УДК 519.6

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РУНГЕ-КУТТЫ 4-ГО ПОРЯДКА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ

Ю.В. КОШЕЛЕВА, А.Н. ВОЛКОВ
(Представлено: Т.М. ГЛУХОВА)

Рассмотрены методы применения метода Рунге – Кутты 4-го порядка для решения задач строительной механики. Проанализированы особенности метода на простых примерах.

Одной из характерных особенностей научно-технического процесса является широкое применение численных математических методов и ЭВМ в различных областях творческой деятельности человека, и тем более в расчетах строительных конструкций.

При комплексном подходе к решению сложных задач строительной механики аналитические методы в большинстве случаев малоэффективны. Решение современных задач строительной механики связано с использованием сложных расчетных схем, близких к реальным конструкциям. Расчет таких сложных систем стал возможным только благодаря широкому применению численных методов расчета, ориентированных на использование ЭВМ.

В строительной механике задачи определения параметров напряженно-деформированного состояния сводятся к решению дифференциальных уравнений или системе дифференциальных уравнений, подобных следующему:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx} s = \varepsilon_{s,ad}(\sigma_{s,ad}) - \varepsilon_{ct}\left(\dfrac{N - \sigma_{s,ad} \cdot A_{s,ad}}{A_{c,eff}}\right); \\ \dfrac{d}{dx}\sigma_{s,ad} = \dfrac{4}{\varnothing} \cdot \Omega_y \cdot \Omega_{p,tr} \cdot \tau(s), \end{cases} \qquad (1)$$

где значения напряжений $\sigma_{s,ad,(l)}$ и $\sigma_{s,ad,(r)}$ и другие параметры известны, а значения смещений $s_{(l)}$ и $s_{(r)}$ неизвестны.

Для решения подобных задач применяют приближенные методы вычисления, так как применение прямых методов невозможно в силу сложности расчета. Среди численных методов, которые применяются для решения дифференциальных уравнений выделяют метод Рунге – Кутты 4 порядка:

Метод Рунге – Кутты 4-го порядка

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y' = f(x, y); (2)$$

с начальным условием

$$y = (x_0) = y_0. (3)$$

Классический метод Рунге – Кутты 4-го порядка описывается следующей системой пяти равенств:

$$y_{i+1} = y_m + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \qquad (4)$$

где

$$k_1 = f(x_i, y_i),$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{hk_1}{2}\right),$$

$$k_3 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{hk_2}{2}\right),$$

$$k_4 = f(x_i + h, y_i + hk_3).$$

В данном случае мы имеем метод 4-го порядка, который является одним из наиболее применяемых на практике, так как обеспечивает высокую точность и в то же время отличается сравнительной простотой.

Свойства метода

1. Методы Рунге – Кутты являются одноступенчатыми: чтобы найти значение y_{m+1}, нужна информация о предыдущей точке x_m, y_m.

2. Методы Рунге – Кутты согласуются с рядом Тейлора вплоть до членов порядка h^p,где степень p различна для различных методов и называется порядковым номером илипорядком метода.

3. Методы Рунге – Кутты не требуют вычисления производных от $f(x, y)$, а требуют вычислениясамой функции.

Пример 1

Вычислить методом Рунге – Кутты интеграл дифференциального уравнения

$$y' = f(x, y)$$

при начальном условии $y(0) = 1$ на отрезке [0, 0.5] с шагом интегрирования h = 0.1.

Р е ш е н и е . Вычислим y_1 .

Для этого сначала последовательно вычисляем k_j :

$$k_1 = x_0 + y_0,$$

$$k_1 = x_0 + y_0 = 0 + 1 = 1,$$

$$k_2 = x_0 + \frac{h}{2} + y_0 \frac{hk_1}{2} = (0 + 0.05) + (1 + 0.05 = 1.1,$$

$$k_3 = x_0 + \frac{h}{2} + y_0 \frac{hk_2}{2} = (0 + 0.05) + (1 + 0.005 = 1.105,$$

$$k_4 = x_0 + h + y_0 + hk_3 = (0 + 0.1) + (1 + 0.1105) = 1.2105.$$

Теперь получим

$$\Delta y_0 = \frac{0.1}{6}(1 + 2 \cdot 1.1 + 2 \cdot 1.105 + 1.2105) = 0.1103,$$

и, следовательно,

$$y_1 = y_0 + \Delta y_0 = 1 + 0.1103 = 1.1103.$$

Аналогично вычисляются последующие приближения.

Итак, y (0.5) =1.7974.

Для сравнения точное решение дифференциального уравнения (1):

$$y = 2e^x - x - 1,$$

откуда

$$y(0.5) = 2\sqrt{e} - 0.5 - 1 = 1.79744.$$

Таким образом, точное и численное решения уравнения (1) совпали до пятого десятичного знака.

Если исследовать зависимость точности решения от шага, выбранного для расчета, то получим следующую закономерность, представленную на рисунке 1.

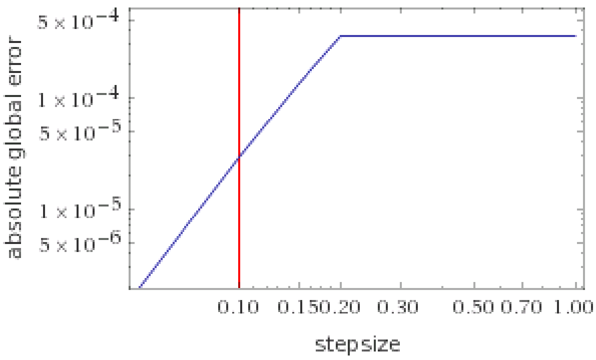

Рисунок 1. – Зависимость точности решения от шага

Рассмотрим другие виды уравнений.

Пример 2

$$y'=x \cdot y,\ y(0) = 2$$

Построим график зависимости точности от шага (рисунок 2).

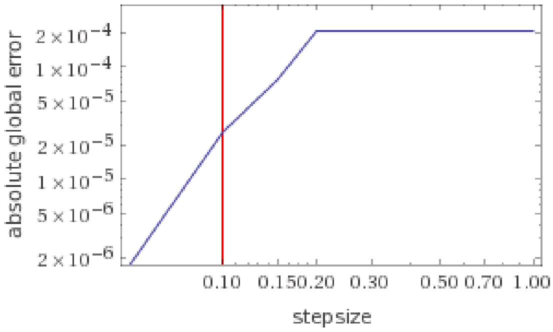

Рисунок 2. – График зависимости точности от шага

Пример 3

$$y'= -2 \cdot x \cdot y,\ y(0) = 2$$

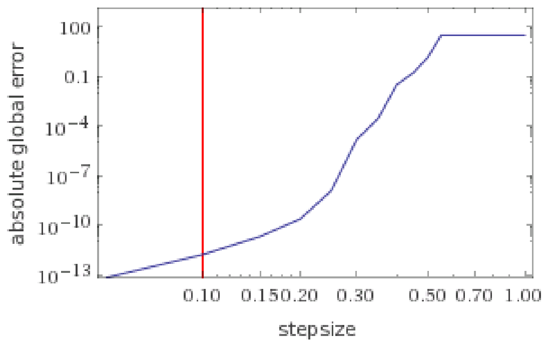

Рисунок 3. – График зависимости точности от шага

Из приведенных примеров можно сделать вывод, что величина шага, выбранная для решения дифференциального уравнения методом Рунге – Кутты, может существенно влиять на точность результатов. Но, начиная с определенного момента, значение шага практические не влияет на погрешность (график параллельно оси), а это значит, что благодаря большому шагу поиск решения займет меньше времени, но с потерей точности. Потому для применения метода Рунге – Кутты в задачах строительной механики требуется рассмотреть вопрос о выборе оптимального шага для поиска решения.

Исходя из вышеизложенного, для решения систем дифференциальных уравнений выбираем метод решения – метод Рунге – Кутта 4 порядка, обладающего рядом достоинств для решения задач строительной механики: метод является одноступенчатым; требует информацию только об одной точке; имеет небольшую погрешность; значение функции рассчитывается при каждом шаге.

Заключение

Метод Рунге – Кутты четвертого порядка в работе детально рассмотрен. Приведены необходимые теоретические сведения, обоснована необходимость использования данного метода.

ЛИТЕРАТУРА

1. Демидович, Б.П. Численные методы анализа / Б.П. Демидович, И.А. Марон, Э.З. Шувалова. – М. : Физматгиз, 1963. – 400 с.
2. Мак-Кракен, Д. Численные методы и программирование на ФОРТРАНе / Д. Мак-Кракен, У. Дорн. – М. : Мир, 1977. – 584 с.
3. Зельдович, Я.Б. Элементы прикладной математики / Я.Б. Зельдович, А.Д. Мышкис. – М. : Наука, 1972. – 592 с.
4. Хемминг, Р.В. Численные методы для научных работников и инженеров / Р.В. Хемминг. – М. : Наука, 1968. – 400 с.
5. Самарский, А.А. Численные методы / А.А. Самарский, А.В. Гулин. – М. : Наука, 1989. – 430 с.
6. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. – М. : Мир, 1979.
7. Бабушка, И. Численные процессы решения дифференциальных уравнений / И. Бабушка, Э. Витасек, М. Прагер. – М. : Мир, 1969. – 368 с.