

УДК 621.391

## МЕТОДИКА ТРАНСФОРМАЦИИ СИГНАЛЬНЫХ СОЗВЕЗДИЙ СИГНАЛОВ КАМ

*д-р техн. наук, доц. С.В. ДВОРНИКОВ; канд. техн. наук, доц. А.В. ПШЕНИЧНИКОВ; Д.А. БУРЫКИН  
(Военная академия связи им. Маршала Советского Союза С.М. Буденного, Санкт-Петербург);*

*А.В. ЖЕЛЕЗНЯК*

*(Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ»);*

*С.С. ДВОРНИКОВ*

*(Санкт-Петербургский государственный политехнический университет);*

*Д.С. РЯБЕНКО*

*(Полоцкий государственный университет)*

*Демонстрируются результаты аналитических исследований и данные расчетно-математического моделирования по увеличению пропускной способности линий радиосвязи при демодуляции сигналов с квадратурно-амплитудной модуляцией. Для этих целей обоснуется целесообразность оптимального снижения значения пик-фактора при сохранении требуемого значения помехоустойчивости сигналов с квадратурно-амплитудной модуляцией путем трансформации сигнально-кодовых конструкций. Представлена методика расчета оптимального значения пик-фактора и вероятности ошибки сигналов.*

**Введение.** Одно из направлений повышения эффективности функционирования линий радиосвязи (ЛРС), связано с увеличением их пропускной способности. Решение данной задачи может быть достигнуто, в частности, за счет применения сигнально-кодовых конструкций (СКК), среди которых с учетом особенностей функционирования ЛРС наиболее предпочтительным видится использование сигналов квадратурно-амплитудной модуляции (КАМ).

Между тем анализ энергетических параметров сигналов КАМ показывает, что они обладают относительно большим значением пик-фактора (ПФ), что обусловлено высоким уровнем пиковой мощности отдельных точек их сигнальных созвездий. Очевидно, что снижение значения ПФ можно обеспечить трансформацией сигнального созвездия СКК. Однако любая трансформация положения любой из точек сигнального созвездия приведет к изменению помехоустойчивости приема такого сигнала и, как следствие, к изменению эффективности функционирования локальной вычислительной сети (ЛВС). Таким образом, возникает противоречие между необходимостью снижения ПФ и сохранением требуемого значения помехоустойчивости. В связи с этим в данной работе обосновываются требования к трансформации сигнального созвездия, направленные на разрешение указанного противоречия.

**Предложения по трансформации сигнального созвездия сигнала КАМ-16.** Предположим, что для обеспечения радиосвязи используется СКК КАМ-16. Точки  $A_1, \dots, A_{16}$  (рис. 1) образуют его сигнальное созвездие. В литературе, в частности в [1], рассматривается подход к формированию СКК КАМ-16 путем манипуляции сигналами  $\sin \omega t$  и  $\cos \omega t$ , поступающих соответственно в синфазный  $I$  и квадратурный  $Q$  каналы. Суть указанного подхода состоит в следующем. Из исходных значений напряжений сигналов  $\sin \omega t$  и  $\cos \omega t$  формируют начальные уровни напряжений  $U_{исх}$  и  $U_1$  (причем  $U_{исх} = 3U_1$ ) в каждом из каналов, которые затем манипулируют в зависимости от значений информационной битовой последовательности. В результате сложения манипулированных значений формируется искомое сигнальное созвездие.

Анализ диаграммы полученного сигнального созвездия показывает, что амплитуда его векторов  $OA_1, OA_4, OA_{13}, OA_{16}$  значительно превосходит величину остальных, что приводит к существенному возрастанию ПФ данной СКК.

Для снижения величины ПФ предлагается в сформированном сигнальном созвездии подвергнуть трансформации положение точек, имеющих наибольшее значение пиковой мощности.

Следует заметить, что снижение пиковой мощности точек  $A_1, A_4, A_{13}, A_{16}$  связано с изменением их геометрического положения в проекции сигнальной плоскости, образуемой синфазной и квадратурной составляющими.

На рисунке 1 точки  $F_1, F_4, F_3, F_2$  определяют положения точек  $A_1, A_4, A_{16}, A_{13}$  после их трансформации на сигнальной плоскости. Заметим, что проведенная трансформация не приводит к изменению формы сигнального созвездия СКК КАМ-16, но при этом изменяется взаимное расстояние между трансформируемыми и остальными точками сигнального созвездия. Между тем одна из особенностей СКК КАМ состоит в том, что у них минимальное евклидово расстояние (МЕР) как раз и определяется как расстояние от крайних точек сигнального созвездия до ближайших [1]. Следовательно, такая трансформация неизбежно приведет к снижению величины МЕР и, как следствие, к снижению помехоустойчивости СКК, что негативно скажется при их использовании на ЛРС. С другой стороны, снижение значения ПФ в результате трансформации созвездия, наоборот, способствует повышению помехоустойчивости.

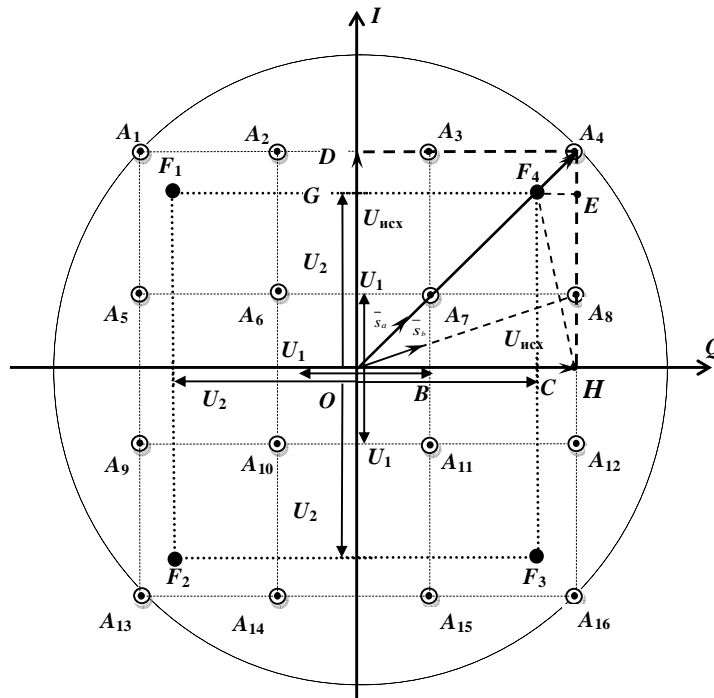


Рис. 1. Сигнальное созвездие СКК КАМ-16

С целью выявления компромиссных решений проведем следующие расчеты (учитывая симметричность сигнального созвездия сигнала КАМ-16, все расчеты представлены для его верхнего правого квадранта).

Согласно [1] ПФ можно определить как отношение пиковой амплитуды  $U_n$  СКК к ее средней амплитуде  $U_{cp}$ :

$$\Pi \triangleq \frac{U_n}{U_{cp}}. \quad (1)$$

Пиковую амплитуду традиционной формы СКК  $U_n$  для сигнала КАМ-16 рассчитаем как величину напряжения, определяемую модулем вектора  $|OA_4|$ , которую вычислим из треугольника  $OA_4H$  (см. рис. 1):

$$U_n = \sqrt{2}U_{исх} \approx 1,41U_{исх}. \quad (2)$$

Среднее значение амплитуды  $U_{cp}$  СКК традиционной формы будет равно

$$U_{cp} = \frac{|OA_4| + |OA_3| + |OA_8| + |OA_7|}{4}.$$

При этом значение  $|OA_7|$  вычислим из треугольника  $OA_7B$ :

$$|OA_7| = \sqrt{2 \left( \frac{U_{исх}}{3} \right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{3} U_{исх}, \quad (3)$$

а значения  $|OA_3| = |OA_8|$  рассчитаем из треугольника  $OA_8H$  или  $ODA_3$ :

$$|OA_3| = |OA_8| = \sqrt{\left( \frac{U_{исх}}{3} \right)^2 + U_{исх}^2} = \frac{\sqrt{10}}{3} U_{исх}. \quad (4)$$

Тогда

$$U_{cp} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{2\sqrt{10}}{3}}{4} U_{исх} = \frac{3\sqrt{2} + \sqrt{2} + 2\sqrt{10}}{12} U_{исх}.$$

Теперь результирующее значение пик-фактора для СКК традиционной формы вычислим как

$$\Pi \triangleq \frac{U_n}{U_{cp}} = \frac{12\sqrt{2}U_{исх}}{(3\sqrt{2} + \sqrt{2} + 2\sqrt{10})U_{исх}} = \frac{6}{2 + \sqrt{5}} = 1,42. \quad (5)$$

Соответствующим образом расчеты проведем для СКК КАМ-16 с трансформируемым сигнальным созвездием (в дальнейшем – трансформируемая СКК). В данном случае пиковое значение амплитуды  $U_n''$  равно  $|OF_1|$ , причем

$$U_n'' = |OF_1| = \beta |OA_4|, \quad (6)$$

где  $\beta$  – коэффициент, определяющий положение новой точки трансформируемой СКК КАМ-16.

Учитывая, что в трансформируемой СКК значение ПФ должно быть меньше исходного, величину коэффициента  $\beta$  целесообразно выбирать исходя из условия  $0 < \beta < 1$ . Тогда  $|OF_1| = \beta |OA_4| = \beta\sqrt{2}U_{исх}$ .

Величину напряжения  $U_{cp}''$  определим как

$$U_{cp}'' = \frac{|OF_1| + |OA_3| + |OA_8| + |OA_7|}{4} = \frac{\beta\sqrt{2} + 3\sqrt{2} + 2\sqrt{10}}{12} U_{исх},$$

а значение ПФ рассчитаем по следующей формуле:

$$\Pi'' \triangleq \frac{U_n''}{U_{cp}''} = \frac{12\beta\sqrt{2}}{\beta\sqrt{2} + 3\sqrt{2} + 2\sqrt{10}} \approx \frac{16,97\beta}{1,41\beta + 10,57}. \quad (7)$$

Анализ формулы (7) позволяет сделать следующее заключение: повышение помехоустойчивости трансформируемой СКК КАМ-16 обеспечивается при значении  $\beta$ , равном 0,68. Вместе с тем изменение структуры сигнального созвездия в целях минимизации значения ПФ приводит к уменьшению МЕР, что снижает помехоустойчивость приема такого сигнала [1]. В связи с этим, базируясь на методике [2], рассчитаем вероятность ошибки приема элемента сигнала с учетом трансформации СКК.

Предположим, что ЛРС функционирует в условиях воздействия быстрых замираний, аппроксимиремых законом распределения Релея. Тогда точки вектора сигнального созвездия для рассматриваемого квадранта будут определяться следующим образом:

$$\bar{x}_a = \sqrt{P_a} \cdot \bar{s}_a; \quad \bar{x}_b = \sqrt{P_b} \cdot \bar{s}_b,$$

где  $\sqrt{P_a}$ ,  $\sqrt{P_b}$  – эффективные значения напряжений векторов сигнального созвездия, определяющие мощность сигнала КАМ-16;  $\bar{s}_a$ ,  $\bar{s}_b$  – единичные векторы, определяющие положение точки вектора сигнального созвездия относительно осей синфазной и квадратурной составляющих. В общем случае  $\bar{s}_a^T \times \bar{s}_b = 1$ , где верхний индекс означает операцию транспонирования.

Обозначим  $\lambda^2 = |\bar{s}_a^T \times \bar{s}_b|^2$ , где величина  $\lambda^2$  определяет взаимное расположение точек сигнального созвездия СКК КАМ-16. При этом  $\lambda^2 \neq 1$  (в противном случае вектор сигнального созвездия переходит сам в себя).

Рассчитаем вероятность ошибки приема элемента СКК КАМ-16 с позиций проявления вероятности парной ошибки  $P(\bar{x}_a \rightarrow \bar{x}_b)$ , под которой будем понимать вероятность правильного отображения точки вектора сигнального созвездия, т.е. вероятность проявления вектора  $\bar{x}_b$  при условии, что должен отображаться вектор  $\bar{x}_a$ .

Для аналитического представления вероятности парной ошибки с учетом трансформации СКК сигнала КАМ-16 воспользуемся подходом, изложенным в [3]:

$$P(\bar{y}/\bar{x}) = \exp(-tr(\bar{\Lambda}^{-1}\bar{y}^T)/(\pi^{T_0} \det(\Lambda)), \quad (8)$$

где  $\bar{\Lambda} = \bar{I}_t + h_0 \bar{x}^{-T}$ ;  $\bar{y} = A \exp(j\Theta) \sqrt{h_0} \bar{I}_t + h_0 \bar{x}^T$ ;  $\bar{I}_t$  – единичный вектор;  $h_0^2$  – отношение мощности сигнала к спектральной плотности мощности шума;  $T_0$  – период сигнала;  $A$  – амплитуда сигнала;  $\Theta$  – фаза сигнала.

С учетом введенных определений и ограничений величина  $P(\bar{y}/\bar{x})$  принимает вид:

$$P(\bar{y}/\bar{x}) = P(\bar{x}_a \otimes \bar{x}_b) = P\left(\frac{1}{1/h_0 + P_a} \times \text{tr}(\bar{y}^T \bar{x}_b \bar{x}_b^T \bar{y})\right) - \ln(1 + h_0 P_a). \quad (9)$$

Окончательное выражение для расчета парной ошибки будет иметь следующий вид:

$$P(\bar{x}_a \rightarrow \bar{x}_b) = 0,5 \cdot [1 - \text{sgn}(q_m)] \cdot \exp(-|q_m| k_m [1 + \text{sgn}(q_m)]) - 0,5 \cdot \left[1 + \frac{1 + h_0 \cdot P_b}{k_m^2 \cdot h_0^2 \cdot P_a \cdot P_b (1 - \lambda^2(a, b))}\right]^{1/2} \times \\ \times \exp\left(-\left(\text{sgn}(q_m) + 0,5 \cdot \left[1 + \frac{1 + h_0 \cdot P_b}{k_m^2 \cdot h_0^2 \cdot P_a \cdot P_b (1 - \lambda^2(a, b))}\right]^{-1/2}\right)\right) + \\ + 0,5 \cdot \text{sgn}(q_m) \cdot \exp\left(-\left[\text{sgn}(q_m) + \sqrt{1 + \frac{1 + h_0 \cdot P_b}{k_m^2 \cdot h_0^2 \cdot P_a \cdot P_b (1 - \lambda^2(a, b))}}\right] k_m |q_m|\right), \quad (10)$$

где  $k_m = \frac{h_0 \cdot P_a \cdot (1 - \lambda^2(a, b)) + P_b / P_a - 1}{2 \cdot h_0 \cdot P_a \cdot (1 - \lambda^2(a, b))}$ ,  $q_m = \frac{1 + h_0 \cdot P_a}{1 + h_0 \cdot P_b}$  – промежуточные параметры расчета;  $h_0^2$  – от-

ношение мощности сигнала к спектральной плотности мощности шума;  $P_a, P_b$  – мощности сигнальных векторов СКК.

На рисунке 2 представлены результаты моделирования, характеризующие зависимость вероятности парной ошибки от величины мощности одного из векторов, в частности  $P_a$ . При моделировании предполагалось, что значение мощности другого вектора  $P_b = 1$  Вт,  $h_0 = 100$ ,  $\lambda = 0,1$ .

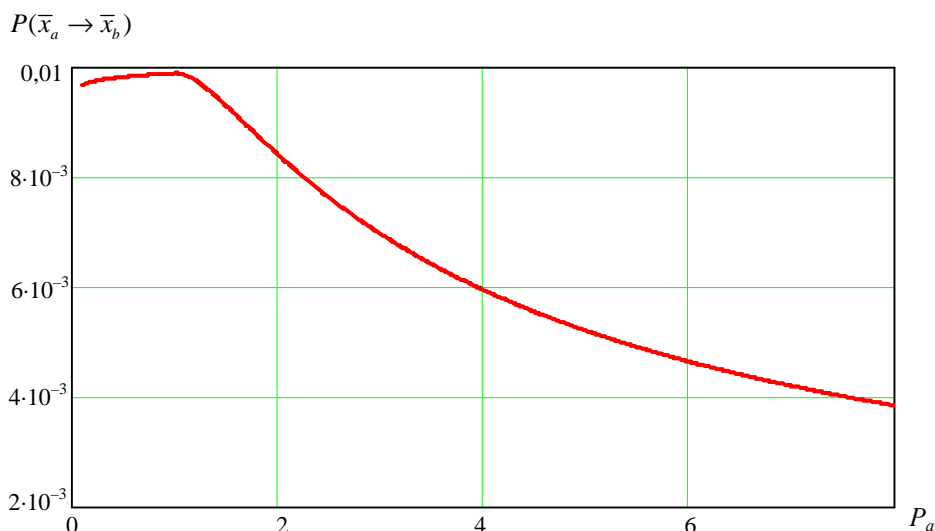


Рис. 2. Зависимость вероятности парной ошибки от значения мощности точки сигнального созвездия  $P_a$

Результаты моделирования, характеризующие зависимость вероятности парной ошибки от значения мощности  $P_b$  при тех же условиях, представлены на рисунке 3.

На рисунке 4 отображены результаты моделирования зависимости вероятности парной ошибки от соотношения мощностей  $P_a$  и  $P_b$  ( $h_0 = 100$ ;  $\lambda = 0,1$ ).

Анализ результатов, представленных на рисунках 2–4, показал, что наихудшее значение вероятности парной ошибки достигается при выполнении условия равенства мощностей  $P_a$  и  $P_b$ . Вместе с тем при выполнении данного условия достигается наилучшее значение ПФ для СКК КАМ-16. Таким образом, трансформация СКК КАМ-16 позволяет улучшить либо значение ПФ сигнала, либо величину вероятности парной ошибки.

Кроме того, вероятность парной ошибки при определенных значениях  $P_a$  и  $P_b$  не зависит от значений величин данных мощностей ( $P_a > 4$  и  $P_b > 4$ ), о чем свидетельствует рисунок 4). В то же время существуют области значений мощностей  $P_a$  и  $P_b$ , где данный показатель достигает наихудшей величины

( $P_a < 4$  и  $P_b < 4$ ), что также видно из рисунка 4). При этом формирование конструкции СКК большими значениями пиковых мощностей приводит к ухудшению ПФ сигнала.

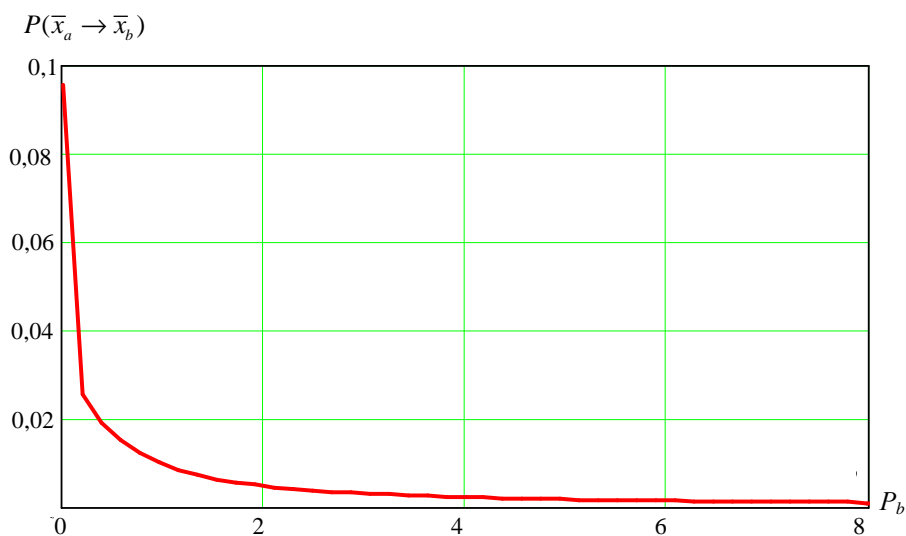


Рис. 3. Зависимость вероятности парной ошибки от значения мощности точки сигнального созвездия  $P_b$

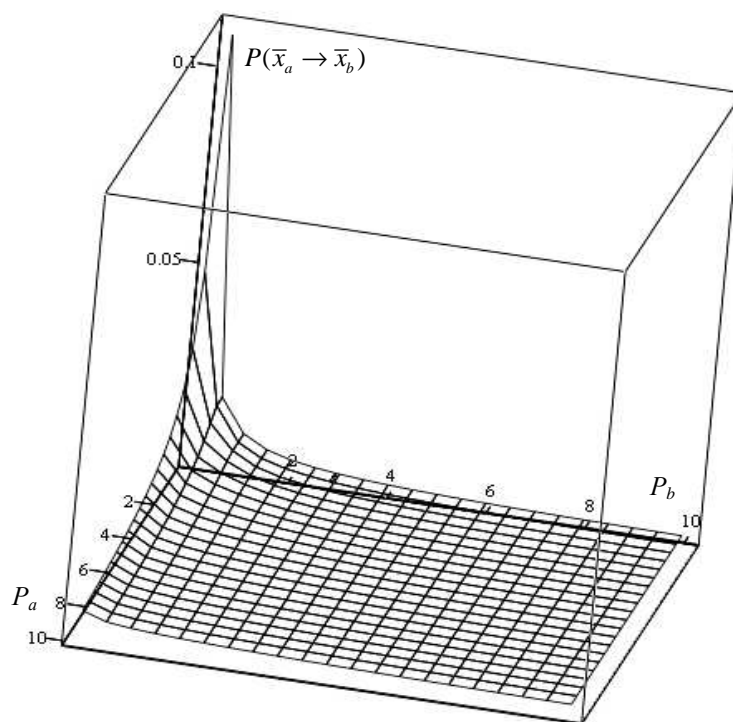


Рис. 4. Зависимость вероятности парной ошибки от взаимных значений мощностей  $P_a$  и  $P_b$

#### Методика расчета требуемого показателя

Результаты теоретических исследований и проведенного моделирования позволяют сделать следующий вывод: трансформация сигнального созвездия СКК КАМ-16 может быть применена в целях улучшения или значения ПФ сигнала, или величины вероятности парной ошибки.

Для достижения значения требуемого показателя предлагается следующая **методика**:

1. Для улучшения значения ПФ СКК:

- определяются точки сигнального созвездия СКК с максимальным значением пиковой мощности;
- по формуле (7) проводится расчет ПФ сигнала с учетом значения коэффициента  $\beta$ ;

- исходя из требований к значению ПФ из формулы (7) вычисляется величина  $\beta$ ;
  - значение векторов СКК с максимальным значением пиковой мощности точки умножается на их величину  $\beta$ ;
  - по формуле (10) рассчитывается вероятность парной ошибки для трансформированного созвездия. При этом значению  $P_a$  соответствует точка созвездия, определяемого вектором после умножения его на величину  $\beta$ , а значению  $P_b$  – точка созвездия с МЕР по отношению к точке  $P_a$ ;
  - полученный результат сравнивается с требуемым значением вероятности парной ошибки, при необходимости по требуемому значению данного параметра определяются новые значения  $P_a$  и  $P_b$  (см. рис. 4);
  - при выборе новых значений  $P_a$  и  $P_b$  необходимо исходить из того, чтобы значения показателя  $P_b$  как у исходного, так и трансформируемого сигнального созвездия не изменялись;
  - определяется новая величина коэффициента  $\beta$  как отношение нового значения  $P_a$  при условии  $P_a > P_b$  ( $P_b$ , если  $P_a < P_b$ ) к первоначальному значению (до трансформации СКК КАМ-16). Если обеспечение требуемого значения вероятности парной ошибки возможно только при условии  $\beta > 1$ , то очевидно, что улучшить значение ПФ сигнала КАМ-16 не представляется возможным;
  - по формуле (7) вычисляется новое значение ПФ сигнала.
2. Для улучшения вероятности парной ошибки сигналов КАМ-16 по показателю значения ПФ методика предполагает выполнение следующих этапов:
- по требуемому значению вероятности парной ошибки определяются величины мощностей  $P_a$  и  $P_b$ ;
  - проводится расчет величины коэффициента  $\beta$  как отношение значения  $P_a$  при условии  $P_a > P_b$  ( $P_b$ , если  $P_a < P_b$ ) к первоначальному значению (до трансформации СКК КАМ-16);
  - по формуле (7) рассчитывается величина ПФ сигнала. Если полученное значения ПФ сигнала превышает требуемое, то из формулы (7) проводится расчет нового значения коэффициента  $\beta$ ;
  - значение векторов СКК КАМ-16 с максимальным значением пиковой мощности точки умножается на новую величину  $\beta$ . Далее по формуле (10) рассчитывается вероятность парной ошибки для трансформированного созвездия;
  - если рассчитанное значение величины парной ошибки превышает заданное, то улучшить помехоустойчивость сигнала КАМ-16 за счет трансформации СКК КАМ-16 не представляется возможным.
- Заключение.** Предложенная методика может быть использована при проектировании современных средств связи, использующих любые СКК. Дальнейшие направления авторы связывают с оптимизацией структуры транспонируемых созвездий при их использовании в каналах с OFDM-модуляцией.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Скляр, Б. Цифровая связь. Теоретические основы и практическое применение / Б. Скляр. – 2-е изд.; пер. с англ. – М.: Издат. Дом «Вильямс», 2003.
2. Yen-Ming Chen Noncoherent Amplitude/Phase Modulated Transmission Schemes for Raleigh Block Fading Channels / Yen-Ming Chen, Yeong-Luh Ueng // IEE Transaction on communication. – 2013. – Vol. 61, № 1. – January.
3. Raphaeli, D. Noncoherent coded modulation / D. Raphaeli // IEE Transaction on communication. – 1996. – Vol. 44, № 2. – February.

Поступила 16.01.2014

#### TRANSFORMATION TECHNIQUE CONSTELLATION QAM SIGNALS

**S. DVORNIKOV, A. PSHENICHNIKOV, D. BURIKIN, A. ZHELEZNYAK,  
S. DVORNIKOV, D. RYABENKO**

*Results of analytical researches and data of calculated mathematical modeling on increase of capacity of radio links with demodulation of signals with quadrature and amplitude modulation are shown. Reasonability of optimal decrease in value of peak factor at preservation of designed value of a noise stability of signals with quadrature and amplitude modulation by transformation of signal-code sequences is justified. The method of calculation of optimal value of the peak-factor or error probability of signals is presented.*