выходное линейное перемещение (см. рис. 43).

Скорость перемещения поршня демпфера под действием силы  $F(t)$  определяется следующим образом:

$$v(t) = \frac{ds(t)}{dt} = \frac{F(t)}{G},$$

где  $G$  – коэффициент сопротивления (демпфирования).

Для упругой пружины в соответствии с законом Гука уравнение движения имеет вид:

$$F(t) = H \cdot s(t),$$

где  $H$  – коэффициент упругости пружины.

В системе в целом (см. рис. 43) на тело массой  $M$  действуют три силы – внешняя сила  $F(t)$ , сила трения и упругая сила, следовательно, для суммы сил справедливо:

$$F(t) - G \cdot \frac{ds(t)}{dt} - H \cdot s(t) = M \cdot \frac{d^2s(t)}{dt^2};$$

$$M \cdot \frac{d^2s(t)}{dt^2} + G \cdot \frac{ds(t)}{dt} + H \cdot s(t) = F(t).$$

Полученное уравнение динамики имеет второй порядок, однако для приведения к форме стандартного дифференциального уравнения колебательного или апериодического звена второго порядка (см. прил. 1) постоянный коэффициент слагаемого  $s(t)$  в левой части должен быть равен 1. Приведем уравнение динамики к типовому виду, разделив левую и правую части на коэффициент упругости пружины  $H$ :

$$\frac{M}{H} \cdot \frac{d^2s(t)}{dt^2} + \frac{G}{H} \cdot \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = \frac{1}{H} \cdot F(t).$$

Полученное уравнение соответствует дифференциальному уравнению, для которого постоянные времени  $T_1 = G / H$  и  $T_2 = \sqrt{M / H}$ , т. е. определяются массой, а также величинами  $G$  и  $H$ ;  $k = 1 / H$ ;  $y(t) = s(t)$ ;  $x(t) = F(t)$ .

Таким образом, мы показали, что механическая система вида, приведенного на рис. 43, также является колебательным или апериодическим звеном второго порядка. Конкретный тип звена зависит от соотношения постоянных времени  $T_1$  и  $T_2$  ( $T_1 \geq 2 \cdot T_2$  или  $T_1 < 2 \cdot T_2$  соответственно), т. е. в конечном счете определяется величинами  $M$ ,  $G$  и  $H$ . Рассмотренная механическая система может быть использована, например, в качестве звена модели тормозной системы автомобиля в расчете на одно колесо (кроме рассмотренного звена в такой модели требуется учет массы автомобиля и упругости шины).

Из рассмотренных примеров видно, что, несмотря на различие устройств САУ и их назначения, их математические модели имеют вид одного и того же дифференциального уравнения второго порядка. Рассмотренные типы звеньев в литературе иногда называют *инерционными звеньями второго порядка* [2, 7, 15].

### 3.4. Интегрирующие звенья

Идеальным интегрирующим звеном называется такое звено, выходная величина которого пропорциональна интегралу по времени от входной величины (см. прил. 1):

$$y(t) = k \cdot \int x(t) dt$$

или

$$\frac{dy(t)}{dt} = k \cdot x(t),$$

где  $k$  – коэффициент статического преобразования (коэффициент усиления) идеального интегрирующего звена, равный отношению скорости изменения выходной величины к входной.

Передаточная функция звена имеет вид:

$$W(p) = \frac{k}{p}.$$

Переходная характеристика идеального интегрирующего звена имеет вид наклонной прямой, так как интеграл геометрически представляет собой площадь, ограничиваемую графиком ступенчатого входного воздействия  $x(t)$ , которая возрастает с течением времени  $t$ . Решение дифференциального уравнения идеального интегрирующего звена имеет вид:

$$y(t) = y(0) + k \cdot \int x(t) dt,$$

откуда для единичной ступеньки ( $x(t) = 1$  при  $t \geq 0$ ) при нулевых начальных условиях  $y(0) = 0$  получаем линейно возрастающую переходную характеристику  $y(t) = k \cdot t$ . На рис. 44 показаны переходные характеристики идеальных интегрирующих звеньев с различными значениями  $k$ .

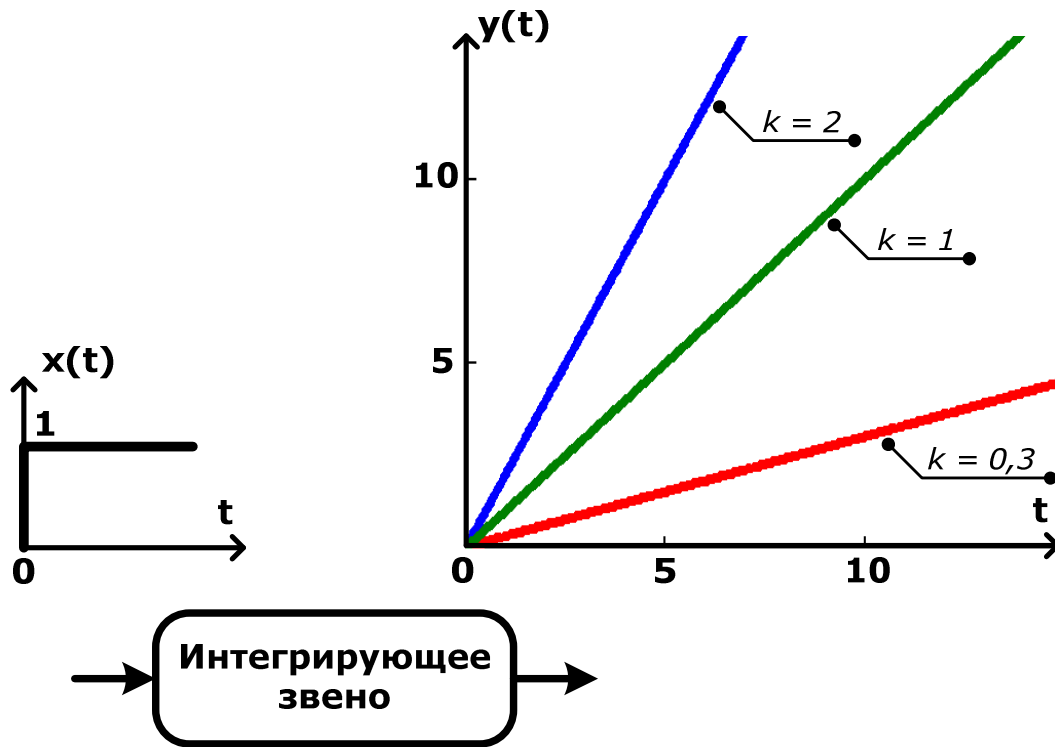


Рис. 44

Простейший бытовой пример идеального интегрирующего звена – ванна, в которую набирается вода. Входное воздействие  $x(t)$  для этого объекта – это приток (расход) воды через кран, а выходная величина  $y(t)$  – уровень воды в ванне. При поступлении воды уровень растет, т. е. система «накапливает» (интегрирует) входной сигнал.

Примерами идеальных интегрирующих звеньев являются такие устройства САУ, как операционный усилитель, используемый в режиме интегрирования (рис. 45, а), и гидравлический демпфер (см. рис. 45, б).

Уравнение операционного усилителя, используемого в режиме интегрирования, имеет вид:

$$U_{\text{вых}} = \frac{1}{R \cdot C} \int_0^t U_{\text{вх}} dt = k \cdot \int_0^t U_{\text{вх}} dt ,$$

что соответствует уравнению идеального интегрирующего звена, для которого  $k = 1/R \cdot C$ ,  $U_{вх} = x(t)$ ,  $U_{вых} = y(t)$ .

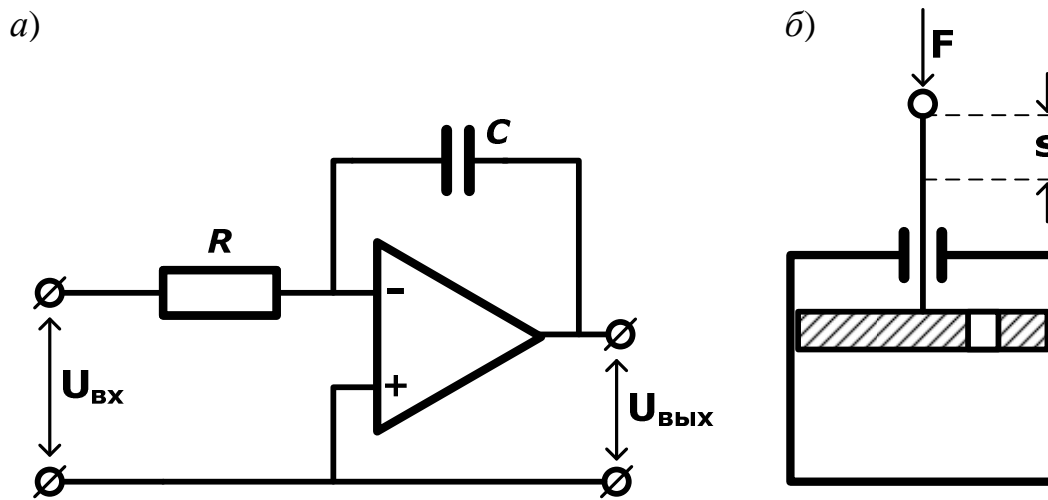


Рис. 45

Для гидравлического демпфера входным воздействием является сила  $F$ , действующая на поршень, а выходной величиной – перемещение поршня  $s$ . Так как скорость движения поршня пропорциональна приложенной силе

$$v(t) = \frac{ds(t)}{dt} = \frac{F(t)}{G},$$

где  $G$  – коэффициент сопротивления (демпфирования), то перемещение поршня будет пропорционально интегралу от приложенной силы:

$$s(t) = \int_0^t v(t)dt = \frac{1}{G} \int_0^t F(t)dt.$$

Полученное уравнение соответствует уравнению идеального интегрирующего звена, для которого  $k = 1/G$ ,  $F(t) = x(t)$ ,  $s(t) = y(t)$ .

Рассмотренная разновидность интегрирующего звена называется *идеальной*, т. к. его уравнение не учитывает инерционность описываемого звеном устройства САУ. В литературе этот тип звена иногда *называют астатическим* звеном.

Все реальные устройства вносят некоторое замедление в работу, поэтому более точной моделью реальных интегрирующих устройств является

интегрирующее звено с замедлением, передаточная функция которого имеет вид:

$$W(p) = \frac{k}{p(T \cdot p + 1)},$$

т. е. представляет собой произведение передаточных функций идеального интегрирующего звена и апериодического звена первого порядка. Таким образом, интегрирующее звено с замедлением можно представить последовательным соединением этих двух разновидностей типовых звеньев. Таким звеном является двигатель, если в качестве выходной величины рассматривать не угловую скорость, а угол поворота, являющийся интегралом от угловой скорости, а также демпфер, если более точно рассматривать его уравнение движения [1, 2, 7].

*ПРИМЕР* переходной характеристики интегрирующего звена с замедлением.



### 3.5. Дифференцирующие звенья

Идеальное дифференцирующее звено формирует на выходе величину, пропорциональную производной входного сигнала, т. е. скорости изменения входного воздействия (см. прил. 1):

$$y(t) = k \cdot \frac{dx(t)}{dt},$$

где  $k$  – коэффициент статического преобразования (коэффициент усиления) идеального дифференцирующего звена. Передаточная функция звена имеет вид:  $W(p) = k \cdot p$ .

Дифференцирующее звено реагирует не на изменение самой входной величины, а на изменение ее производной, то есть на тенденцию развития событий. Поэтому говорят, что дифференцирующее звено обладает упреждающим, *прогнозирующим* действием. С его помощью можно ускорить реакцию САУ на изменяющиеся входные воздействия.

Проанализируем форму переходной характеристики идеального дифференцирующего звена (см. прил. 1). При подаче на вход звена единичной ступеньки  $x(t) = 0$  для  $t < 0$  и  $x(t) = 1$  для  $t > 0$ . Производная постоянной величины равна нулю, следовательно,  $y(t) = 0$  для  $t < 0$  и для  $t > 0$ . И только в

момент непосредственного изменения входного воздействия с нуля на единицу, т. е. в момент времени  $t = 0$ , производная входного сигнала  $dx(t)/dt$  не равна нулю:

$$\frac{dx(0)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(0 + \Delta t) - x(0)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1 - 0}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} = \infty.$$

В результате переходная характеристика идеального дифференцирующего звена в момент времени  $t = 0$  теоретически имеет форму импульса с бесконечно большой амплитудой и бесконечно малой длительностью. Понятно, что такую переходную характеристику невозможно получить с использованием реального устройства САУ. Поэтому идеальное дифференцирующее звено, а также звенья этого типа первого и второго порядков (см. прил. 1) являются модельными и относятся к *физически нереализуемым* звеньям.

Приближенно в качестве идеального дифференцирующего звена может рассматриваться операционный усилитель, включенный в режиме дифференцирования (рис. 46, а), и тахогенератор постоянного тока, если в качестве входной величины рассматривать угол поворота его ротора  $\alpha(t)$ , а в качестве выходной – напряжение якоря  $U_{\text{я}}(t)$  (см. рис. 46, б).

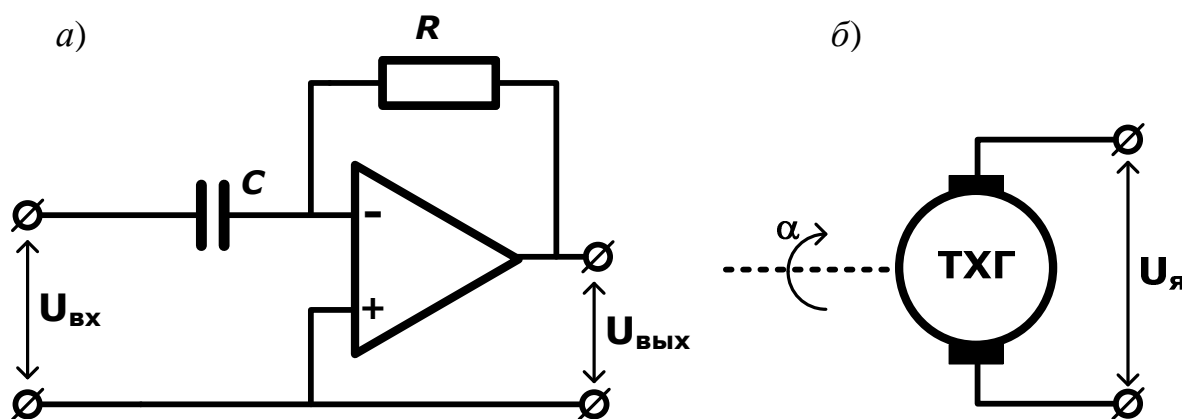


Рис. 46

*ПРИМЕР* переходной характеристики операционного усилителя в режиме дифференцирования.



В тахогенераторе постоянного тока при неизменном потоке возбуждения напряжение якоря можно считать пропорциональным угловой скорости вращения. В свою очередь, скорость вращения – это производная от угла поворота:

$$U_{я} = k \cdot \omega(t) = k \cdot \frac{d\alpha(t)}{dt},$$

что соответствует дифференциальному уравнению идеального дифференцирующего звена с коэффициентом статического преобразования  $k$ ,  $y(t) = U_{я}(t)$ ;  $x(t) = \alpha(t)$ .

Практически дифференцирующие устройства САУ вносят некоторое замедление в работу (обладают инерционностью), поэтому более точной моделью реальных устройств является *дифференцирующее звено с замедлением*, передаточная функция которого имеет вид:

$$W(p) = \frac{k \cdot p}{(T \cdot p + 1)},$$

т. е. представляет собой произведение передаточных функций идеального дифференцирующего звена и апериодического звена первого порядка. Таким образом, дифференцирующее звено с замедлением можно представить последовательным соединением этих двух разновидностей типовых звеньев. Примерами дифференцирующего звена с замедлением могут служить трансформатор, емкостной дифференцирующий контур (рис. 47, а) и механическое дифференцирующее устройство, состоящее из пружины и демпфера (см. рис. 47, б).

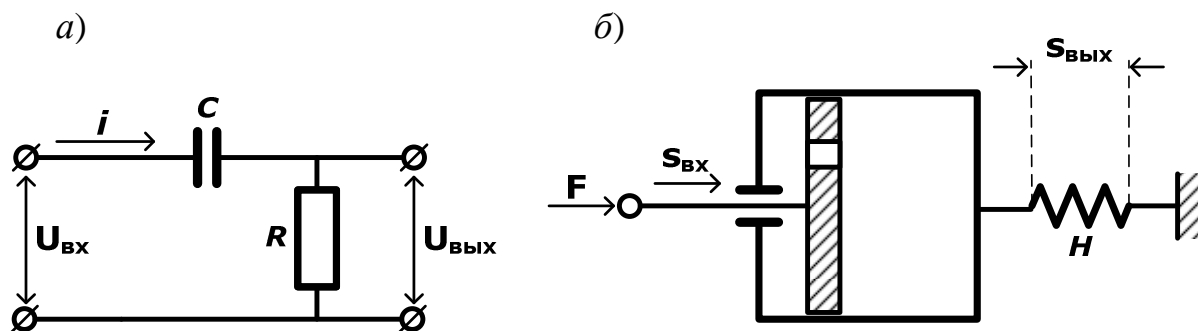


Рис. 47



Получим модель динамики емкостного дифференцирующего контура (см. рис. 47, *a*). Запишем уравнения входной и выходной цепей по закону Кирхгофа:

$$U_{ex}(t) = U_{ebx}(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt; \quad U_{ebx}(t) = i(t) \cdot R.$$

Продифференцируем уравнение входной цепи:

$$\frac{dU_{ex}(t)}{dt} = \frac{dU_{ebx}(t)}{dt} + \frac{i(t)}{C}$$

и подставим в него ток  $i(t)$ , выразив его из уравнения выходной цепи:

$$\begin{aligned} \frac{dU_{ex}(t)}{dt} &= \frac{dU_{ebx}(t)}{dt} + \frac{U_{ebx}(t)}{R \cdot C}; \\ R \cdot C \cdot \frac{dU_{ex}(t)}{dt} &= R \cdot C \cdot \frac{dU_{ebx}(t)}{dt} + U_{ebx}(t). \end{aligned}$$

Выведем передаточную функцию емкостного дифференцирующего контура:

$$R \cdot C \cdot p U_{ex}(p) = R \cdot C \cdot p U_{ebx}(p) + U_{ebx}(p);$$

$$R \cdot C \cdot p U_{ex}(p) = U_{ebx}(p) \cdot (R \cdot C \cdot p + 1);$$

$$W(p) = \frac{U_{ebx}(p)}{U_{ex}(p)} = \frac{R \cdot C \cdot p}{(R \cdot C \cdot p + 1)}.$$

Полученная  $W(p)$  соответствует передаточной функции дифференцирующего звена с замедлением, у которого  $k = T = R \cdot C$ .

Получим модель динамики механического дифференцирующего устройства (см. рис. 47, *б*) для  $y(t) = s_{ebx}(t)$ ;  $x(t) = s_{ex}(t)$  в предположении, что элементы трения (демпфер) и упругости (пружина) имеют нулевую массу. Уравнение движение демпфера для данного случая имеет вид:

$$F(t) = G \cdot \left( \frac{ds_{ex}(t)}{dt} - \frac{ds_{ebx}(t)}{dt} \right),$$

где  $G$  – коэффициент сопротивления (демпфирования). Для пружины с коэффициентом упругости  $H$  уравнение движения имеет вид:

$$F(t) = H \cdot s_{ebx}(t),$$

следовательно, после подстановки

$$H \cdot s_{\text{вблх}}(t) = G \cdot \left( \frac{ds_{\text{вх}}(t)}{dt} - \frac{ds_{\text{вблх}}(t)}{dt} \right);$$

$$G \cdot \frac{ds_{\text{вблх}}(t)}{dt} + H \cdot s_{\text{вблх}}(t) = G \cdot \frac{ds_{\text{вх}}(t)}{dt};$$

$$\frac{G}{H} \cdot \frac{ds_{\text{вблх}}(t)}{dt} + s_{\text{вблх}}(t) = \frac{G}{H} \cdot \frac{ds_{\text{вх}}(t)}{dt}.$$

Выведем передаточную функцию механического дифференцирующего устройства:

$$\frac{G}{H} \cdot ps_{\text{вблх}}(p) + s_{\text{вблх}}(p) = \frac{G}{H} \cdot ps_{\text{вх}}(p);$$

$$W(p) = \frac{s_{\text{вблх}}(p)}{s_{\text{вх}}(p)} = \frac{\frac{G}{H} \cdot p}{\left( \frac{G}{H} \cdot p + 1 \right)}.$$

Полученная  $W(p)$  соответствует передаточной функции дифференцирующего звена с замедлением, у которого  $k = T = G/H$  [1, 2, 7, 15].

*ПРИМЕР переходной характеристики дифференцирующего звена с замедлением.*



### 3.6. Безынерционное звено с чистым запаздыванием

Представим себе трубу, через которую вентилятор прокачивает воздух. В начале трубы установлен нагреватель, а температура воздуха измеряется датчиком, чувствительный элемент которого установлен в точке  $A$  (рис. 48).

Очевидно, что изменение температуры воздуха датчик будет «обнаруживать» не сразу, а через время  $\tau = L/v$ , где  $L$  – расстояние от нагревателя до точки  $A$ , м;  $v$  – скорость потока воздуха, м/с.

Аналогичная ситуация имеет место для транспортера, подающего деталь от бункерного загрузочного устройства к весам. Из рис. 49 видно, что деталь будет взвешена не в момент выхода из бункера, а через время  $\tau = L/v$ , где  $L$  – расстояние от бункера до весов, м;  $v$  – скорость движения транспортера, м/с.

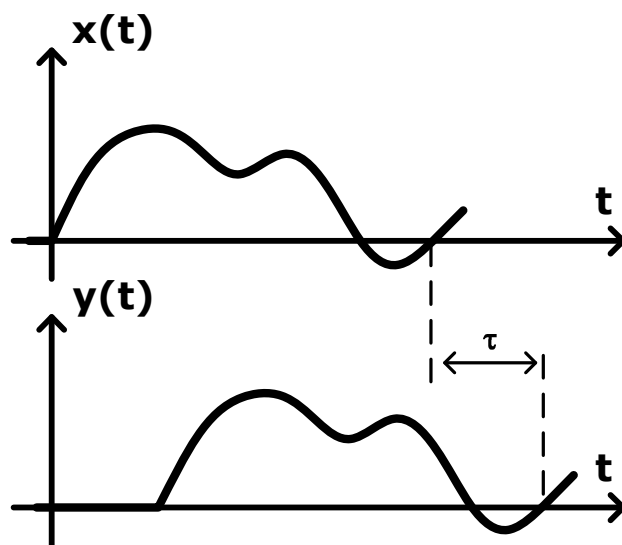
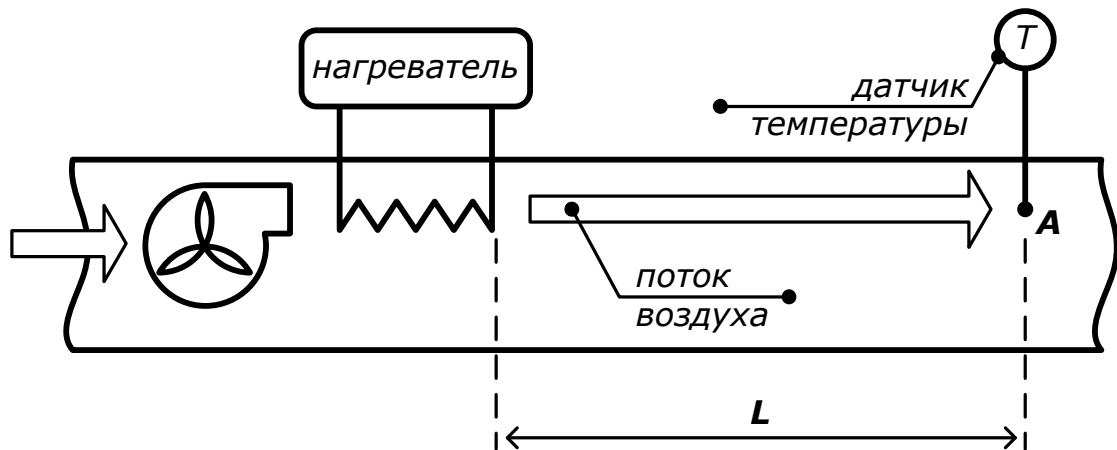


Рис. 48

В рассмотренных случаях говорят, что в системе имеет место транспортное *запаздывание* на величину  $\tau$ .

Безынерционное звено с чистым запаздыванием описывается уравнением вида

$$y(t) = k \cdot x(t - \tau),$$

где  $k$  – коэффициент статического преобразования (коэффициент усиления) звена;  $\tau$  – время запаздывания.

Переходная характеристика звена с чистым запаздыванием представляет собой единичную ступеньку, усиленную в  $k$  раз и сдвинутую вправо по оси времени на величину  $\tau$  (см. рис. 48).

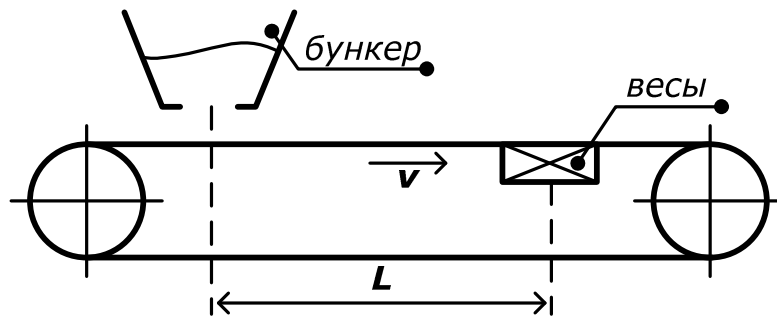


Рис. 49

Изображение по Лапласу выходной величины вычисляется с использованием *теоремы о смещении аргумента*:

$$y(p) = L(y(t)) = k \cdot \int_0^{\infty} x(t - \tau) \cdot e^{-pt} dt = k \cdot e^{-p\tau} \int_0^{\infty} x(t) \cdot e^{-pt} dt = k \cdot e^{-p\tau} \cdot x(p),$$

откуда передаточная функция звена с чистым запаздыванием

$$W(p) = \frac{y(p)}{x(p)} = k \cdot e^{-p\tau}.$$

Примерами звеньев с чистым запаздыванием, помимо рассмотренных выше, являются линия дальней электропередачи, трубопровод гидравлической системы, вычислительное запаздывание в управляющем компьютере (время, необходимое для расчета нового управляющего сигнала после получения всех исходных данных) и т. д. [1 – 3, 13].

### 3.7. Передаточные функции соединений звеньев. Преобразования структурных схем САУ

Как уже отмечалось, любая САУ может быть представлена комбинацией динамических звеньев с типовыми передаточными функциями. Структура САУ изображается в виде схемы, состоящей из обозначений отдельных, определенным образом связанных между собой звеньев, динамические свойства которых определяются их передаточными функциями. Звенья соединяются между собой *линиями связей*, стрелки которых показывают направление прохождения сигналов. Структурные схемы также могут содержать *элементы сравнения* или *суммирования* и разветвления сигналов, обо-

значаемые точками. Линии связи, отходящие от точки разветвления, несут одни и те же сигналы. При известных передаточных функциях звеньев передаточная функция САУ определяется на основании ее структурной схемы с учетом типов соединений звеньев.

Передаточная функция *последовательного соединения* (рис. 50) равна произведению передаточных функций отдельных звеньев:

$$W(p) = W_1(p) \cdot W_2(p) \cdot W_3(p) \dots W_n(p) = \prod_{i=1}^n W_i(p).$$

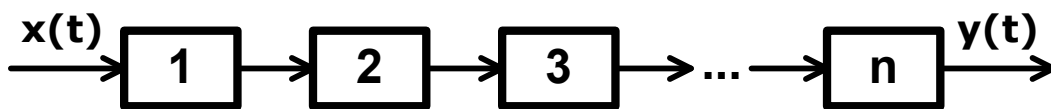


Рис. 50

При *параллельном соединении* (рис. 51, а) передаточная функция определяется как сумма передаточных функций отдельных звеньев:

$$W(p) = W_1(p) + W_2(p) + W_3(p) + \dots + W_n(p) = \sum_{i=1}^n W_i(p).$$

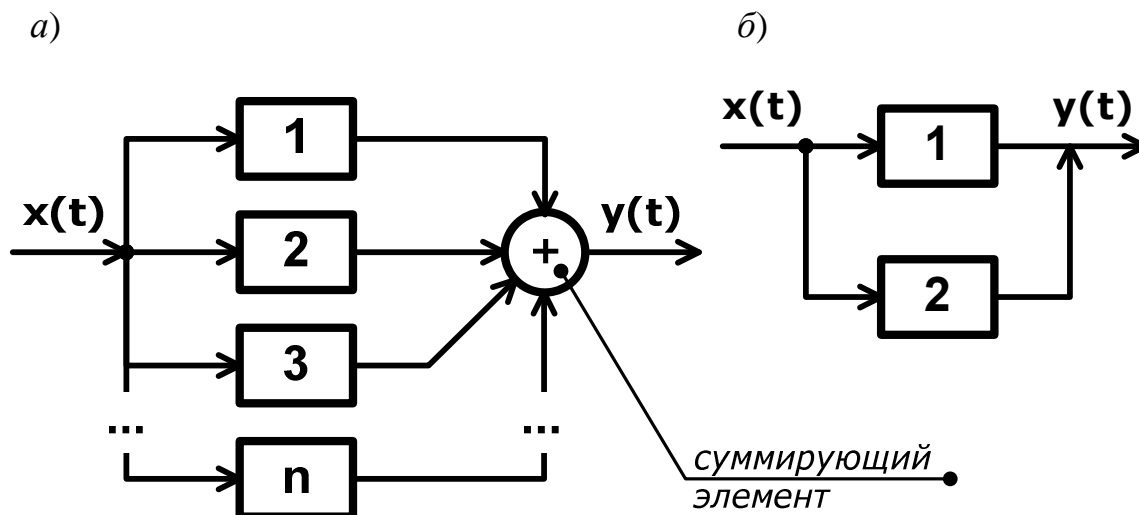


Рис. 51

Заметим, что при параллельном соединении малого количества звеньев обозначение суммирующего элемента (см. рис. 51, а) в структурных схемах САУ обычно опускают. Так, параллельное соединение двух звеньев обозначается, как показано на рис. 51, б.

Если по одной из цепей параллельного соединения сигнал проходит без преобразования, т. е. элемент этой цепи представляет собой усилительное безынерционное звено с передаточной функцией  $W(p) = 1$ , то цепь называют *единичной*, а обозначение элемента в линии связи опускают. На рис. 52, а, б показаны идентичные параллельные соединения, передаточная функция которых  $W(p) = W_1(p) + 1$ .

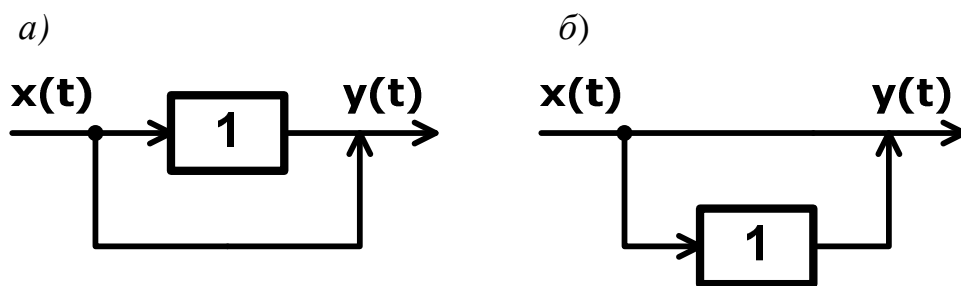


Рис. 52

Соединение с отрицательной обратной связью показано на рис. 53, а.

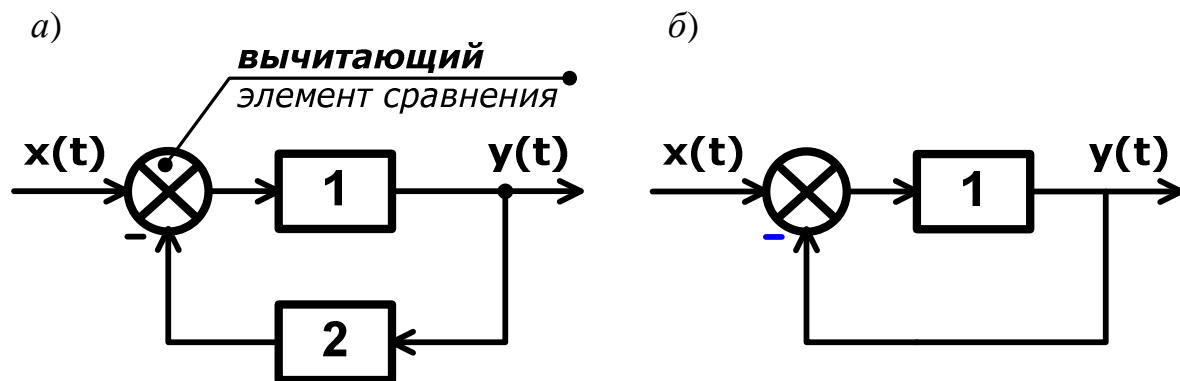


Рис. 53

Элемент сравнения в этой схеме (см. рис. 53, а) осуществляет вычитание выходного сигнала звена **2** из сигнала  $x(t)$ . Говорят, что звено **2** включено в отрицательную обратную связь к звену **1**. Передаточная функция этого соединения определяется следующим образом:

$$W(p) = \frac{W_1(p)}{1 + W_1(p) \cdot W_2(p)}. \quad (3)$$

Если сигнал обратной связи подается на элемент сравнения без преобразования, т. е. элемент, включенный в обратную связь, представляет собой усилительное безынерционное звено с передаточной функцией  $W(p) = 1$ , то такую обратную связь называют *единичной*. В этом случае обозначение звена в линии связи опускают. На рис. 53, б показано звено **1**, охваченное единичной отрицательной обратной связью. Это соединение соответствует варианту, показанному на рис. 53, а, для которого  $W_2(p) = 1$ , следовательно, по формуле (3) его передаточная функция равна:

$$W(p) = \frac{W_1(p)}{1 + W_1(p)}.$$

Варианты обозначений соединения с *положительной обратной связью* показаны на рис. 54, а, б. Элемент сравнения в этой схеме осуществляет сложение сигнала  $x(t)$  и выходного сигнала звена **2**. Говорят, что звено **2** включено в положительную обратную связь к звену **1**.

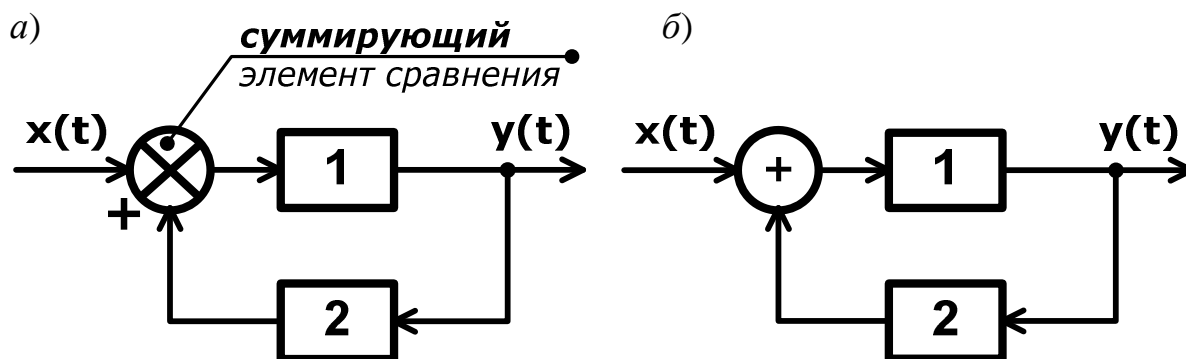


Рис. 54

Передаточная функция этого соединения определяется следующим образом:

$$W(p) = \frac{W_1(p)}{1 - W_1(p) \cdot W_2(p)}. \quad (4)$$

Положительная обратная связь, как и отрицательная, тоже может быть единичной.

**Важно!** Отрицательная обратная связь используется в САУ значительно чаще положительной. Поэтому, по умолчанию, если тип обратной связи не указан, то она является отрицательной.

Также обратите внимание на то, что знак в знаменателях формул (3) и (4) противоположен типу обратной связи: «плюс» соответствует отрицательной обратной связи, а «минус» – положительной.

В тех случаях, когда структурная схема САУ оказывается сложной, для определения передаточной функции могут потребоваться *эквивалентные преобразования* схемы. Основными способами преобразований схем являются переносы узлов и элементов сравнения (сумматоров). Для обеспечения эквивалентности, т. е. для того, чтобы передаточная функция САУ в результате преобразований не изменялась, переносы осуществляют по определенным правилам, с добавлением в схему звеньев, компенсирующих изменения передаточной функции в результате переноса.

Пример схемы, требующей переноса узлов для определения передаточной функции по типам соединений звеньев, показан на рис. 55. Звено 2 охвачено одновременно двумя обратными связями, причем сигналы для цепей этих обратных связей формируются в разных узлах схемы. Без преобразования схемы определить передаточную функцию невозможно.

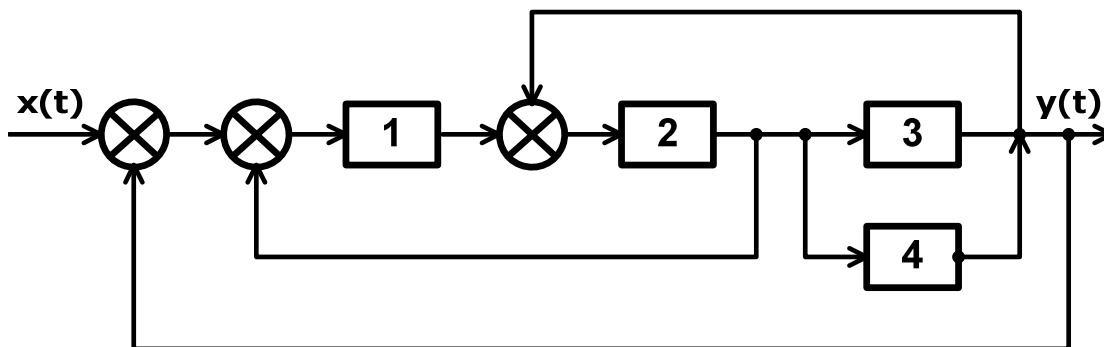


Рис. 55

Для вывода правила переноса узла схемы *по направлению действия сигнала* рассмотрим простую схему, показанную на рис. 56. Эта схема имеет очевидные типы связей: последовательное соединение звеньев 1 и 2 охвачено единичной отрицательной обратной связью, и к этому узлу последовательно присоединено звено 3, следовательно, передаточная функция схемы имеет вид:

$$W_{исх}(p) = \frac{W_1(p) \cdot W_2(p)}{1 + W_1(p) \cdot W_2(p)} \cdot W_3(p).$$



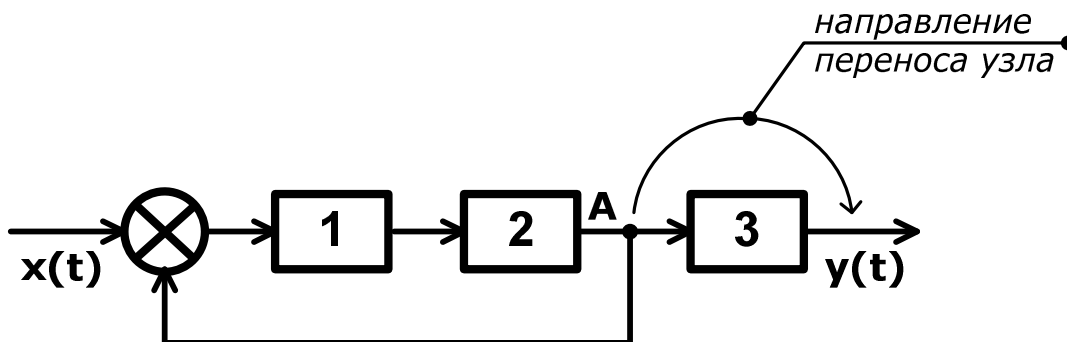


Рис. 56

Рассмотрим возможность переноса узла **A**, как показано на рис. 56. Мы не должны нарушать условие эквивалентности преобразований: в результате переноса передаточная функция исходной схемы не должна измениться. Для этого в цепь обратной связи следует добавить звено с передаточной функцией, обратной передаточной функции третьего звена:

$$W_{\text{доб.зв}}(p) = \frac{1}{W_3(p)}.$$

Схема после переноса узла **A** имеет вид последовательного соединения звеньев **1**, **2** и **3**, в обратную связь к которому включено добавленное звено (рис. 57). Передаточная функция итоговой схемы имеет вид:

$$\begin{aligned} W_{\text{итог}}(p) &= \frac{W_1(p) \cdot W_2(p) \cdot W_3(p)}{1 + W_1(p) \cdot W_2(p) \cdot W_3(p) \cdot W_{\text{доб.зв}}(p)} = \\ &= \frac{W_1(p) \cdot W_2(p) \cdot W_3(p)}{1 + W_1(p) \cdot W_2(p) \cdot W_3(p) \cdot \frac{1}{W_3(p)}} = \frac{W_1(p) \cdot W_2(p) \cdot W_3(p)}{1 + W_1(p) \cdot W_2(p)} = W_{\text{исх}}(p). \end{aligned}$$

Передаточные функции исходной схемы и схемы после переноса узла **A** равны, следовательно, схемы, показанные на рис. 56 и рис. 57, при условии  $W_{\text{доб.зв}}(p) = \frac{1}{W_3(p)}$  эквивалентны.

На основании рассмотренного примера можно сформулировать *правило переноса узла по направлению действия сигнала*: при переносе узла схемы через звено с передаточной функцией  $W(p)$  по направлению действия сигнала (с входа на выход) в цепь, исходящую из узла, добавляется звено с

обратной передаточной функцией  $W_{\text{доб.зв}}(p) = 1/W(p)$ . Заметим, что с использованием приведенного правила переносить можно не только узлы обратных связей, но и узлы параллельных соединений звеньев.

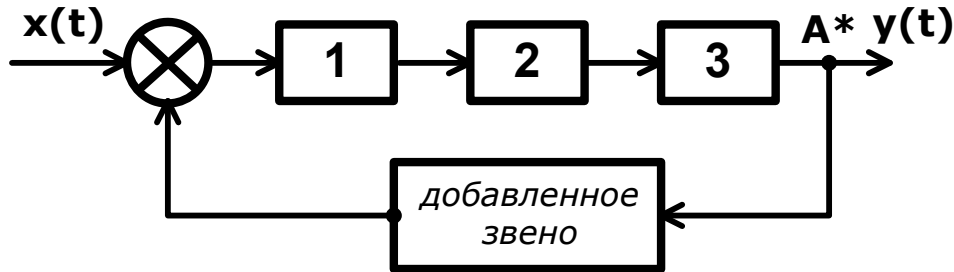


Рис. 57

Аналогично можно вывести правило *переноса узла против направления действия сигнала*: при переносе узла схемы через звено с передаточной функцией  $W(p)$  против направления действия сигнала (с выхода на вход) в цепь, исходящую из узла, добавляется звено с такой же передаточной функцией  $W_{\text{доб.зв}}(p) = W(p)$ . Это правило также применимо и к параллельным соединениям.

В прил. 2 в дополнение к рассмотренным приведены правила переноса элемента сравнения (сумматора) через звено по направлению действия сигнала (с входа звена на выход), и наоборот [1, 7, 13].

Вернемся к схеме САУ, показанной на рис. 55. В данной схеме имеется обратная связь, соединяющая выход схемы со входом: по этой связи выходной сигнал  $y(t)$  подается на первый элемент сравнения, производящий вычитание  $x(t) - y(t)$ . Такая обратная связь называется *общей*, а схема САУ – *замкнутой*. Схема САУ без учета общей обратной связи называется *разомкнутой*.

Разомкнутая схема САУ, показанной на рис. 55, приведена на рис. 58. Определим ее передаточную функцию с применением эквивалентных преобразований (переноса узлов). В первую очередь рассмотрим очевидные соединения звеньев: звенья **3** и **4** соединены параллельно, т. е. передаточная функция этого блока равна сумме передаточных функций этих звеньев:

$$W_{\text{ол.3-4}}(p) = W_3(p) + W_4(p). \quad (5)$$

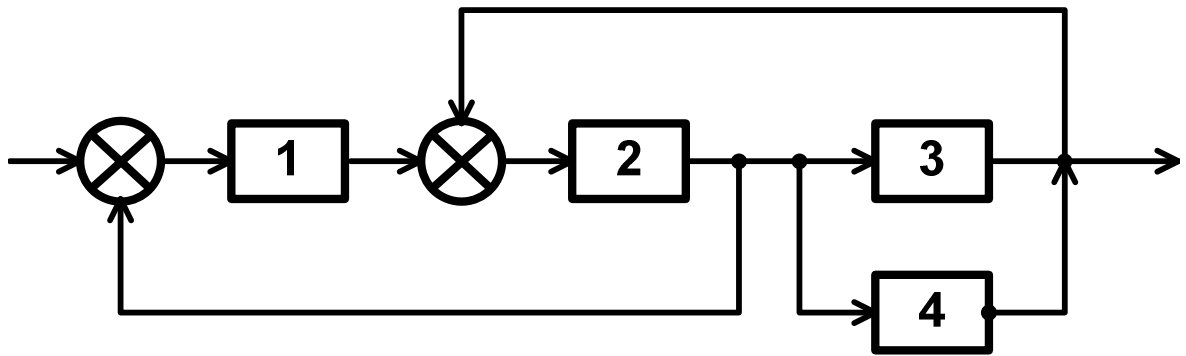


Рис. 58

Изобразим схему разомкнутой САУ, как показано на рис. 59, и для дальнейшего определения передаточной функции осуществим эквивалентное преобразование переносом узла по направлению действия сигнала через блок 3-4 с добавлением в цепь обратной связи звена с передаточной функцией:

$$W_{\text{доб.зв}}(p) = \frac{1}{W_{\text{бл.3-4}}(p)} = \frac{1}{W_3(p) + W_4(p)}. \quad (6)$$

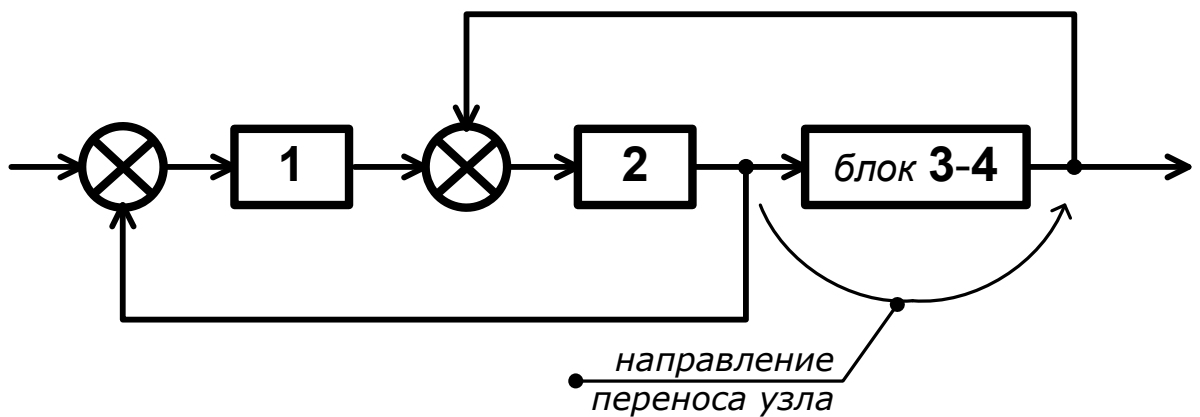


Рис. 59

Схема разомкнутой САУ после переноса узла имеет вид, показанный на рис. 60. Определим передаточную функцию выделенного блока. Блок 2-3-4 представляет собой последовательное соединение звена 2 с блоком 3-4, охваченное единичной обратной связью, следовательно,

$$W_{\text{бл.2-3-4}}(p) = \frac{W_2(p) \cdot W_{\text{бл.3-4}}(p)}{1 + W_2(p) \cdot W_{\text{бл.3-4}}(p)}. \quad (7)$$

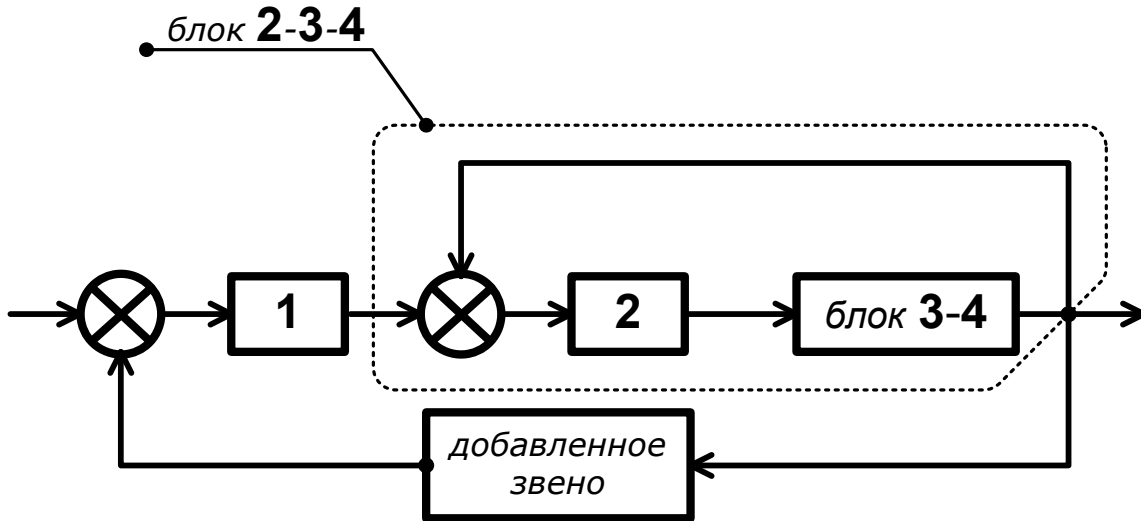


Рис. 60

Перерисуем схему разомкнутой САУ, как показано на рис. 61. Окончательный результат эквивалентных преобразований схемы имеет вид последовательного соединения звена 1 с блоком 2-3-4, с включенным в обратную связь к этому соединению добавленным звеном, следовательно,

$$W_{раз}(p) = \frac{W_1(p) \cdot W_{бл.2-3-4}(p)}{1 + W_1(p) \cdot W_{бл.2-3-4}(p) \cdot W_{доб.зв}(p)}. \quad (8)$$

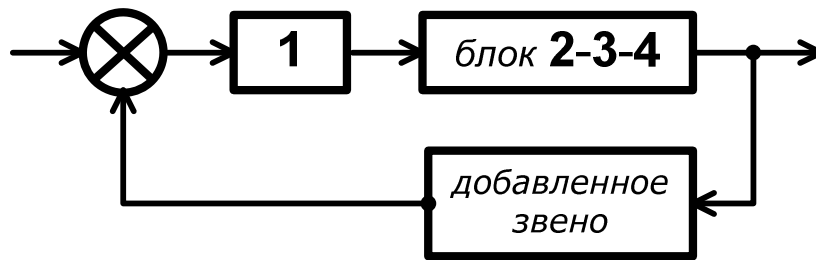


Рис. 61

Окончательный вид передаточной функции разомкнутой САУ получим подстановкой (5), (6) и (7) в (8):

$$W_{раз}(p) = \frac{W_1(p) \cdot \left( \frac{W_2(p) \cdot [W_3(p) + W_4(p)]}{1 + W_2(p) \cdot [W_3(p) + W_4(p)]} \right)}{1 + W_1(p) \cdot \left( \frac{W_2(p) \cdot [W_3(p) + W_4(p)]}{1 + W_2(p) \cdot [W_3(p) + W_4(p)]} \right) \cdot \frac{1}{[W_3(p) + W_4(p)]}}. \quad (9)$$

Передаточная функция замкнутой САУ, т. е. САУ с учетом общей единичной обратной связи (см. рис. 55), с использованием найденной передаточной функции разомкнутой системы, определяется следующим образом:

$$W_{зам}(p) = \frac{W_{раз}(p)}{1 + W_{раз}(p)}.$$

*ПРИМЕРЫ определения передаточной функции САУ по структурной схеме и структуры САУ по передаточной функции.*



#### 4. Частотные характеристики систем автоматического управления

Частотные характеристики описывают вынужденные колебания на выходе САУ, устанавливающиеся в режиме стационарных колебаний после подачи гармонического воздействия на вход САУ.

Если воздействие на вход САУ имеет вид  $x(t) = A_{вх} \cdot \sin(\omega \cdot t)$ , где  $A_{вх}$  – амплитуда, а  $\omega$  – частота этого воздействия, на выходе САУ в установившемся режиме (после завершения переходного процесса и установления стационарного режима колебаний) также будет получена гармоническая функция вида  $y(t) = A_{вых} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$ , отличающаяся от входной амплитудой и фазой. Ослабление или усиление амплитуды выходной величины по сравнению с входной  $A_{вых}/A_{вх}$  и сдвиг фазы  $\varphi$  не являются постоянными для конкретной САУ, а зависят от частоты входного воздействия  $\omega$ : для каждой частоты входного сигнала будет своя амплитуда выходного сигнала и свой сдвиг фазы.

На рис. 62 показаны зависимости  $x(t)$  и  $y(t)$  произвольной САУ в режиме стационарных колебаний. Видно, что управляемая величина САУ  $y(t)$  запаздывает, отстает от  $x(t)$  на величину  $\tau$ . Величину запаздывания определяют между соответствующими точками синусоид, например, между вершинами, или, как показано на рис. 62, между точками пересечения графиков с осью  $t$ . Напомним, что сдвиг фазы  $\varphi$  в градусах определяется по величине задержки  $\tau$  как

$$\varphi = \frac{\tau \cdot 360^\circ}{T},$$

где  $T = 1/\omega$  – период гармонического сигнала. Сдвиг фазы  $\varphi$  имеет знак «минус», если выходная величина САУ  $y(t)$  отстает от входной  $x(t)$ , и знак «плюс», если  $y(t)$  опережает  $x(t)$ .

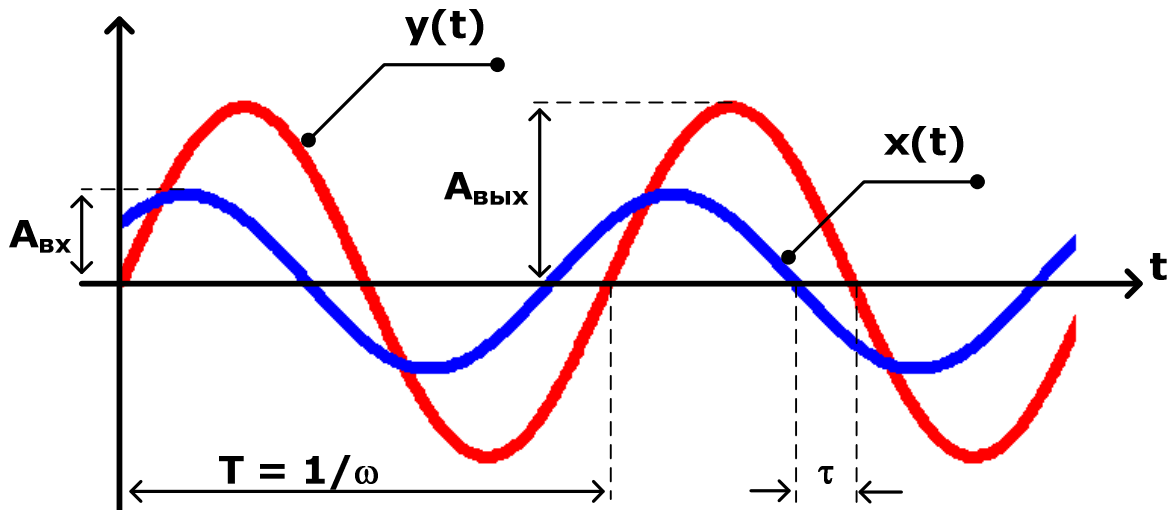


Рис. 62

#### 4.1. Частотная передаточная функция и амплитудно-фазовая характеристика САУ

Для анализа частотных характеристик САУ используют *частотную передаточную функцию* – отношение изображений по Фурье выходной и входной величин САУ при нулевых начальных условиях.

Изображением по Фурье произвольной функции времени  $f(t)$ , называемой *оригиналом*, является ее комплексное изображение вида

$$\Phi(f(t)) = F(j\omega) = \int_0^{\infty} e^{-j\omega t} f(t) dt,$$

где  $t$  – время;  $\omega$  – частота;  $j$  – мнимая единица.

Изображения по Фурье гармонических входной и выходной величин САУ имеют вид:

$$\begin{aligned} \Phi(A_{\text{вх}} \cdot \sin(\omega \cdot t)) &= x(j\omega) = A_{\text{вх}} \cdot e^{j\omega t}, \\ \Phi(A_{\text{вых}} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_{\text{вых}})) &= y(j\omega) = A_{\text{вых}} \cdot e^{j(\omega t + \varphi)}. \end{aligned}$$

Частотная передаточная функция САУ определяется как отношение  $y(j\omega)$  к  $x(j\omega)$ :

$$W(j\omega) = \frac{y(j\omega)}{x(j\omega)} = \frac{A_{\text{вых}} \cdot e^{j(\omega t + \varphi)}}{A_{\text{вх}} \cdot e^{j\omega t}} = \frac{A_{\text{вых}}}{A_{\text{вх}}} \cdot e^{j\varphi}.$$

Поскольку, как уже отмечалось, отношение амплитуд  $A_{\text{вых}}/A_{\text{вх}}$  и сдвиг фазы  $\varphi$  не являются постоянными, а зависят от частоты  $\omega$ , частотную передаточную функцию САУ записывают в виде

$$W(j\omega) = A(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)}, \quad (10)$$

где  $A(\omega)$  – модуль, или амплитуда частотной передаточной функции, представляет собой отношение  $A_{\text{вых}}/A_{\text{вх}}$  для конкретного значения частоты – коэффициент усиления (ослабления) САУ на частоте  $\omega$ ;  $\varphi(\omega)$  – аргумент, или фаза частотной передаточной функции, показывает сдвиг фазы выходной гармоники по отношению к входной на частоте  $\omega$ . Если на какой-то частоте  $\omega$  значение  $A(\omega) > 1$ , то САУ усиливает входной сигнал этой частоты, если  $A(\omega) < 1$ , то САУ сигнал ослабляет.

Частотную передаточную функцию САУ как функцию комплексной переменной можно записать не только в полярной системе координат, но и в декартовой:

$$\begin{aligned} W(j\omega) = A(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)} &\Rightarrow W(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega); \\ A(\omega) &= \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)}; \\ \varphi(\omega) &= \operatorname{arctg} \frac{Q(\omega)}{P(\omega)}, \end{aligned} \quad (11)$$

где  $P(\omega)$  – действительная, а  $jQ(\omega)$  – мнимая часть частотной передаточной функции.

Частотную передаточную функцию легко получить из передаточной функции подстановкой  $j\omega$  вместо  $p$ :

$$W(j\omega) = W(p) \Big|_{p=j\omega}.$$

График частотной передаточной функции в комплексной плоскости, представляющий собой геометрическое место концов векторов (логограф), полученных при различных значениях частоты  $\omega$ , называется *амплитудно-фазовой частотной характеристикой* (АФХ) САУ. АФХ строят для изменения частоты  $\omega$  от 0 до  $+\infty$  (рис. 63).

На графике АФХ, показанном на рис. 63, отмечена точка, соответствующая некоторому значению частоты входного сигнала  $\omega$ . Величину усиления (ослабления) амплитуды входного сигнала этой частоты на выходе САУ определяет длина радиус-вектора  $A(\omega)$ , а величину фазового сдвига – угол  $\varphi(\omega)$ . Величину  $\varphi(\omega)$  отсчитывают *против* часовой стрелки, т. е. в примере на рис. 63 сдвиг фазы  $\varphi(\omega)$  для частоты  $\omega$  будет отрицательным и выходная величина САУ  $y(t)$  будет отставать от входной  $x(t)$ .

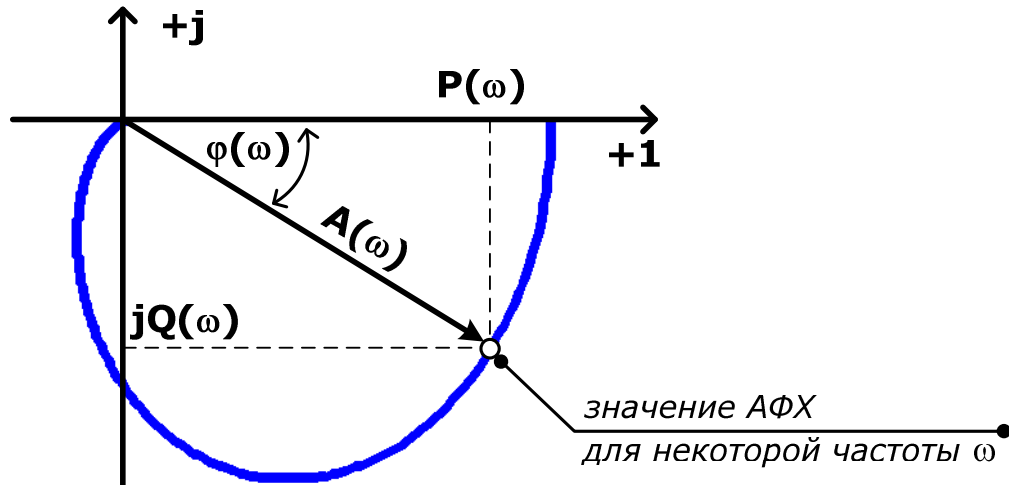


Рис. 63

*ПРИМЕР построения АФХ аperiodического звена первого порядка.*



Рассмотрим пример АФХ конкретной САУ (рис. 64), частотная передаточная функция которой имеет вид:

$$W(j\omega) = W(p)|_{p=j\omega} = \frac{15 \cdot (2 \cdot p^2 + 1)}{(2 \cdot p + 1) \cdot (3 \cdot p + 1)} \Big|_{p=j\omega} = \frac{15 \cdot (2 \cdot (j\omega)^2 + 1)}{(2 \cdot j\omega + 1) \cdot (3 \cdot j\omega + 1)}$$

Точка, отмеченная на АФХ (см. рис. 64), соответствует частоте  $\omega = 0,1$ , т. е. ее координаты в декартовой системе в соответствии с (11) имеют вид:

$$\begin{aligned} W(j\omega) &= P(\omega) + jQ(\omega); \\ P(0,1) &= 12,2; \quad Q(0,1) = -6,48; \\ W(0,1) &= 12,2 - 6,48j. \end{aligned}$$

Усиление сигнала частоты  $\omega = 0,1$  определяется по длине радиус-вектора, проведенного из начала координат в точку АФХ, соответствующую частоте (см. рис. 64), т. е., с учетом (11), амплитуда сигнала заданной частоты на выходе САУ будет в 13,814 раза больше входной амплитуды:

$$\begin{aligned} A(\omega) &= |W(j\omega)| = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)}; \\ A(0,1) &= \sqrt{12,2^2 + (-6,48)^2} = 13,814. \end{aligned}$$



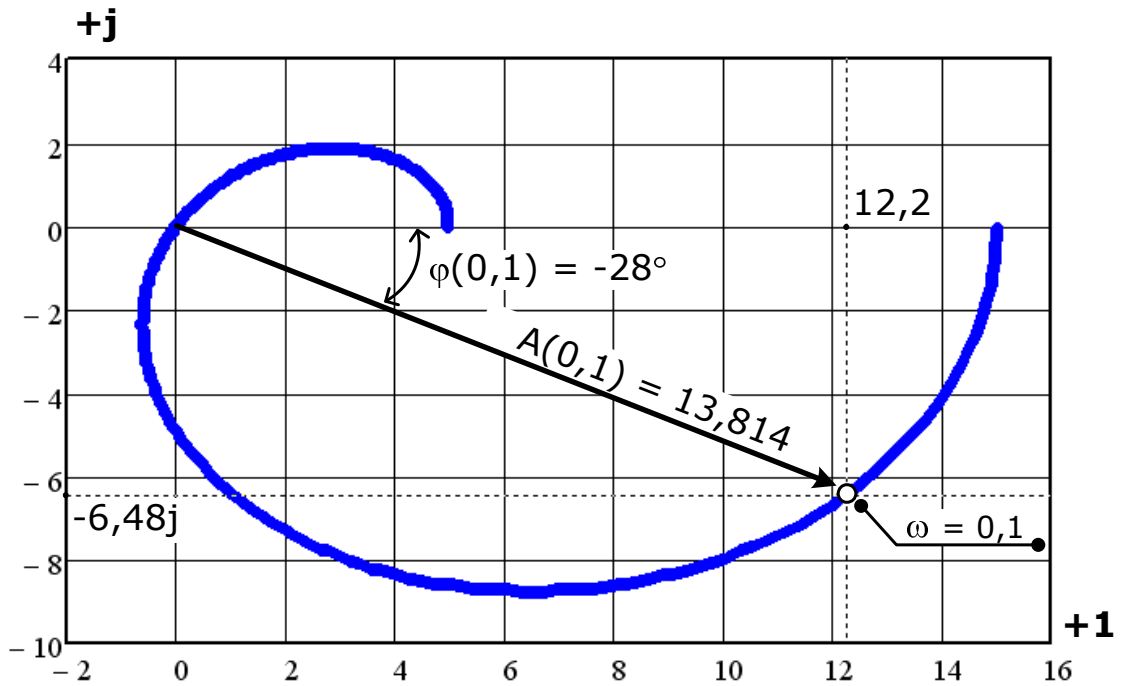


Рис. 64

Сдвиг фазы выходного сигнала частоты  $\omega = 0,1$  относительно входного определяется по углу поворота относительно действительной оси радиус-вектора, проведенного из начала координат в точку АФХ, соответствующую частоте (см. рис. 64). Рассчитанный с использованием (11) сдвиг фазы составляет  $-28^\circ$ , т. е. на выходе САУ сигнал заданной частоты будет отставать от входного на эту величину:

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg}[W(j\omega)] = \operatorname{arctg} \frac{Q(\omega)}{P(\omega)};$$

$$\varphi(0,1) = \operatorname{arctg} \left( \frac{-6,48}{12,2} \right) \cdot \frac{360^\circ}{2\pi} = -28^\circ.$$

Найденный сдвиг фазы соответствует отставанию выходного сигнала по времени на 0,78 с:

$$\tau(\omega) = \frac{\varphi(\omega) \cdot T}{360^\circ} = \frac{\varphi(\omega) \cdot \frac{1}{\omega}}{360^\circ};$$

$$\tau(0,1) = \frac{-28^\circ \cdot 10}{360^\circ} = -0,78 \text{ с.}$$

С учетом найденных выше значений для входного сигнала  $x(t)$  с частотой  $\omega = 0,1$  и амплитудой, равной 1, на выходе САУ  $y(t)$  будет иметь вид, показанный на рис. 65.

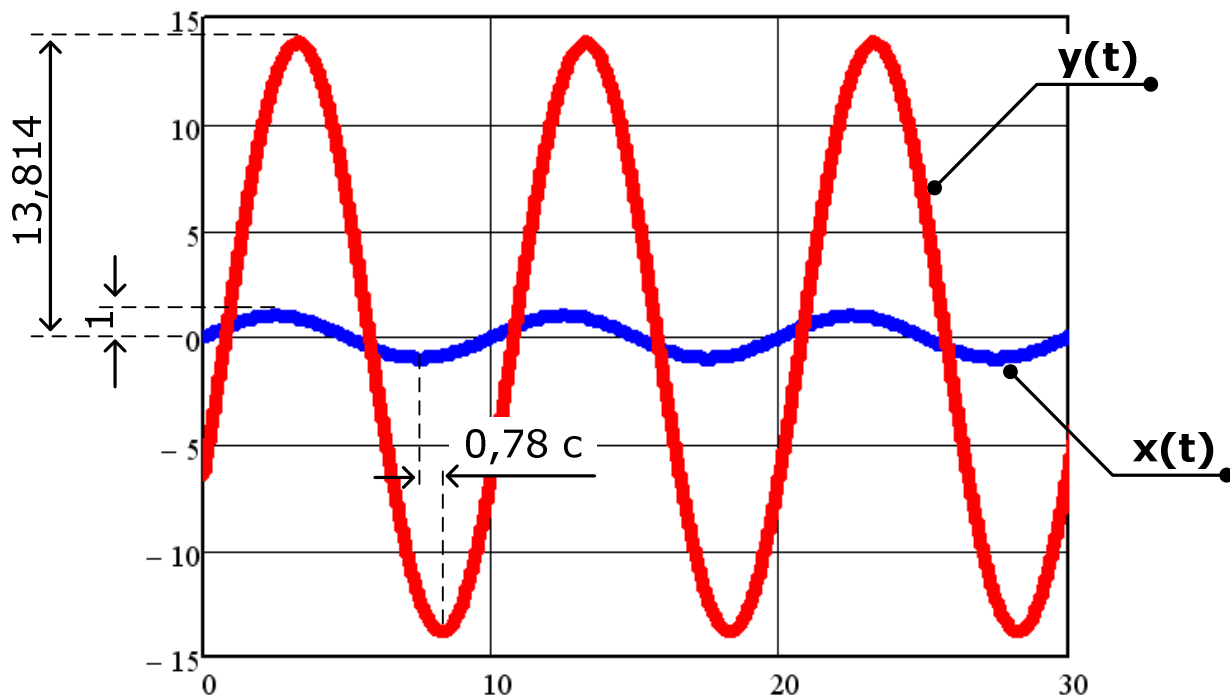


Рис. 65

Для сравнения рассмотрим частотные характеристики той же САУ для частоты  $\omega = 1$  (рис. 66):

$$W(1) = 1,5 + 1,5j; \quad A(1) = \sqrt{1,5^2 + 1,5^2} = 2,121;$$

$$\varphi(1) = \arctg\left(\frac{1,5}{1,5}\right) \cdot \frac{360^\circ}{2\pi} = 45^\circ; \quad \tau(1) = \frac{45^\circ \cdot 1}{360^\circ} = 0,125 \text{ с.}$$

Как следует из найденных выше значений, сигнал частоты  $\omega = 1$  на выходе САУ будет усилен по амплитуде только в 2,121 раза и будет опережать входной по фазе на  $45^\circ$ , что соответствует опережению по времени на 0,125 с. Таким образом, при единичной амплитуде  $x(t)$   $y(t)$  будет иметь вид, показанный на рис. 67.

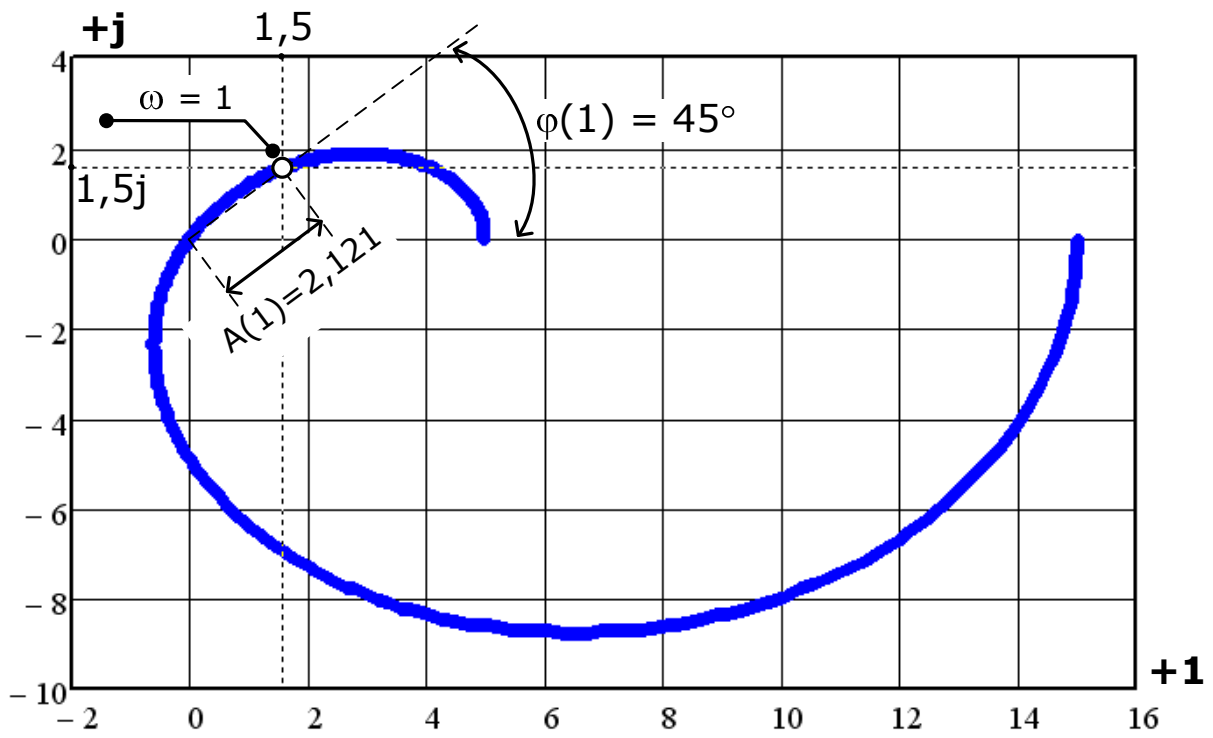


Рис. 66

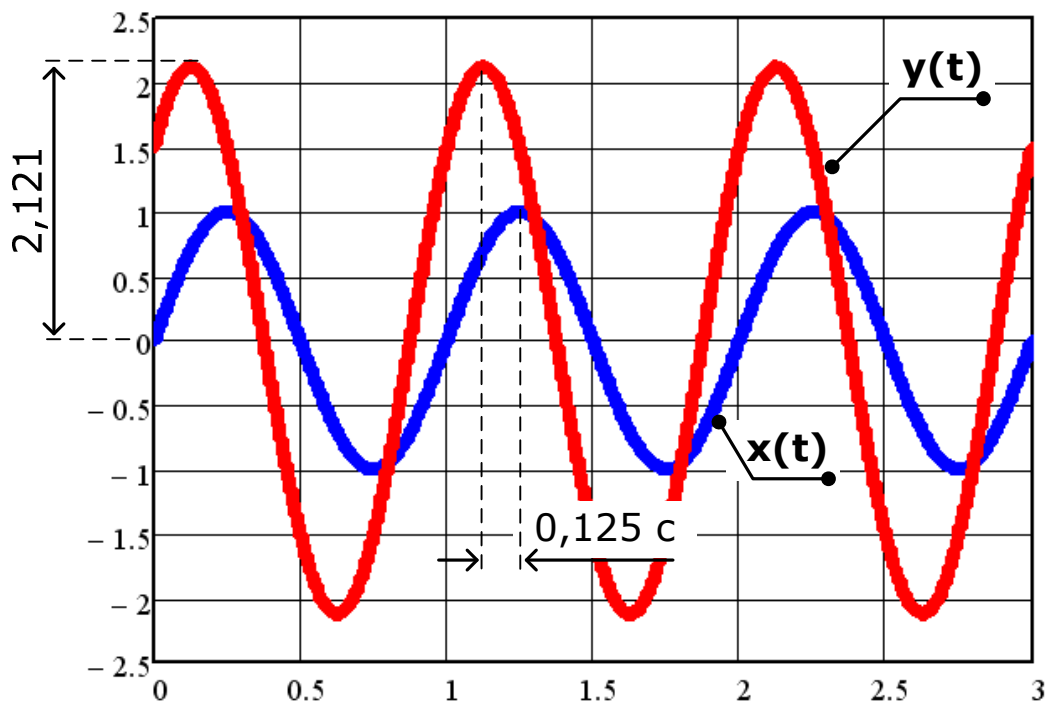


Рис. 67

**Важно** понимать, что опережение по времени выходного сигнала  $y(t)$  по сравнению с входным  $x(t)$  в стационарном режиме колебаний не означает, что сигнал на выходе САУ появляется раньше входного – такого быть не может, система всегда вносит некоторое запаздывание в осуществление управления. Наличие опережения говорит о том, что после завершения переходного процесса на выходе САУ устанавливается режим стационарных колебаний, в котором некоторая точка синусоиды  $y(t)$ , например максимум, как на рис. 67, сдвинута влево относительно такой же точки синусоиды  $x(t)$ .

*ПРИМЕРЫ переходных процессов САУ, заканчивающихся возникновением фазовых сдвигов разного знака в режиме стационарных колебаний.*



## 4.2. Логарифмические частотные характеристики САУ

При всей информативности АФХ, которая одновременно определяет изменения и амплитуды, и фазы выходного сигнала САУ относительно входного для разных значений частот, пользоваться ею не всегда удобно. Для определения частотных характеристик САУ по отношению к сигналу заданной частоты  $\omega$  необходимо найти соответствующую этой частоте точку на графике АФХ и далее рассчитать  $A(\omega)$  и  $\varphi(\omega)$ . Удобнее анализировать отдельно зависимость усиления (ослабления) амплитуды на выходе САУ и сдвига фазы, вносимого САУ, от частоты входного сигнала.

Прологарифмируем левую и правую части выражения частотной передаточной функции:

$$\ln[W(j\omega)] = \ln[A(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)}] = \ln[A(\omega)] + j\varphi(\omega).$$

Логарифм частотной передаточной функции равен комплексному выражению, действительной частью которого является логарифм модуля (амплитуды), а мнимой – фаза.

Для практических целей удобнее пользоваться десятичными логарифмами и строить отдельно *логарифмическую амплитудно-частотную*  $L(\omega) = \lg[A(\omega)]$  и *логарифмическую фазочастотную*  $\varphi(\omega)$  характеристики САУ или звена.

Поскольку логарифмическая амплитудно-частотная характеристика (ЛАЧХ) показывает усиление амплитуды выходного сигнала САУ относительно входного, ее величину принято измерять в *децибелах* – стандартная единица оценки соотношения двух величин. *Бел* представляет собой логарифмическую единицу, соответствующую десятикратному увеличению мощности. Один бел соответствует увеличению мощности в 10 раз, 2 бела – в 100 раз и т. д. Децибел равен одной десятой части бела. Если бы  $A(\omega)$  было отношением мощностей, то перед логарифмом в правой части формулы для перевода белов в децибелы должен был бы стоять множитель 10. Но  $A(\omega)$  представляет собой отношение не мощностей, а амплитуд выходной и входной величин. Увеличение этого отношения в десять раз будет соответствовать увеличению мощностей в сто раз, что соответствует двадцати децибелам. Поэтому в правой части формулы перевода  $L(\omega)$  в децибелы стоит множитель 20. Таким образом, выражение для расчета ЛАЧХ в децибелах имеет вид:

$$L(\omega) = 20 \cdot \lg[A(\omega)]. \quad (12)$$

При построения ЛАЧХ и логарифмической фазочастотной характеристики (ЛФЧХ) по оси абсцисс откладывается частота в логарифмическом масштабе, т. е. нанесенные шкальные отметки соответствуют  $\lg(\omega)$ , но около отметок записывается собственное значение частоты  $\omega$ . Отрезок логарифмической шкалы, соответствующий увеличению частоты в десять раз (от 1 до 10; от 20 до 200 и т. д.), а значения ее логарифма – на единицу, называется *декадой* (рис. 68). По оси ординат откладываются значения ЛАЧХ в децибелах или значения ЛФЧХ в радианах или градусах. Для этой цели на ось ординат наносится равномерный масштаб.

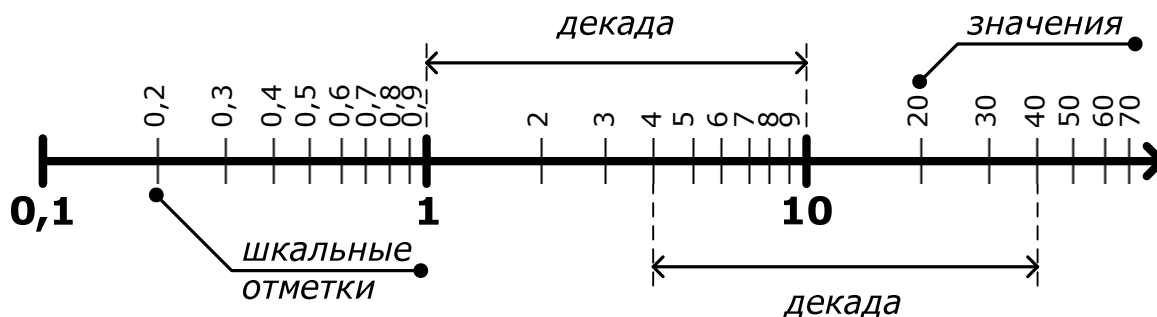


Рис. 68

Рассмотрим логарифмические частотные характеристики САУ, для которой ранее был рассмотрен пример построения АФХ. ЛАЧХ для этой САУ, рассчитанная по формуле (12), имеет вид, приведенный на рис. 69.

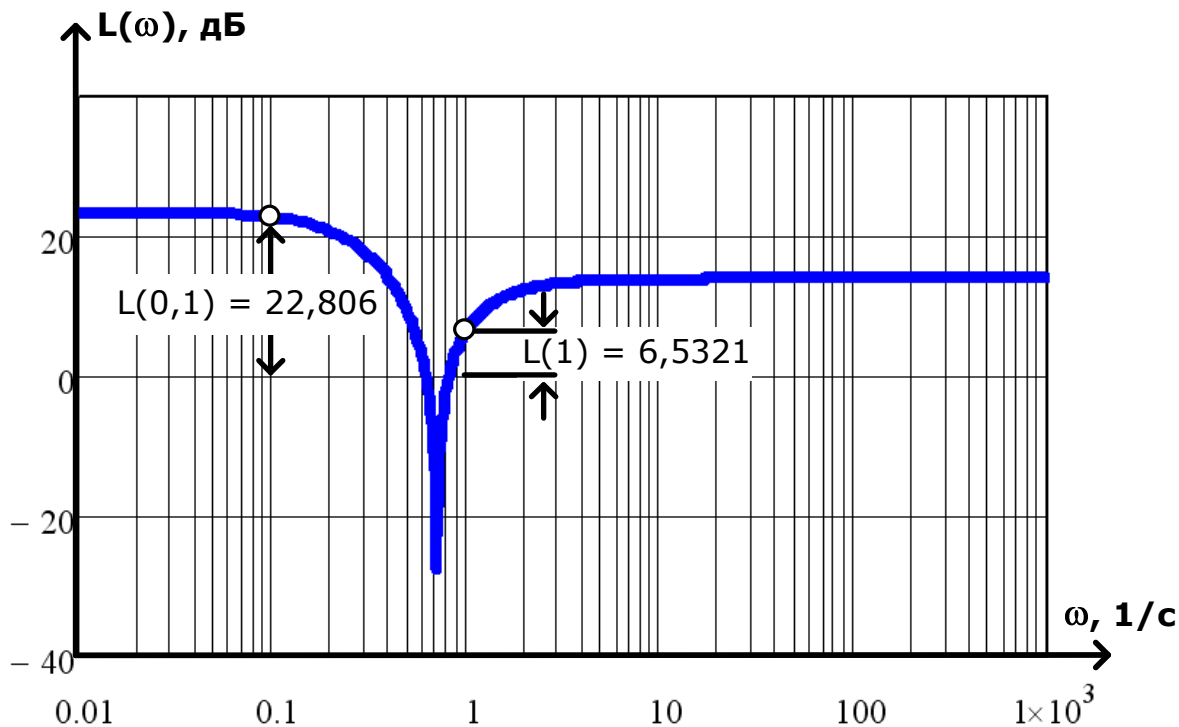


Рис. 69

На графике (см. рис. 69) отмечены точки, соответствующие значениям частоты  $\omega = 0,1$  и  $1$ , для которых значения ЛАЧХ равны, соответственно,

$$L(0,1) = 22,806 \text{ дБ}; \quad L(1) = 6,5321 \text{ дБ}.$$

Определим по значению ЛАЧХ с использованием формулы (12) усиление сигнала частоты  $0,1$ :

$$L(0,1) = 20 \cdot \lg[A(\omega)] = 22,806;$$

$$\lg[A(\omega)] = \frac{22,806}{20} = 1,1403;$$

$$A(\omega) = 10^{1,1403} = 13,813.$$

Полученное значение  $A(\omega)$  практически равно величине, определенной по результатам анализа АФХ рассматриваемой САУ (см. рис. 64), т. е. значение  $L(\omega) = 22,806$  дБ соответствует усилению амплитуды входного сигнала на выходе САУ в 13,813 раз.

Аналогично, для частоты, равной 1 (см. для сравнения рис. 66),

$$L(1) = 20 \cdot \lg[A(\omega)] = 6,5321;$$

$$\lg[A(\omega)] = \frac{6,5321}{20} = 0,3266;$$

$$A(\omega) = 10^{0,3266} = 2,121.$$

ЛФЧХ рассматриваемой САУ, рассчитанная с применением (11) и построенная с использованием логарифмического масштаба для оси частот, имеет вид, приведенный на рис. 70. Как видно, значения  $\varphi(\omega)$  для  $\omega = 0,1$  и 1 совпадают со значениями, полученными ранее по результатам анализа АФХ (см. рис. 64 и рис. 66).

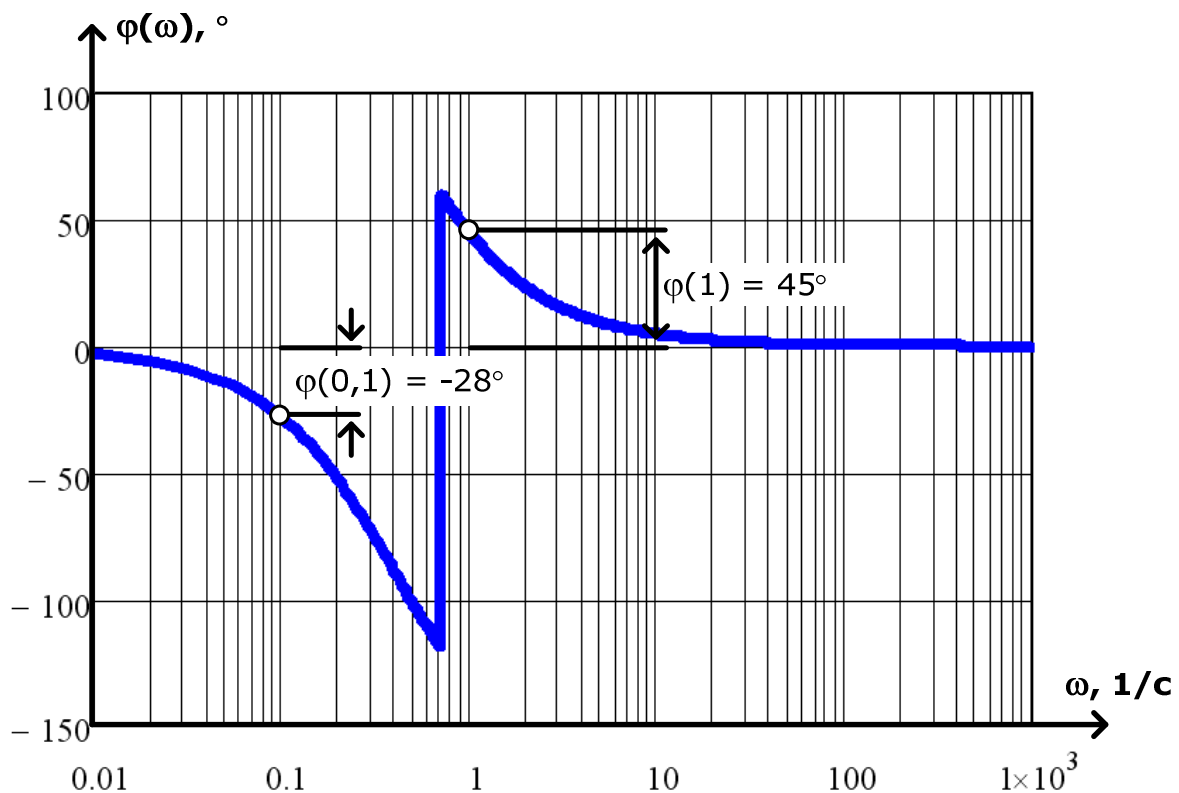


Рис. 70

### 4.3. Асимптотическая ЛАЧХ САУ

В теории автоматического управления широко используется метод анализа САУ на основе *асимптотических ЛАЧХ*, которые представляют собой ломаную линию, приближенно аппроксимирующую точную криволинейную ЛАЧХ, рассчитываемую по формуле (12). Асимптотические ЛАЧХ строятся вручную. С появлением компьютерных программ анализа практическая ценность методики асимптотических ЛАЧХ несколько снизилась, однако она и по сей день остается простейшим инструментом приближенных расчетов для инженера. Кроме того, эта разновидность ЛАЧХ используется в одном из наиболее распространенных методов синтеза регуляторов САУ, который будет рассмотрен в п. 6.

Рассмотрим основы методики построения асимптотической ЛАЧХ на примере апериодического звена первого порядка, частотная передаточная функция которого имеет вид:

$$W(j\omega) = W(p)\Big|_{p=j\omega} = \frac{k}{(T \cdot p + 1)}\Big|_{p=j\omega} = \frac{k}{(T \cdot j\omega + 1)}.$$

Представим частотную передаточную функцию апериодического звена первого порядка в виде суммы действительной и мнимой частей. Для этого необходимо избавиться от комплексной формы знаменателя дроби умножением числителя и знаменателя на выражение, комплексно сопряженное знаменателю. Учитывая, что  $j^2 = -1$ , получим:

$$\begin{aligned} W(j\omega) &= P(\omega) + jQ(\omega); \\ \frac{k}{T \cdot j\omega + 1} &= \frac{k(1 - T \cdot j\omega)}{(1 + T \cdot j\omega)(1 - T \cdot j\omega)} = \frac{k - k \cdot T \cdot j\omega}{1^2 - (T \cdot j\omega)^2} = \\ &= \frac{k}{T^2\omega^2 + 1} - j \cdot \frac{k \cdot T \cdot \omega}{T^2\omega^2 + 1}; \\ P(\omega) &= \frac{k}{T^2\omega^2 + 1}; \quad Q(\omega) = \frac{k \cdot T \cdot \omega}{T^2\omega^2 + 1}. \end{aligned}$$

Получим с использованием формул (11) и (12) формулу для расчета ЛАЧХ апериодического звена первого порядка:

$$L(\omega) = 20 \cdot \lg[A(\omega)] = 20 \cdot \lg\left[\sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)}\right];$$



$$\begin{aligned}
L(\omega) &= 20 \cdot \lg \left[ \sqrt{\left(\frac{k}{T^2 \omega^2 + 1}\right)^2 + \left(\frac{k \cdot T \cdot \omega}{T^2 \omega^2 + 1}\right)^2} \right] = \\
&= 20 \cdot \lg \left[ \sqrt{\frac{k^2 + k^2 T^2 \omega^2}{(T^2 \omega^2 + 1)^2}} \right] = 20 \cdot \lg \left[ \sqrt{\frac{k^2 (T^2 \omega^2 + 1)}{(T^2 \omega^2 + 1)^2}} \right]; \\
L(\omega) &= 20 \cdot \lg \left[ \frac{k}{\sqrt{T^2 \omega^2 + 1}} \right]. \tag{13}
\end{aligned}$$

Величина, обратная постоянной времени звена  $\omega_c = 1/T$ , называется *частотой среза* звена. Рассмотрим ЛАЧХ апериодического звена первого порядка в частотных диапазонах до и после частоты среза.

В *первом частотном диапазоне* при  $\omega < \omega_c$ , т. е. для  $\omega < 1/T$ , в подкоренном выражении в знаменателе формулы (13) первое слагаемое оказывается *меньше* 1:  $T^2 \omega^2 < 1$ , и, следовательно, все подкоренное выражение можно приближенно считать равным 1:

$$T^2 \omega^2 + 1 \approx 1,$$

а ЛАЧХ, соответственно,

$$L(\omega) \approx 20 \cdot \lg \left[ \frac{k}{\sqrt{1}} \right] = 20 \cdot \lg[k]. \tag{14}$$

Из выражения (14) следует, что в частотном диапазоне до частоты среза ЛАЧХ апериодического звена первого порядка можно приближенно считать постоянной. При построении соответствующий фрагмент приближенной ЛАЧХ будет иметь вид прямой линии, параллельной оси частот, проведенной на высоте  $20 \cdot \lg[k]$ .

Во *втором частотном диапазоне* при  $\omega > \omega_c$ , т. е. для  $\omega > 1/T$ , в подкоренном выражении в знаменателе формулы (13) первое слагаемое оказывается *больше* 1:  $T^2 \omega^2 > 1$ , и, следовательно, все подкоренное выражение можно приближенно считать равным  $T^2 \omega^2$ :

$$T^2 \omega^2 + 1 \approx T^2 \omega^2,$$

а ЛАЧХ, соответственно,

$$L(\omega) \approx 20 \cdot \lg \left[ \frac{k}{\sqrt{T^2 \omega^2}} \right] = 20 \cdot \lg \left[ \frac{k}{T \cdot \omega} \right] = 20 \cdot \lg[k] - 20 \cdot \lg[T \cdot \omega]. \tag{15}$$

Второе слагаемое в выражении (15) при каждом десятикратном увеличении частоты  $\omega$  будет возрастать на 20 дБ:

$$20 \cdot \lg[T \cdot 10 \cdot \omega] = 20 \cdot \lg[10] + 20 \cdot \lg[T \cdot \omega] = 20 + 20 \cdot \lg[T \cdot \omega],$$

следовательно, с учетом знака «минус» перед слагаемым  $20 \cdot \lg[T \cdot \omega]$ , абсолютное значение  $L(\omega)$ , начиная с частоты среза на каждой декаде, т. е. при каждом десятикратном увеличении частоты, *уменьшается* на 20 дБ и выражение для расчета ЛАЧХ в диапазоне после  $\omega_c$  можно записать как

$$L(\omega) \approx 20 \cdot \lg[k] - 20 \frac{\text{дБ}}{\text{дек}}.$$

Таким образом, ЛАЧХ аperiodического звена первого порядка можно приближенно аппроксимировать двумя прямыми линиями: в частотном диапазоне до частоты среза – прямой с нулевым наклоном, т. е. параллельной оси частот, а в частотном диапазоне после частоты среза – прямой с наклоном  $-20$  дБ/дек. Такая приближенная характеристика и называется *асимптотической ЛАЧХ*.

Для примера на рис. 71 толстой линией показана асимптотическая ЛАЧХ, а тонкой линией – рассчитанная по формуле (13) точная ЛАЧХ аperiodического звена первого порядка с коэффициентом статического преобразования  $k = 20$  и постоянной времени  $T = 0,5$  с.

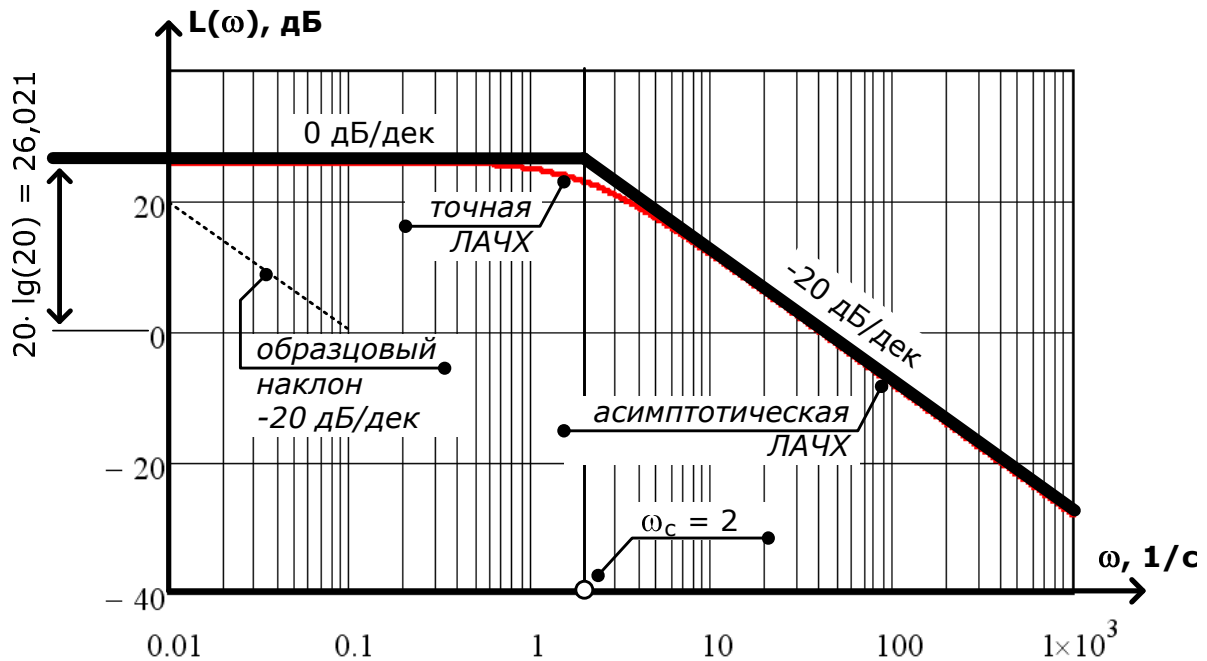


Рис. 71

Как видно из рис. 71, наибольшую погрешность асимптотическая аппроксимация ЛАЧХ имеет в области частоты среза, но даже в этой точке она не превышает 3 дБ, поэтому во многих практических расчетах ограничиваются построением асимптотической ЛАЧХ. Нетрудно убедиться, что в диапазоне частот больше частоты среза ( $\omega > 2$ ) наклон асимптоты действительно соответствует  $-20$  дБ/дек.

На рис. 72 показано, что если от точки излома графика, соответствующей  $\omega_c = 2$ , отложить вправо по горизонтали отрезок, равный декаде, и вниз от полученной точки – отрезок, равный 20 дБ, то мы получим точку на графике, соответствующую  $L(20)$ . Таким образом, значение  $L(\omega)$ , начиная с частоты среза, за одну декаду действительно убывает на 20 дБ.

Для простоты построений можно построить образцовый наклон  $-20$  дБ/дек, проведя линию из точки, соответствующей 20 дБ на вертикальной оси, до нулевого значения (до горизонтальной оси) на частоте, в 10 раз большей, чем начало координат. На рис. 71 и рис. 72 этот наклон показан пунктирной линией, построенной на декаде от начала координат  $\omega = 0,01$  до  $\omega = 0,1$ . При построении графика асимптотической ЛАЧХ аperiodического звена первого порядка следует из точки, соответствующей частоте среза, провести линию, параллельную образцовому наклону  $-20$  дБ/дек [2, 3, 7, 11, 14].

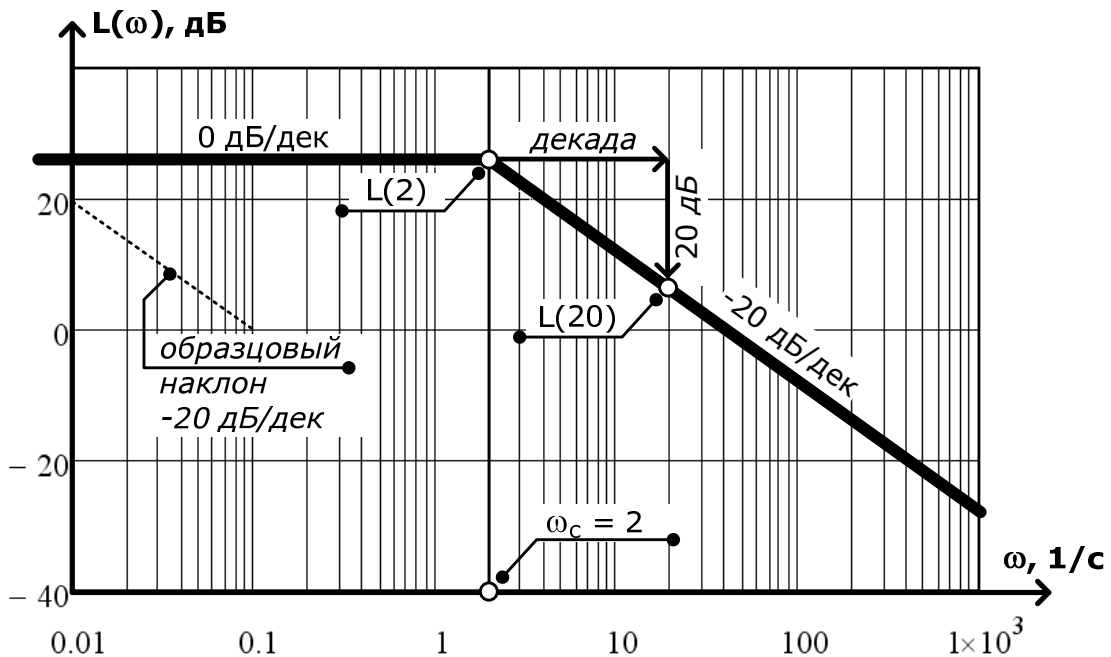


Рис. 72

На основании аналогичных рассуждений можно построить асимптотические ЛАЧХ всех типовых звеньев САУ.

Для построения *асимптотических ЛАЧХ последовательных соединений типовых звеньев САУ* пользуются следующими правилами [2, 7]:

1. Для всех звеньев первого и второго порядков определяются значения *частот сопряжения*, соответствующих частотам среза отдельных звеньев, т. е. величин, обратных постоянным времени звеньев:  $\omega_{c_i} = \frac{1}{T_i}$ .

Значения частот наносятся на логарифмическую ось.

**Важно!** Обратите внимание, что у звеньев второго порядка частота среза, и, соответственно, частота сопряжения одна. Определение частот среза типовых звеньев приведено в графе «Примечания» прил. 1.

2. В частотном диапазоне до первой, минимальной частоты сопряжения из числа рассчитанных в п. 1, т. е. для  $\omega < \omega_{c1}$  проводится первая асимптота. Для ее проведения необходимо определить два параметра: наклон и высоту проведения. Наклон первой асимптоты равен  $-20 \cdot \nu$  дБ/дек, где  $\nu$  – *степень астатизма системы*. При определении наклона первой асимптоты могут иметь место три случая:

– в составе последовательного соединения есть *идеальные интегрирующие звенья*, одно или несколько – в этом случае величина  $\nu$  равна числу идеальных интегрирующих звеньев, взятому со знаком «плюс», т. е. наклон составляет  $-20 \cdot \nu$  дБ/дек;

– в состав последовательного соединения входят *идеальные дифференцирующие звенья*, одно или несколько – в этом случае величина  $\nu$  равна числу идеальных дифференцирующих звеньев, взятому со знаком «минус», т. е. наклон составляет  $+20 \cdot \nu$  дБ/дек;

– если в состав системы не входят ни идеальные интегрирующие, ни идеальные дифференцирующие звенья,  $\nu = 0$  и асимптота в первом частотном диапазоне имеет нулевой наклон (параллельна оси частот).

При определении высоты проведения первой асимптоты могут иметь место два случая:

– если частота  $\omega = 1$  входит в первый частотный диапазон  $\omega < \omega_{c1}$ , т. е. если минимальная частота сопряжения из числа рассчитанных в п. 1  $\omega_{c1} > 1$ , то высота проведения первой асимптоты на частоте  $\omega = 1$  рассчитывается по формуле  $L(1) = 20 \cdot \lg[k]$ , где  $k$  – коэффициент статического преобразования системы;

– если частота  $\omega = 1$  не входит в рассматриваемый диапазон, высота проведения асимптоты определяется на любой произвольной частоте  $\omega < \omega_{c1}$  по формуле  $L(\omega) = 20 \cdot \lg[k/\omega^v]$ ;

**3.** В остальных частотных диапазонах угол наклона асимптотической ЛАЧХ меняется следующим образом:

- для апериодического звена первого порядка угол наклона изменяется на  $-20$  дБ/дек;
- для колебательного звена – на  $-40$  дБ/дек;
- для дифференцирующего звена первого порядка – на  $+20$  дБ/дек;
- для дифференцирующего звена второго порядка – на  $+40$  дБ/дек.

**Важно!** Указанные величины изменения наклона при построении графика алгебраически суммируются со значением предшествующего наклона. Например, если в первом, начальном диапазоне наклон характеристики составлял  $-20$  дБ/дек, а первая частота сопряжения соответствует дифференцирующему звену первого порядка, то наклон в диапазоне от первой до второй частоты сопряжения составит  $-20 + 20 = 0$  дБ/дек.

Рассмотрим пример построения асимптотической ЛАЧХ САУ, приведенной эквивалентными преобразованиями к виду последовательного соединения звеньев. Пусть передаточная функция САУ имеет вид

$$W(p) = 100 \cdot \frac{1}{p} \cdot (p+1) \cdot \frac{1}{(0,1p+1)} \cdot \frac{1}{(0,025p+1)},$$

т. е. система представляет собой последовательное соединение идеального интегрирующего звена ( $v = 1$ ), дифференцирующего звена первого порядка с постоянной времени  $T_1 = 1$  с и двух апериодических звеньев первого порядка с постоянными времени  $T_2 = 0,1$  с и  $T_3 = 0,025$  с соответственно. Коэффициент статического преобразования системы  $k$  равен 100.

Рассчитаем частоты сопряжения асимптотической ЛАЧХ:

- $\omega_{c1} = 1/T_1 = 1 \text{ с}^{-1}$ ;
- $\omega_{c2} = 1/T_2 = 1/0,1 = 10 \text{ с}^{-1}$ ;
- $\omega_{c3} = 1/T_3 = 1/0,025 = 40 \text{ с}^{-1}$ .

Определим наклон проведения первой асимптоты в частотном диапазоне до первой частоты сопряжения:  $-20 \cdot v = -20 \cdot 1 = -20$  дБ/дек.

Определим высоту проведения первой асимптоты для любой частоты, меньшей первой частоты сопряжения  $\omega_{c1} = 1$ , например, для частоты  $\omega = 0,1 \text{ с}^{-1}$ :

$$L(0,1) = 20 \cdot \lg \left[ \frac{k}{\omega^v} \right] = 20 \cdot \lg \left[ \frac{100}{0,1^1} \right] = 20 \cdot \lg[1000] = 60 \text{ дБ.}$$

В остальных частотных диапазонах угол наклона асимптоты будет определяться типом звена. Частота сопряжения  $\omega_{c1}$  соответствует дифференцирующему звену, которое *изменяет* наклон ЛАЧХ на +20 дБ/дек, следовательно, с учетом наклона первой асимптоты, в диапазоне от первой до второй частоты сопряжения угол наклона ЛАЧХ составит  $-20 + 20 = 0$  дБ/дек. Вторая и третья частоты сопряжения соответствуют апериодическим звеньям, которые *изменяют* наклон на -20 дБ/дек, следовательно, наклон ЛАЧХ в третьем и четвертом диапазоне частот составит  $0 - 20 = -20$  дБ/дек и  $-20 - 20 = -40$  дБ/дек соответственно.

Результат построения асимптотической ЛАЧХ приведен на рис. 73.

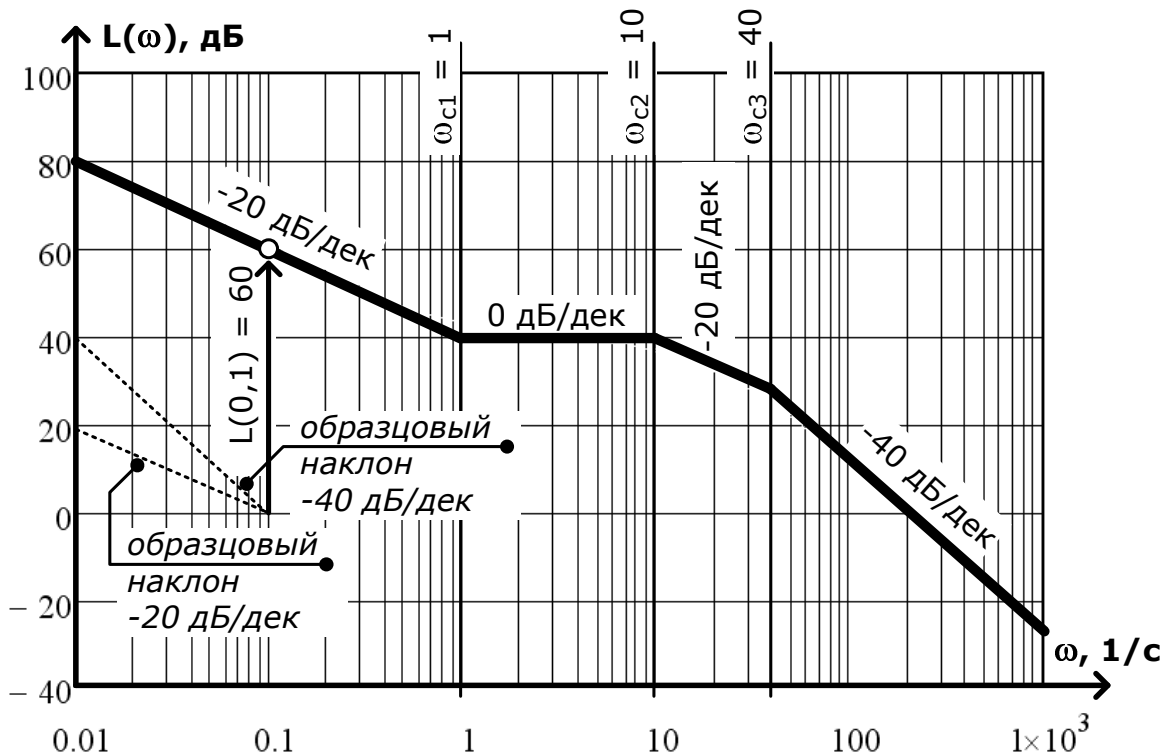


Рис. 73

Для проведения асимптот использовались образцовые наклоны, построенные в координатных осях графика (показаны на рис. 73 пунктиром). Асимптоты строят параллельно образцовому наклону, проводя их от точки пересечения предыдущей асимптоты с вертикалью частоты сопряжения до пересечения с вертикалью следующей частоты сопряжения.

Обратите внимание, что первая, минимальная частота сопряжения для рассматриваемой САУ составила  $\omega_{c1} = 1 \text{ с}^{-1}$ , следовательно, высоту проведения первой асимптоты можно было рассчитать и для этой частоты, т. е. провести первую асимптоту с найденным наклоном до точки

$$L(1) = 20 \cdot \lg[k] = 20 \cdot \lg[100] = 20 \cdot \lg[100] = 40 \text{ дБ.}$$

По рис. 73 видно, что первая асимптота на частоте  $\omega = 1$  действительно доходит до этой точки.

Точная ЛАЧХ рассматриваемой САУ, рассчитанная по формуле (12), показана на рис. 74. Как видно (см. рис. 73), приближенная асимптотическая ЛАЧХ достаточно точно описывает реальную характеристику САУ.

*ПРИМЕРЫ асимптотических ЛАЧХ других САУ.*


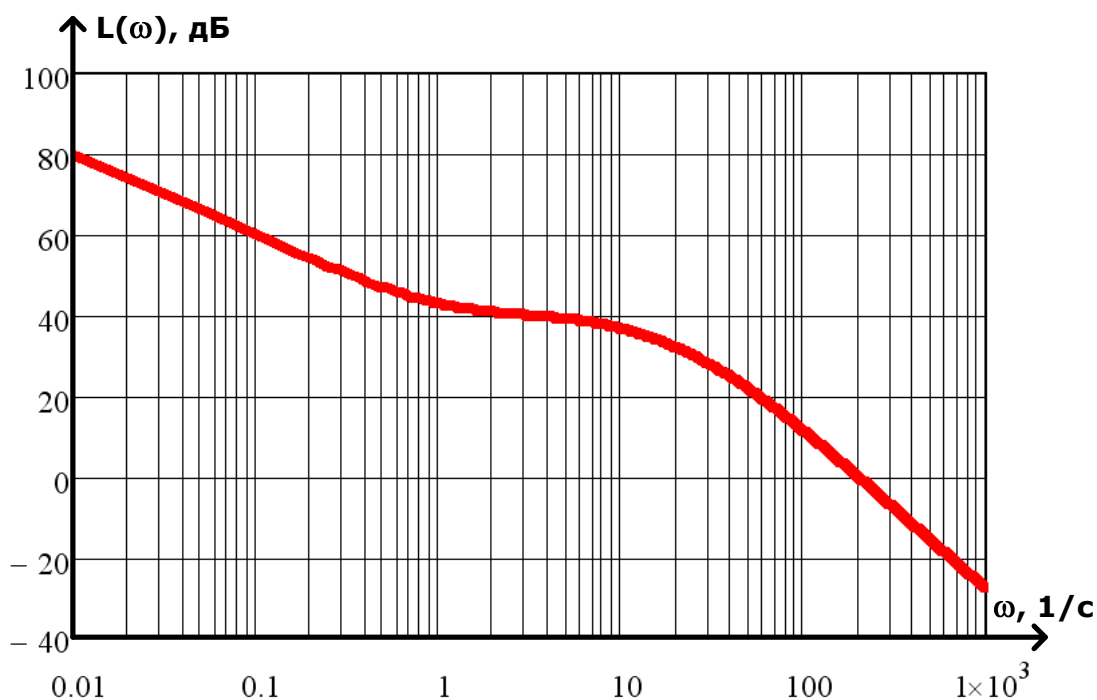



Рис. 74

## 5. Устойчивость систем автоматического управления

*Устойчивостью* называют свойство системы самостоятельно возвращаться в состояние равновесия после того, как внешнее входное воздействие вывело ее из состояния равновесия. Равновесием называют со-

стояние системы, когда управляемая величина  $y(t)$  постоянна и все ее производные равны нулю. Исследование устойчивости является одной из основных задач в теории автоматического управления.

Как уже отмечалось, процесс управления определяется переходным процессом – законом изменения  $y(t)$  после изменения  $x(t)$ . Переходной процесс САУ можно получить решением дифференциального уравнения САУ (1). Это решение может быть представлено суммой двух составляющих, вынужденной  $y_в(t)$  и переходной  $y_n(t)$ :

$$y(t) = y_в(t) + y_n(t),$$

где  $y_в(t)$  определяется свойствами системы и видом входного воздействия. САУ будет устойчивой, если с течением времени переходная составляющая будет стремиться к нулю:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_n(t) \rightarrow 0.$$

Однозначно судить об устойчивости системы можно по виду ее переходного процесса: затухающий переходной процесс (сходящийся к некоторой постоянной) соответствует устойчивой системе, расходящийся (стремящийся в бесконечность) – неустойчивой.

*ПРИМЕРЫ переходных процессов неустойчивых САУ.*



При исследовании устойчивости САУ решают следующие задачи:

- является ли САУ устойчивой при заданных параметрах;
- определение допустимых изменений параметров САУ без нарушения устойчивости;
- поиск параметров и/или структуры САУ, при которых она может стать устойчивой.

### 5.1. Теорема Ляпунова

Необходимое и достаточное *условие устойчивости* линейных САУ формулируется в *теореме Ляпунова*:

- если характеристическое уравнение САУ имеет все корни с отрицательной действительной частью, то система устойчива;
- если хотя бы один корень имеет положительную действительную часть, то САУ неустойчива.



Характеристическое уравнение САУ записывается по виду дифференциального уравнения или передаточной функции системы. Так, из уравнения (1) после преобразования Лапласа мы имеем (см. вывод (2)):

$$y(p)(a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0) = x(p)(b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_0).$$

Полином в левой части равенства вида

$$A(p) = (a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0)$$

называется *характеристическим*. Приравнение нулю характеристического полинома дает *характеристическое уравнение* системы или звена:

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0 = 0. \quad (16)$$

Уравнение в виде (16) может быть также записано по виду передаточной функции САУ приравнением знаменателя к нулю:

$$W(p) = \frac{y(p)}{x(p)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0} = \frac{B(p)}{A(p)};$$

$$A(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0 = 0. \quad (17)$$

Корни характеристического уравнения, количество которых соответствует порядку характеристического уравнения САУ, могут быть действительными, комплексными и чисто мнимыми. Их можно представить в виде точек на комплексной плоскости величины  $p$ . Согласно теореме, для устойчивости системы необходимо и достаточно, чтобы все корни лежали в левой полуплоскости. Пример одного из возможных распределений в комплексной плоскости корней характеристического уравнения *устойчивой* САУ 5-го порядка показан на рис. 75.

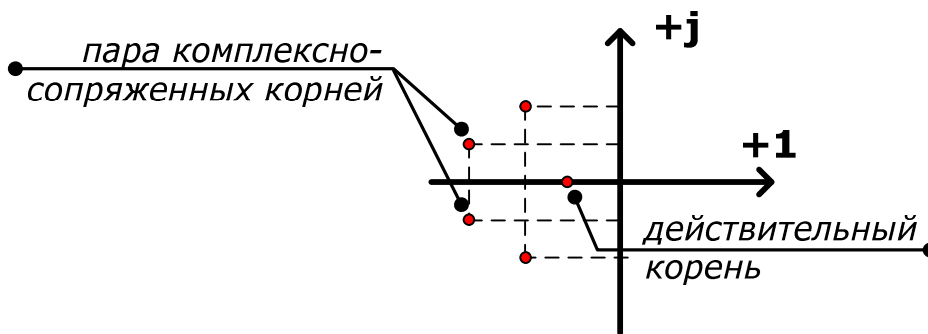


Рис. 75

Если хотя бы один из корней окажется справа от мнимой оси, то система будет неустойчивой. Примеры возможных распределений в комплексной плоскости корней характеристического уравнения *неустойчивой* САУ 5-го порядка показаны на рис. 76.

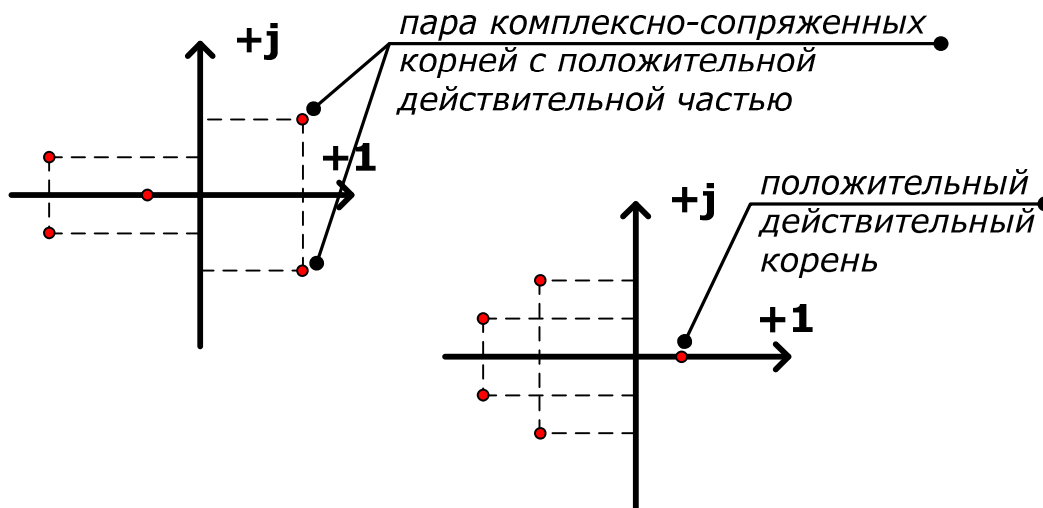


Рис. 76

В случае если среди корней характеристического уравнения имеется нулевой корень или пара сопряженных чисто мнимых корней, расположенных на мнимой оси, система оказывается на границе устойчивости. Примеры возможных распределений в комплексной плоскости корней характеристического уравнения САУ 5-го порядка, *находящейся на границе устойчивости*, приведены на рис. 77.

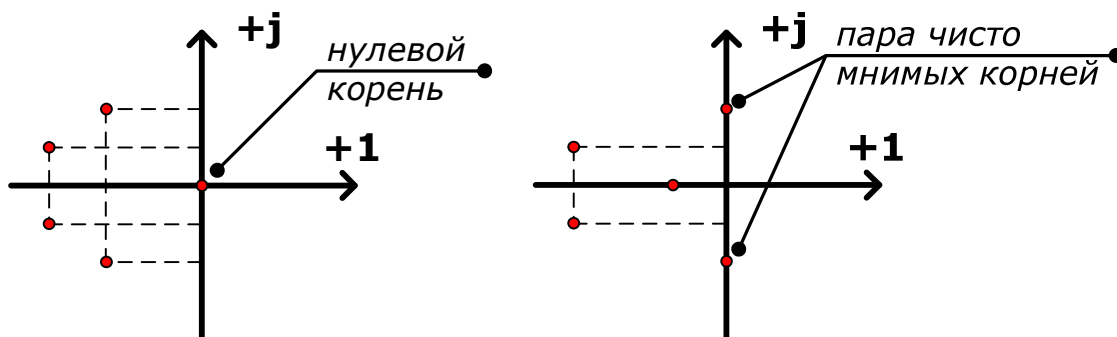


Рис. 77

Системы, у которых имеется одна пара мнимых корней, могут совершать незатухающие колебания (автоколебания). Такие системы практически неработоспособны [2, 3, 10, 11].

Рассмотрим примеры оценки устойчивости по теореме Ляпунова и связь результатов оценки с переходной характеристикой САУ.

Пусть САУ 3-го порядка имеет характеристическое уравнение вида

$$1,2 \cdot p^3 + 5,5 \cdot p^2 + 5,3 \cdot p + 3 = 0.$$

На рис. 78 показан результат решения этого уравнения, полученный с использованием математического пакета Mathcad. Множество корней уравнения представлено в круглых скобках. Как видно, один из корней уравнения оказался *отрицательным* действительным числом  $-3,55$ , а два других – комплексными сопряженными числами с *отрицательной* действительной частью  $-0,525$ :  $(-0,525 - 0,657j)$  и  $(-0,525 + 0,657j)$ .

$$1,2 \cdot p^3 + 5,5 \cdot p^2 + 5,3 \cdot p + 3,0 \quad \left| \begin{array}{l} \text{solve} \\ \text{float}, 3 \end{array} \right. \rightarrow \left( \begin{array}{l} -3,53 \\ -0,525 - 0,657j \\ -0,525 + 0,657j \end{array} \right)$$

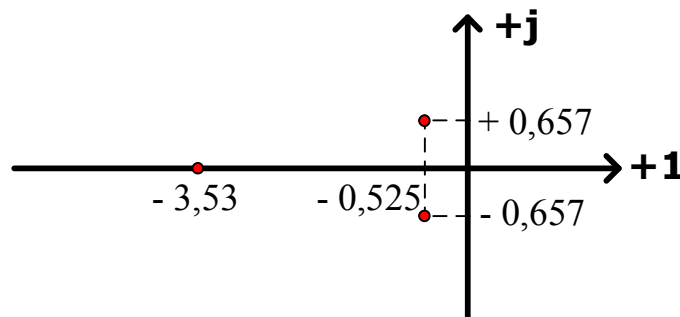


Рис. 78

Расположение найденных корней в комплексной плоскости свидетельствует об устойчивости рассматриваемой САУ (см. рис. 78) – корни располагаются в левой полуплоскости комплексной плоскости, что по теореме Ляпунова является достаточным условием устойчивости. Переходная характеристика САУ, полученная с применением специального программного обеспечения моделирования систем по передаточным функциям VisSim, показана на рис. 79. Ее форма подтверждает результат анализа устойчивости по Ляпунову: процесс «сходится» к новому постоянному значению за время, приближенно равное 12 с.

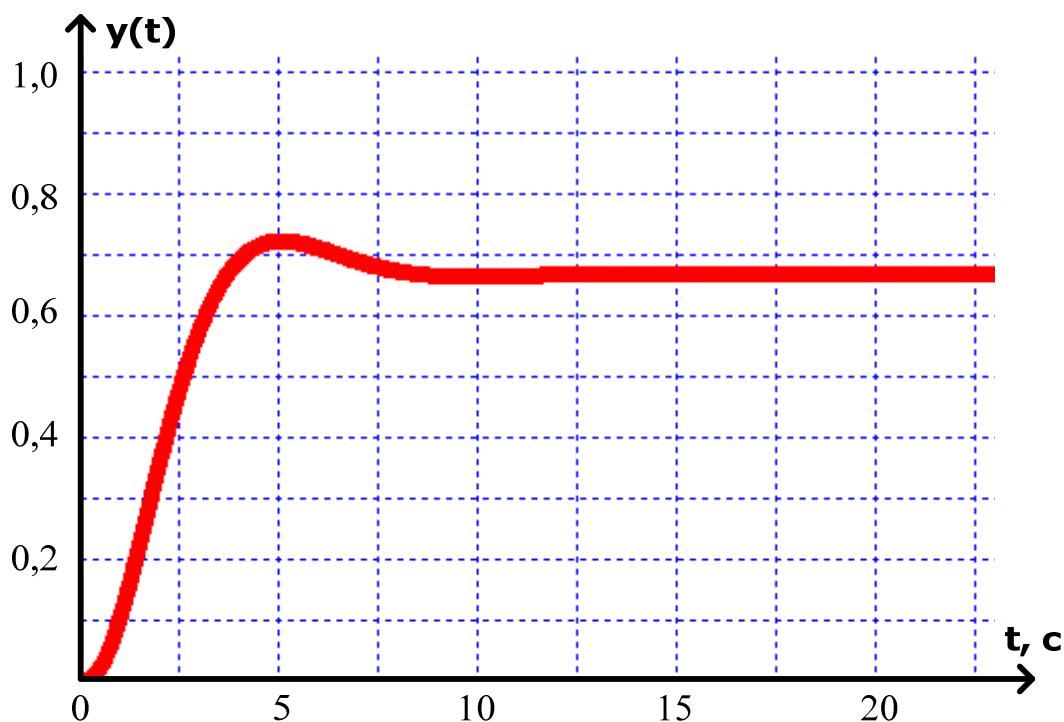


Рис. 79

Аналогично рассмотрим другую САУ 3-го порядка, с характеристическим уравнением вида

$$1,2 \cdot p^3 + 5,5 \cdot p^2 + 5,3 \cdot p + 201 = 0.$$

На рис. 80 показан результат решения этого уравнения, полученный с использованием математического пакета Mathcad. Множество корней уравнения представлено в круглых скобках. Как видно, один из корней уравнения оказался *отрицательным* действительным числом  $-7,2$ , а два других – комплексными сопряженными числами с *положительной* действительной частью 1,31:  $(1,31 + 4,64j)$  и  $(1,31 - 4,64j)$ , т. е. расположение корней в комплексной плоскости свидетельствует по теореме Ляпунова о неустойчивости САУ.

Переходная характеристика рассматриваемой САУ, показанная на рис. 81, подтверждает результат анализа устойчивости по Ляпунову: процесс «расходится», т. е. система не может самостоятельно вернуться к равновесию после того, как ступенчатое воздействие на входе вывело ее из начального состояния равновесия.

$$1,2 \cdot p^3 + 5,5 \cdot p^2 + 5,3 \cdot p + 201,0 \left| \begin{array}{l} \text{solve} \\ \text{float}, 3 \end{array} \right. \rightarrow \begin{pmatrix} -7,2 \\ 1,31 + 4,64j \\ 1,31 - 4,64j \end{pmatrix}$$

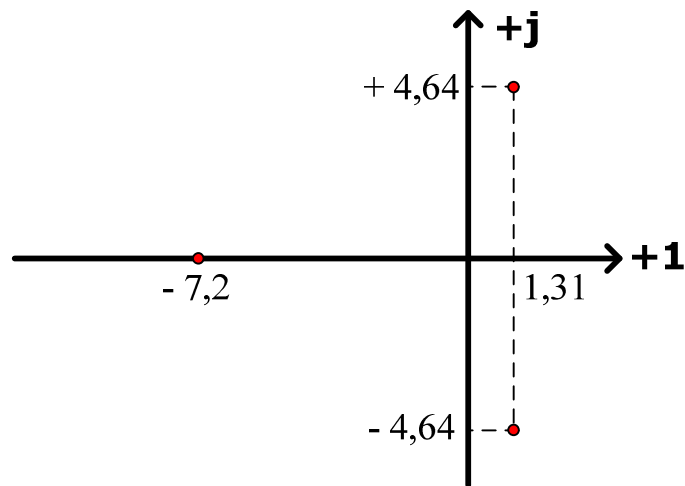


Рис. 80

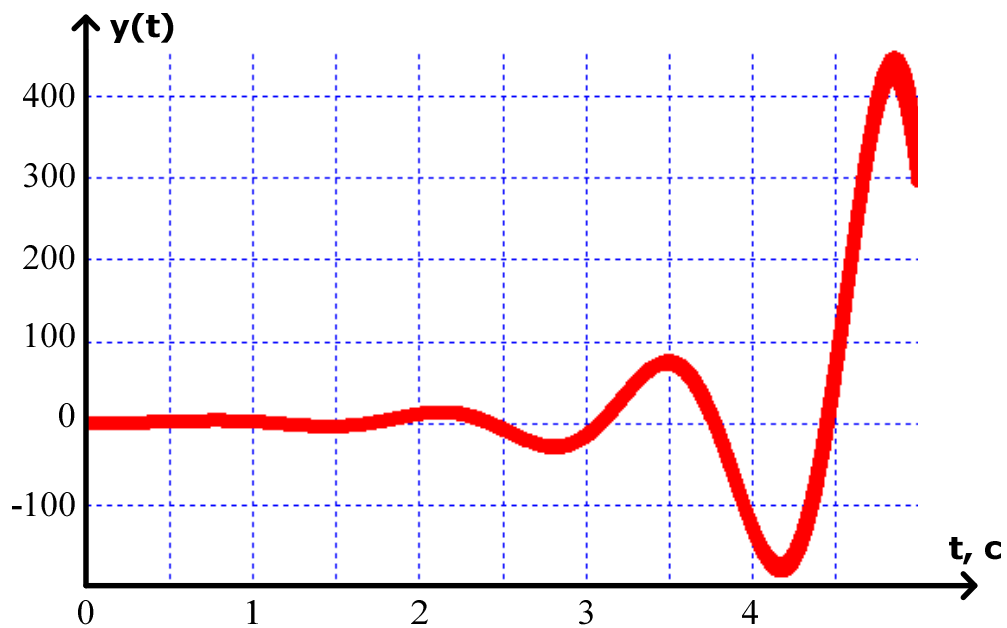


Рис. 81

## 5.2. Критерии устойчивости САУ

Для оценки устойчивости необходимо оценить расположение корней характеристического уравнения системы относительно координатных осей комплексной плоскости. Эту оценку можно осуществить непосредственным решением характеристического уравнения. Но для определения устойчивости не обязательно знать значения корней характеристического уравнения, достаточно проверить, являются ли действительные части всех корней отрицательными.

Правила, позволяющие исследовать устойчивость системы без непосредственного нахождения корней характеристического уравнения, называются *критериями устойчивости*.

На ранней стадии развития теории управления актуальной была задача определения устойчивости полинома без вычисления его корней, т. к. характеристические уравнения высоких порядков трудно было решать «вручную». Сейчас легко найти корни характеристического полинома с помощью компьютерных программ, однако такой подход не позволяет исследовать устойчивость теоретически, например, определять границы областей устойчивости отдельных параметров САУ.

С помощью критериев устойчивости не только устанавливается факт устойчивости систем, но и оценивается влияние тех или иных параметров и структурных изменений в системе на устойчивость. Математически все формы критериев устойчивости эквивалентны, т. к. они определяют условия, при которых корни характеристического уравнения попадают в левую полуплоскость комплексной системы координат [1, 7, 8].

### 5.2.1. Критерий Гурвица

Критерий Гурвица относится к алгебраическим критериям устойчивости, которые позволяют установить, устойчива ли САУ или нет, по результатам алгебраических действий над коэффициентами характеристического уравнения.

Большая часть реальных САУ являются замкнутыми, т. е. имеют общую единичную обратную связь и, соответственно, передаточную функцию вида

$$W_{зам}(p) = \frac{W_{раз}(p)}{1 + W_{раз}(p)},$$

где  $W_{раз}(p)$  – передаточная функция разомкнутой САУ (без учета общей обратной связи).

Рассмотрим вывод характеристического уравнения замкнутой САУ, если дана передаточная функция соответствующей ей разомкнутой САУ. Согласно (17) характеристическое уравнение САУ получается приравнением к нулю знаменателя ее передаточной функции, следовательно, для замкнутой системы запишем:

$$A_{зам}(p) = 1 + W_{раз}(p) = 0.$$

Однако передаточная функция разомкнутой системы, согласно (2), имеет вид:

$$W_{раз}(p) = \frac{y_{раз}(p)}{x_{раз}(p)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0} = \frac{B_{раз}(p)}{A_{раз}(p)},$$

следовательно, характеристическое уравнение замкнутой системы может быть записано следующим образом:

$$A_{зам}(p) = 1 + W_{раз}(p) = 1 + \frac{B_{раз}(p)}{A_{раз}(p)} = \frac{A_{раз}(p) + B_{раз}(p)}{A_{раз}(p)} = 0.$$

Дробь равна нулю, когда ее числитель равен нулю, следовательно, характеристическое уравнение замкнутой системы можно записать как сумму полиномов числителя и знаменателя передаточной функции разомкнутой системы, приравняв полученное выражение к нулю:

$$A_{зам}(p) = A_{раз}(p) + B_{раз}(p) = 0. \quad (18)$$

**Важно!** Для применения критерия Гурвица используется специальная форма записи характеристического уравнения, отличающаяся от (16) обратной нумерацией коэффициентов полинома:

$$A(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n = 0. \quad (19)$$

Критерий Гурвица использует матрицу коэффициентов характеристического уравнения размером  $n \times n$ , составленную следующим образом:

- по главной диагонали выписываются все коэффициенты характеристического уравнения, начиная с  $a_1$  и заканчивая  $a_n$ ;
- каждая строка дополняется коэффициентами с возрастающими индексами слева направо так, чтобы чередовались строки с четными и нечетными индексами;
- в случае отсутствия коэффициента, а также, если индекс меньше 0 или больше  $n$ , на его месте пишется 0.

В результате получается матрица, первая строка которой содержит коэффициенты уравнения (19)  $a_1, a_3, a_5, \dots$  (все с нечетными номерами) и нулями на месте отсутствующих элементов, вторая строка – коэффициенты  $a_0, a_2, a_4, \dots$  (все с четными номерами) и нулями на месте отсутствующих элементов. Третья строка получается сдвигом первой строки на одну позицию вправо, четвертая – сдвигом второй строки на одну позицию вправо и т. д. Например, для САУ 5-го порядка ( $n = 5$ ) эта матрица имеет вид:

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & a_3 & a_5 \end{bmatrix}.$$

Критерий Гурвица определяет необходимое и достаточное условие устойчивости САУ следующим образом: *все корни характеристического уравнения САУ имеют отрицательные действительные части, если при  $a_0 > 0$  все  $n$  определителей Гурвица матрицы коэффициентов положительны.*

Определители Гурвица вычисляются следующим образом:

$$\Delta_1 = a_1, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}, \dots$$

и так далее – последний определитель вычисляется для полной матрицы коэффициентов.

При условии положительности всех коэффициентов характеристического уравнения достаточно проверить только  $n - 1$  первых определителей Гурвица, не вычисляя определитель для полной матрицы. При этом условии частные случаи критерия Гурвица для систем низких порядков получают, раскрывая определители матрицы коэффициентов. Так, в результате раскрытия определителей, для САУ первого и второго порядков необходимым и достаточным условием устойчивости является собственно положительность всех коэффициентов характеристического уравнения. Для САУ 3-го порядка – положительность всех коэффициентов и условие вида

$$a_1 \cdot a_2 - a_0 \cdot a_3 > 0, \quad (20)$$

для САУ 4-го порядка – положительность всех коэффициентов и условие  $a_3 \cdot (a_1 \cdot a_2 - a_0 \cdot a_3) - a_4 \cdot a_1^2 > 0$ . Таким образом, условия устойчивости сводятся



к нескольким неравенствам, что удобно для оценки влияния на устойчивость отдельных параметров звеньев САУ [1, 7, 14].

Рассмотрим систему (рис. 82), в которой регулятор (звено 1) и объект управления (звено 2) задаются передаточными функциями вида

$$W_1(p) = \frac{k}{p}, \quad W_2(p) = \frac{1}{(T_1 \cdot p + 1)(T_2 \cdot p + 1)}.$$

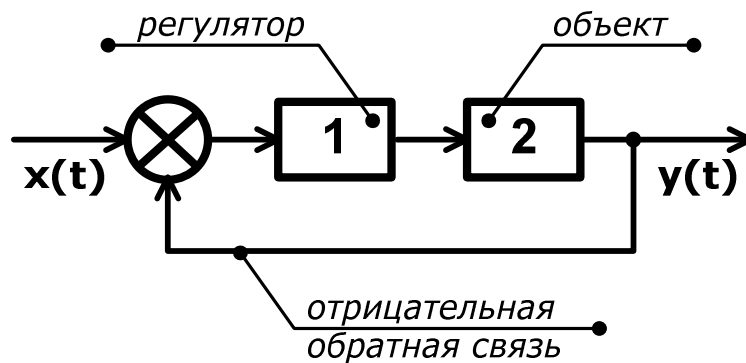


Рис. 82

Определим с помощью критерия Гурвица, при каких значениях коэффициента статического преобразования регулятора  $k$  рассматриваемая система будет устойчивой. Запишем передаточную функцию разомкнутой САУ:

$$W_{раз}(p) = W_1(p) \cdot W_2(p) = \frac{k}{p \cdot (T_1 \cdot p + 1)(T_2 \cdot p + 1)} = \frac{B_{раз}(p)}{A_{раз}(p)}.$$

С использованием (18) запишем характеристическое уравнение замкнутой САУ:

$$\begin{aligned} A_{зам}(p) &= A_{раз}(p) + B_{раз}(p) = p \cdot (T_1 \cdot p + 1)(T_2 \cdot p + 1) + k = \\ &= T_1 \cdot T_2 \cdot p^3 + (T_1 + T_2) \cdot p^2 + p + k = 0. \end{aligned}$$

Для этого уравнения, согласно форме (19), коэффициенты, соответственно, равны:

$$a_0 = T_1 \cdot T_2; \quad a_1 = (T_1 + T_2); \quad a_2 = 1; \quad a_3 = k.$$

При положительности всех коэффициентов этого уравнения 3-го порядка необходимым условием устойчивости также является выполнение условия (20):

$$\begin{aligned} a_1 \cdot a_2 - a_0 \cdot a_3 &> 0; \\ (T_1 + T_2) - T_1 \cdot T_2 \cdot k &> 0 \Rightarrow (T_1 + T_2) > T_1 \cdot T_2 \cdot k; \\ k < \frac{(T_1 + T_2)}{T_1 \cdot T_2} &= \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2}. \end{aligned}$$

Рассматриваемая САУ будет устойчива, если значение коэффициента статического преобразования  $k$  удовлетворяет условию [7]

$$0 < k < \frac{(T_1 + T_2)}{T_1 \cdot T_2} = \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2}.$$

Рассмотрим примеры оценки устойчивости по критерию Гурвица исследованных ранее по теореме Ляпунова систем 3-го порядка (см. рис. 78 и рис. 80). Матрица коэффициентов Гурвица для САУ 3-го порядка имеет общий вид:

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{bmatrix},$$

т.е. матрицы Гурвица для рассматриваемых САУ равны, соответственно,

$$\begin{bmatrix} 5,5 & 3,0 & 0 \\ 1,2 & 5,3 & 0 \\ 0 & 5,5 & 3,0 \end{bmatrix} \text{ и } \begin{bmatrix} 5,5 & 201,0 & 0 \\ 1,2 & 5,3 & 0 \\ 0 & 5,5 & 201,0 \end{bmatrix}.$$

Характеристические уравнения обеих САУ удовлетворяют критерию положительности всех коэффициентов, поэтому для оценки устойчивости по критерию Гурвица достаточно вычислить и проверить на положительность  $n - 1$  первых определителей Гурвица, т. е. для 3-го порядка – второй определитель. Результаты вычисления вторых определителей матрицы Гурвица для рассматриваемых систем (см. рис. 78 и рис. 80), полученные с использованием Mathcad, показаны на рис. 83, *а* и рис. 83, *б* соответственно. Как видно, результаты оценки устойчивости по Гурвицу совпадают с ранее полученными оценками по Ляпунову и результатами построения переходных характеристик рассматриваемых САУ (см. рис. 79 и рис. 81 соответственно) – положительный определитель соответствует устойчивой САУ, а отрицательный – неустойчивой.

$$\begin{array}{cc}
 \text{а)} & \text{б)} \\
 \left| \begin{pmatrix} 5,5 & 3,0 \\ 1,2 & 5,3 \end{pmatrix} \right| = 25,55 & \left| \begin{pmatrix} 5,5 & 201,0 \\ 1,2 & 5,3 \end{pmatrix} \right| = -212,05
 \end{array}$$

Рис. 83

### 5.2.2. Критерий Михайлова

Этот критерий позволяет оценить устойчивость САУ по годографу Михайлова – кривой, представляющей собой геометрическое место концов переменного *характеристического вектора* САУ. Формула для расчета и построения годографа Михайлова в комплексной плоскости получается подстановкой в характеристический полином САУ комплексной частоты  $j\omega$  вместо  $p$ :

$$A(j\omega) = a_n(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \dots + a_1(j\omega) + a_0. \quad (21)$$

Годограф по формуле (21) рассчитывают, изменяя частоту  $\omega$  от 0 до  $+\infty$ , и строят в комплексной плоскости.

Критерий Михайлова определяет необходимое и достаточное условие устойчивости САУ следующим образом: *САУ является устойчивой, если при изменении частоты от 0 до  $+\infty$  годограф вектора Михайлова  $A(j\omega)$  начинается на положительной части действительной оси и, не обращаясь в ноль, поворачиваясь против часовой стрелки, проходит последовательно  $n$  квадрантов<sup>1</sup> комплексной плоскости, где  $n$  – порядок характеристического полинома САУ.*

У устойчивых систем годограф Михайлова имеет плавную спиралевидную форму и при  $\omega = 0$  отсекает на действительной оси в положительном направлении отрезок, равный свободному члену характеристического уравнения  $a_0$ .

По виду годографа Михайлова можно определить и граничное состояние устойчивости САУ: в случае границы устойчивости первого типа, т. е. наличия у характеристического уравнения САУ нулевого корня (см. рис. 77), отсутствует свободный член характеристического уравнения  $a_0 = 0$  и годограф начинается из начала координат. При границе устойчивости второго типа, т. е. наличии у характеристического уравнения САУ

<sup>1</sup> Квадрантами называются четыре угла, образуемые осями координат на комплексной плоскости.

пары чисто мнимых корней (см. рис. 77), годограф проходит через начало координат (обращается в ноль) при некотором ненулевом значении  $\omega$ , причем это значение и есть частота незатухающих колебаний системы [1, 2].

Рассмотрим примеры оценки устойчивости по критерию Михайлова исследованных ранее по теореме Ляпунова систем 3-го порядка (см. рис. 78 и рис. 80). Формулы для расчета годографов Михайлова этих систем имеют вид, соответственно:

$$A_1(j\omega) = 1,2 \cdot (j\omega)^3 + 5,5 \cdot (j\omega)^2 + 5,3 \cdot (j\omega) + 3$$

$$\text{и } A_2(j\omega) = 1,2 \cdot (j\omega)^3 + 5,5 \cdot (j\omega)^2 + 5,3 \cdot (j\omega) + 201.$$

Годограф Михайлова для первой САУ показан на рис. 84.

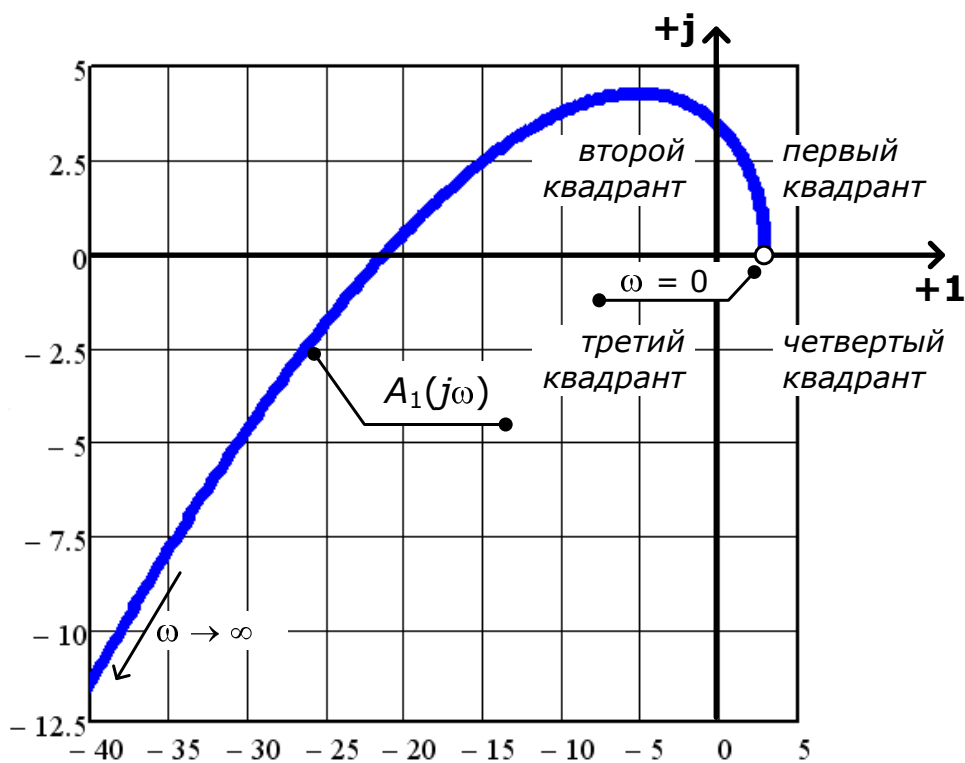


Рис. 84

Как видно, его форма удовлетворяет всем условиям критерия:

- годограф начинается на положительной части действительной оси (отсекая при  $\omega = 0$  на действительной оси отрезок, равный свободному члену характеристического уравнения  $a_0 = 3$ );
- не обращается в ноль;
- с ростом значения частоты  $\omega$ , поворачиваясь против часовой стрелки, проходит последовательно первый, второй квадрант и в третьем квадранте, при  $\omega \rightarrow \infty$ , уходит в бесконечность.

Годограф Михайлова для второй САУ показан на рис. 85. Как видно, его форма не удовлетворяет условиям критерия: годограф с ростом значения частоты  $\omega$  проходит квадранты не последовательно – из первого сразу переходит в четвертый, где при  $\omega \rightarrow \infty$  уходит в бесконечность.

Как видно, результат оценки устойчивости рассматриваемых САУ по Михайлову совпадает с результатами анализа по Ляпунову (см. рис. 78 и рис. 80) и по Гурвицу (см. рис. 83, а и рис. 83, б).

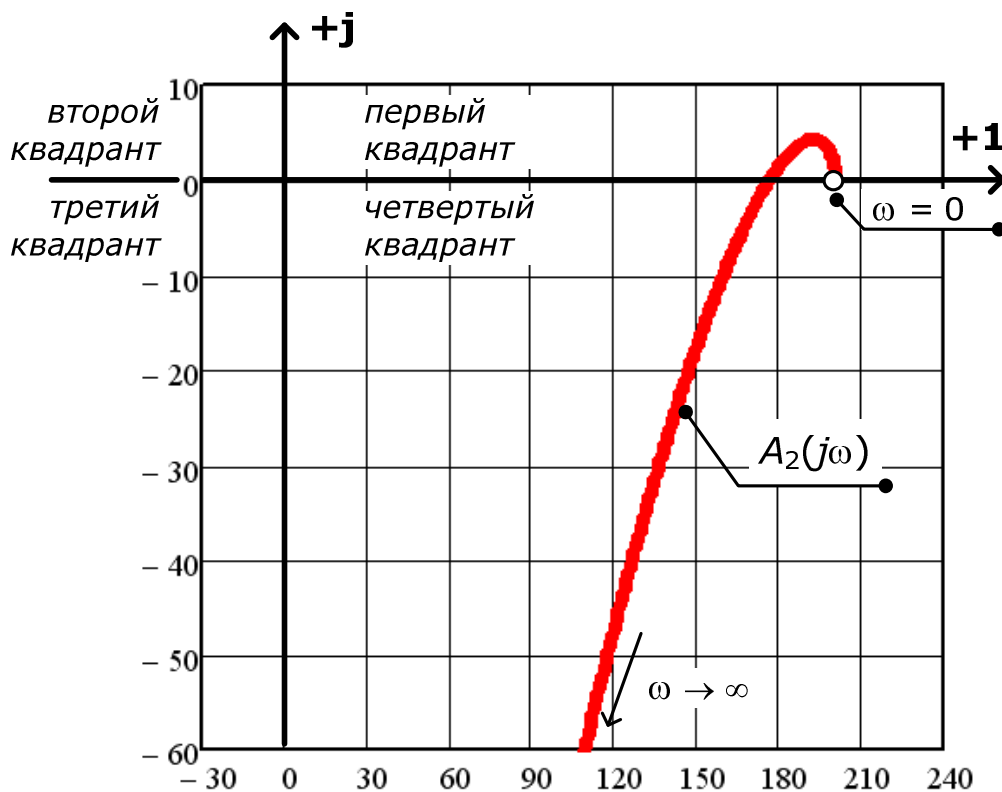


Рис. 85

Следует отметить, что для систем с высоким порядком характеристического уравнения ( $n = 5$  и более) отсчет квадрантов при проверке условий критерия Михайлова после четвертого продолжается против часовой стрелки в том же порядке, т. е., например, у устойчивой САУ 5-го порядка годограф должен последовательно проходить четыре квадранта, возвращаться в первый (для годографа по порядку – пятый) и в нем уходить в бесконечность. Пример годографа Михайлова для устойчивой САУ 5-го порядка с формулой для расчета годографа вида

$$A(j\omega) = 0,001 \cdot (j\omega)^5 + 0,04 \cdot (j\omega)^4 + 1,2 \cdot (j\omega)^3 + 10 \cdot (j\omega)^2 + 5 \cdot (j\omega) + 10$$

показан на рис. 86. Для удобства анализа начальный участок годографа, полученный при малых значениях частоты  $\omega$ , показан отдельным фрагмен-

том. Видно, что годограф при  $\omega = 0$  начинается на положительной части действительной оси и последовательно, против часовой стрелки, проходя пять квадрантов, в пятом уходит в бесконечность.

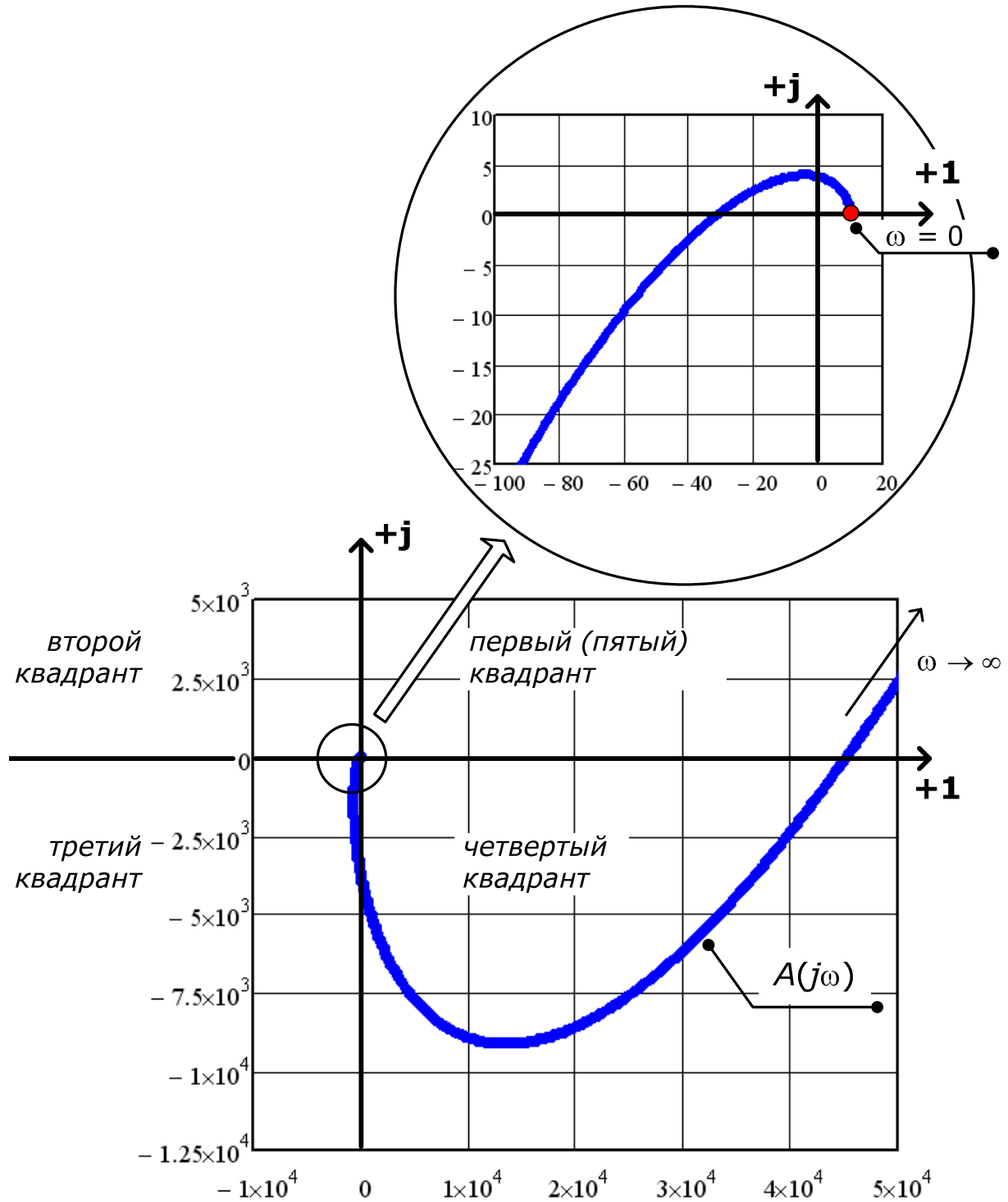


Рис. 86

### 5.2.3. Критерий Найквиста для АФХ

Критерии устойчивости Найквиста позволяют оценить устойчивость замкнутой системы по частотным характеристикам соответствующей разомкнутой системы. Напомним, что замкнутой называется САУ с общей единичной отрицательной обратной связью (рис. 87). Передаточная функция замкнутой САУ имеет вид:

$$W_{зам}(p) = \frac{W_{раз}(p)}{1 + W_{раз}(p)},$$

где  $W_{раз}(p)$  – передаточная функция разомкнутой САУ (без учета общей обратной связи).

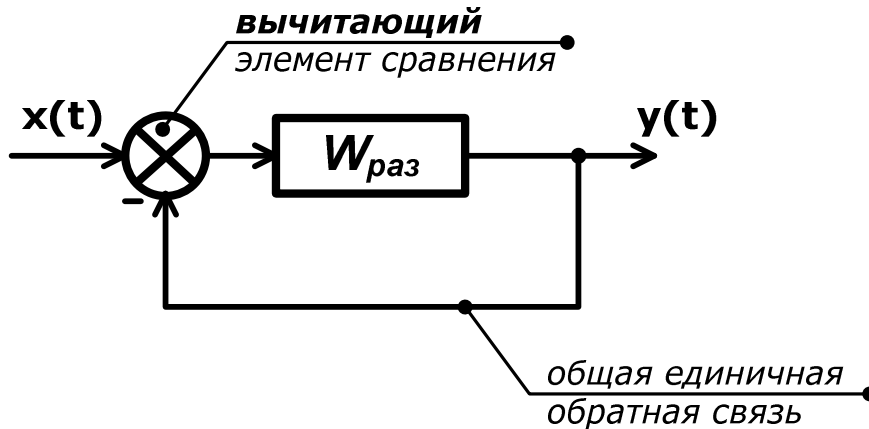


Рис. 87

Критерий Найквиста для амплитудно-фазовой характеристики (АФХ) формулируется следующим образом: *замкнутая система будет устойчивой, если АФХ соответствующей разомкнутой системы при изменении частоты от 0 до  $\infty$  не охватывает точку с координатами  $[-1, j0]$ .*

Рассмотрим произвольную разомкнутую САУ, не содержащую интегрирующих звеньев. В этом случае значение АФХ для частоты  $\omega = 0$  равно коэффициенту статического преобразования САУ:

$$W(j\omega) = W(j0) = k.$$

При этом, если степень числителя передаточной функции меньше степени знаменателя, то график АФХ, начинаясь в точке с координатами  $(k, j0)$ , при изменении частоты от 0 до  $\infty$  стремится к началу координат. На рис. 88, а показана АФХ устойчивой САУ – график не охватывает точку с координатами  $[-1, j0]$ , а на рис. 88, б – неустойчивой (график точку охватывает).

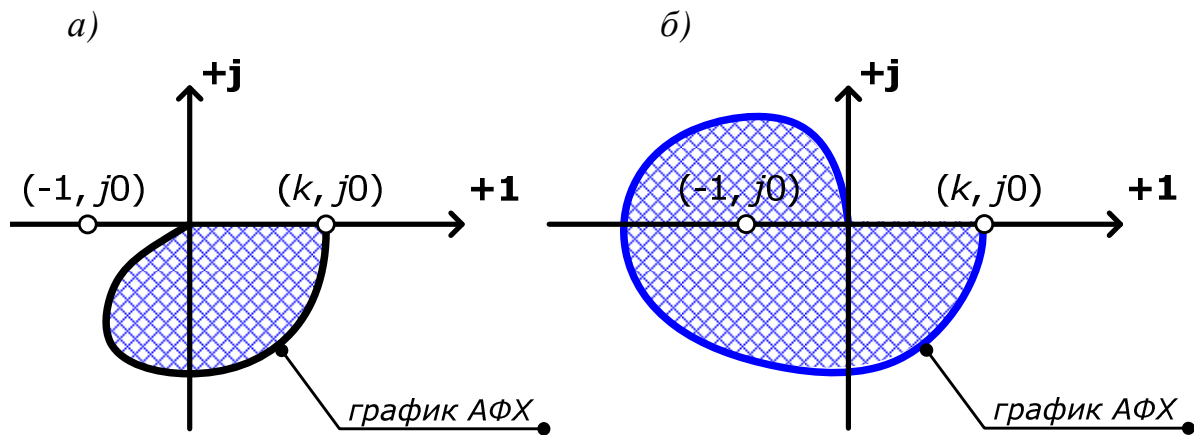


Рис. 88

Если АФХ разомкнутой САУ проходит через точку с координатами  $[-1, j0]$ , то соответствующая ей замкнутая САУ находится на *границе устойчивости* (рис. 89). В этом случае для некоторой частоты  $\omega$  мы имеем  $A(\omega) = 1$  и  $\varphi(\omega) = -180^\circ$ .

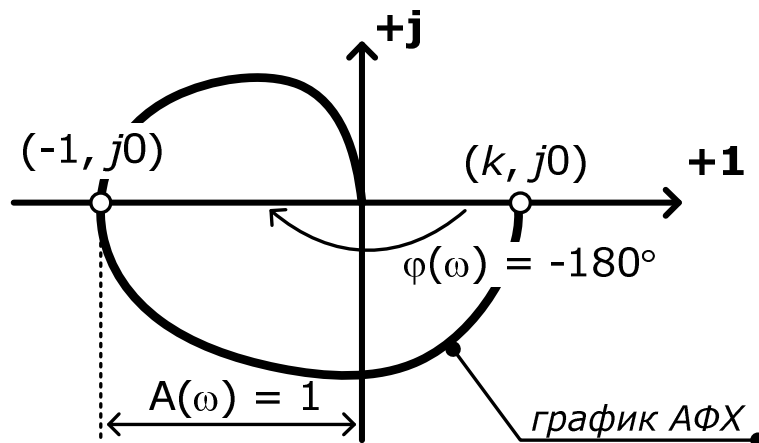


Рис. 89

Если в составе САУ есть интегрирующие звенья, то АФХ при  $\omega = 0$  обращается в бесконечность, т. е. график АФХ в этом случае начинается не на действительной оси, а приходит из бесконечности. В этом случае для оценки устойчивости по критерию Найквиста в контур включают не только кривую графика АФХ, но и часть окружности бесконечного радиуса,



проводимой от действительной оси по часовой стрелке. Пример *устойчивой* САУ с АФХ такого вида показан на рис. 90, а, *неустойчивой* – на рис. 90, б [1, 2, 7].

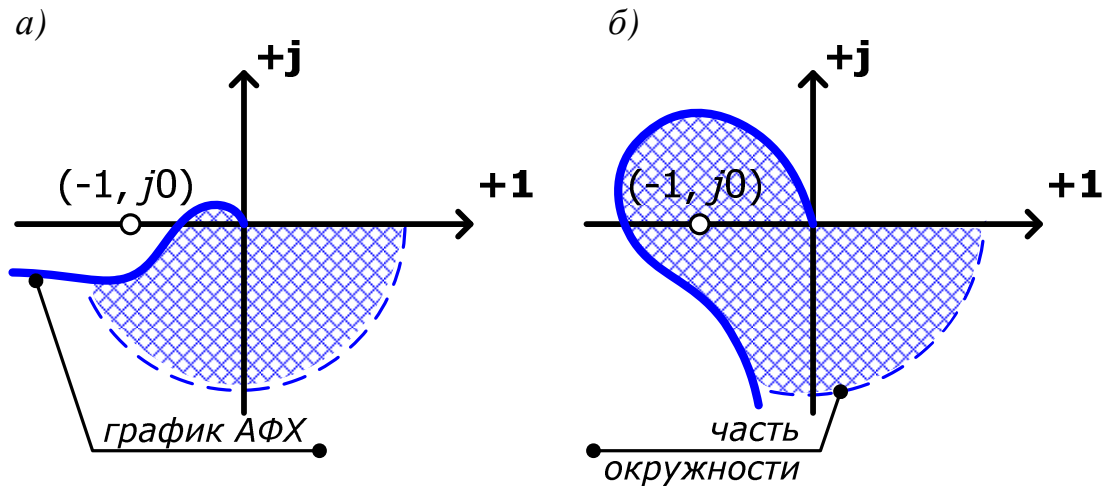


Рис. 90

Рассмотрим пример оценки устойчивости по критерию Найквиста для АФХ на примере замкнутой САУ, которой соответствует разомкнутая система с передаточной функцией вида

$$W_{раз}(p) = 100 \cdot \frac{1}{(0,25p + 1)} \cdot \frac{1}{(0,2p + 1)} \cdot \frac{1}{(0,7p + 1)}.$$

Запишем по заданной  $W_{раз}(p)$  формулу расчета АФХ:

$$W_{раз}(j\omega) = W_{раз}(p) \Big|_{p=j\omega} = 100 \cdot \frac{1}{(0,25 \cdot j\omega + 1)} \cdot \frac{1}{(0,2 \cdot j\omega + 1)} \cdot \frac{1}{(0,7 \cdot j\omega + 1)},$$

и, изменяя частоту  $\omega$  от 0 до  $+\infty$ , построим график АФХ разомкнутой САУ с использованием математического пакета Mathcad (рис. 91). Для удобства анализа участок АФХ в области точки  $[-1, j0]$ , полученный для больших значений частоты  $\omega$ , показан на рис. 91 отдельным фрагментом. По фрагменту хорошо видно, что график *охватывает* точку  $[-1, j0]$ , следовательно, замкнутая САУ является *неустойчивой*.

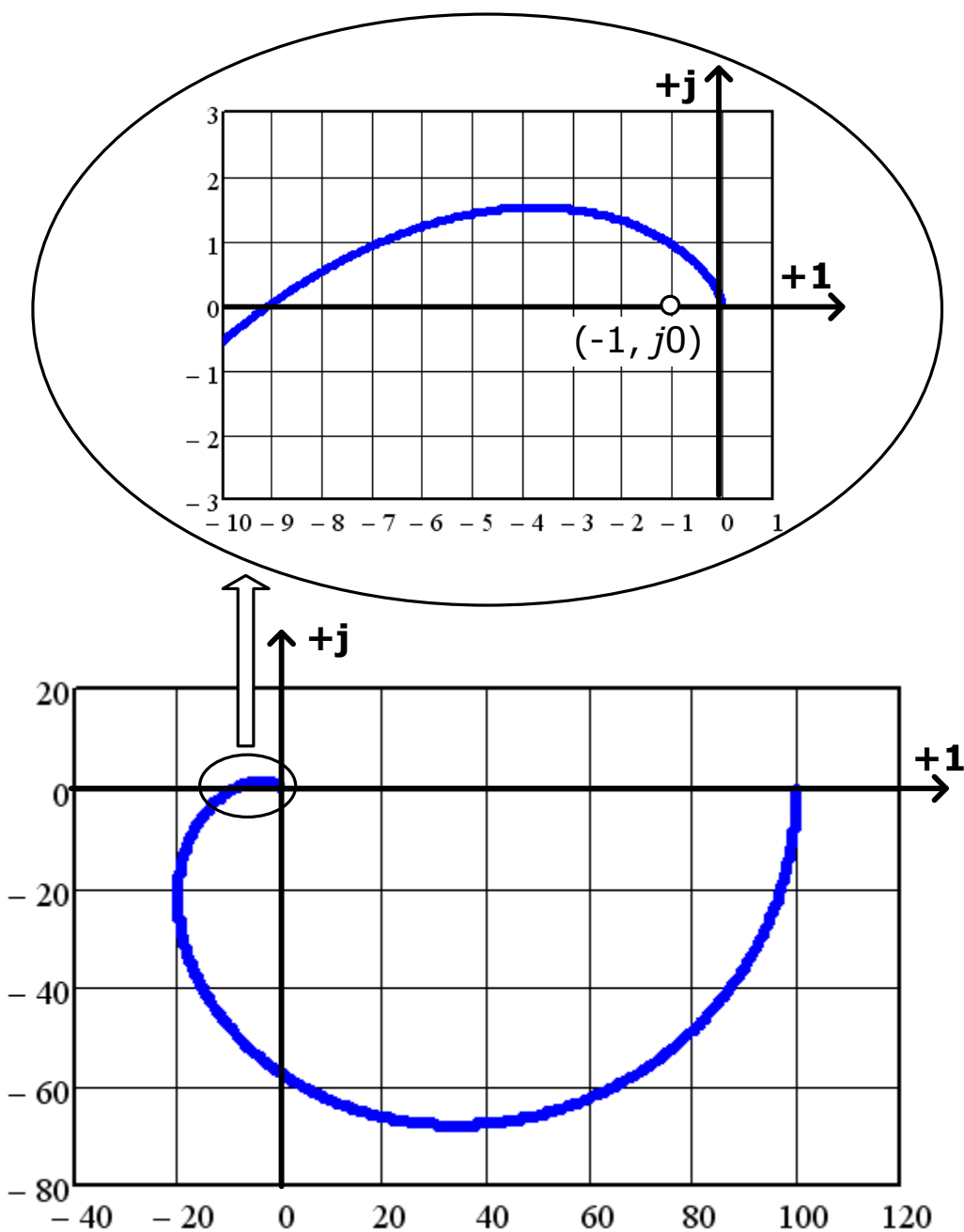


Рис. 91

#### 5.2.4. Критерий Найквиста для ЛАЧХ и ЛФЧХ

Критерий Найквиста для логарифмической амплитудно-частотной и фазочастотной характеристик формулируется следующим образом: *замкнутая система устойчива, если для характеристик соответствующей ей разомкнутой системы выполняются два условия:*

– при частоте, равной частоте среза САУ  $\omega_c$ , модуль фазочастотной характеристики меньше  $180^\circ$ :  $|\varphi(\omega_c)| < 180^\circ$ ;

– при частоте, равной  $\omega_\pi$ , значение ЛАЧХ меньше нуля:  $L(\omega_\pi) < 0$ .

Как следует из формулировки критерия, для проверки его условий по характеристикам разомкнутой САУ первоначально необходимо определить две частоты: частоту среза  $\omega_c$  и частоту  $\omega_\pi$ . После этого для найденных частот следует проверить выполнимость обоих условий критерия.

Частотой среза САУ называется частота, при которой ЛАЧХ системы пересекает ось частот, то есть  $L(\omega_c) = 0$ . Эта частота также называется частотой единичного усиления САУ, так как сигнал этой частоты на выходе САУ имеет ту же амплитуду, что и на входе:  $A_{вых} = A_{вх}$ . Для этого случая

$$L(\omega_c) = 20 \cdot \lg[A(\omega_{cp})] = 0;$$

$$\lg[A(\omega_c)] = 0;$$

$$A(\omega) = \frac{A_{вых}}{A_{вх}} = 1.$$

**Важно!** Не путайте понятия частоты среза отдельных типовых звеньев САУ и всей системы в целом. Определение частот среза типовых звеньев рассмотрено в графе «Примечания» прил. 1.

Частотой  $\omega_\pi$  САУ называется частота, при которой ФЧХ САУ равняется  $180^\circ$  со знаком «плюс» или со знаком «минус». Если ФЧХ несколько раз пересекает ординату  $\pm 180^\circ$ , то выполнение условия проверяется для крайней правой точки.

**Важно!** Частота среза  $\omega_c$  и частота  $\omega_\pi$  имеются не у всякой САУ. Если ЛАЧХ системы вообще не пересекает ось частот, то есть  $L(\omega) \neq 0$  ни при каких значениях  $\omega$ , то у такой системы нет частоты среза. Аналогично, если ФЧХ системы ни при каких значениях частоты не принимает значение  $\pm 180^\circ$ , то данная САУ не характеризуется параметром  $\omega_\pi$ . В этих случаях для оценки устойчивости следует выбрать другие критерии.

На рис. 92, а показано, как по графикам ЛАЧХ и ЛФЧХ разомкнутой САУ определить частоты  $\omega_c$  и  $\omega_\pi$ .

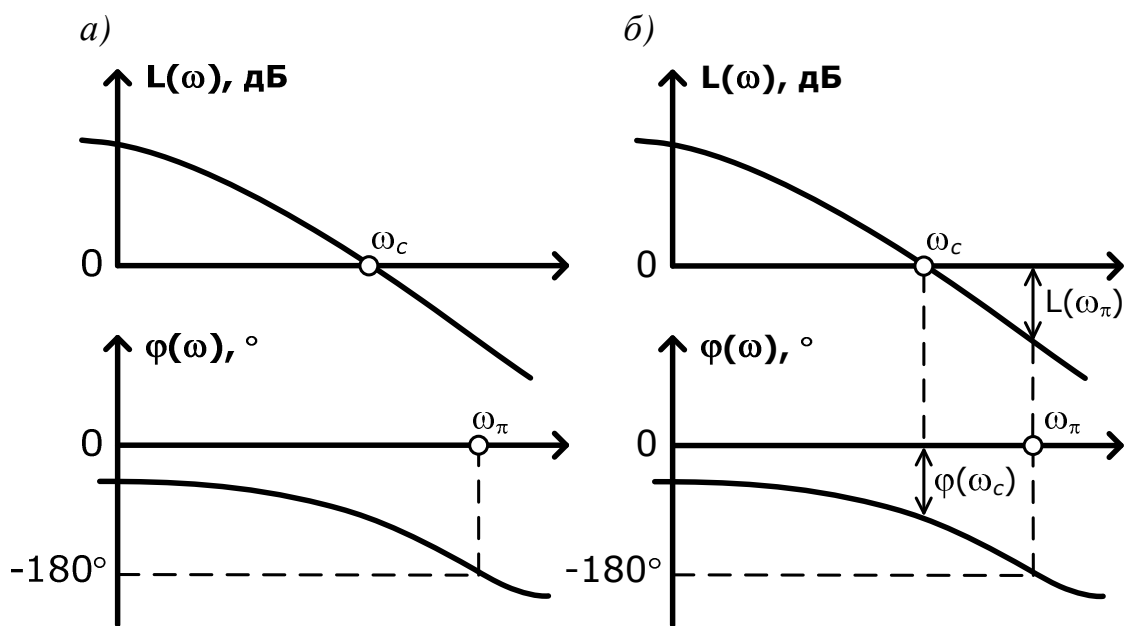


Рис. 92

ПРИМЕРЫ: 1) ЛАЧХ САУ без частоты среза  $\omega_c$ ;  
2) ЛФЧХ САУ без частоты  $\omega_\pi$ .



Проверим выполнимость условий критерия Найквиста для характеристик разомкнутой САУ, показанных на рис. 92, а. Определим графически величины  $L(\omega_\pi)$  и  $\varphi(\omega_c)$ , как показано на рис. 92, б. Как видно,  $L(\omega_\pi) < 0$ , а  $|\varphi(\omega_c)| < 180^\circ$ , т. е. оба условия критерия Найквиста выполняются, следовательно, замкнутая САУ, соответствующая рассматриваемой разомкнутой, является *устойчивой*. Из рис. 92, б также можно сделать вывод о том, что для устойчивости САУ по критерию Найквиста достаточно, чтобы выполнялось условие  $\omega_c < \omega_\pi$ .

Для характеристик разомкнутой САУ на рис. 93, а  $L(\omega_\pi) > 0$ , а  $|\varphi(\omega_c)| > 180^\circ$ , т. е. оба условия критерия Найквиста не выполняются, следовательно, замкнутая САУ, соответствующая рассматриваемой разомкнутой, является *неустойчивой*. Из рис. 93, а также можно сделать вывод о том, что для неустойчивости САУ по критерию Найквиста достаточно, чтобы выполнялось условие  $\omega_c > \omega_\pi$ .

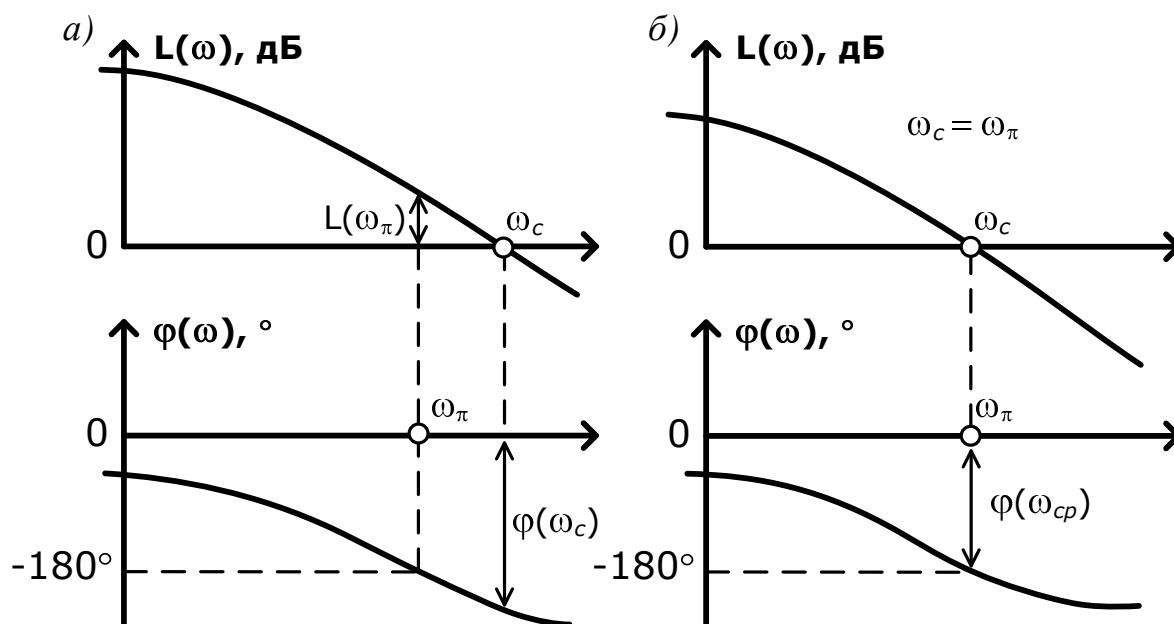


Рис. 93

Для характеристик разомкнутой САУ, которой соответствует замкнутая система, находящаяся на границе устойчивости,  $L(\omega_\pi) = 0$  и  $|\varphi(\omega_c)| = 180^\circ$ ,  $\omega_c = \omega_\pi$  (см. рис. 93, б). У такой системы для сигнала с частотой  $\omega_c$ , т. е. с частотой единичного усиления, фазовый сдвиг выходного сигнала относительно входного составляет  $-180^\circ$ . Это говорит о том, что после прохождения САУ величина сигнала меняет знак, сохраняя абсолютную величину (энергию), то есть устанавливаются незатухающие колебания. АФХ такой САУ показана на рис. 89 [1, 3, 7, 15].

Рассмотрим пример оценки устойчивости по критерию Найквиста для ЛАЧХ и ЛФЧХ на примере замкнутой САУ, которой соответствует разомкнутая система с передаточной функцией вида:

$$W_{раз}(p) = 100 \cdot \frac{1}{(0,25p + 1)} \cdot \frac{1}{(0,2p + 1)} \cdot \frac{1}{(0,7p + 1)}.$$

Графики ЛАЧХ и ЛФЧХ разомкнутой САУ, построенные с использованием математического пакета Mathcad по формулам (11) и (12), приведены на рис. 94.

Как видно по рис. 94, ЛАЧХ равна нулю при  $\omega_c \approx 13,5 \text{ с}^{-1}$ . ЛФЧХ на частоте  $\omega_\pi \approx 5,7 \text{ с}^{-1}$  меняет знак – после того, как  $\varphi(\omega)$  достигает значения  $-180^\circ$  (радиус-вектор, поворачиваясь по часовой стрелке, переходит в верхнюю полуплоскость), отсчет фазового сдвига продолжается в области положительных значений.

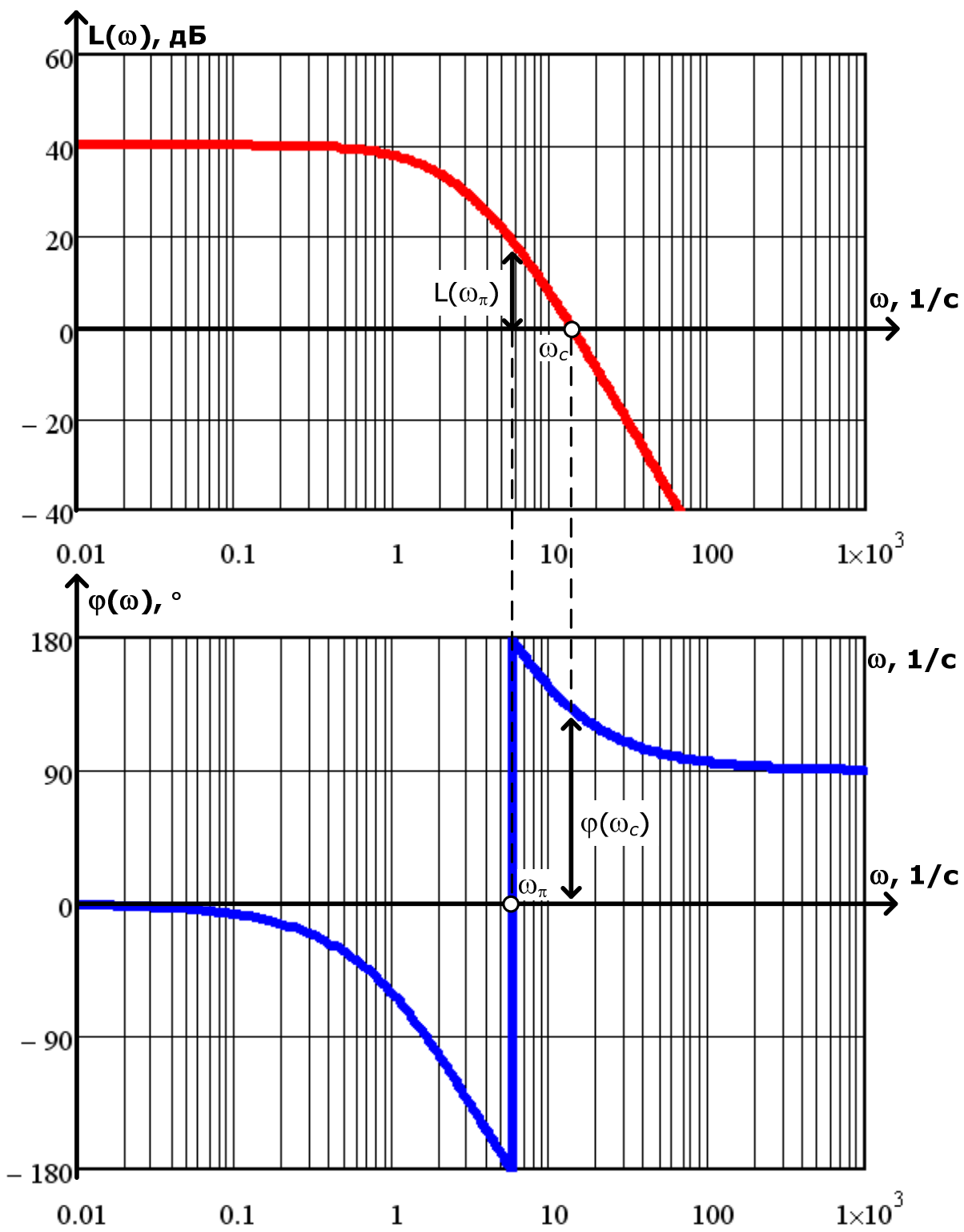


Рис. 94

При этом из двух условий критерия Найквиста формально нарушается только второе: значение ЛАЧХ на частоте среза не является отрицательным (см. рис. 94):  $L(\omega_\pi) \approx 18 > 0$ . Первое условие ( $|\varphi(\omega_c)| < 180^\circ$ ) формально выполняется:  $|\varphi(\omega_c)| \approx 130^\circ < 180^\circ$ . Однако следует понимать, что опережение по фазе в  $130^\circ$  соответствует, при отсчете по часовой стрелке без смены знака, отставанию на величину

$$\varphi(\omega_c) = -360^\circ + 130^\circ = -230^\circ,$$

следовательно, замкнутая САУ неустойчива. К такому же выводу можно прийти, сравнив величины  $\omega_c$  и  $\omega_\pi$ :  $\omega_c > \omega_\pi$ . Оценка устойчивости этой САУ по критерию Найквиста для АФХ, выполненная в конце п. 6.2.3, также показала отсутствие устойчивости.

Выполним проверку оценки устойчивости по критериям Найквиста с использованием теоремы Ляпунова. По заданной  $W_{раз}(p)$  запишем с использованием формулы (18) характеристическое уравнение замкнутой САУ:

$$100 + (0,25p + 1) \cdot (0,2p + 1) \cdot (0,7p + 1) = 0;$$

$$0,035 \cdot p^3 + 0,365 \cdot p^2 + 1,15 \cdot p + 101 = 0.$$

Решение характеристического уравнения замкнутой САУ, полученное с использованием математического пакета Mathcad, имеет вид:

$$0,035 \cdot p^3 + 0,365 \cdot p^2 + 1,15 \cdot p + 101 \left| \begin{array}{l} solve \\ float, 4 \end{array} \right. \rightarrow \left( \begin{array}{c} -17,74 \\ 3,657 + 12,22i \\ 3,657 - 12,22i \end{array} \right)$$

Множество корней уравнения представлено в круглых скобках. Как видно, один из корней уравнения оказался *отрицательным* действительным числом  $-17,74$ , а два других – комплексными сопряженными числами с *положительной* действительной частью  $3,657$ . Эти корни равны, соответственно,  $(3,657 + 12,22j)$  и  $(3,657 - 12,22j)$ . Таким образом, по теореме Ляпунова замкнутая САУ *неустойчива*, что согласуется с результатами оценки устойчивости, полученными с применением обоих критериев Найквиста.

### 5.3. Запасы устойчивости САУ

Технические характеристики устройств, входящих в состав САУ, меняются в процессе эксплуатации, и, следовательно, со временем изменяются и постоянные передаточной функции САУ. Следовательно, недостаточно спроектировать просто устойчивую систему, нужно, чтобы она сохраняла устойчивость при некоторых изменениях параметров САУ в сравнении с расчетными, т. е. обладала *запасами устойчивости*. Запас определяет удаление системы от границы устойчивости.

#### 5.3.1. Запасы устойчивости по амплитуде и фазе

*Запасом устойчивости по амплитуде  $\Delta L$*  называется величина в децибелах, на которую нужно сместить вверх ЛАЧХ разомкнутой САУ так, чтобы привести соответствующую ей устойчивую замкнутую систему к границе устойчивости. На рис. 95 показано смещение вверх ЛАЧХ устойчивой САУ, исходные характеристики которой были рассмотрены в примере оценки устойчивости по критерию Найквиста (см. рис. 92, б).

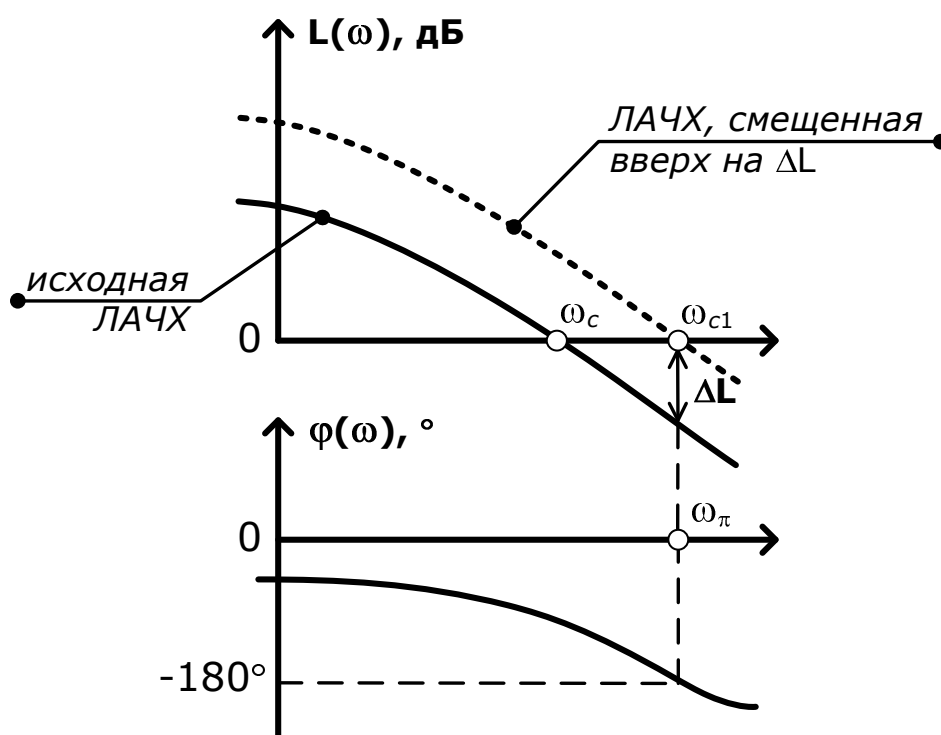


Рис. 95



Как видно (см. рис. 95), смещение исходной ЛАЧХ параллельно самой себе вверх на величину  $\Delta L$  приводит к смещению частоты среза разомкнутой САУ *вправо* – для новой ЛАЧХ, показанной пунктиром, значение частоты среза  $\omega_{c1} = \omega_{\pi}$ , что, по критерию Найквиста для ЛАЧХ и ЛФЧХ свидетельствует о нахождении замкнутой системы на границе устойчивости.

Из рис. 95 также следует, что величину  $\Delta L$  можно определить как

$$\Delta L = |L(\omega_{\pi})| = -20 \cdot \lg[A(\omega_{\pi})] = 20 \cdot \lg \left[ \frac{1}{A(\omega_{\pi})} \right], \quad (22)$$

где  $A(\omega_{\pi}) < 1$  – модуль АФХ на частоте  $\omega_{\pi}$ .

Зная  $\Delta L$ , можно определить величину коэффициента статического преобразования разомкнутой САУ, при которой соответствующая ей замкнутая система окажется на границе устойчивости:

$$\begin{aligned} 20 \cdot \lg k_{zp} &= 20 \cdot \lg k + \Delta L; \\ \lg k_{zp} &= \lg k + \frac{\Delta L}{20}; \\ k_{zp} &= k \cdot 10^{\frac{\Delta L}{20}}, \end{aligned} \quad (23)$$

где  $k$  – коэффициент статического преобразования исходной разомкнутой САУ [2, 7, 14, 15].

Рассмотрим пример определения граничного значения коэффициента статического преобразования для разомкнутой САУ с передаточной функцией вида

$$W(p) = \frac{107}{(0,5 \cdot p + 1)(0,00012 \cdot p^2 + 0,085 \cdot p + 1)}.$$

ЛАЧХ и ЛФЧХ этой САУ показаны на рис. 96. По графикам характеристик видно, что частота среза САУ составляет  $\omega_c \approx 50 \text{ с}^{-1}$ , а ЛФЧХ достигает значения  $-180^\circ$  на частоте  $\omega_{\pi} \approx 100 \text{ с}^{-1}$  и после этого меняет знак. Запас устойчивости по амплитуде для этой САУ равен  $\Delta L = |L(\omega_{\pi})| \approx 12 \text{ дБ}$ , следовательно, по формуле (23)

$$k_{zp} \approx k \cdot 10^{\frac{\Delta L}{20}} = 107 \cdot 10^{\frac{12}{20}} = 425,975.$$

При изменении коэффициента статического преобразования САУ до значения, равного  $k_{zp}$ , ЛФЧХ САУ не изменится, а ЛАЧХ сместится вверх (см. рис. 96).

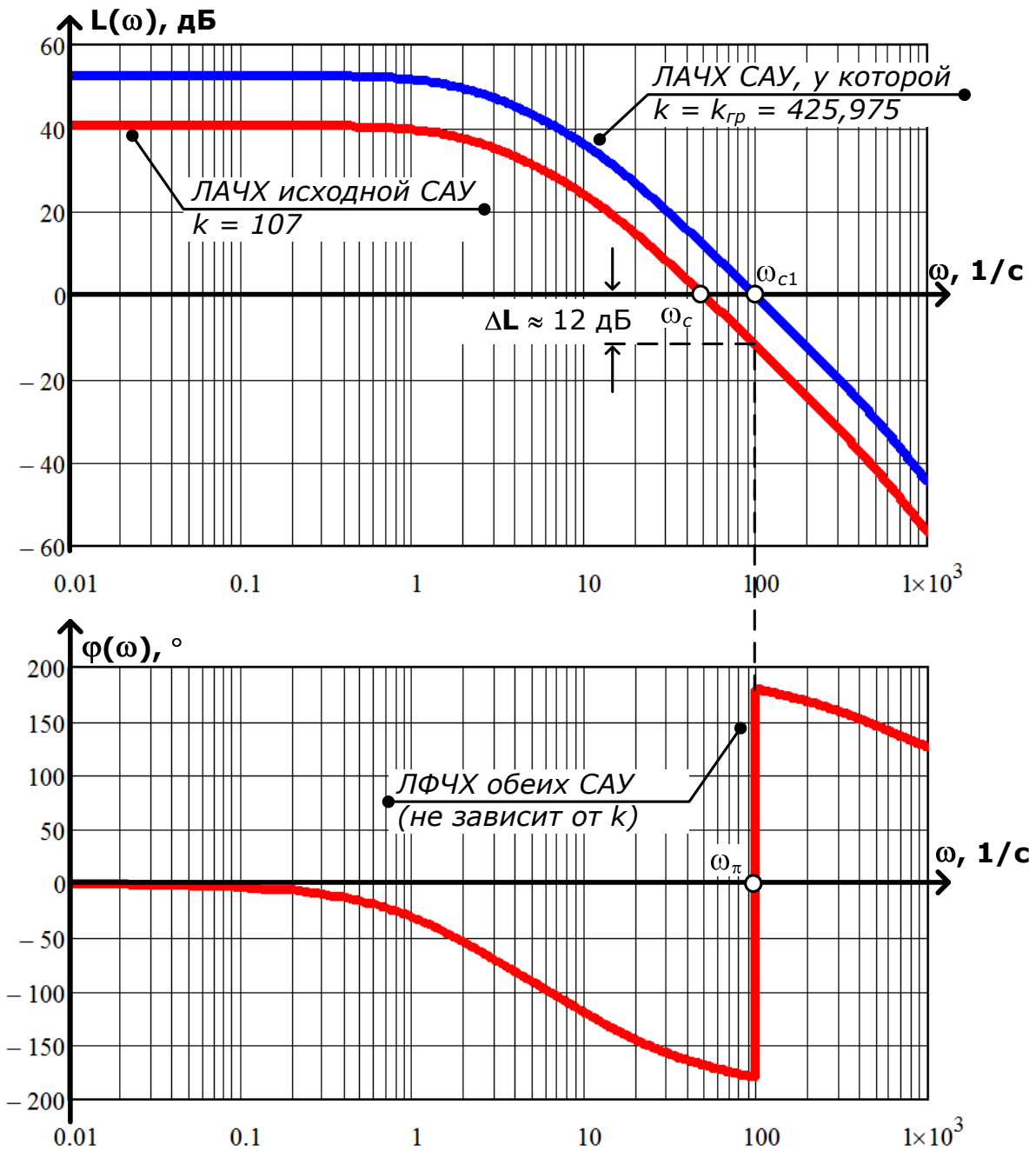


Рис. 96

Как видно, при найденном значении  $k_{гр} = 425,975$  частота среза разомкнутой САУ  $\omega_{c1}$  становится равной  $100 \text{ с}^{-1}$ , т. е.  $\omega_{c1} = \omega_{\pi}$ . А значит, в соответствии с критерием Найквиста для ЛАЧХ и ЛФЧХ, соответствующая рассматриваемой разомкнутой САУ замкнутая система действительно окажется на границе устойчивости.

Запас устойчивости по фазе  $\Delta\varphi(\omega_c)$  показывает, насколько должно увеличиться запаздывание по фазе разомкнутой САУ на частоте среза, чтобы замкнутая система оказалась на границе устойчивости (рис. 97).

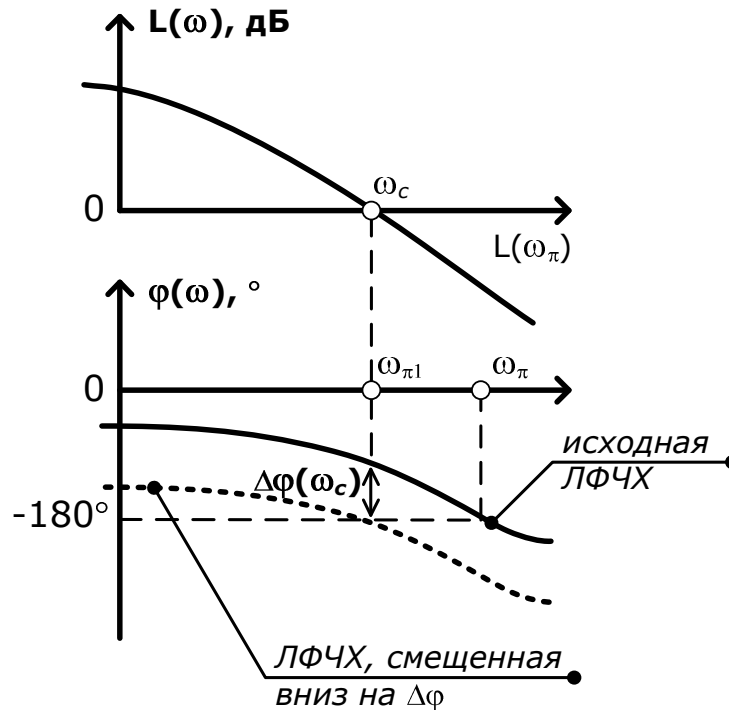


Рис. 97

На рис. 97 показано смещение вниз ЛФЧХ разомкнутой САУ, исходные характеристики которой были рассмотрены в примере оценки устойчивости по критерию Найквиста (см. рис. 92, б). Как видно, смещение исходной ЛФЧХ параллельно самой себе вниз на величину  $\Delta\varphi(\omega_c)$  приводит к смещению частоты  $\omega_\pi$  разомкнутой САУ влево – для новой ЛФЧХ, показанной пунктиром, значение этой частоты  $\omega_{\pi 1} = \omega_c$ , что, по критерию Найквиста для ЛАЧХ и ЛФЧХ, свидетельствует о нахождении замкнутой системы на границе устойчивости. Из рис. 97 следует, что величину  $\Delta\varphi(\omega_c)$  можно определить как

$$\Delta\varphi(\omega_c) = 180^\circ - |\varphi(\omega_c)|. \quad (24)$$

Рекомендуемая величина запаса устойчивости по амплитуде  $\Delta L$  для САУ составляет от 10 до 14 дБ, а величина запаса устойчивости по фазе  $\Delta\varphi(\omega_c)$  – от  $45^\circ$  до  $60^\circ$ .

Запасы устойчивости по амплитуде и фазе можно определить и по графику АФХ. На рис. 98 показана АФХ разомкнутой САУ – как видно, график не охватывает точку с координатами  $[-1, j0]$ , следовательно, замкнутая система устойчива. Определим запас устойчивости по фазе – согласно формуле (23) он равен величине, на которую отличается модуль фазового сдвига для сигнала с частотой  $\omega_c$  от  $180^\circ$ .

Напомним, что  $\omega_c$  – это частота единичного усиления: сигнал с такой частотой на выходе САУ имеет ту же величину амплитуды, что и на входе. Следовательно, длина радиус-вектора, проведенного в точку АФХ, которая соответствует  $\omega_c$ , равна 1. Эту точку можно найти на графике АФХ по пересечению с окружностью единичного радиуса (см. рис. 98).

Из рис. 98 хорошо видно, что если график АФХ разомкнутой САУ повернуть на величину угла, равную  $\Delta\varphi(\omega_c)$ , то график будет проходить через точку  $[-1, j0]$ , что приведет замкнутую систему к границе устойчивости по критерию Найквиста для АФХ.

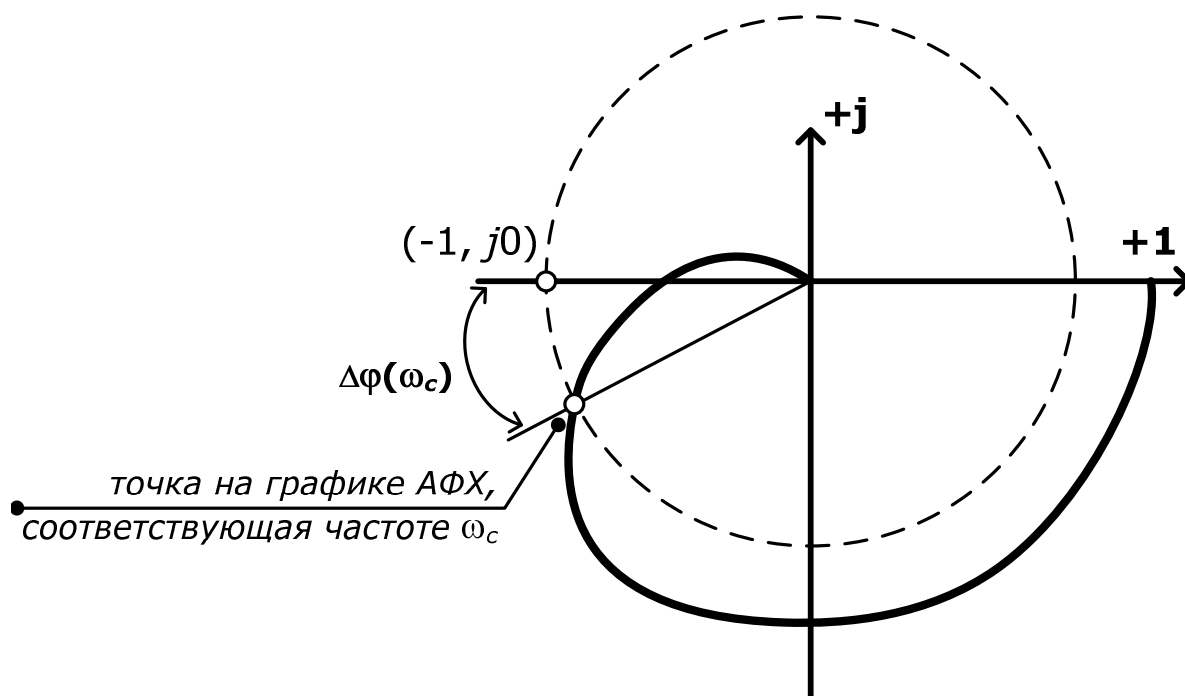


Рис. 98

Для той же АФХ рассмотрим определение запаса устойчивости по амплитуде. Частоте  $\omega_\pi$  соответствует фазовый сдвиг  $\pm 180^\circ$ , следовательно, точку АФХ, соответствующую этой частоте, можно найти по пересечению графика с действительной осью (рис. 99). Модуль АФХ, определяющий

коэффициент ослабления амплитуды сигнала с такой частотой на выходе САУ, равен длине радиус-вектора, проведенного из начала координат в соответствующую точку АФХ. Для АФХ на рис. 99 эта величина равна  $A(\omega_\pi)$ , и по ней с использованием формулы (22) можно рассчитать  $\Delta L$ .

Также по виду АФХ можно определить величину коэффициента статического преобразования разомкнутой САУ, при которой соответствующая ей замкнутая система окажется на границе устойчивости. Как видно из рис. 99,  $A(\omega_\pi)$  для устойчивой системы – это величина меньше 1, следовательно, для того чтобы график АФХ проходил через точку  $[-1, j0]$ , коэффициент статического преобразования САУ нужно умножить на  $1/A(\omega_\pi)$ :

$$k_{zp} = k \cdot \frac{1}{A(\omega_\pi)}, \quad (25)$$

где  $k$  – коэффициент статического преобразования исходной разомкнутой САУ [2, 7, 14, 15].

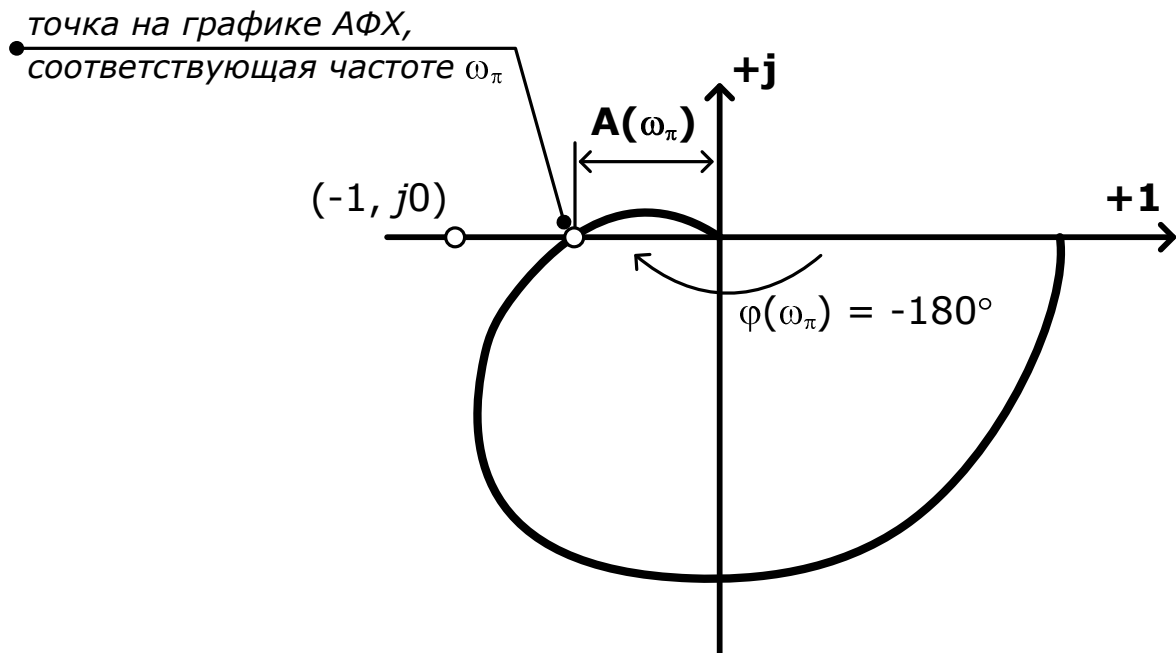


Рис. 99

Рассмотрим пример определения граничного значения коэффициента статического преобразования по АФХ разомкнутой САУ, для которой ранее расчет  $k_{zp}$  был выполнен по логарифмическим характеристикам (см. начиная с формулы (23) и до рис. 96). АФХ этой САУ с исходным значением  $k = 107$  показана на рис. 100.

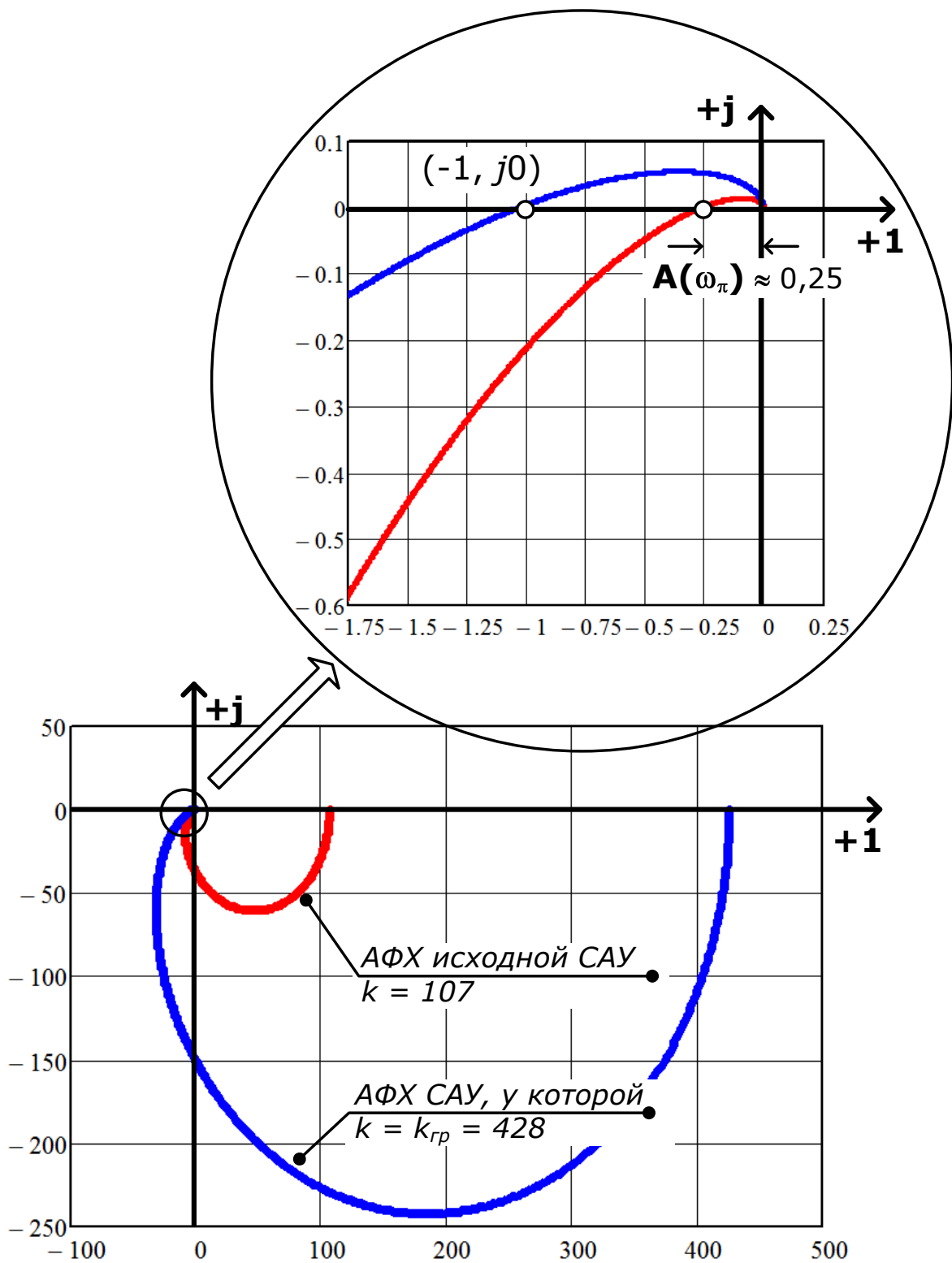


Рис. 100

Для удобства анализа графика в области точки  $[-1, j0]$  его фрагмент показан отдельно. Как видно, у САУ с исходным значением  $k$  модуль АФХ  $A(\omega_\pi) \approx 0,25$ , следовательно, по формуле (25)

$$k_{zp} \approx k \cdot \frac{1}{A(\omega_\pi)} = 107 \cdot \frac{1}{0,25} = 428.$$

Найденное значение  $k_{zp} = 428$  с удовлетворительной точностью совпадает с результатом расчета по ЛАЧХ ( $k_{zp} = 425,975$ ). Погрешности в расчетах обусловлены приближенным определением по графикам  $\Delta L$  и  $A(\omega_\pi)$ .

Как видно из рис. 100, при изменении коэффициента статического преобразования САУ до значения, равного  $k_{zp} = 428$ , АФХ САУ пройдет через точку с координатами  $[-1, j0]$ , а значит, в соответствии с критерием Найквиста для АФХ, соответствующая рассматриваемой разомкнутой САУ замкнутая система действительно окажется на границе устойчивости.

*Запасы устойчивости САУ по амплитуде  $\Delta L$  и фазе  $\Delta\varphi(\omega_c)$* , наряду с показателями, определяемыми по переходной характеристике (см. п. 2.3.2.), являются основными показателями качества управления.

### 5.3.2. Корневые оценки качества управления – степень устойчивости, колебательность САУ

Как следует из теоремы Ляпунова (см. п. 6.1), у устойчивой САУ все корни характеристического уравнения находятся в левой полуплоскости комплексной плоскости, т. е. *слева* от мнимой оси. Кроме оценки устойчивости по расположению корней дополнительно можно оценить характер переходного процесса САУ.

Расстояние от мнимой оси до ближайшего корня (или пары комплексно-сопряженных корней) называется *степенью устойчивости САУ*  $\eta$ . На рис. 101 показаны корни и определение степени устойчивости  $\eta$  для двух устойчивых САУ 5-го порядка. Для САУ с расположением корней, приведенным на рис. 101, *а*, ближайшим к мнимой оси оказался действительный корень, а на рис. 101, *б* – пара комплексно сопряженных корней.

Если ближайшим к мнимой оси является действительный корень (см. рис. 101, *а*), то приближенная зависимость между степенью устойчивости и временем переходного процесса имеет вид:

$$t_p \approx \frac{1}{\eta} \ln \frac{1}{\Delta},$$

где  $\Delta = 0,01 \dots 0,05$  – допустимая величина относительного отклонения, по которой определяется абсолютное отклонение  $\delta$  при расчете времени переходной характеристики САУ (см. *показатели быстродействия* в п. 2.3.2).

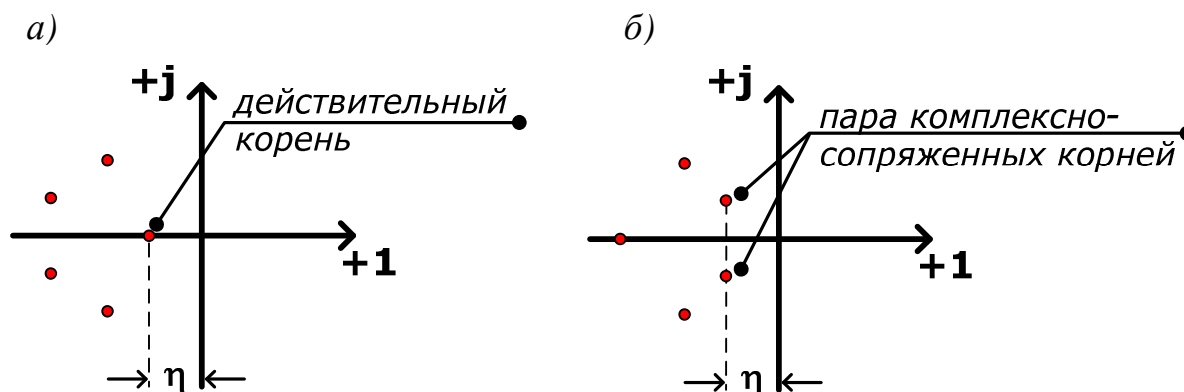


Рис. 101

Так, например, для  $\Delta = 0,05$  время переходного процесса составит:

$$t_p \approx \frac{1}{\eta} \ln \frac{1}{0,05} = \frac{3}{\eta}. \quad (26)$$

Для случая, когда к мнимой оси ближе всего расположена пара комплексно-сопряженных корней (см. рис. 101, б), справедливо неравенство

$$t_p \leq \frac{1}{\eta} \ln \frac{1}{\Delta}, \quad (27)$$

т. е. и в этом случае быстродействие САУ в какой-то мере определяется величиной степени устойчивости  $\eta$  [1, 3, 7].

**Важно!** Степень устойчивости САУ, несмотря на название, характеризует в первую очередь быстродействие системы, а не ее удаление от границы устойчивости. Для оценки удаления САУ от границы устойчивости используются запасы устойчивости по амплитуде  $\Delta L$  и фазе  $\Delta\varphi(\omega_c)$ .

Рассмотрим пример анализа быстродействия САУ с использованием степени устойчивости. Выберем для сравнения две устойчивые замкнутые САУ третьего порядка с передаточными функциями, соответственно,

$$W_1(p) = \frac{p+1}{p^3 + 3 \cdot p^2 + 3 \cdot p + 5} \quad \text{и} \quad W_2(p) = \frac{p+1}{0,25 \cdot p^3 + p^2 + p + 0,25}.$$

Характеристические уравнения замкнутых САУ получаются приравнением к нулю знаменателей их передаточных функций. Множества корней характеристических уравнений рассматриваемых САУ и их корни в



комплексной плоскости, найденные с использованием математического пакета Mathcad, показаны на рис. 102, а и 102, б соответственно. Видно, что для первой САУ ближе всего к мнимой оси оказалась пара комплексно-сопряженных корней, и, соответственно, степень устойчивости составила величину, равную модулю их общей действительной части:  $\eta = 0,206$ . У второй САУ все корни – действительные, и ближайший к мнимой оси корень определяет величину степени устойчивости:  $\eta = 0,382$ . Следовательно, с использованием формул (27) для первой и (26) для второй САУ, выбрав  $\Delta = 0,05$ , получим:

$$t_{p1} \leq \frac{1}{\eta} \ln \frac{1}{\Delta} = \frac{1}{0,206} \ln \frac{1}{0,05} = 14,542 \text{ с} \quad \text{и} \quad t_{p2} \approx \frac{3}{0,382} = 7,853 \text{ с}.$$

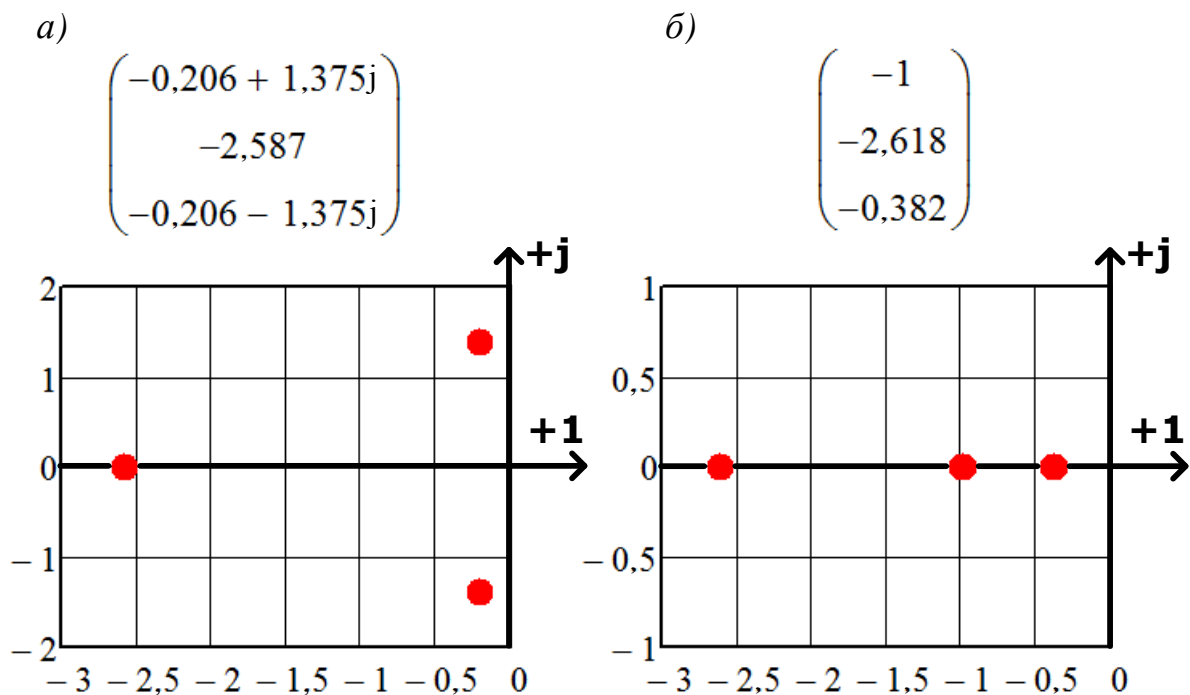


Рис. 102

Подтвердим результат анализа быстродействия по степени устойчивости построением переходных характеристик рассматриваемых САУ в специальном программном обеспечении моделирования систем по передаточным функциям VisSim. Как видно из рис. 103, а, конечное установившееся значение выходной величины для первой САУ  $y_6(t) \rightarrow y_\infty = 0,2$ . Следовательно, с учетом выбранной величины  $\Delta = 0,05$ , переходной процесс

можно считать завершившимся, когда  $y(t)$  достигает величины, отличающейся от 0,2 не более чем на величину  $\delta = \Delta \cdot y_{\infty} = 0,05 \cdot 0,2 = 0,01$ . По графику видно, что этому условию соответствует  $t = t_{p1} \approx 14,5$ . Найденная величина с удовлетворительной точностью совпадает с оценкой быстродействия по величине степени устойчивости  $\eta$ , выполненной выше.

Для второй САУ (см. рис. 103, б)  $y_6(t) \rightarrow y_{\infty} = 4$ , следовательно,  $\delta = \Delta \cdot y_{\infty} = 0,05 \cdot 4 = 0,2$ , т.е. переходной процесс можно считать завершившимся при  $t = t_{p2} \approx 7,8$ , что соответствует оценке быстродействия по величине степени устойчивости  $\eta$ , выполненной выше.

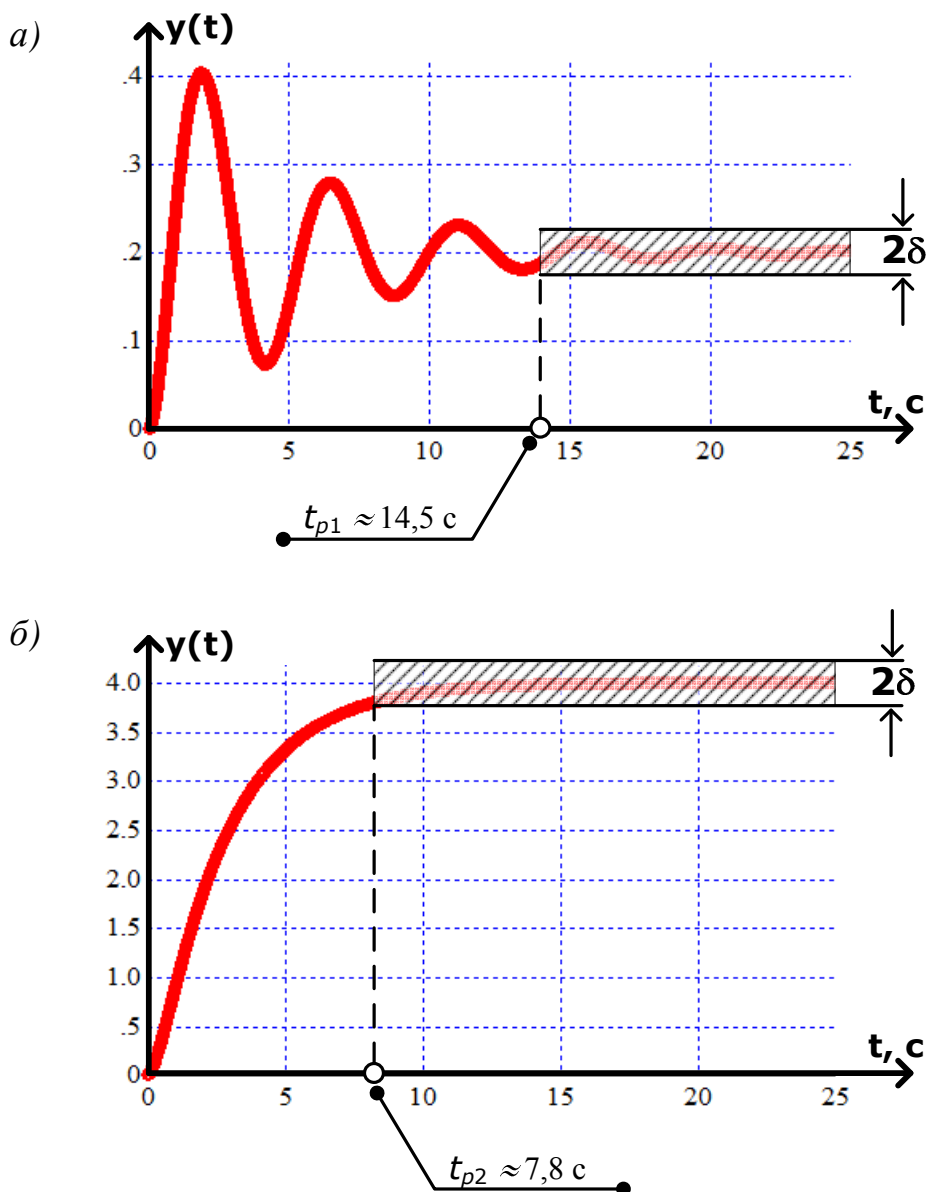


Рис. 103

Расположение корней характеристического уравнения в комплексной плоскости, помимо быстрогодействия, имеет связь с формой переходного процесса: если среди корней имеются комплексно сопряженные корни вида  $-p \pm j \cdot q$ , то переходной процесс системы имеет колебательную форму. Склонность системы к колебаниям характеризуется отношением коэффициента мнимой части корня  $q$  к действительной части  $p$  (обе величины берутся со знаком «плюс») и называется *колебательностью САУ*:

$$\mu = \frac{q}{p}. \quad (28)$$

**Важно!** Не следует путать параметр «колебательность САУ» с параметром «колебательность переходной характеристики САУ» (см. «Показатели качества управления» в п. 2.3.2).

Если среди корней характеристического уравнения САУ несколько пар комплексно сопряженных, то колебательность  $\mu$  рассчитывается по паре корней, ближайшей к мнимой оси.

Колебательность связана с таким показателем запаса устойчивости, как *затухание* переходного процесса САУ за период:

$$\gamma = \frac{A_1 - A_2}{A_1} = 1 - \frac{A_2}{A_1},$$

где  $A_1$  и  $A_2$  – амплитуда колебания в начале и конце периода  $T$  (рис. 104).

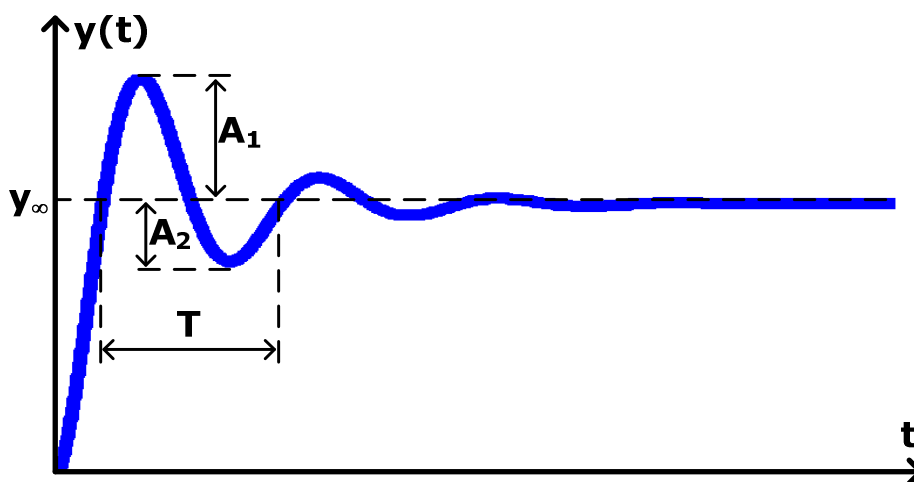


Рис. 104

Стандартным требованием к САУ является обеспечение  $\gamma$  не менее 90...98%, т. е. колебания переходного процесса должны практически полностью затухать уже за первый период.

С колебательностью величина затухания за период в долях связана соотношением

$$\mu = \frac{2\pi}{\ln\left(\frac{1}{1-\gamma}\right)}. \quad (29)$$

Из формулы (29) следует, что чем *меньше* величина колебательности  $\mu$ , тем *быстрее* затухают колебания переходного процесса. Так, например, если  $\gamma = 98\%$ , то по формуле (29) колебательность составит:

$$\mu = \frac{2\pi}{\ln\left(\frac{1}{1-0,98}\right)} = \frac{2\pi}{\ln(50)} \approx \frac{\pi}{2} = 1,57.$$

Соответственно, при  $\gamma = 90\%$  получаем  $\mu \approx 2,72$ . Из формулы (28) следует, что  $\mu$  будет тем меньше, чем больше  $p$  и меньше  $q$  у ближайшей к мнимой оси пары комплексно сопряженных корней САУ. Таким образом, чем дальше эта пара находится от мнимой оси и чем ближе располагаются корни к действительной оси, тем быстрее затухает переходной процесс [2, 7].

Для примера расположения корней САУ, показанного на рис. 102, *a*, колебательность  $\mu$  по формуле (28) составит:

$$\mu = \frac{q}{p} = \frac{1,375}{0,206} = 6,67,$$

что значительно больше полученных выше рекомендуемых для  $\mu$  значений 1,5...2,72. Как видно (см. рис. 103, *a*), переходной процесс этой САУ характеризуется малым затуханием. Для сравнения рассчитаем колебательность для САУ, расположение корней которой показано на рис. 78:

$$\mu = \frac{q}{p} = \frac{0,657}{0,525} = 1,25.$$

Полученное значение  $\mu = 1,25 < 1,5...2,72$ , следовательно, переходной процесс этой САУ должен затухать менее чем за период, что подтверждается его формой, показанной на рис. 79.

При проектировании систем обычно требуется обеспечить быстродействие не ниже заданного (степень устойчивости не меньше  $\eta_{min}$ ) и колебательность не выше заданной  $\mu_{max}$ . Эти условия ограничивают область расположения корней характеристического уравнения САУ на комплексной плоскости усеченным сектором (заштрихован на рис. 105). Гарантией выполнения требований по быстродействию и колебательности является выбор таких технических параметров устройств САУ, чтобы корни характеристического уравнения САУ попадали в ограниченную область [2, 7].

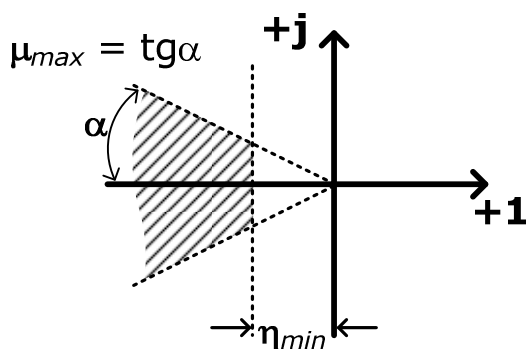


Рис. 105

## 6. Синтез систем автоматического управления

Как уже было рассмотрено в начале п. 4, синтез САУ – это процесс технического проектирования, целью которого является определение параметров и структуры САУ, которые обеспечивали бы желаемые показатели качества. Основными требованиями к качеству замкнутой САУ являются:

- точность управления в условиях действия возмущений;
- быстродействие;
- желаемый вид (форма) переходного процесса – реакции на задающее воздействие;
- *робастность* – обеспечение устойчивости и заданных показателей качества при всех допустимых отклонениях параметров модели объекта управления от номинальных значений.

*ПРИМЕРЫ условий робастной устойчивости САУ.*



Поскольку характеристики объекта управления и, как следствие, вид и постоянные его передаточной функции в процессе проектирования САУ изменить невозможно, задачи обеспечения требуемых показателей качества решаются выбором элементов и структуры САУ, а также синтезом регулятора [7, 16].

### 6.1. Общая постановка задачи синтеза регулятора

Рассмотрим пример структурной схемы замкнутой САУ, учитывающей возможное действие возмущения (рис. 106). Для учета действия возмущения в схему добавлен элемент сравнения – сумматор, на входы которого поступают управляющее воздействие  $z(t)$  и возмущение  $f(t)$ . Суммарное воздействие определяет состояние объекта управления, т. е. величину  $y(t)$ .

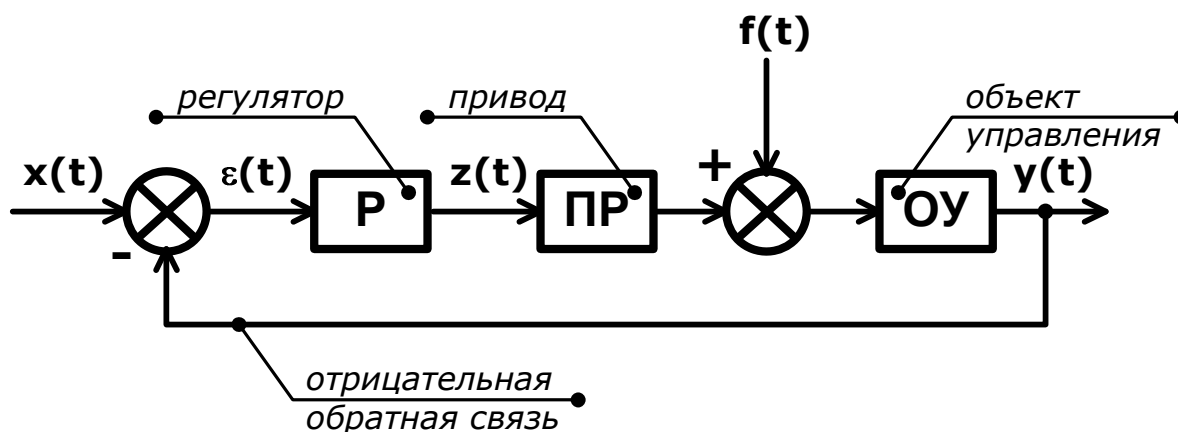


Рис. 106

До сих пор, рассматривая методы анализа САУ, мы пользовались линеаризованными моделями динамики, описывающими работу САУ при отсутствии помех. Основным видом такой модели является передаточная функция САУ  $W(p)$ , равная отношению операторных изображений по Лапласу выходной величины  $y(t)$  и задающего воздействия САУ  $x(t)$  при нулевых начальных условиях. Эту функцию еще называют передаточной функцией по каналу задающего воздействия, от входа  $x(t)$  к выходу  $y(t)$ .

Если рассматривать работу САУ в условиях действия возмущения  $f(t)$ , то динамику САУ придется описывать не только передаточной

функцией по каналу задающего воздействия, но и передаточной функцией по каналу возмущения, от входа  $f(t)$  к выходу  $y(t)$ :

$$W_f(p) = \frac{y(p)}{f(p)}.$$

Передаточная функция по каналу одного из входных воздействий получается в предположении, что второе входное воздействие равно нулю. Для САУ на рис. 106 при  $f(t) = 0$  схема САУ приобретает вид последовательного соединения трех элементов (регулятора, привода и объекта управления), охваченного единичной отрицательной обратной связью. Следовательно, передаточная функция этой САУ по каналу задающего воздействия имеет вид

$$W(p) = \frac{W_P(p) \cdot W_{\text{ПР}}(p) \cdot W_{\text{ОУ}}(p)}{1 + W_P(p) \cdot W_{\text{ПР}}(p) \cdot W_{\text{ОУ}}(p)}. \quad (30)$$

Аналогично, при  $x(t) = 0$  схема САУ имеет вид объекта управления, в обратную связь к которому включено последовательное соединение регулятора и привода. С точки зрения функции второго элемента сравнения эта обратная связь – положительная. Однако при  $x(t) = 0$  на выходе первого элемента сравнения будет сформирован сигнал

$$\varepsilon(t) = y_{\text{зо}}(t) - y(t) = k \cdot x(t) - y(t) = -y(t),$$

и, следовательно, регулятором будет сформировано управляющее воздействие  $z(t)$  со знаком «минус». Следовательно, при  $x(t) = 0$  обратная связь объекта управления становится отрицательной, т. е. передаточная функция САУ по каналу возмущения имеет вид:

$$W_f(p) = \frac{W_{\text{ОУ}}(p)}{1 + W_P(p) \cdot W_{\text{ПР}}(p) \cdot W_{\text{ОУ}}(p)}. \quad (31)$$

Для обеспечения заданных показателей качества необходимо спроектировать САУ так, чтобы она имела нужные передаточные функции  $W(p)$  и  $W_f(p)$ . Однако для коррекции вида передаточных функций  $W(p)$  и  $W_f(p)$  мы можем использовать только передаточную функцию регулятора  $W_P(p)$ , т. к. остальные элементы САУ заданы заранее, а значит, их передаточные функции неизменны. Такую систему называют системой с одной степенью свободы.

Легко проверить, что передаточные функции (30) и (31) связаны равенством

$$W_f(p) = [1 - W(p)] \cdot W_p(p),$$

следовательно, корректируя одну из них путем изменения  $W_p(p)$ , мы автоматически меняем и вторую. Желаемый вид передаточных функций  $W(p)$  и  $W_f(p)$  невозможно сформировать независимо, синтез регулятора всегда будет являться некоторым компромиссным решением.

Рассмотрим, можно ли в рассматриваемой САУ практически обеспечить нулевую величину рассогласования, т. е. точное воспроизведение входного сигнала на выходе САУ. Введем в рассмотрение еще одну передаточную функцию – по каналу рассогласования, от входа  $x(t)$  к выходу  $\varepsilon(t)$ . Эта передаточная функция равна

$$W_\varepsilon(p) = \frac{1}{1 + W_p(p) \cdot W_{\text{ПР}}(p) \cdot W_{\text{ОУ}}(p)}. \quad (32)$$

Для того чтобы величина рассогласования  $\varepsilon(t)$  была равна нулю, требуется, чтобы передаточная функция  $W_\varepsilon(p)$  была равна нулю. Но поскольку числитель дроби в формуле (32) – не ноль, получаем, что знаменатель должен обращаться в бесконечность. В процессе синтеза САУ мы можем влиять только на регулятор, поэтому получаем, что  $W_p(p) \rightarrow \infty$ . Таким образом, для уменьшения величины рассогласования необходимо увеличивать коэффициент статического преобразования (усиления) регулятора. Это так называемый *принцип глубокой обратной связи*.

Однако нельзя увеличивать  $k$  до бесконечности. Во-первых, все реальные устройства имеют предельно допустимые значения входных и выходных сигналов. Во-вторых, при увеличении значения  $k$  ухудшается качество переходных процессов, усиливается влияние возмущений, и, как было показано в п. 6.3, система может потерять устойчивость. Поэтому в схеме с одной степенью свободы этим методом обеспечить нулевую величину  $\varepsilon(t)$  невозможно.

Один из способов улучшить качество управления – изменить структуру САУ, добавив в нее второй регулятор. Например, в САУ, реализованной по комбинированному принципу, использовать два регулятора: один для обеспечения компенсации возмущений, второй – для прочих показателей качества управления. Поскольку передаточные функции этих регуляторов можно изменять независимо друг от друга, такая САУ будет иметь *две степени свободы* [7, 10, 15, 16].



## 6.2. Типовые законы автоматического регулирования

Закон автоматического регулирования – это дифференциальное уравнение (передаточная функция) регулятора, выражающее управляющее воздействие через входную величину. В зависимости от реализуемого принципа управления входной величиной регулятора может являться:

- задающее воздействие (для принципа разомкнутого управления);
- рассогласование (для принципа обратной связи, как в примере, рассмотренном в п. 7.1);
- задающее воздействие и возмущение (для принципа компенсации);
- рассогласование и возмущение (для комбинированного управления).

Рассмотрим типовые законы регулирования на примере регуляторов САУ, реализованной по принципу обратной связи, – в этом случае входной величиной регулятора является рассогласование  $\varepsilon(t)$ .

В современных АСУ ТП функции регулятора реализуются прикладной программой на уровне контроллера. Один промышленный контроллер может реализовывать до тысячи регуляторов. Наряду с этим локальные аппаратные регуляторы широко используются там, где не требуется столь мощного функционала.

Несмотря на развитые современные методы синтеза сложных регуляторов, подавляющее большинство промышленных систем управления основаны на регуляторах, реализующих закон автоматического регулирования первого и второго порядков. Эти регуляторы во многих случаях могут обеспечить приемлемое управление, легко настраиваются и дешевы при массовом изготовлении.

### 6.2.1. П-регулятор

Простейший регулятор – пропорциональный или *П-регулятор* – представляет собой усилительное звено, он реализует закон регулирования вида

$$z(t) = k_P \cdot \varepsilon(t),$$

где  $k_P$  – коэффициент статического преобразования пропорционального регулятора.

П-регуляторы применяются для управления любыми устойчивыми объектами при небольших изменениях задающих воздействий, однако он обеспечивает относительно медленные переходные процессы и, как было показано в п. 7.1, ненулевую статическую ошибку.

Рассмотрим пример синтеза П-регулятора для системы радиолокационного сопровождения, автоматически отслеживающей положение самолета или иного объекта (рис. 107). Электронный блок приемника сигнала вычисляет рассогласование  $\varepsilon(t)$  между угловым положением объекта  $\alpha(t)$  и направлением антенны  $\beta(t)$ . Усиленный сигнал рассогласования подается на привод антенны.

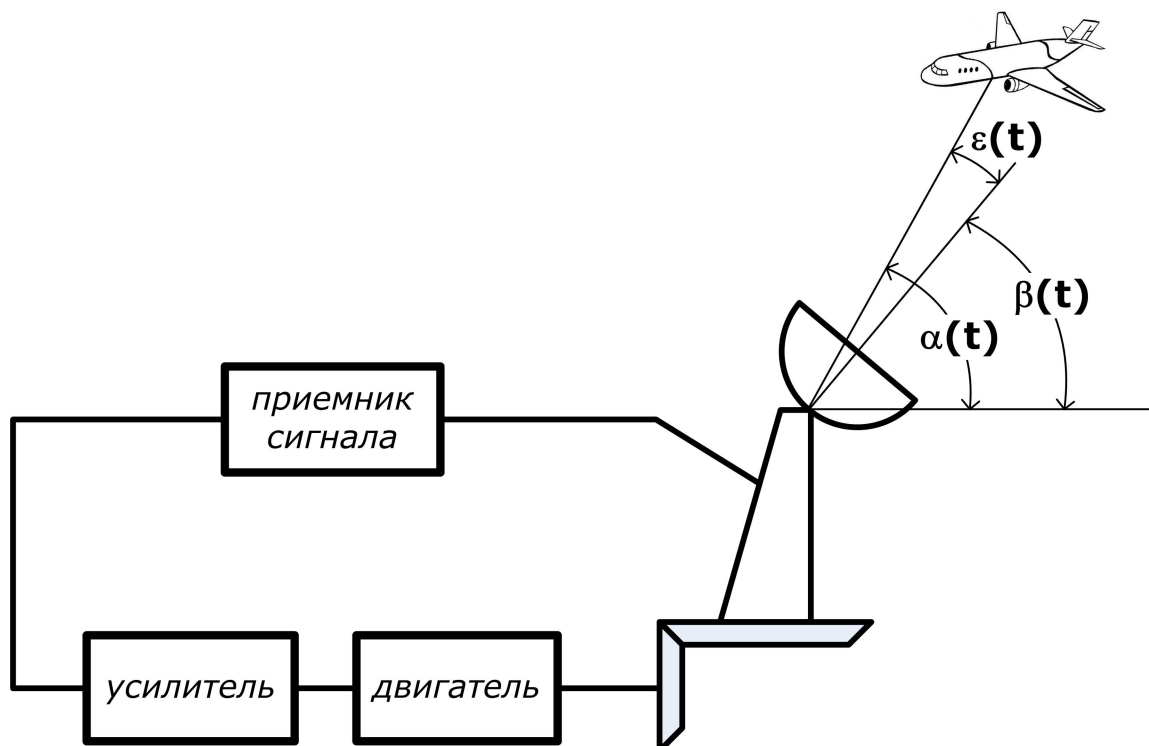


Рис. 107

Передаточная функция разомкнутой САУ, представляющей собой последовательное соединение П-регулятора (усилителя) и привода антенны, для рассматриваемого примера имеет вид:

$$W_{раз}(p) = k_p \cdot \frac{2}{p(p+1)(0,5p+1)}.$$

Пусть техническим заданием на проектирование САУ предусмотрен запас устойчивости по фазе  $\Delta\varphi(\omega_c)$ , равный  $50^\circ$ . Частотные характеристики исходной САУ для  $k_p = 1$  приведены на рис. 108.

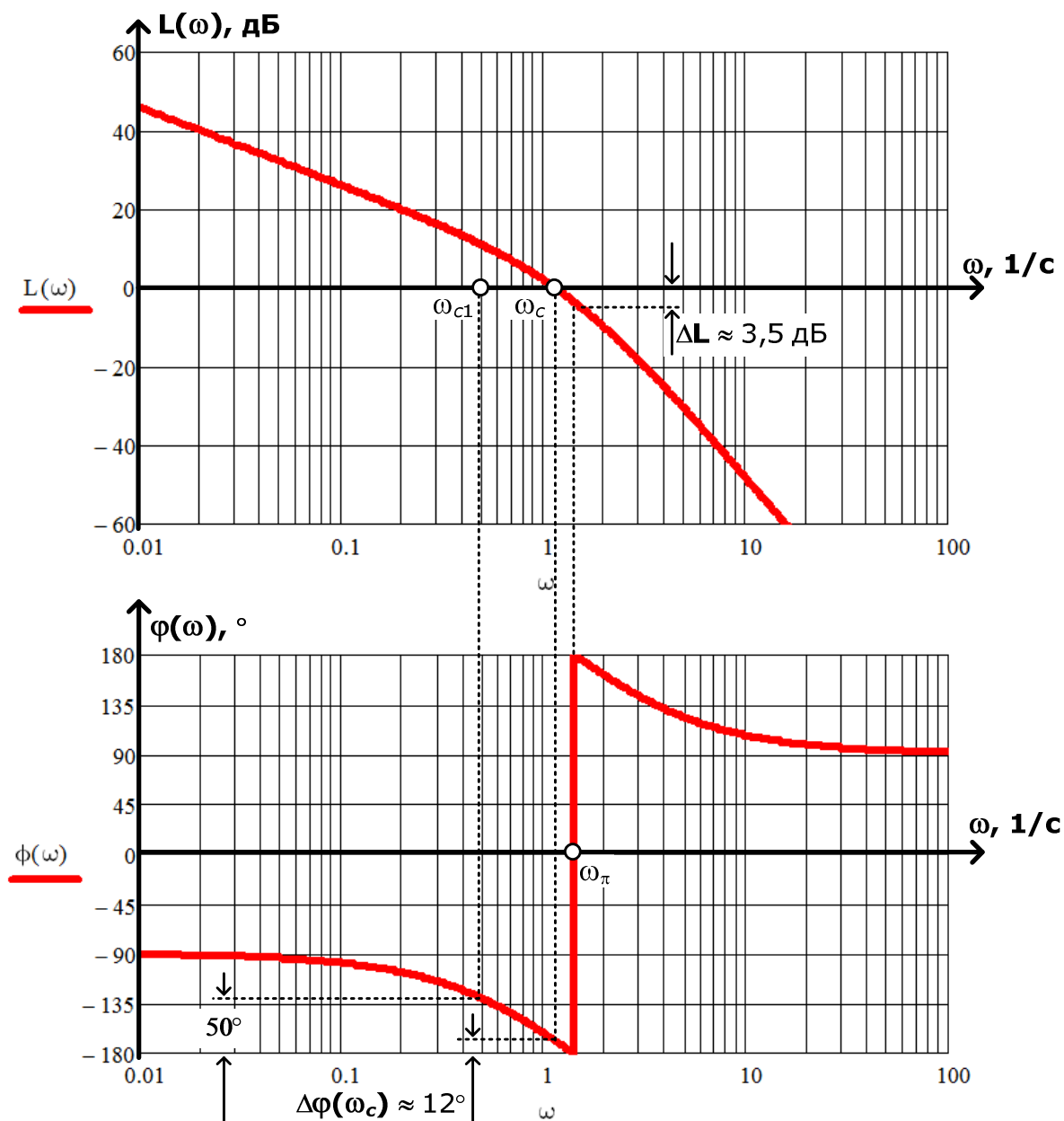


Рис. 108

Как видно из рис. 108, запас устойчивости по фазе  $\Delta\phi(\omega_c)$  приблизительно равен  $12^\circ$ , а запас по амплитуде  $\Delta L$  – около 3,5 дБ. Также по характеристикам на рис. 108 видно, что для выполнения условия синтеза регулятора  $\Delta\phi(\omega_c) = 50^\circ$  частота среза САУ должна составлять приблизительно  $0,5 \text{ с}^{-1}$  ( $\omega_{c1}$  на рис. 108). Обеспечить такое значение частоты среза можно путем изменения коэффициента статического преобразования САУ, т. е. в условиях задачи синтеза регулятора – выбором необходимого значения  $k_P$  (напомним, что изменение коэффициента статического преобразования не влияет на ЛФЧХ – см. примеры в п. 6.3.1).

Для рассматриваемого случая (см. рис. 108)

$$L(\omega_{c1}) = 20 \cdot \lg[A(\omega_{c1})] \approx 11;$$

$$\lg[A(\omega_{c1})] = \frac{11}{20} = 0,55;$$

$$A(\omega_{c1}) = 10^{0,55} = 3,548;$$

$$k_P = \frac{1}{A(\omega_{c1})} = \frac{1}{3,548} = 0,282.$$

Для обеспечения  $\Delta\varphi(\omega_c) = 50^\circ$  для САУ в этом примере следует выбрать П-регулятор с коэффициентом статического преобразования, равным 0,282. Поставленная задача синтеза регулятора решена.

Рассмотренный способ синтеза П-регулятора также называют *коррекцией* САУ путем изменения коэффициента статического преобразования.

Для более детального исследования влияния коэффициента статического преобразования П-регулятора на характеристики САУ для рассматриваемого примера были заданы запасы устойчивости по фазе, равные  $35^\circ$  и  $65^\circ$ . Этим значениям соответствуют значения  $k_{P1} = 0,455$  и  $k_{P2} = 0,158$ . Переходные характеристики для всех трех значений коэффициента статического преобразования регулятора показаны на рис. 109.

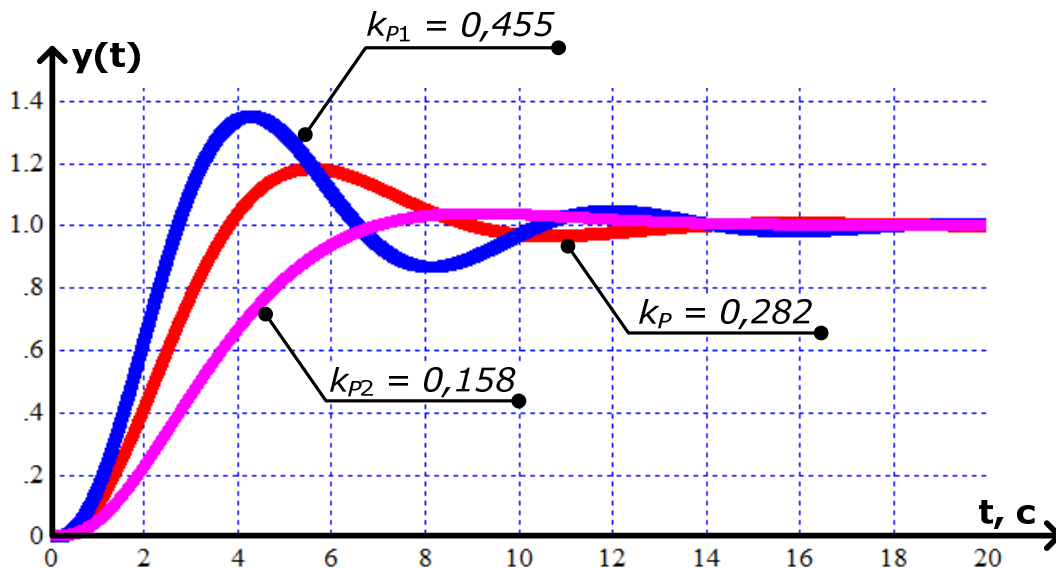


Рис. 109

Видно (см. рис. 109), что уменьшение коэффициента статического преобразования регулятора положительно сказывается на форме переходной характеристики – величина максимального «выброса» и колебательность уменьшаются. Но при этом ухудшается быстродействие САУ – растет время установления и время переходного процесса.

Также следует отметить, что с уменьшением  $k_P$  уменьшается точность управления – как было показано в п. 7.1, применение П-регулятора в принципе дает ненулевую статическую ошибку, за исключением идеального случая  $k_P \rightarrow \infty$ , т. е. с уменьшением  $k_P$  статическая ошибка растет [15, 17].

### 6.2.2. ПИД-регулятор

Улучшение качества управления с использованием П-регулятора можно добиться введением производной и интеграла в закон регулирования. Введение в закон регулирования интегрирования величины рассогласования

$$z(t) = k_P \cdot \varepsilon(t) + k_I \cdot \int \varepsilon(t) dt ,$$

т. е. использование регулятора с передаточной функцией вида

$$W_P(p) = k_P + \frac{k_I}{p}$$

позволяет обеспечить отсутствие статической ошибки в установившемся режиме. Такой регулятор называется пропорционально-интегральным, или *ПИ-регулятором*. Интегрирующее звено в составе ПИ-регулятора формирует сигнал, пропорциональный *накопленной* ошибке (рассогласованию), поэтому переходной процесс САУ несколько замедляется. Однако за счет интегрирования обеспечивается нулевая ошибка в установившемся состоянии и при ступенчатом возмущении, и при ступенчатом изменении задающего воздействия. Благодаря наличию интеграла от величины рассогласования такой регулятор обеспечивает астатические свойства САУ, так как даже при незначительной величине рассогласования интегрирование обеспечит увеличение (накопление) управляющего воздействия до величины, достаточной для воздействия на регулируемый орган и сведения к нулю рассогласования. Это легко доказать математически: если предположить, что в установившемся состоянии  $\varepsilon = D_{cm} = \text{const} \neq 0$ , то интеграл должен стремиться к бесконечности, что в реальных условиях невозможно.

При отклонении регулируемой величины от заданного значения ПИ-регулятор в начальный момент времени изменяет управляющее воздействие пропорционально рассогласованию (пропорциональная составляющая), а затем постепенно увеличивает управляющее воздействие за счет интегральной составляющей. Физически интегральная составляющая

представляет задержку реакции регулятора на изменение величины рассогласования, внося в систему дополнительную инерционность, что может быть полезно для объектов управления с большой чувствительностью. ПИД-регуляторы применяются для управления объектами при больших, но плавных изменениях задающих воздействий.

Для ускорения переходных процессов в закон регулирования добавляют дифференцирование рассогласования:

$$z(t) = k_P \cdot \varepsilon(t) + k_D \cdot \frac{d\varepsilon(t)}{dt},$$

т. е. реализуют регулятор с передаточной функцией, имеющей в своем составе, кроме усилительного и интегрирующего звена, еще и дифференцирующее звено:

$$W_P(p) = k_P + \frac{k_I}{p} + k_D \cdot p.$$

Физически реализовать идеальное дифференцирующее звено затруднительно, поэтому вместо «чистого» дифференцирования используют дифференцирующее звено с замедлением:

$$W_P(p) = k_P + \frac{k_I}{p} + \frac{k_D \cdot p}{T_D \cdot p + 1}.$$

Такой регулятор называется *ПИД-регулятором* (пропорционально-интегрально-дифференциальный). Регуляторы этого типа очень хорошо зарекомендовали себя в практических задачах. Иногда используются ПД-регуляторы (пропорционально-дифференциальные), у которых в законе регулирования есть дифференциальная, но нет интегральной составляющей.

Управление по производной – это быстрый способ управления. Сигнал дифференцирования наиболее важен при изменениях входных воздействий и исчезает в установившемся режиме. Он позволяет реагировать не на само увеличение рассогласования, а на *тенденцию* его изменения. Такой регулятор, по сравнению с пропорциональным, оказывает на объект управления большее воздействие, если входная величина изменяется с большой скоростью, т. е. реагирует не только на величину рассогласования, но и на скорость его изменения. Регулятор как бы предвещает дальнейшее изменение регулируемой величины и благодаря этому устраняет рассогласование более быстро и плавно.

ПД и ПИД-регуляторы обеспечивают высокое качество регулирования инерционных объектов и в тех случаях, когда задающее воздействие изменяется часто и быстро.

В рассмотренных случаях синтез регулятора сводится к выбору закона регулирования и расчету параметров настройки регулятора –  $k_P$ ,  $k_I$ ,  $k_D$  и  $T_D$ . Кроме того, промышленные регуляторы нуждаются в корректировке параметров настройки в процессе работы. Это связано с естественными изменениями характеристик объектов управления и управляющих устройств, состава и свойств технологического сырья и т. д. Преодолеть названные проблемы и улучшить качество управления можно с помощью систем диагностики и автоматической настройки регуляторов, реализуемой на основе промышленных программируемых контроллеров [2, 7, 15].

### 6.3. Синтез регулятора методом коррекции логарифмических частотных характеристик

Данный метод широко используется для синтеза регуляторов. Он основан на следующих свойствах ЛАЧХ и ЛФЧХ:

- ЛАЧХ и ЛФЧХ *последовательного* соединения звеньев равны *сумме* ЛАЧХ и ЛФЧХ этих звеньев;
- если САУ устойчива, то ее ЛАЧХ однозначно определяет ЛФЧХ, т. е. выбор регулятора можно свести к изменению нужным образом только одной характеристики – ЛАЧХ.

*ПРИМЕР* последовательной коррекции.



Для примера, приведенного на рис. 106, передаточная функция исходной разомкнутой САУ, т. е. САУ без регулятора, по каналу задающего воздействия имеет вид:

$$W_{исх}(p) = W_{ПР}(p) \cdot W_{ОУ}(p).$$

По передаточной функции исходной системы можно построить ее асимптотическую ЛАЧХ. Если мы сможем определить *желаемую* ЛАЧХ, т. е. ЛАЧХ системы, обеспечивающей заданные показатели качества, то

разница между этими двумя характеристиками и будет ЛАЧХ необходимого последовательного регулятора:

$$L_p(\omega) = L_{жел}(\omega) - L_{исх}(\omega),$$

а по виду ЛАЧХ в асимптотической форме легко определить передаточную функцию регулятора.

Напомним, что основными требованиями к качеству управления являются:

- устойчивость САУ;
- точность САУ (нулевая статическая ошибка управления);
- быстрый и плавный (в идеале – монотонный) переходной процесс.

Кроме этого, система должна обладать робастностью и подавлять шумы.

Рассмотрим, как эти требования можно связать с формой асимптотической ЛАЧХ желаемой САУ.

Как было показано в п. 7.2.2, для обеспечения нулевой статической ошибки закон регулирования должен содержать интегральную составляющую, т. е. в составе регулятора должно быть интегрирующее звено. Монотонный переходной процесс без перерегулирования обеспечивает апериодическое звено первого порядка. Асимптота ЛАЧХ апериодического звена первого порядка имеет наклон  $-20$  дБ/дек.

Любая ЛАЧХ пересекает ось частот на частоте среза  $\omega_c = 1/T$ . Для апериодического звена время переходного процесса примерно равно  $3T$ , т. е. частота среза звена определяет время переходного процесса (быстродействие САУ). Вспомним, что устойчивость системы также определяется поведением ЛАЧХ в районе частоты среза. В результате имеем:

- для получения качественного переходного процесса желательно, чтобы наклон ЛАЧХ около частоты среза был равен  $-20$  дБ/дек;
- если задано время переходного процесса  $t_p$ , то подобрать ЛАЧХ следует так, чтобы ее частота среза  $\omega_c = 3/t_p$ .

Шумами называются высокочастотные возмущения САУ. Кроме того, обычно именно в области высоких частот характеристики объекта и модели могут сильно расходиться, т. е. качество управления с точки зрения робастности и подавления шумов определяется областью высоких частот ЛАЧХ. Для подавления помех и уменьшения влияния ошибок модели нужно по возможности уменьшать усиление системы в области высоких частот, т. е. ЛАЧХ в этой области должна иметь значительный отрицательный наклон ( $-40 \dots -60$  дБ/дек).



На рис. 110 показан пример типовой асимптотической желаемой ЛАЧХ. В выделенных точках стыкуются отрезки разного наклона. Наклон в области низких частот составляет  $-20$  дБ/дек, т. е. желаемая САУ имеет в своем составе интегрирующее звено и степень ее астатизма равна 1, что обеспечивает нулевую статическую ошибку управления. Для обеспечения устойчивости и приемлемого показателя колебательности САУ ( $\mu < 1,2$ ) точки излома ЛАЧХ должны находиться на расстоянии  $12 \dots 16$  дБ от оси частот.

Форма желаемой ЛАЧХ в области низких частот (см. рис. 110) определяет статическую точность САУ, в области средних частот – устойчивость и показатели качества переходного процесса, в области высоких частот – эффективность подавления высокочастотных возмущений и робастность.

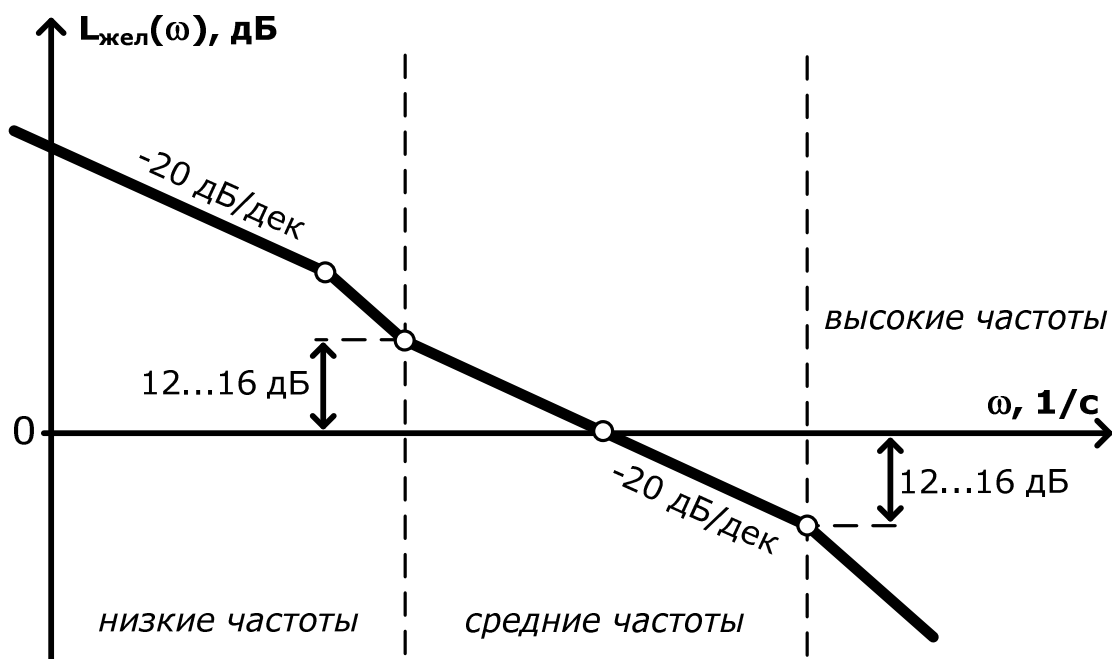


Рис. 110

Рассмотрим пример синтеза регулятора САУ методом коррекции ЛАЧХ. Пусть передаточная функция исходной *разомкнутой* САУ имеет вид:

$$W_{исх}(p) = \frac{1}{5p + 1}.$$

Для заданной САУ необходимо выбрать регулятор, который обеспечивал бы следующие показатели качества управления:

- нулевую статическую ошибку управления;
- время переходного процесса не более 1,5 с;
- наклон ЛАЧХ в области высоких частот, равный  $-40$  дБ/дек, для подавления высокочастотных возмущений (шумов).

Рассмотрим передаточную функцию исходной замкнутой САУ без коррекции, т. е. с регулятором  $W_p(p) = 1$ . В этом случае замкнутая САУ представляет собой исходную разомкнутую САУ с общей единичной обратной связью, и ее передаточная функция равна

$$W_{исх\ зам}(p) = \frac{1}{1 + \frac{1}{5p+1}} = \frac{5p+1}{5p+2} = \frac{0,5}{2,5p+1}. \quad (33)$$

Как видно из конечной формы выражения (33), коэффициент статического преобразования исходной замкнутой САУ равен 0,5. В этом случае при подаче на вход, например, единичной ступеньки выходная величина после завершения переходного процесса будет иметь значение 0,5, т. е. величина статической ошибки управления составит 50%. Кроме того, выражение (33) соответствует передаточной функции апериодического звена первого порядка, следовательно, время переходного процесса исходной замкнутой САУ составит приблизительно  $3 \cdot 2,5 = 7,5$  с. Таким образом, исходная САУ требованиям к заданным показателям качества не удовлетворяет.

Построим ЛАЧХ корректирующего регулятора САУ. Для этого определим параметры ЛАЧХ так, чтобы они удовлетворяли требуемым показателям качества:

- 1) для обеспечения нулевой статической ошибки управления желаемая ЛАЧХ должна иметь наклон  $-20$  дБ/дек в области низких частот;
- 2) для обеспечения требуемого быстродействия частота среза желаемой ЛАЧХ должна составлять  $\omega_c = 3/t_p = 3/1,5 = 2 \text{ с}^{-1}$ ;
- 3) для подавления высокочастотных возмущений на высоких частотах нужно изменить наклон ЛАЧХ с  $-20$  на  $-40$ .

Первым двум условиям удовлетворяет ЛАЧХ идеального интегрирующего звена с передаточной функцией вида  $k/p$ , где  $k$  следует выбрать по условию:  $k = \omega_c = 2 \text{ с}^{-1}$  (ЛАЧХ идеального интегрирующего звена имеет вид прямой линии с наклоном  $-20$  дБ/дек, пересекающей ось частот при  $\omega = k$ ).

Для выполнения 3-го условия необходимо определить граничную частоту диапазона высоких частот  $\omega_g$ , задавшись конкретным значением ЛАЧХ для этой частоты из стандартного диапазона значений определения точки излома (см. рис. 110). Выберем  $L_{жел}(\omega_g) = -15$  дБ и запишем условие для определения  $\omega_g$ :

$$20 \cdot \lg[A(\omega_g)] = -15 \text{ дБ.} \quad (34)$$

С учетом того, что до  $\omega_g$  желаемая ЛАЧХ соответствует ЛАЧХ идеального интегрирующего звена с передаточной функцией  $\omega/p = 2/p$ , определим модуль частотной передаточной функции  $A(\omega)$ :

$$W(p) = \frac{2}{p} \Rightarrow W(j\omega) = \frac{2}{j\omega} = \frac{2 \cdot j\omega}{-\omega^2} = -\frac{2}{\omega} j;$$

$$W(j\omega) = P(\omega) + j \cdot Q(\omega);$$

$$P(\omega) = 0; Q(\omega) = -\frac{2}{\omega};$$

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)} = \sqrt{\left(-\frac{2}{\omega}\right)^2} = \frac{2}{\omega}.$$

Определим значение  $\omega_g$  по условию (34):

$$20 \cdot \lg[A(\omega_g)] = 20 \cdot \lg\left[\frac{2}{\omega_g}\right] = -15;$$

$$\frac{2}{\omega_g} = 10^{-\frac{15}{20}} = 0,178;$$

$$\omega_g = \frac{2}{0,178} = 11,236.$$

Итак, мы определили все параметры, необходимые для построения желаемой ЛАЧХ. На рис. 111 показана ЛАЧХ исходной *разомкнутой* САУ, ЛАЧХ желаемой САУ и ЛАЧХ регулятора, полученная вычитанием ЛАЧХ исходной САУ из желаемой ЛАЧХ.

Остается по виду ЛАЧХ регулятора определить его передаточную функцию как функцию последовательного соединения типовых элементарных звеньев. Первая асимптота ЛАЧХ регулятора имеет наклон  $-20$  дБ/дек (см рис. 111), следовательно, в составе регулятора присутствует

идеальное интегрирующее звено. Наклон ЛАЧХ после первой частоты сопряжения равен нулю, т. е. начальный наклон после частоты сопряжения изменился на +20 дБ/дек, что соответствует дифференцирующему звену первого порядка. После второй частоты сопряжения наклон ЛАЧХ составляет -20 дБ/дек, т. е. предыдущий нулевой наклон изменился на -20 дБ/дек. Это изменение наклона соответствует аperiodическому звену первого порядка. Таким образом, передаточная функция регулятора в общем виде:

$$W_p(p) = k \cdot \frac{(T_1 \cdot p + 1)}{p \cdot (T_2 \cdot p + 1)}$$

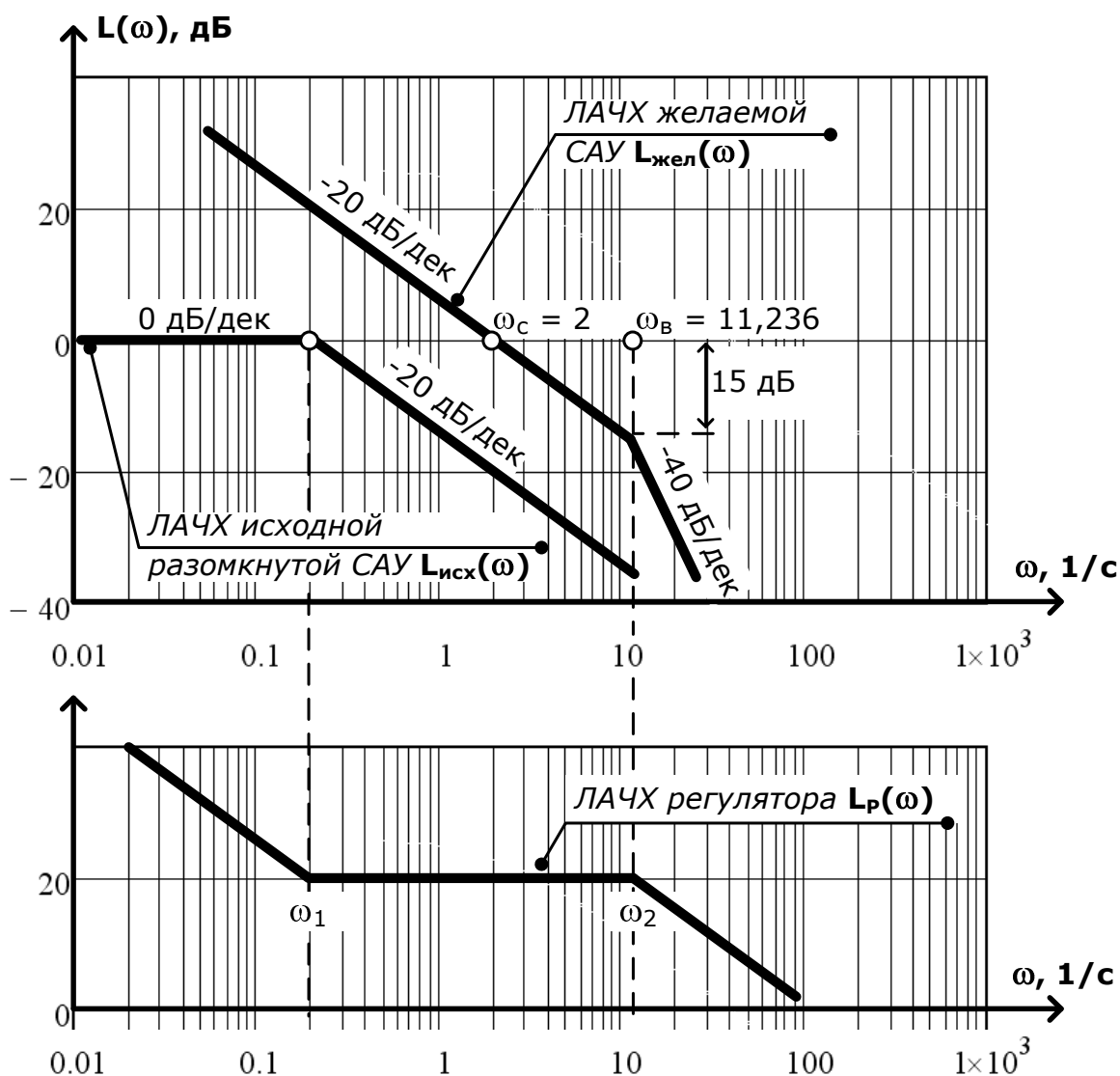


Рис. 111

Определим постоянные времени звеньев через частоты сопряжения ЛАЧХ регулятора  $\omega_1$  и  $\omega_2$  (см. рис. 111):

$$T_1 = \frac{1}{\omega_1} = \frac{1}{0,2} = 5 \text{ с};$$

$$T_2 = \frac{1}{\omega_2} = \frac{1}{11,236} = 0,089 \text{ с}.$$

Определим коэффициент статического преобразования регулятора  $k$  по высоте проведения первой асимптоты ЛАЧХ регулятора. Определим по графику высоту проведения для частоты, равной  $\omega_1$  (см. рис. 111):

$$L_P(\omega_1) = L_P(0,2) = 20 \text{ дБ},$$

следовательно,

$$20 \cdot \lg\left(\frac{k}{\omega^v}\right) = 20 \cdot \lg\left(\frac{k}{0,2^1}\right) = 20 \text{ дБ};$$

$$\lg\left(\frac{k}{0,2}\right) = 1 \Rightarrow \frac{k}{0,2} = 10^1 \Rightarrow k = 2.$$

Найденная передаточная функция регулятора имеет вид:

$$W_P(p) = 2 \cdot \frac{(5 \cdot p + 1)}{p \cdot (0,089 \cdot p + 1)}.$$

Передаточная функция разомкнутой САУ с регулятором имеет вид:

$$W(p) = W_{исх}(p) \cdot W_P(p) = \frac{1}{(5p + 1)} \cdot 2 \cdot \frac{(5 \cdot p + 1)}{p \cdot (0,089 \cdot p + 1)};$$

$$W(p) = \frac{2}{p \cdot (0,089 \cdot p + 1)},$$

а передаточная функция замкнутой САУ с регулятором:

$$W_{зам}(p) = \frac{\frac{2}{p \cdot (0,089 \cdot p + 1)}}{1 + \frac{2}{p \cdot (0,089 \cdot p + 1)}} = \frac{1}{0,045p^2 + 0,5p + 1}. \quad (35)$$

На рис. 112 показаны переходные процессы при единичном ступенчатом воздействии исходной замкнутой САУ с передаточной функцией (33) и замкнутой САУ с рассчитанным выше регулятором – конечный вид ее передаточной функции соответствует (35). Графики показывают, что найденный регулятор значительно «ускорил» переходной процесс (время переходного процесса не превышает заданных 1,5 с) и обеспечил нулевую статическую ошибку (установившееся значение для САУ с регулятором равно 1). Задача выбора регулятора по заданным показателям качества управления решена.

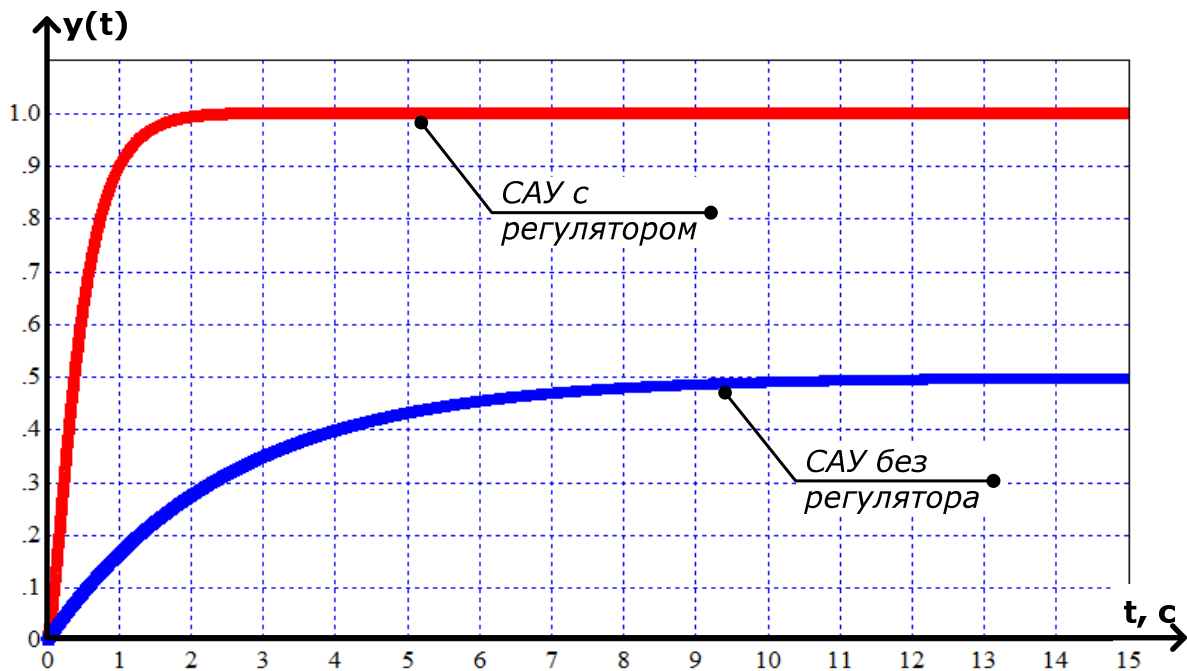


Рис. 112

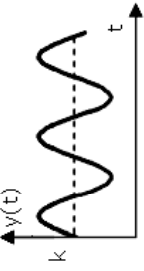
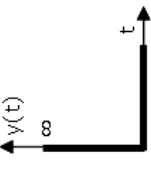
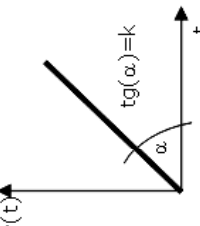
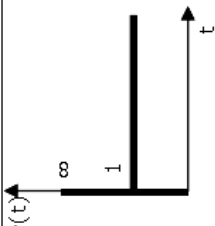
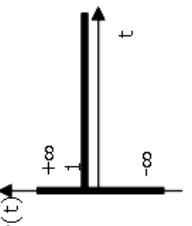
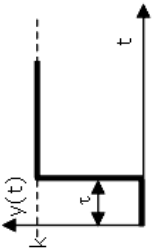
## Литература

1. Анхимюк, В.Л. Теория автоматического управления. / В.Л. Анхимюк, О.Ф. Опейко, Н.Н. Михеев; под ред. В.Л. Анхимюк. – Минск: Дизайн ПРО, 2000. – 352 с.
2. Бесекерский, В.А. Теория систем автоматического управления / В.А. Бесекерский, Е.П. Попов. – СПб.: Профессия, 2003. – 752 с.
3. Андрищенко, В.А. Теория систем автоматического управления / В.А. Андрищенко. – Л.: ЛГУ, 1990. – 256 с.
4. Проектирование систем автоматизации технологических процессов: справочное пособие / А.С. Ключев [и др.]. – М.: Энергоатомиздат, 1990. – 464 с.
5. Техника чтения схем автоматического управления и технологического контроля / А.С. Ключев [и др.]. – М.: Энергоатомиздат, 1991. – 432 с.
6. Фёдоров, Ю.Н. Справочник инженера по АСУ ТП: проектирование и разработка: учеб.-практ. пособие / Ю.Н. Фёдоров. – М.: Инфра-Инженерия, 2008. – 928 с.
7. Поляков, К.Ю. Теория автоматического управления для «чайников» / К.Ю. Поляков // Преподавание, наука и жизнь [Электронный ресурс]. – 2009. – Режим доступа: <http://kpolyakov.narod.ru/uni/teapot.htm>. – Дата доступа: 01.06.2011.
8. Тихонов, А.И. Теория автоматического управления: курс лекций / А.И. Тихонов. – Иваново: ИГЭУ, 2002. – 188 с.
9. Яковлев, А.В. Система стабилизации частоты вращения электродвигателя: лабораторная работа по курсу «Технические средства САУ» / А.В. Яковлев. – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2007. – 24 с.
10. Зайцев, Г.Ф. Теория автоматического управления и регулирования / Г.Ф. Зайцев. – К.: Выща шк., 1989. – 431 с.
11. Туманов, М.П. Теория управления. Теория линейных систем автоматического управления: учеб. пособие / М.П. Туманов. – М.: МГИЭМ, 2005. – 82 с.
12. Кузьменко, Н.В. Конспект лекций по дисциплине «Автоматизация технологических процессов и производств»: учеб. пособие / Н.В. Кузьменко. – Ангарск: АГТА, 2005. – 77 с.
13. Динамический звенья. Временные характеристики: учеб. пособие / А.В. Беспалов [и др.]. – М.: РХТУ им. Д.И. Менделеева, 2001. – 80 с.
14. Савин, М.М. Теория автоматического управления: учеб. пособие / М.М. Савин, В.С. Елсуков, О.Н. Пятина. – Ростов н/Д: Феникс, 2007. – 469 с.
15. Филлипс, Ч. Системы управления с обратной связью / Ч. Филлипс, Р. Харбор. – М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2001. – 616 с.
16. Дорф, Р. Современные системы управления / Р. Дорф, Р. Бишоп. – М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2002. – 832 с.
17. Гудвин, Г.К. Проектирование систем управления / Г.К. Гудвин, С.Ф. Греббе, М.Э. Сальгадо. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2004. – 911 с.

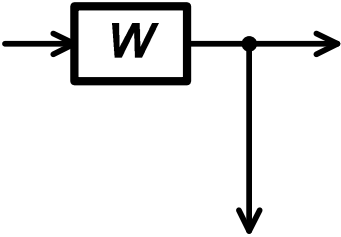
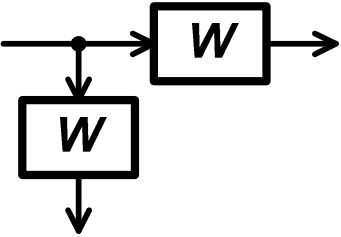
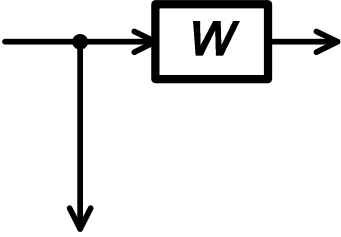
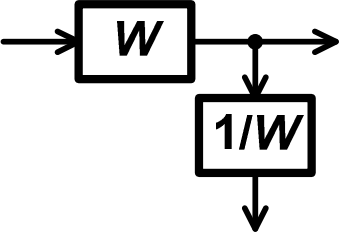
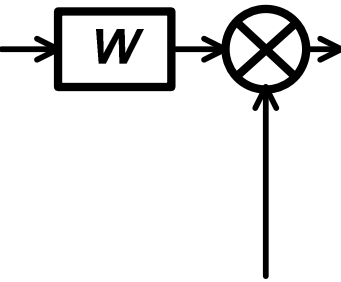
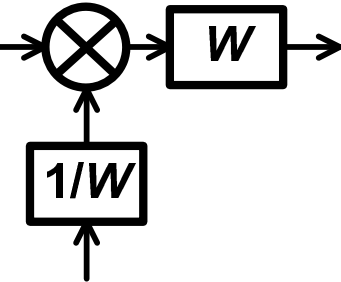
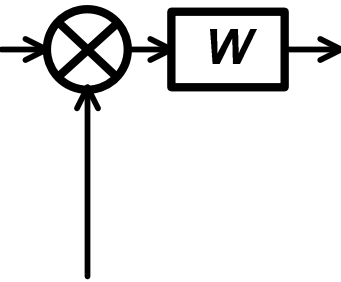
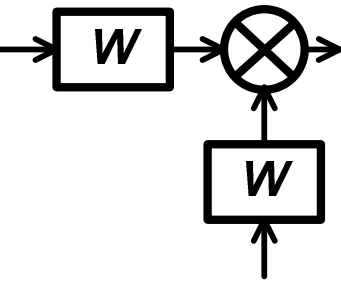
## ПРИЛОЖЕНИЕ 1. Типовые элементарные звенья

Тип звена	Дифференциальное уравнение	Передаточная функция $W(p)$	Переходная характеристика для $x(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0; \\ 0, & t < 0; \end{cases}$	Примечания
Усилительное безынерционное	$y(t) = kx(t)$	$k$		$k$ – коэффициент усиления звена; При подаче на вход ступенчатого воздействия соответствующее значение выходной величины устанавливается мгновенно.
Апериодическое первого порядка (устойчивое)	$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = kx(t)$	$\frac{k}{Tp + 1}$		$k$ – коэффициент усиления звена; $T$ – постоянная времени звена; Постоянная времени определяется как проекция касательной на линию установившегося значения. Время переходного процесса $t_p \approx 3T$ ; Величина, обратная постоянной времени называется <b>частотой среза</b> звена $\omega_c$ .
Апериодическое первого порядка (неустойчивое)	$T \frac{dy(t)}{dt} - y(t) = kx(t)$	$\frac{k}{Tp - 1}$		$k$ – коэффициент усиления звена; $T$ – постоянная времени звена; Величина, обратная постоянной времени называется <b>частотой среза</b> звена $\omega_c$ .
Апериодическое второго порядка	$T_2^2 \frac{d^2y(t)}{dt^2} + T_1 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = kx(t)$ $= kx(t), T_1 > 2T_2$	$\frac{k}{(T_2^2 p^2 + T_1 p + 1)}$ $= \frac{k}{(Tp + 1)(T_1 p + 1)}$ , $T_{3\lambda} = \frac{T_1}{2} \pm \sqrt{\frac{T_1^2}{4} - T_2^2}$		$k$ – коэффициент усиления звена; $T_1, T_2$ – постоянные времени звена. Величина, обратная постоянной времени $T_2$ называется <b>частотой среза</b> звена $\omega_c$ . Звено сводится к последовательному соединению двух апериодических звеньев первого порядка. Переходная характеристика имеет точку перегиба.
Коллебатльное устойчивое	$T_2^2 \frac{d^2y(t)}{dt^2} + T_1 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = kx(t)$ , $(T_1 < 2T_2)$ или $T^2 \frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\xi T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = kx(t)$	$\frac{k}{(T_2^2 p^2 + T_1 p + 1)}$ ИЛИ $\frac{k}{(T^2 p^2 + 2\xi T p + 1)}$		$k$ – коэффициент усиления звена; $T_1, T_2 = T$ – постоянные времени звена; Величина, обратная постоянной времени $T_2$ ( $T$ ) называется <b>частотой среза</b> звена $\omega_c$ . Величина $\xi = T_1/2T_2 = T_1/2T$ называется <b>коэффициентом затухания</b> , $\xi < 1$ . Амплитуда колебаний переходной характеристики затухает по экспоненте.
Коллебатльное неустойчивое	$T_2^2 \frac{d^2y(t)}{dt^2} - T_1 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = kx(t)$ или $T^2 \frac{d^2y(t)}{dt^2} - 2\xi T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = kx(t)$	$\frac{k}{(T_2^2 p^2 - T_1 p + 1)}$ ИЛИ $\frac{k}{(T^2 p^2 - 2\xi T p + 1)}$		$k$ – коэффициент усиления звена; $T_1, T_2 = T$ – постоянные времени звена; Величина, обратная постоянной времени $T_2$ ( $T$ ) называется <b>частотой среза</b> звена $\omega_c$ .



Колебательное гармоническое	$T_2^2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + y(t) = kx(t)$	$\frac{k}{(T_2^2 p^2 + 1)}$		<p><math>k</math> – коэффициент усиления звена;  <math>T_2</math> – постоянная времени звена;  Величина, обратная постоянной времени <math>T_2</math> называется <b>частотой среза</b> звена <math>\omega_c</math>.</p>
Идеальное дифференцирующее	$y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$	$p$		<p>При подаче на вход звена единичного скачка согласно уравнению звена <math>y(t)=0</math> как при <math>x=0</math>, так и при <math>x=1</math>, то есть только в момент изменения входного воздействия с 0 на 1 <math>dx/dt=0</math>. Переходная характеристика звена имеет вид импульса с теоретически бесконечной амплитудой и бесконечно малой шириной.</p>
Идеальное интегрирующее	$y(t) = k \int x(t) dt$ или $\frac{dy(t)}{dt} = kx(t)$	$\frac{k}{p}$		<p><math>k</math> – коэффициент усиления звена;  Переходная характеристика имеет вид наклонной прямой, так как интеграл геометрически представляет собой площадь, ограничиваемую <math>x(t)</math>, которая возрастает пропорционально времени <math>t</math>.</p>
Дифференцирующее первого порядка	$y(t) = T \frac{dx(t)}{dt} + x(t)$	$T \cdot p + 1$		<p><math>k</math> – коэффициент усиления звена;  <math>T</math> – постоянная времени звена;  Величина, обратная постоянной времени называется <b>частотой среза</b> звена <math>\omega_c</math>.</p>
Дифференцирующее второго порядка	$y(t) = T_2^2 \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + T_1 \frac{dx(t)}{dt} + x(t)$ или $y(t) = T^2 \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + 2\xi T \frac{dx(t)}{dt} + x(t)$	$T_2^2 p^2 + T_1 p + 1$ или $T^2 p^2 + 2\xi T p + 1$		<p><math>k</math> – коэффициент усиления звена;  <math>T_1, T_2</math> – постоянные времени звена;  Величина, обратная постоянной времени <math>T_2</math> называется <b>частотой среза</b> звена <math>\omega_c</math>.</p>
Безынерционное звено с чистым запаздыванием	$y(t) = kx(t-\tau)$	$k \cdot e^{-p\tau}$		<p><math>k</math> – коэффициент усиления звена;  При подаче на вход ступенчатого воздействия соответствующее значение выходной величины устанавливается с некоторым постоянным запаздыванием <math>\tau</math>.</p>

## ПРИЛОЖЕНИЕ 2. Правила эквивалентных преобразований структурных схем

Операция	Исходная схема	Эквивалентная схема
<p>Перенос узла с выхода звена с передаточной функцией <math>W</math> на вход (против направления действия сигнала)</p>		
<p>Перенос узла с входа звена с передаточной функцией <math>W</math> на выход (по направлению действия сигнала)</p>		
<p>Перенос элемента сравнения или сумматора с выхода звена с передаточной функцией <math>W</math> на вход (против направления действия сигнала)</p>		
<p>Перенос элемента сравнения или сумматора с входа звена с передаточной функцией <math>W</math> на выход (по направлению действия сигнала)</p>		

## СОДЕРЖАНИЕ

Введение .....	3
Лекционный курс .....	4
1. Введение в автоматическое управление технологическими системами.....	4
2. Основы автоматического управления .....	8
2.1. Принципы автоматического управления .....	8
2.1.1. Принцип разомкнутого управления (управление по задающему воздействию) .....	9
2.1.2. Принцип обратной связи (управление по отклонению).....	14
2.1.3. Принцип компенсации (управление по возмущению) .....	21
2.1.4. Комбинированное управление.....	24
2.2. Классификация систем автоматического управления.....	27
2.2.1. По характеру изменения задающего воздействия (цели управления)....	27
2.2.2. По принципу формирования сигналов управления .....	33
2.2.3. По числу контуров управления.....	42
2.2.4. По характеру зависимости управляемых переменных от входных воздействий .....	43
2.2.5. По характеру изменения ошибки управления.....	44
2.3. Моделирование и анализ систем автоматического управления.....	48
2.3.1. Модели статики и динамики САУ.....	48
2.3.2. Модельные режимы анализа САУ. Качество процесса управления.....	56
3. Типовые элементарные звенья систем автоматического управления.....	63
3.1. Усилительное безынерционное звено .....	64
3.2. Аperiodическое звено первого порядка.....	65
3.3. Аperiodическое звено второго порядка и колебательное устойчивое звено ...	67
3.4. Интегрирующие звенья .....	75
3.5. Дифференцирующие звенья.....	78
3.6. Безынерционное звено с чистым запаздыванием .....	82
3.7. Передаточные функции соединений звеньев. Преобразования структурных схем САУ.....	84
4. Частотные характеристики систем автоматического управления.....	93
4.1. Частотная передаточная функция и амплитудно-фазовая характеристика САУ .....	94
4.2. Логарифмические частотные характеристики САУ.....	100
4.3. Асимптотическая ЛАЧХ САУ .....	104
5. Устойчивость систем автоматического управления .....	111
5.1. Теорема Ляпунова .....	112
5.2. Критерии устойчивости САУ .....	118
5.2.1. Критерий Гурвица .....	118
5.2.2. Критерий Михайлова .....	123
5.2.3. Критерий Найквиста для АФХ .....	127
5.2.4. Критерий Найквиста для ЛАЧХ и ЛФЧХ.....	130
5.3. Запасы устойчивости САУ .....	136
5.3.1. Запасы устойчивости по амплитуде и фазе .....	136
5.3.2. Корневые оценки качества управления – степень устойчивости, колебательность САУ .....	143
6. Синтез систем автоматического управления .....	149
6.1. Общая постановка задачи синтеза регулятора .....	150
6.2. Типовые законы автоматического регулирования .....	153
6.2.1. П-регулятор.....	153
6.2.2. ПИД-регулятор .....	157
6.3. Синтез регулятора методом коррекции логарифмических частотных характеристик.....	159
Литература.....	167
Приложение 1.....	168
Приложение 2.....	170

*Учебное издание*

ШЕСТОПАЛОВА Ольга Евгеньевна

АВТОМАТИЧЕСКОЕ УПРАВЛЕНИЕ  
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

Учебно-методический комплекс для студентов специальностей  
1-36 01 01 «Технология машиностроения», 1-39 02 01 «Моделирование и компьютерное  
проектирование радиоэлектронных средств»

В 2 частях

Часть 1

Редактор *Т. В. Булах*

Дизайн обложки *А. Н. Парфёновой*

---

Подписано в печать 25.02.2014. Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная.  
Ризография. Усл. печ. л. 9,98. Уч.-изд. л. 8,8. Тираж 30 экз. Заказ 252.

---

Издатель и полиграфическое исполнение –  
учреждение образования «Полоцкий государственный университет».

ЛИ № 02330/0548568 от 26.06.2009. ЛП № 02330/0494256 от 27.05.2009.

Ул. Блохина, 29, 211440, г. Новополоцк.