УДК 519.6

АНАЛИЗ ЭФФЕКТИВНОСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ МЕТОДОВ РУНГЕ – КУТТЫ РАЗНОГО ПОРЯДКА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ

А.Н. ВОЛКОВ, Ю.В. КОШЕЛЕВА
(*Представлено: Т.М. ГЛУХОВА*)

Исследуются методы решения дифференциальных уравнений в области строительной механики. Проводится анализ эффективности методов. Выделены плюсы и минусы функциональных возможностей тех или иных методов, определены их недостатки и достоинства.

Многие задачи строительной механики, например, задачи изгиба стержней или балок, лежащих на упругом основании, задачи расчета оболочек вращения и многие другие сводятся к решению начальных и краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений и систем таких уравнений. Для их решения имеются простые и эффективные методы, такие как метод Эйлера, модифицированный метод Эйлера, метод Рунге – Кутты третьего порядка, метод Рунге – Кутты четвертого порядка, метод Рунге – Кутты – Фельберга и другие. Цель работы проанализировать данные методы на эффективность использования и сравнить их быстродействия с использованием ЭВМ.

Метод Эйлера

Метод Эйлера относиться к численным методам, дающим решение в виде таблицы приближенных значений искомой функции $y(x)$. Он является сравнительно грубым и применяется в основном для ориентировочных расчетов. Однако идеи, положенные в основу метода Эйлера, являются исходными для ряда других методов. Метод Эйлера является самым простым, для реализации каждое последующее приближение рассчитывается по формуле:

$$y_{n+1} = y_n + hk_1;$$

$$y_{n+1} = x_n + h,$$

$k = f(x_n, y_n)$.

Идея методов Эйлера и Рунге – Кутты состоит в том, чтобы заменить фрагмент графика ломаной линией (кривой Эйлера), которая имеет направление, совпадающее с направлением той интегральной кривой.

Существенным недостатком простого метода Эйлера является слишком большая погрешность, при этом легко заметить, что погрешность имеет тенденцию накапливаться.

Модифицированный метод Эйлера

Существуют модифицированные методы Эйлера. К примеру, метод средних точек, рассчитывающий приближения по следующим формулам:

$$y_{n+1} = y_n + hk_2;$$

$$y_{n+1} = x_n + h;$$

$$k_1 = f(x_n, y_n);$$

$$k_2 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{hk_1}{2}\right).$$

Однако значительного уменьшения погрешности при применении данных методов не наблюдается.

Методы Рунге – Кутты

Методы типа Рунге – Кутты являются наиболее популярными одношаговыми методами численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) в настоящее время. Рассмотрим несколько из этих методов.

Метод Рунге – Кутты третьего порядка

Для увеличения точности решения применяют методы Рунге – Кутты разных порядков. Например, метод 3-го порядка требует на каждом шаге вычислять по 3 значения функции *f(x)* (для каждого коэффициента *k*):

$$y_{n+1} = y_n + h\left(\frac{k_1}{6} + \frac{2k_2}{3} + \frac{k_3}{6}\right),$$

$$x_{n+1} = x_n + h.$$

$$k = f(x_n, y_n).$$

$$k_2 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{hk_1}{2}\right).$$

$$k_3 = f(x_n + hy_n + 2hk_2 - hk_1).$$

Метод Рунге – Кутты четвертого порядка

Наиболее распространенным (классическим) считается метод Рунге – Кутты 4-го порядка, где значение функции потребуется рассчитать 4 раза на каждом шаге расчета.

Расчет каждого приближения вычисляется по формулам:

$$y_{n+1} = y_n + h\left(\frac{k_1}{6} + \frac{k_2}{3} + \frac{k_3}{6} + \frac{k_4}{6}\right),$$

$$x_{n+1} = x_n + h.$$

$$k_1 = f(x_n, y_n).$$

$$k_2 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{hk_2}{2}\right).$$

$$k_3 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{hk_2}{2}\right).$$

$$k_4 = f(x_n + hy_n + hk_3).$$

Метод Рунге – Кутты – Фельберга

Метод Рунге – Кутта – Фельберга позволяет оценивать погрешность решения без применения двойного пересчета. Формулы метода дают одновременно решения четвертого и пятого порядков точности. Разность этих решений служит оценкой погрешности более точного решения пятого порядка. Найденная оценка может использоваться для корректировки величины шага приращения аргумента. Метод, предложенный Фельбергом, является модификацией метода Рунге – Кутты:

$$y_{n+1} = y_n + h\left(\frac{25k_1}{216} + \frac{1408k_3}{2565} + \frac{2197k_4}{4104} - \frac{k_5}{5}\right),$$

$$x_{n+1} = x_n + h,$$

$$k_1 = f(x_n, y_n),$$

$$k_2 = f\left(x_n + \frac{h}{4}, y_n + \frac{hk_1}{2}\right),$$

$$k_3 = f\left(x_n + \frac{3h}{8}, y_n + \frac{3hk_1}{32} + \frac{9hk_2}{32}\right),$$

$$k_4 = f\left(x_n + \frac{12h}{13}, y_n + \frac{1932hk_1}{2197} - \frac{7200hk_2}{2197} + \frac{7296hk_3}{2197}\right),$$

$$k_5 = f\left(x_n + h, y_n + \frac{439hk_1}{216} - 8hk_2 + \frac{3680hk_3}{513} - \frac{845hk_4}{4104}\right),$$

$$k_6 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n - \frac{8hk_1}{27} + 2hk_2 - \frac{3544hk_3}{2565} + \frac{1859hk_4}{4104} - \frac{11hk_5}{40}\right).$$

Как может показаться из формул, количество вычислений правой части уравнения здесь равно 6 (по количеству коэффициентов k). Но преимущество данного метода в том, что шаг не является постоянным в отличие от методов Рунге – Кутты и может модифицироваться по следующему алгоритму:

1) если $|E| > \varepsilon$, то шаг уменьшается вдвое $h^2 = \frac{1}{2} \cdot h^1$;

2) если $|E| < \varepsilon$, то шаг удваивается $h^2 = 2h^1$;

3) если $\frac{\varepsilon}{32} < |E| < \varepsilon$, то шаг не меняется.

В этих формулах ε – заданная точность, а E рассчитывается по следующей формуле:

$$E = \frac{1}{360}k_1 - \frac{128}{4275}k_3 - \frac{2197}{75240}k_4 + \frac{1}{50}k_5 + \frac{2}{55}k_6.$$

Такая модификация метода является как его достоинством, так и его недостатком. Недостаток заключается в том, что количество шагов расчета заранее неизвестно, так как шаг является модифицируемым. Но в результате правильного выбора начальных значений количество вычислений правой части может быть значительно снижено по сравнению с классическим методом Рунге – Кутты, что и является достоинством этого метода.

Рассмотрим указанные методы для нескольких видов уравнений.

Уравнение вида $2xy(x) + y'(x) = 0$ при $y(1) = 2$.

Вычислим погрешности вычисления, занесенные в таблицу погрешностей (табл. 1), в зависимости от выбранного метода вычислений и погрешностей (табл. 1) и в зависимости от количества итераций (табл. 2), постоим график (рис. 1), произведем анализ эффективности их использования.

Таблица 1. – Результаты расчетов погрешностей

Метод	Погрешность			
	h = 0,01	h = 0,05	h = 0,1	h = 0,2
Метод Эйлера	0,0000981	0,000399	0,000601	0,00671
Модифицированный метод Эйлера	0,00000158	0,0000469	0,000252	0,00267
Метод Рунге – Кутты третьего порядка	2,23E-08	0,00000326	0,0000313	0,000307
Метод Рунге – Кутты четвертого порядка	2,27E-10	0,000000168	0,00000333	0,0000858
Метод Рунге – Кутты – Фелберга	1,45E-08	1,45E-08	1,44E-08	1,43E-08

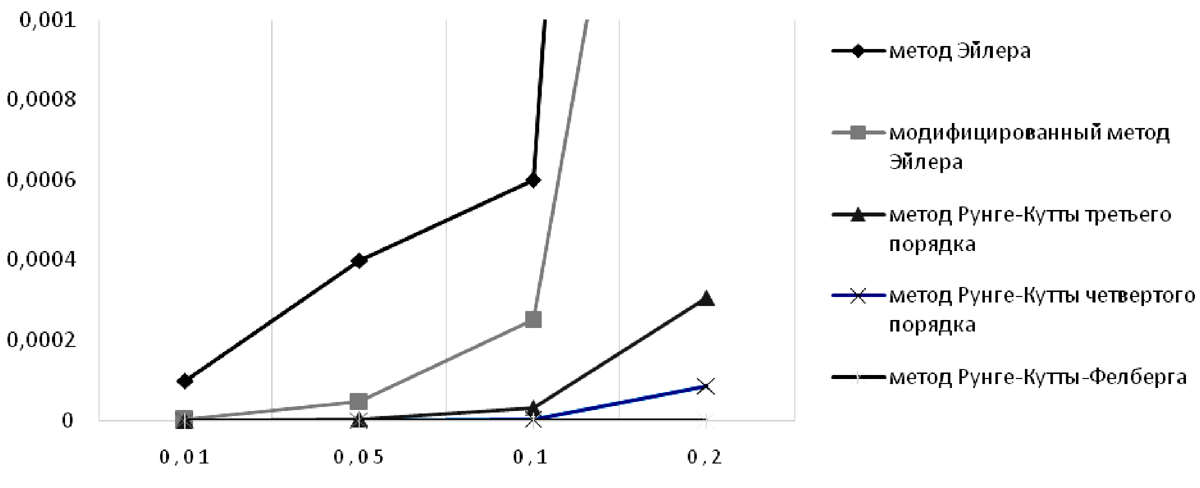

Рисунок 1. – Изменения погрешностей вычислений

Таблица 2. – Результат расчетов погрешностей в зависимости от количества итераций

Метод	Погрешность						
	5	10	20	40	55	56	100
Метод Эйлера		0,00671	0,000601	0,000399	–	–	–
Модифицированный метод Эйлера	0,00267	0,000252	0,0000469	–	–	–	0,00000158
Метод Рунге – Кутты третьего порядка	–	0,000307	0,0000313	3,26E–06	–	–	–
Метод Рунге – Кутты четвертого порядка	–	0,0000858	0,00000333	1,68E–07	–	–	–
Метод Рунге – Кутты – Фельберга	–	–	–	–	1,45E–08	1,45E–08	–

Из графиков и таблицы видно, что шаг значительно влияет на точность результатов первых четырех методов, а для метода Рунге – Кутты – Фельберга начальный шаг сказывается незначительно. При этом из таблицы хорошо видно, для достижения точности, близкой к точности метода Рунге – Кутты – Фельберга, в других методах может потребоваться гораздо большее количество итераций с небольшим постоянным шагом.

Заключение

Для решения дифференциальных уравнений в задачах строительной механики целесообразно применять методы Рунге – Кутта.

Метод 4-го порядка получает ответ с более высокой точностью по сравнению с методами более низкого порядка. Но отдельной задачей является поиск оптимального шага, так как при неудачном его выборе модифицированный метод Рунге – Кутты – Фельберга может оказаться значительно эффективнее.

ЛИТЕРАТУРА

1. Демидович, Б.П. Численные методы анализа / Б.П. Демидович, И.А. Марон, Э.З. Шувалова. – М. : Физматгиз, 1963. – 400 с.
2. Мак-Кракен, Д. Численные методы и программирование на ФОРТРАНе / Д. Мак-Кракен, У. Дорн. – М. : Мир, 1977. – 584 с.
3. Зельдович, Я.Б. Элементы прикладной математики / Я.Б. Зельдович, А.Д. Мышкис. – М. : Наука, 1972. – 592 с.
4. Хемминг, Р.В. Численные методы для научных работников и инженеров / Р.В. Хемминг. – М. : Наука, 1968. – 400 с.
5. Самарский, А.А. Численные методы / А.А. Самарский, А.В. Гулин. – М. : Наука, 1989. – 430 с.
6. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. – М. : Мир, 1979.
7. Бабушка, И. Численные процессы решения дифференциальных уравнений / И. Бабушка, Э. Витасек, М. Прагер. – М. : Мир, 1969. – 368 с.