

УДК 517.929.7

**РАСЧЕТ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОЛЕЙ
ДВУХСЛОЙНОГО ПОЛОГО ЦИЛИНДРА
МЕТОДОМ РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ**

О.Н. МЕДВЕДЕВА

(Представлено: канд. техн. наук, доц. И.Б. СОРОГОВЕЦ)

В работе [1] для решения краевых задач теплопроводности в случае двухслойного полого цилиндра был применен метод разделения переменных. Рассмотрено девять начально-краевых задач на собственные значения и собственные функции. При решении однородных задач получено девять ортогональных систем функций. Решения неоднородных задач получены в виде рядов Фурье по указанным системам. В данной работе на основе результатов из [1] произведены расчеты температурных, построены различные графики. Все расчеты производились в среде Mathcad.

Постановка задачи. Полый цилиндр большой длины (бесконечный полый цилиндр) с внутренним радиусом R_0 и внешним R_1 , окружен оболочкой толщиной $H = R - R_1$, где R – внешний радиус оболочки. Теплофизические характеристики полого цилиндра и оболочки считаем различными: λ_1, c_1, ρ_1 ; λ_2, c_2, ρ_2 . Здесь c – теплоемкость, ρ – плотность, λ – коэффициент теплопроводности, индекс 1 относится к полуму цилиндру, индекс 2 – к оболочке. Требуется найти распределение температуры в системе двух цилиндрических тел, которая будет зависеть от начальной температуры и от способа взаимодействия системы с окружающей средой. Предполагается, что температурное поле в системе тел радиальное, т. е. не зависит от полярного угла φ и координаты z . Температуру полого цилиндра обозначаем $T_1(r, t)$ (t – время), температуру оболочки – $T_2(r, t)$.

Расчеты производим в безразмерных величинах (α_0, α_2 – коэффициенты теплообмена)

$$x = \frac{r}{R}, \quad x_0 = \frac{R_0}{R}, \quad x_1 = \frac{R_1}{R}, \quad a_1 = \frac{\lambda_1}{c_1 \rho_1}, \quad a_2 = \frac{\lambda_2}{c_2 \rho_2}, \quad K_a^2 = \frac{a_1}{a_2}, \quad K_\lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}, \quad F = \frac{a_2 t}{R^2}, \quad Bi = \frac{\alpha_2}{\lambda_2}, \quad Bi_0 = \frac{\alpha_0}{\lambda_1}.$$

Для проведения расчетов выбраны следующие значения указанных величин:

$$x_0 = 0,3; \quad x_1 = 0,7; \quad Ka = 1,4; \quad K\lambda = 1,9; \quad Bi_0 = 2; \quad Bi = 3.$$

В [1] поставлено девять различных задач, которые можно охарактеризовать как задача $(i - j)$ ($i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3$). Это означает, что при $x = x_0$ задано граничное условие i -го рода, а при $x = 1$ – граничное условие j -го рода. Ниже ссылки на формулы будут производиться без указания на то, что они из [1].

В задачу расчета входят:

1) определение корней характеристического уравнения $\Delta(\mu) = 0$, где $\Delta(\mu)$ определяется выражением (13);

2) вычисление коэффициентов $A_{1,k}, A_{2,k}, B_{1,k}, B_{2,k}$ (k – порядковый номер характеристического числа) функций (15), (17), представляющих решения однородных задач теплопроводности;

3) построение решений неоднородных задач методами, разработанными в [1];

4) построение графиков решений;

5) выводы по результатам расчетов.

Все расчеты, в том числе и построение графиков, производим в среде Mathcad [2].

Определение корней характеристических уравнений. Для решения уравнения $\Delta(\mu) = 0$ строим график функции $y = \Delta(x)$ и по графику определяем приближенное значение каждого корня, которое уточняется с помощью функции **root**. Для задач $(i - j)$ ($i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3$) массивы корней обозначены mij . Значения массивов в интервале (0; 60) :

| | | | | | | | | | | | | |
|-----------|---|-------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $m11^T =$ | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| | 1 | 5.1 | 10.605 | 16.05 | 21.273 | 26.853 | 32.048 | 37.619 | 42.391 | 48.403 | 53.418 | 59.169 |
| $m12^T =$ | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| | 1 | 2.326 | 7.53 | 13.529 | 18.407 | 24.298 | 29.189 | 35.041 | 39.954 | 45.757 | 50.716 | 56.468 |
| $m21^T =$ | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| | 1 | 3.01 | 8.611 | 13.353 | 19.166 | 24.009 | 29.827 | 34.716 | 40.514 | 45.456 | 51.201 | 56.19 |
| $m22^T =$ | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| | 1 | 5.586 | 10.951 | 16.137 | 21.609 | 26.784 | 32.362 | 37.466 | 43.109 | 48.147 | 53.854 | 58.907 |
| $m13^T =$ | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | |
| | 1 | 6.834 | 13.133 | 18.141 | 24.084 | 29.024 | 34.883 | 39.836 | 45.622 | 50.649 | 56.366 | |
| $m31^T =$ | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| | 1 | 1.017 | 8.062 | 12.996 | 18.929 | 23.801 | 29.679 | 34.571 | 40.405 | 45.333 | 51.119 | 56.096 |
| $m23^T =$ | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| | 1 | 4.551 | 10.558 | 15.777 | 21.429 | 26.572 | 32.225 | 37.308 | 43.004 | 48.029 | 53.766 | 58.743 |
| $m32^T =$ | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| | 1 | 4.864 | 10.446 | 15.889 | 21.377 | 26.636 | 32.195 | 37.351 | 42.984 | 48.060 | 53.752 | 58.765 |
| $m33^T =$ | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| | 1 | 3.343 | 10.017 | 15.515 | 21.172 | 26.416 | 32.058 | 37.197 | 42.879 | 47.941 | 53.673 | 58.670 |

Построение решений однородных задач. Для примера рассмотрим задачу (1–2). В формулах (14) $\alpha_1 = -1, \alpha_2 = 0, \beta_1 = 0, \beta_2 = 1$ значения характеристических чисел уже вычислены. Фрагмент листа вычислений среды Mathcad:

```
ORIGIN:=1 x0:=0.3 x1:=0.7 Ka:=1.4 Kl:=1.5 Kl:=1.5 Bi:=3 Bi0:=2 mu:=m12 k12:=11
k:=1..k12
```

$$C1(\mu) := J0(\mu \cdot x1) \cdot (\beta2 \cdot \mu \cdot Y1(\mu) + \alpha2 \cdot Y0(\mu)) - Y0(\mu \cdot x1) \cdot (\beta2 \cdot \mu \cdot J1(\mu) + \alpha2 \cdot J0(\mu))$$

$$c2(\mu) := Y0\left(\frac{\mu}{Ka} \cdot x1\right) \cdot \left(\frac{\beta1}{Ka} \cdot \mu \cdot J1\left(\frac{\mu}{Ka} \cdot x0\right) - \alpha1 \cdot J0\left(\frac{\mu}{Ka} \cdot x0\right)\right)$$

$$C2(\mu) := J0\left(\frac{\mu}{Ka} \cdot x1\right) \cdot \left(\frac{\beta1}{Ka} \cdot \mu \cdot Y1\left(\frac{\mu}{Ka} \cdot x0\right) - \alpha1 \cdot Y0\left(\frac{\mu}{Ka} \cdot x0\right)\right) - c2(\mu)$$

$$A1(\mu) := \left(\frac{\beta1 \cdot \mu}{Ka} \cdot Y1\left(\frac{\mu}{Ka} \cdot x0\right) - \alpha1 \cdot Y0\left(\frac{\mu}{Ka} \cdot x0\right)\right) \cdot C1(\mu) \quad B1(\mu) := -\left(\frac{\beta1 \cdot \mu}{Ka} \cdot J1\left(\frac{\mu}{Ka} \cdot x0\right) - \alpha1 \cdot J0\left(\frac{\mu}{Ka} \cdot x0\right)\right) \cdot C1(\mu)$$

$$A2(\mu) := (\beta2 \cdot \mu \cdot Y1(\mu) + \alpha2 \cdot Y0(\mu)) \cdot C2(\mu) \quad B2(\mu) := -(\beta2 \cdot \mu \cdot J1(\mu) + \alpha2 \cdot J0(\mu)) \cdot C2(\mu)$$

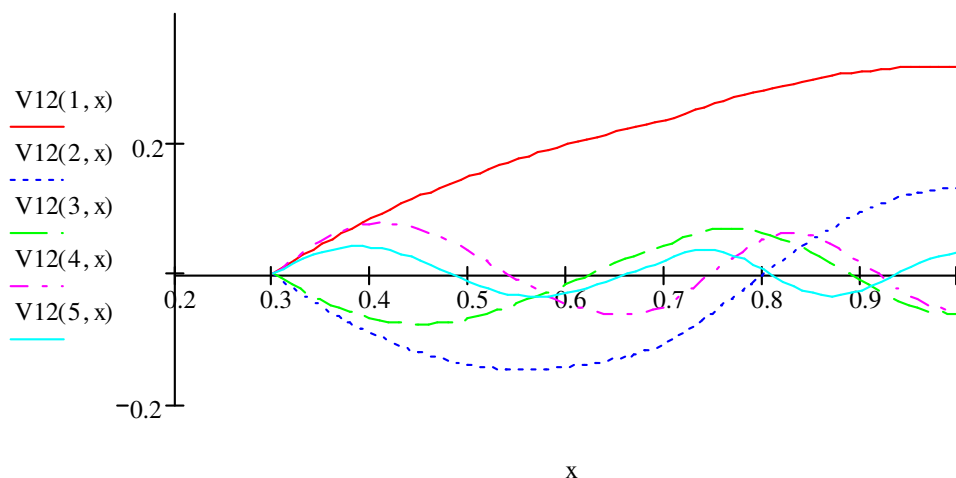
$$V12(k, x) := \text{if}\left(x \leq x1, A1(\mu_k) \cdot J0\left(\frac{\mu_k}{Ka} \cdot x\right) + B1(\mu_k) \cdot Y0\left(\frac{\mu_k}{Ka} \cdot x\right), A2(\mu_k) \cdot J0\left(\frac{\mu_k}{1} \cdot x\right) + B2(\mu_k) \cdot Y0\left(\frac{\mu_k}{1} \cdot x\right)\right)$$

$$U12(k, x) := \text{if}\left[x \leq x1, \left(A1(\mu_k) \cdot J0\left(\frac{\mu_k}{Ka} \cdot x\right) + B1(\mu_k) \cdot Y0\left(\frac{\mu_k}{Ka} \cdot x\right)\right)^2, \left(A2(\mu_k) \cdot J0\left(\frac{\mu_k}{1} \cdot x\right) + B2(\mu_k) \cdot Y0\left(\frac{\mu_k}{1} \cdot x\right)\right)^2\right]$$

Квадрат нормы функций $V12(x)$: $N12(k) = \int_{x0}^1 U12(k, x) dx$

Графики функций $V12(k, x)$:

$x := 0.3, 0.31.. 1$



Точно таким же образом находятся коэффициенты $A_{1,k}, A_{2,k}, B_{1,k}, B_{2,k}$ других задач. Для этого нужно лишь изменить значения коэффициентов $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$.

Решение неоднородных задач. Предварительно укажем для каждой задачи функцию, удовлетворяющую только граничным условиям. Выпишем для каждой задачи функцию $U(x, F)$, которую будем обозначать $U_{ij}(x, F)$ (по названию задачи):

$$U11(x, F) = \frac{x-1}{x0-1} \varphi_1(F) + \frac{x-x0}{1-x0} \varphi_2(F); \quad U12(x, F) = \varphi_1(F) + (x-x0)\varphi_2(F);$$

$$U21(x, F) = (x-1)\varphi_1(F) + \varphi_2(F); \quad U22(x, F) = \frac{0,5x^2-x}{x0-1} \varphi_1(F) + \frac{0,5x^2-x0 \cdot x}{1-x0} \varphi_2(F);$$

$$U13(x, F) = \frac{1+Bi-x \cdot Bi}{1+(1-x0) \cdot Bi} \varphi_1(F) + \frac{x-x0}{1+(1-x0) \cdot Bi} \varphi_2(F);$$

$$U31(x, F) = \frac{(1-x) \cdot \varphi_1(F)}{1+(1-x0)Bi0} + \left(\frac{Bi0 \cdot (x-1)}{1+(1-x0)Bi0} + 1 \right) \cdot \varphi_2(F); \quad U23(x, F) = \left(\frac{1}{Bi} - x \right) \varphi_1(F) + \left(\frac{1}{Bi} + 1 \right) \cdot \varphi_2(F);$$

$$U32(x, F) = \frac{\varphi_1(F)}{Bi0} + \left(\frac{1}{Bi0} - x0 \right) \varphi_2(F); \quad U33(x, F) = \frac{(-Bi \cdot x + 1 + Bi) \cdot \varphi_1(F) + (Bi0 \cdot x + 1 - Bi0 \cdot x0) \cdot \varphi_2(F)}{Bi + Bi0 + Bi \cdot Bi0 \cdot (1-x0)}.$$

Дальнейшие расчеты будут производиться с функциями $\varphi_1(F) = \frac{F}{F+1} \arctg(F)$, $\varphi_2(F) = \frac{F^2}{F+1} \cos(0.1 \cdot F)$ при условии, что источники тепла отсутствуют, т. е. в (1), (2) $W_1(x, F) = 0, W_2(x, F) = 0$.

Тогда решение каждой задачи можно получить в виде $T(x, F) = U(x, F) + TW(x, F) + Tf(x, F)$, где $U(x, F)$ – построенные выше функции, удовлетворяющие только граничным условиям. При подстановке этой суммы в уравнения (1), (2) возникает неоднородность $W(x, F) = \begin{cases} K_a^2 (U''_{xx} + x^{-1}U'_x) - U'_F & (x_0 \leq x \leq x_1) \\ U''_{xx} + x^{-1}U'_x - U'_F & (x_1 \leq x \leq 1) \end{cases}$ и $TW(x, F)$ – решение, учитывающее эту неоднородность; $Tf(x, F)$ – решение задачи, учитывающее начальное условие:

$$Tf(x, F) = \sum_{k=1}^{\infty} D_k V(k, x) \exp(-\mu_k^2 F), \quad D_k = N_k^{-1} \int_{x_0}^1 f(x) V(k, x) dx, \quad N_k = \int_{x_0}^1 V^2(k, x) dx;$$

$$TW(x, F) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k(F)V(k, x), \quad B_k(F) = \int_0^F \exp(\mu_k^2(t-F))W_k(t)dt, \quad W(x, F) = \sum_{k=1}^{\infty} W_k(F)V(k, x),$$

т. е. $W_k(F)$ коэффициенты Фурье при разложении функции $W(x, F)$ по системе $\{V(k, x)\}_{k=1}^{\infty}$.

$$T0 := 2C \quad f(x) := T0 \quad K := 1..11 \quad \phi1(F) := \frac{F}{F+1} \cdot \text{atan}(F) \quad \phi2(F) := \frac{F^2}{F+1} \cdot \cos(0.1 \cdot F)$$

$$U(x, F) := \phi1(F) + (x - x0) \cdot \phi2(F) \quad \psi1(F) := \frac{1}{(F+1)^2} \cdot \text{atan}(F) + \frac{F}{F+1} \cdot \frac{1}{1+F^2}$$

$$\psi2(F) := \frac{\cos(0.1 \cdot F)}{(F+1)^2} \cdot (F^2 + 2 \cdot F) - \frac{F^2 \cdot 0.1}{F+1} \cdot \sin(0.1 \cdot F) \quad w1(x) := \text{if} \left(x \leq x1, \frac{Ka^2}{x}, \frac{1}{x} \right)$$

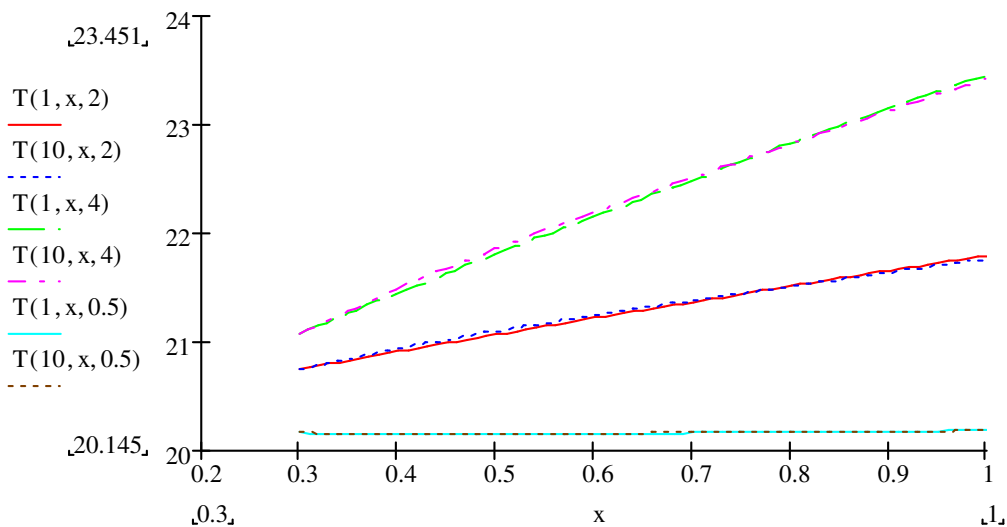
$$w2(x) := -1 \quad w3(x) := -(x - x0) \quad D1_k := \frac{1}{N12(k)} \cdot \int_{x0}^1 w1(x) \cdot V12(k, x) \cdot x dx$$

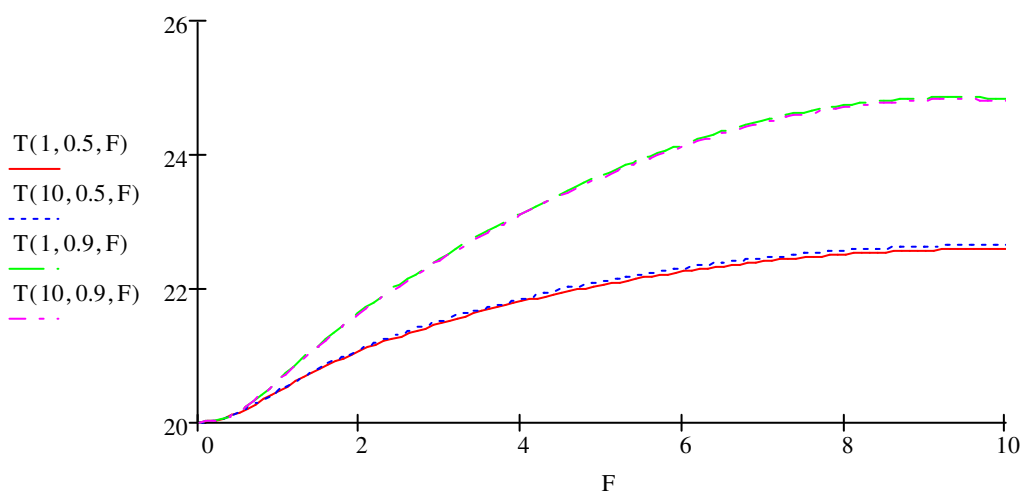
$$D2_k := \frac{1}{N12(k)} \cdot \int_{x0}^1 w2(x) \cdot V12(k, x) \cdot x dx \quad D3_k := \frac{1}{N12(k)} \cdot \int_{x0}^1 w3(x) \cdot V12(k, x) \cdot x dx$$

$$W(k, F) := D1_k \cdot \phi1(F) + D2_k \cdot \psi1(F) + D3_k \cdot \psi2(F) \quad B(k, F) := \int_0^F \exp(\mu_k^2 \cdot (t - F)) \cdot W(k, t) dt$$

$$TW(K, x, F) := \sum_{m=1}^K B(m, F) \cdot V12(m, x) \quad T(K, x, F) := T0 + TW(K, x, F) + U(x, F)$$

x := 0.3, 0.31..1



$F := 0, 0.1.. 10$ 

Как видно из графиков, значения температуры практически не зависят от того, сколько членов ряда взято для приближенного вычисления, т. е. для вычисления температурных полей с высокой степенью точности достаточно взять два–три первых члена ряда.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сороговец, И.Б. Моделирование температурных полей двухслойного полого цилиндра методом разделения переменных / И.Б. Сороговец, О.Н. Медведева // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2017. – № 12. – С. 101–108.
2. Алексеев, Е.Р. Mathcad 12 / Е.Р. Алексеев, О.В. Чеснокова. – М. : NT Press, 2005. – 345 с.