

УДК 624.04

О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ ИЗГИБА СЖАТО-ИЗОГНУТОГО СТЕРЖНЯ
С УЧЕТОМ РАЗНОМОДУЛЬНОСТИ МАТЕРИАЛА

Н.А. ВОЙТЕШОНОК, Е.К. КУКОР

(Представлено: канд. техн. наук, доц. Л.С. ТУРИЩЕВ)

Сделано обобщение дифференциального уравнения оси сжато-изогнутого стержня для случая, когда конструкционный материал балки характеризуется различными модулями упругости при растяжении и сжатии. Используя метод начальных параметров, получены обобщенные формулы для определения параметров напряженно-деформированного состояния (НДС) в произвольном сечении стержня.

Рассмотрим прямолинейный гибкий стержень, нагруженный постоянной продольной силой и поперечной нагрузкой, показанной на рисунке 1.

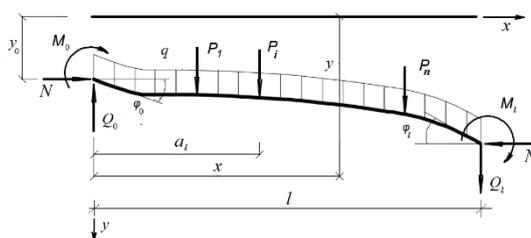


Рисунок 1. – Сжато-изогнутый стержень

Под действием приложенной нагрузки стержень претерпевает деформации сжатия с изгибом. Напряженно-деформированное состояние (НДС) стержня в начале координат характеризуется величинами

$$y(0) = y_0, \quad y'(0) = y'_0, \quad M(0) = M_0, \quad Q(0) = Q_0,$$

которые являются, соответственно, прогибом, углом поворота, изгибающим моментом и поперечной силой в левом сечении стержня и называются начальными параметрами.

Принимается, что стержень выполнен из разномодульного материала. Поперечное сечение стержня симметричное произвольной формы (рис. 2)

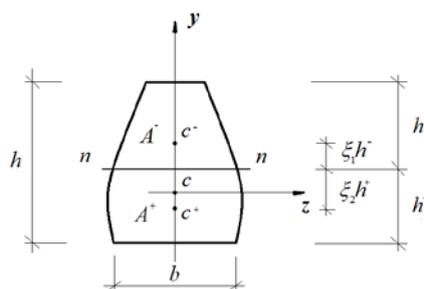


Рисунок 2. – Симметричное поперечное сечение стержня

где A^- – площадь сжатой части сечения с центром тяжести в точке c^- ; A^+ – площадь растянутой части сечения с центром тяжести в точке c^+ . Общая площадь поперечного сечения $A = A^- + A^+$.

Для описания прогибов сжато-изогнутого стержня, выполненного из разномодульного материала, используем приближенное дифференциальное уравнение изогнутой оси такого стержня [1]

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{M(x)}{D(x)}, \quad (1)$$

где $M(x)$ - изгибающий момент в произвольном сечении; $D(x)$ – изгибная жесткость поперечного сечения стержня с учетом разномодульности материала.

Входящий в уравнение (1) изгибающий момент $M(x)$, для рассматриваемой схемы нагружения стержня описывается выражением

$$M(x) = M_0 + Q_0x + N[y(x) - y_0] - \sum P_i(x - a_i) - \frac{qx^2}{2}. \quad (2)$$

При определении момента по формуле (2) в некотором сечении под знаком суммы необходимо учитывать только те силы, которые находятся левее этого сечения.

Входящая в уравнение (1) величина $D(x)$, характеризует изгибную жесткость поперечного сечения с учетом влияния разномодульности конструкционного материала. Эта величина связана с обычной изгибной жесткостью поперечного сечения EI_z соотношением [2]

$$D = \frac{EI_z}{\zeta} \quad (3)$$

где ζ – коэффициент влияния разномодульности конструкционного материала на изгибную жесткость поперечного сечения. Для симметричного поперечного сечения произвольной формы он описывается выражением

$$\zeta = \frac{I_z}{I^+(x) + \mu I^-(x)}.$$

где $I^-(x)$ и $I^+(x)$ характеризуют моменты инерции, соответственно, сжатой и растянутой частей поперечного сечения относительно нейтральной оси; $\mu = \frac{E^-}{E^+}$ – коэффициент разномодульности конструкционного материала, характеризующий соотношение его модулей упругости при сжатии E^- и растяжении E^+ .

С учетом (2), (3) уравнение (1) примет вид

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \zeta \frac{N}{EI_z} y = -\frac{\zeta}{EI_z} \left[M_0 + Q_0x - Ny_0 - \sum P_i(x - a_i) - \frac{qx^2}{2} \right]. \quad (4)$$

Полученное уравнение (4) описывает изогнутую ось гибкого сжато-изогнутого стержня с учетом разномодульности его материала и является обыкновенным неоднородным дифференциальным уравнением 2 порядка с постоянными коэффициентами. При значении $\zeta = 1$ уравнение (4) принимает вид, когда расчет сжато-изогнутого стержня ведется без учета разномодульности материала.

Введя обозначение $n = \sqrt{\frac{N}{EI_z}}$, получим общее решение уравнения (4) в виде

$$y(x) = C_1 \cos \sqrt{\zeta} nx + C_2 \sin \sqrt{\zeta} nx + y^*(x). \quad (5)$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные; $\cos \sqrt{\zeta} nx, \sin \sqrt{\zeta} nx$ – частные решения однородного уравнения, полученного из уравнения (4); $y^*(x)$ - частное решение неоднородного уравнения (4), которое имеет вид

$$y^*(x) = y_0 - \frac{M_0 + Q_0x}{n^2 EI_z} + \frac{\sum P_i}{n^3 EI_z} \left[\sqrt{\zeta} n(x - a_i) - \sin \sqrt{\zeta} n(x - a_i) \right] - \frac{q}{n^4 EI_z} \left[\left(1 - \frac{\zeta n^2 x^2}{2} \right) - \cos \sqrt{\zeta} nx \right]$$

Произвольные C_1, C_2 определяются из граничных условий на левом конце стержня

$$\begin{aligned} y(0) &= y_0 \\ y'(0) &= y'_0 \end{aligned}$$

Используя эти условия, найдем

$$C_1 = \frac{M_0}{n^2 EI_z}, \quad C_2 = \frac{1}{\sqrt{\zeta} n} \left(\varphi_0 + \frac{Q_0}{n^2 EI_z} \right) \quad (6)$$

Подставляя (6) в общее решение (5), получим формулу для прогибов сжато-изогнутого стержня

$$y(x) = y_0 + y_0' \frac{\sin \sqrt{\zeta} nx}{\sqrt{\zeta} n} + \frac{M_0}{n^2 EI_z} (\cos \sqrt{\zeta} nx - 1) + \frac{Q_0}{n^3 EI_z} \left(\frac{\sin \sqrt{\zeta} nx}{\sqrt{\zeta}} - nx \right) + y_p(x). \quad (7)$$

Дифференцируя последовательно (7), получим формулы для углов поворота, изгибающих моментов и поперечных сил сжато-изогнутого стержня

$$\begin{aligned} y'(x) &= y_0' \cos \sqrt{\zeta} nx - \frac{M_0}{nEI_z} \sqrt{\zeta} \sin \sqrt{\zeta} nx + \frac{Q_0}{n^2 EI_z} (\cos \sqrt{\zeta} nx - 1) + y_p'(x) \\ M(x) &= y_0' \frac{EI_z}{\sqrt{\zeta}} n \sin \sqrt{\zeta} nx + M_0 \cos \sqrt{\zeta} nx + Q_0 \frac{\sin \sqrt{\zeta} nx}{n\zeta} + M_p(x) \\ Q(x) &= y_0' EI_z n^2 \cos \sqrt{\zeta} nx - M_0 \sqrt{\zeta} n \sin \sqrt{\zeta} nx + Q_0 \frac{\cos \sqrt{\zeta} nx}{\sqrt{\zeta}} + Q_p(x) \end{aligned} \quad (8)$$

В формулах (7), (8), позволяющие находить параметры НДС в произвольном сечении сжато-изогнутого стержня с учетом влияния разномодульности конструкционного материала, величины $y_p(x)$, $y_p'(x)$, $M_p(x)$, $Q_p(x)$ характеризуют влияние пролетной нагрузки на соответствующий параметр НДС и для нагрузки, показанной на рис.1, определяются по следующим формулам

$$\begin{aligned} y_p(x) &= \frac{1}{n^3 EI_z} \sum_i P_i \left[\sqrt{\zeta} n(x - a_i) - \sin \sqrt{\zeta} n(x - a_i) \right] - \frac{q}{n^4 EI_z} \left[\left(1 - \frac{\zeta n^2 x^2}{2} \right) - \cos \sqrt{\zeta} nx \right] \\ y_p'(x) &= \frac{\sqrt{\zeta}}{n^2 EI_z} \sum_i P_i \left[1 - \cos \sqrt{\zeta} n(x - a_i) \right] + \frac{q}{n^3 EI_z} \left[\zeta nx - \sin \sqrt{\zeta} nx \right] \\ M_p(x) &= -\frac{1}{n} \sum_i P_i \sin \sqrt{\zeta} n(x - a_i) - \frac{q}{\zeta n^2} \left[\zeta - \sqrt{\zeta} \cos \sqrt{\zeta} nx \right] \\ Q_p(x) &= -\zeta \sum_i P_i \cos \sqrt{\zeta} n(x - a_i) - \frac{q}{n} \sin \sqrt{\zeta} nx \end{aligned}$$

Полученные дифференциальное уравнение (4) и формулы (7), (8) позволяют получать решения конкретных задач расчета сжато-изогнутых стержней с учетом разномодульности материала.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян, С.А. Разномодульная теория упругости / С.А. Амбарцумян. – М.: Физматгиз, 1982. – 317 с.
2. Турищев, Л.С. К вопросу о расчете стержневых конструкций с учетом влияния разномодульности материала / Л.С. Турищев // Вестник ПГУ. Серия В. Промышленность. Прикладные науки. – 2010. – № 2. – С. 63–67.

УДК 624.04

ЕДИНИЧНЫЕ ПАРАМЕТРЫ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ СЖАТО-ИЗОГНУТЫХ СТЕРЖНЕЙ С УЧЕТОМ РАЗНОМОДУЛЬНОСТИ МАТЕРИАЛА

Н.А. ВОЙТЕШОНОК, Е.К. КУКОР

(Представлено: канд. техн. наук, доц. Л.С. ТУРИЩЕВ)

Получены аналитические выражения для единичных перемещений и внутренних усилий с учетом разномодульности конструкционного материала для двух схем опирания сжато-изогнутых стержней. Рассмотрена зависимость обобщенных функций метода перемещений для таких стержней от коэффициента влияния разномодульности конструкционного материала на изгибную жесткость стержней. Показано, что учет разномодульности материала может существенно влиять на значения единичных параметров напряженно-деформированного состояния сжато-изогнутых стержней.

Рассматриваются стержни с двумя схемами опирания – защемленные двумя концами и одним защемленным, а вторым шарнирно опертым концом, в которых при действии постоянной сжимающей силы N происходят перемещения опорных закреплений – поворот неподвижной защемляющей опоры на угол равный единице или линейное единичное смещение шарнирно подвижной опоры (рис. 1)

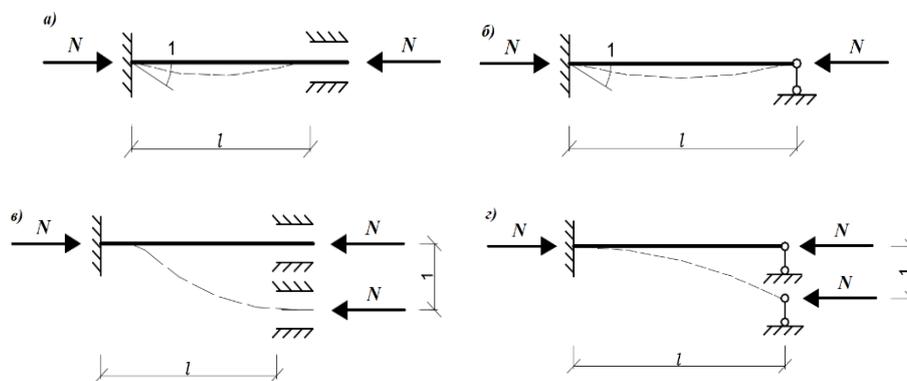


Рисунок 1. – Схемы сжато-изогнутых стержней

Начальные параметры рассматриваемых сжато-изогнутых стержней характеризуются следующими величинами:

– сжатый стержень с двумя защемленными концами при единичном повороте неподвижной защемляющей опоры (рис. 1, а)

$$y_0 = 0, y'_0 = 1, M_0 \neq 0, Q_0 \neq 0, \tag{1}$$

– сжатый стержень с одним защемленным и вторым шарнирно опертым концом при единичном повороте неподвижной защемляющей опоры (рис. 1, б)

$$y_0 = 0, y'_0 = 1, M_0 \neq 0, Q_0 \neq 0, \tag{2}$$

– сжатый стержень с двумя защемленными концами при единичном линейном смещении подвижной защемляющей опоры (рис. 1. в)

$$y_0 = 0, y'_0 = 0, M_0 \neq 0, Q_0 \neq 0, \tag{3}$$

– сжатый стержень с одним защемленным и вторым шарнирно опертым концом при единичном линейном смещении шарнирно подвижной опоры (рис. 1, з)

$$y_0 = 0, y'_0 = 0, M_0 \neq 0, Q_0 \neq 0, \tag{4}$$

С учетом величин начальных параметров формулы для прогибов, углов поворота, изгибающих моментов и поперечных сил сжато-изогнутого стержня примут вид:

– для сжато-изогнутых стержней, показанных на рисунок 1, а, б

$$\begin{aligned}
y(x) &= \frac{\sin \sqrt{\zeta} nx}{\sqrt{\zeta} n} + \frac{M_0}{n^2 EI_z} (\cos \sqrt{\zeta} nx - 1) + \frac{Q_0}{n^3 EI_z} \left(\frac{\sin \sqrt{\zeta} nx}{\sqrt{\zeta}} - nx \right) \\
y'(x) &= \cos \sqrt{\zeta} nx - \frac{M_0}{n EI_z} \sqrt{\zeta} \sin \sqrt{\zeta} nx + \frac{Q_0}{n^2 EI_z} (\cos \sqrt{\zeta} nx - 1) \\
M(x) &= \frac{EI_z}{\sqrt{\zeta}} n \sin \sqrt{\zeta} nx + M_0 \cos \sqrt{\zeta} nx + Q_0 \frac{\sin \sqrt{\zeta} nx}{n \zeta} \\
Q(x) &= EI_z n^2 \cos \sqrt{\zeta} nx - M_0 \sqrt{\zeta} n \sin \sqrt{\zeta} nx + Q_0 \frac{\cos \sqrt{\zeta} nx}{\sqrt{\zeta}}
\end{aligned} \tag{5}$$

– для сжато-изогнутых стержней, показанных на рисунке 1, *в, з*

$$\begin{aligned}
y(x) &= \frac{M_0}{n^2 EI_z} (\cos \sqrt{\zeta} nx - 1) + \frac{Q_0}{n^3 EI_z} \left(\frac{\sin \sqrt{\zeta} nx}{\sqrt{\zeta}} - nx \right) \\
y'(x) &= -\frac{M_0}{n EI_z} \sqrt{\zeta} \sin \sqrt{\zeta} nx + \frac{Q_0}{n^2 EI_z} (\cos \sqrt{\zeta} nx - 1) \\
M(x) &= M_0 \cos \sqrt{\zeta} nx + Q_0 \frac{\sin \sqrt{\zeta} nx}{n \zeta} \\
Q(x) &= -M_0 \sqrt{\zeta} n \sin \sqrt{\zeta} nx + Q_0 \frac{\cos \sqrt{\zeta} nx}{\sqrt{\zeta}}
\end{aligned} \tag{6}$$

Для определения оставшихся начальных параметров M_0, Q_0 , которыми являются единичные внутренние усилия в сечениях на левом конце стержней, используем граничные условия на правом конце стержней. Эти условия имеют вид:

– сжато-изогнутый стержень (рис.1, *а*)

$$y(l) = 0; \quad y'(l) = 0; \tag{7}$$

– сжато-изогнутый стержень (рис.1, *б*)

$$y(l) = 0; \quad M(l) = 0; \tag{8}$$

– сжато-изогнутый стержень (рис.1, *в*)

$$y(l) = 1; \quad y'(l) = 0; \tag{9}$$

– сжато-изогнутый стержень (рис.1, *з*)

$$y(l) = 1; \quad M(l) = 0; \tag{10}$$

Подчиняя выражения (5), (6) соответствующим граничным условиям (7) – (8), решая для каждого случая систему двух линейных неоднородных алгебраических уравнения и вводя обозначение $\nu = nl$, получим следующие выражения для внутренних усилий в сечениях на левом конце стержней:

– для сжато-изогнутого стержня, показанного на рисунке 1, *а*

$$M_0 = \frac{4EI}{l} \varphi_2(\zeta\nu); \quad Q_0 = -\frac{6EI}{l^2} \varphi_4(\zeta\nu), \tag{11}$$

– для сжато-изогнутого стержня, показанного на рисунке 1, *б*

$$M_0 = \frac{3EI}{l} \varphi_1(\zeta\nu); \quad Q_0 = -\frac{3EI}{l^2} \varphi_1(\zeta\nu), \tag{12}$$

– для сжато-изогнутого стержня, показанного на рисунке 1, *в*

$$M_0 = -\frac{6EI}{l^2} \varphi_4(\zeta\nu); \quad Q_0 = \frac{12EI}{l^3} \eta_2(\zeta\nu), \tag{13}$$

– для сжато-изогнутого стержня, показанного на рисунке 1, *з*

$$M_0 = -\frac{3EI}{l^2} \varphi_1(\zeta v); \quad Q_0 = \frac{3EI}{l^3} \eta_1(\zeta v), \quad (14)$$

где $\varphi_1(\zeta v), \varphi_2(\zeta v), \varphi_3(\zeta v), \varphi_4(\zeta v), \eta_1(\zeta v), \eta_2(\zeta v)$ – обобщенные функции метода перемещений для сжато изогнутых стержней. Эти функции имеют вид

$$\varphi_1(\zeta v) = \frac{v^2 \operatorname{tg} \sqrt{\zeta} v}{3(\operatorname{tg} \sqrt{\zeta} v - \sqrt{\zeta} v)}; \quad \varphi_2(\zeta v) = \frac{v}{4 \operatorname{tg} \sqrt{\zeta} v} \frac{\operatorname{tg} \sqrt{\zeta} v - \sqrt{\zeta} v}{2 \operatorname{tg} \frac{\sqrt{\zeta} v}{2} - \sqrt{\zeta} v}; \quad \varphi_3(\zeta v) = \frac{v}{4 \sin \sqrt{\zeta} v} \frac{\sqrt{\zeta} v - \sin \sqrt{\zeta} v}{\operatorname{tg} \frac{\sqrt{\zeta} v}{2} - \frac{\sqrt{\zeta} v}{2}};$$

$$\varphi_4(\zeta v) = \varphi_1\left(\zeta \frac{v}{2}\right); \quad \eta_1(\zeta v) = \frac{v^3}{3(\operatorname{tg} \sqrt{\zeta} v - \sqrt{\zeta} v)}; \quad \eta_2(\zeta v) = \eta_1\left(\zeta \frac{v}{2}\right)$$

Полученные функции характеризуют влияние продольной силы на внутренние усилия стержней с учетом разномодульности материала. При значении $\zeta = 1$ функции принимают вид, когда расчет сжато-изогнутых стержней ведется без учета разномодульности материала [1].

Используя полученные выражения функций исследуем их зависимость от коэффициента влияния разномодульности материала на изгибную жесткость стержней. Примем согласно [2] интервал изменения коэффициента $0.6 \leq \zeta \leq 1.7$. Значения $\zeta < 1$ соответствуют разномодульным конструкционным материалом с коэффициентом $\mu > 1$, а значения $\zeta > 1$ - с коэффициентом $\mu < 1$.

На рисунке 2 приведены графики зависимости начальных значений функций от коэффициента влияния в указанном интервале изменения

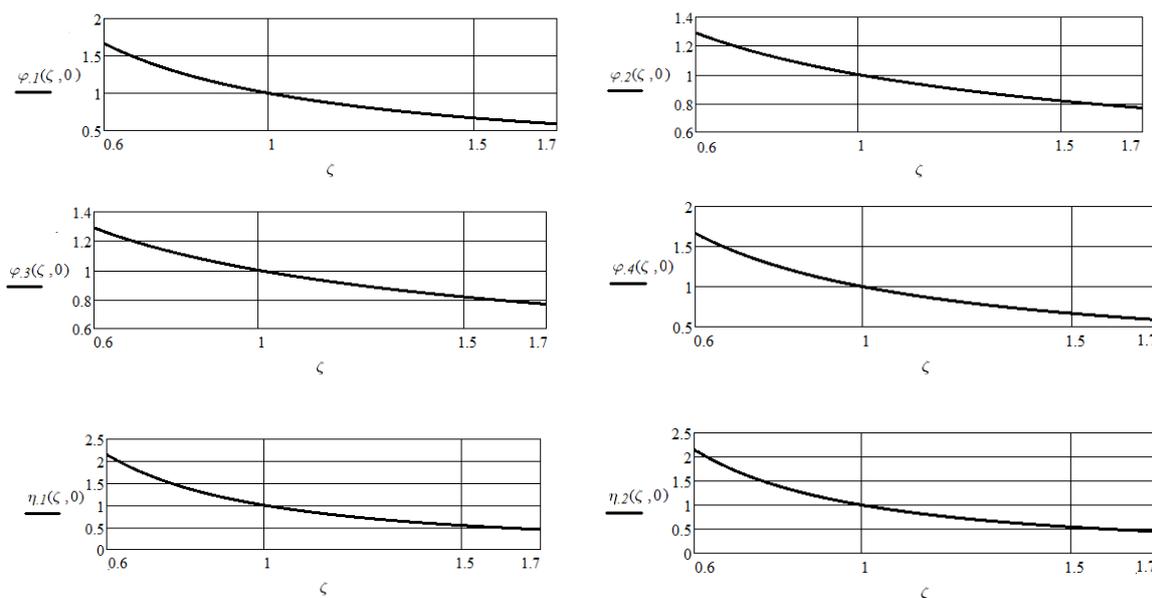


Рисунок 2. – Графики зависимости начальных значений функций метода перемещений

Из полученных графиков видно, что учет разномодульности материала может существенно влиять на значения функций метода перемещений, а, следовательно, на величины единичных параметров напряженно-деформированного состояния сжато-изогнутых стержней. Поэтому при определении единичных перемещений и внутренних усилий в сжато-изогнутых стержнях необходимо учитывать разномодульность конструкционного материала.

ЛИТЕРАТУРА

1. Раевский, А.Н. Основы расчета сооружений на устойчивость / А.Н. Раевский. – М. : Высшая школа, 1962. –160 с.
2. Турищев, Л.С. К вопросу о расчете стержневых конструкций с учетом влияния разномодульности материала / Л.С. Турищев // Вестник ПГУ. Серия В. Промышленность. Прикладные науки. – 2010. – № 2. – С. 63–67.

УДК 624.04

О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ ИЗГИБА БАЛКИ НА СПЛОШНОМ УПРУГОМ ОСНОВАНИИ С УЧЕТОМ РАЗНОМОДУЛЬНОСТИ МАТЕРИАЛА

Г.А. КАРАГОЗЯН, О.А. КУРИЛЕНКО

(Представлено: канд. техн. наук, доц. Л.С. ТУРИЩЕВ)

Получено дифференциальное уравнение изогнутой оси балки на упругом основании, описываемого моделью Винклера, для случая, когда конструкционный материал балки характеризуется различными модулями упругости при растяжении и сжатии. Введен обобщенный параметр жесткости системы «балка-основание», который учитывает разномодульность материала балки.

Рассматривается изгиб балки переменного поперечного сечения, лежащей на сплошном упругом основании, описываемого моделью Винклера (рис. 1).

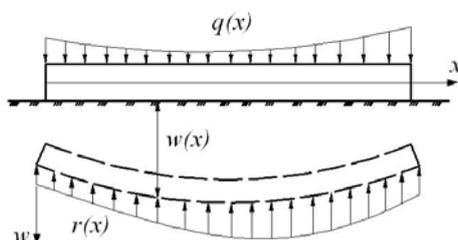


Рисунок 1. – Балка на сплошном упругом основании

Суммарная распределенная нагрузка складывается из внешней нагрузки и реактивного отпора основания

$$p(x) = q(x) + r(x). \quad (1)$$

Реактивный отпор основания, согласно модели Винклера, описывается выражением

$$r(x) = -kbw(x). \quad (2)$$

где b – ширина подошвы балки; k – коэффициент постели, характеризующий жесткость основания.

Принимается, что балка выполнена из разномодульного материала, который характеризуется коэффициентом разномодульности

$$\mu = \frac{E^-}{E^+},$$

где E^+ , E^- – соответственно, модули упругости при растяжении и сжатии. Поперечное сечение балки симметричное произвольной формы (рис. 2)

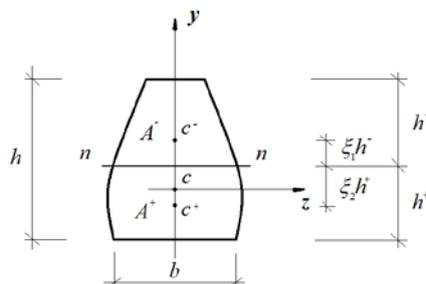


Рисунок 2. – Симметричное поперечное сечение балки

где A^- – площадь сжатой части сечения с центром тяжести в точке c^- ; A^+ – площадь растянутой части сечения с центром тяжести в точке c^+ . Общая площадь поперечного сечения

$$A = A^- + A^+.$$

Для описания прогибов балки, выполненной из разномодульного материала, используем приближенное дифференциальное уравнение изогнутой оси такой балки [1]

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{M}{D(x)}, \tag{3}$$

где $D(x) = E^- I^-(x) + E^+ I^+(x)$ – изгибная жесткость симметричного поперечного сечения произвольной формы с учетом разномодульности материала. Входящие в $D(x)$ величины $I^-(x)$ и $I^+(x)$ характеризуют моменты инерции, соответственно, сжатой и растянутой частей поперечного сечения относительно нейтральной оси. Положение нейтральной оси определяется с помощью уравнения

$$E^- S^-(x) = E^+ S^+(x),$$

где $S^-(x)$ – статический момент сжатой части поперечного сечения; $S^+(x)$ – статический момент растянутой части поперечного сечения.

Дважды дифференцируя по x (3), с учетом (2) и зависимостей Д.И. Журавского получим дифференциальное уравнение изгиба балки переменного поперечного сечения на сплошном упругом основании с учетом разномодульности материала балки

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(D(x) \frac{d^2 w}{dx^2} \right) = q(x) - kbw(x). \tag{4}$$

Далее рассматриваются балки постоянного поперечного сечения. Для оценки влияния разномодульности материала на изгибную жесткость поперечного сечения используем коэффициент влияния [2]

$$\zeta = \frac{EI_z}{D},$$

где $E = E^+$ – модуль упругости при растяжении.

Тогда уравнение (4) примет вид

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + 4\beta_p^4 w = \zeta \frac{q(x)}{EI_z}, \tag{5}$$

где $\beta_p = \sqrt[4]{\zeta} \beta$ – параметр жесткости системы «балка-основание» с учетом разномодульности конструкционного материала балки; $\beta = \sqrt[4]{\frac{kb}{4EI_z}}$ – параметр жесткости системы «балка-основание» без учета разномодульности конструкционного материала балки.

Полученное уравнение (5) описывает прогибы балки на упругом основании с учетом разномодульности её материала и является обыкновенным неоднородным дифференциальным уравнением 4 порядка с постоянными коэффициентами. При значении $\zeta = 1$ уравнение (5) принимает вид, когда расчет балки на упругом основании ведется без учета разномодульности материала.

Общее решение уравнения (5) складывается из общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного и имеет вид

$$w(x) = C_1 e^{\beta_p x} \sin \beta_p x + C_2 e^{\beta_p x} \cos \beta_p x + C_3 e^{-\beta_p x} \sin \beta_p x + C_4 e^{-\beta_p x} \cos \beta_p x + w^*(x), \tag{6}$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 – произвольные постоянные, определяемые из граничных условий; $e^{\beta_p x} \sin \beta_p x, e^{\beta_p x} \cos \beta_p x, e^{-\beta_p x} \sin \beta_p x, e^{-\beta_p x} \cos \beta_p x$ – частные решения, которые образуют общее решение однородного дифференциального уравнения $w^*(x)$ – частное решение неоднородного дифференциального уравнения (5), которое в начале координат принимает значение $w^*(0) = 0$ и зависит от схемы нагружения балки.

Наряду с уравнением (5) при расчете балок на упругом основании может использоваться другая форма дифференциального уравнения. Для его получения дважды продифференцируем (5) и с учетом (3) получим

$$M^{IV} + 4\beta_p^4 M = \zeta \frac{q''(x)}{EI_z}, \quad (7)$$

Уравнение (7) описывает изгибающие моменты балки на упругом основании с учетом разномодульности её материала.

Уравнения (5) и (7) эквивалентные. Однако если интенсивность распределенной нагрузки постоянная или изменяется по линейному закону $q(x) = a + bx$, то $q''(x) = 0$ и уравнение (7) становится однородным

$$M^{IV} + 4\beta_p^4 M = 0 \quad (8)$$

Тогда общее решение уравнения (8) имеет вид

$$M(x) = C_1 e^{\beta_p x} \sin \beta_p x + C_2 e^{\beta_p x} \cos \beta_p x + C_3 e^{-\beta_p x} \sin \beta_p x + C_4 e^{-\beta_p x} \cos \beta_p x \quad (9)$$

и оно проще решения (6). Поэтому в этом случае при расчете балок использование уравнения (8) является предпочтительным.

Полученные дифференциальные уравнения (5), (7) позволяют получать решения конкретных задач расчета балки на упругом основании с учетом разномодульности материала балки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян, С.А. Разномодульная теория упругости / С.А. Амбарцумян. – М. : Физматгиз, 1982. – 317 с.
2. Турищев, Л.С. К вопросу о расчете стержневых конструкций с учетом влияния разномодульности материала / Л.С. Турищев // Вестник ПГУ. Серия В. Промышленность. Прикладные науки. – 2010. – № 2. – С. 63–67.

УДК 624.04

**РАСЧЕТ ДЛИННЫХ БАЛОК НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ
С УЧЕТОМ РАЗНОМОДУЛЬНОСТИ КОНСТРУКЦИОННОГО МАТЕРИАЛА**

Г.А. КАРАГОЗЯН, О.А. КУРИЛЕНКО

(Представлено: канд. техн. наук, доц. Л.С. ТУРИЩЕВ)

Анализируется влияние разномодульности материала длинных балок на сплошном упругом основании, описываемом моделью Винклера, на параметры напряжено-деформированного состояния таких балок. Получены аналитические выражения для прогибов изгибающих моментов и поперечных сил бесконечно длинной и полубесконечной балок при их нагружениях единичными силами.

Балки на упругом основании, описываемого моделью Винклера, считаются длинными, если их приведенные длины больше 5 [1]. Особенностью расчета таких балок является существование краевого эффекта [2], согласно которому прогибы и внутренние усилия балки быстро затухают по мере удаления от места приложения нагрузки.

С учетом краевого эффекта, возможны два подхода к расчету длинных балок:

– если нагрузка приложена в центральной части балки, то её при расчете считают бесконечно длинной;

– если нагрузка приложена на одном из концов балки, то её при расчете считают полубесконечной.

Для исследования влияния разномодульности материала на параметры НДС длинных балок в обоих случаях рассматривается нагружение балки единичной силой (рис. 1).

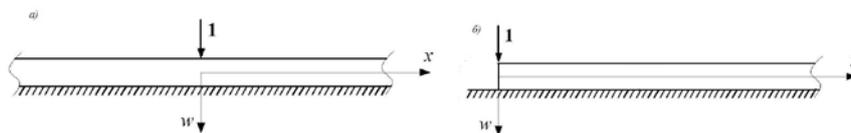


Рисунок 1. – Единичные схемы нагружения длинной балки

Расчет длинных балок для рассматриваемых схем нагружения будем производить с использованием дифференциального уравнения

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + 4\beta_p^4 w = \zeta \frac{q(x)}{EI_z}, \tag{1}$$

Так как $q(x) = 0$, то уравнение (1) становится однородным, а его решение имеет вид

$$w(x) = C_1 e^{\beta_p x} \sin \beta_p x + C_2 e^{\beta_p x} \cos \beta_p x + C_3 e^{-\beta_p x} \sin \beta_p x + C_4 e^{-\beta_p x} \cos \beta_p x. \tag{2}$$

В обоих случаях начало координат связывается с местом приложения единичной нагрузки. Для отыскания произвольных постоянных C_1, C_2, C_3, C_4 используем граничные условия задачи.

С учетом найденных значений произвольных постоянных единичные параметры напряженно-деформированного состояния (НДС) бесконечно длинной балки (рис. 1, а) с учетом разномодульности материала описываются следующими выражениями:

– прогибы сечений

$$w(x) = \frac{1}{8D\beta_p^3} \eta(\beta_p x); \tag{3}$$

– углы поворота сечений

$$w'(x) = -\frac{1}{4D\beta_p^3} \eta_3(\beta_p x); \tag{4}$$

– изгибающие моменты

$$M(x) = \frac{1}{4\beta_p} \eta_1(\beta_p x); \tag{5}$$

– поперечные силы

$$Q(x) = -\frac{1}{2}\eta_2(\beta_p x). \quad (6)$$

С учетом найденных значений произвольных постоянных соответствующие единичные параметры напряженно-деформированного состояния (НДС) полубесконечной балки (рис. 1, б) с учетом разномодульности материала описываются следующими выражениями

$$\begin{aligned} w(x) &= \frac{1}{2D\beta_p^3}\eta_2(\beta_p x) \\ w'(x) &= -\frac{1}{2D\beta_p^2}\eta(\beta_p x) \\ M(x) &= -\frac{1}{\beta_p}\eta_3(\beta_p x) \\ Q(x) &= -\eta_1(\beta_p x) \end{aligned} \quad (7)$$

Входящие в (3) – (7) функции $\eta(\beta_p x)$, $\eta_1(\beta_p x)$, $\eta_2(\beta_p x)$, $\eta_3(\beta_p x)$ являются функциями Циммермана, обобщенные для случая разномодульного конструкционного материала балки и имеющие вид

$$\begin{aligned} \eta(\beta_p x) &= e^{-\beta_p x} (\cos \beta_p x + \sin \beta_p x) \\ \eta_1(\beta_p x) &= e^{-\beta_p x} (\cos \beta_p x - \sin \beta_p x) \\ \eta_2(\beta_p x) &= e^{-\beta_p x} \cos \beta_p x \\ \eta_3(\beta_p x) &= e^{-\beta_p x} \sin \beta_p x \end{aligned} \quad (8)$$

Используя полученные решения для бесконечно длинной и полубесконечной балок изучим изменения (поведение) единичных параметров НДС этих балок с учетом разномодульности конструкционного материала. Примем, согласно [3], интервал изменения коэффициента влияния разномодульности на изгибную жесткость балки

$$0.6 \leq \zeta \leq 1.7. \quad (11)$$

Значениям $\zeta < 1$ соответствуют разномодульным конструкционным материалом с коэффициентом $\mu > 1$, а значениям $\zeta > 1$ – с коэффициентом $\mu < 1$. При проведении анализа в выражениях (5) – (10) заменим независимую переменную x безразмерным параметром $\xi = \beta x$.

На рисунке 2 для бесконечно длинной балки приведены очертания упругих линий, описывающих единичные прогибы (рис. 2, а), и её единичные эпюры изгибающих моментов (рис. 2, б) и поперечных сил (рис. 2, в) для трех характерных значений коэффициента влияния $\zeta = 0.6, 1, 1.7$.

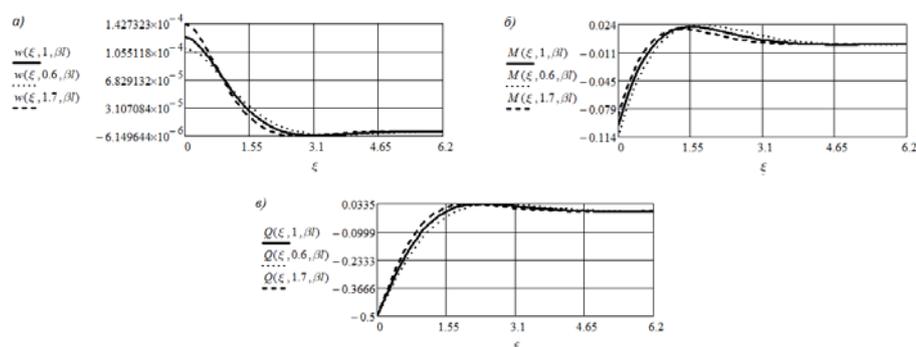


Рисунок 2. – Очертания упругих линий и единичные эпюры внутренних усилий бесконечно длинной балки

На рисунке 3 приведены графики зависимости начальных значений ($\xi = 0$) единичных прогибов (рис. 3, а) и единичных моментов бесконечно длинной балки (рис. 3, б) от её приведенной длины.

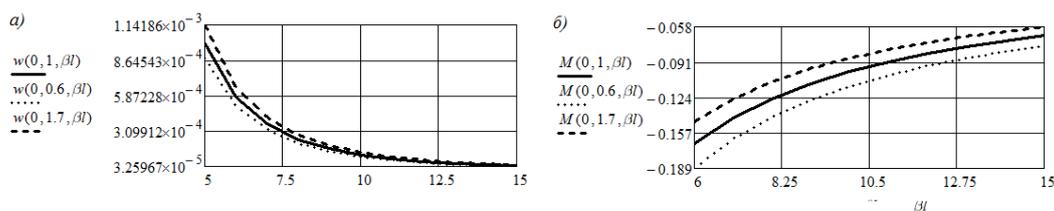


Рисунок 3. – Графики зависимости начальных значений единичных прогибов и изгибающих моментов бесконечно длинной балки от приведенной длины

На рисунке 4 приведены очертания упругих линий, описывающих единичные прогибы полубесконечной балки (рис. 4, а), и её единичные эпюры изгибающих моментов (рис. 4, б) и поперечных сил (рис. 4, в) для тех же значений коэффициента влияния, что и в случае бесконечно длинной балки.

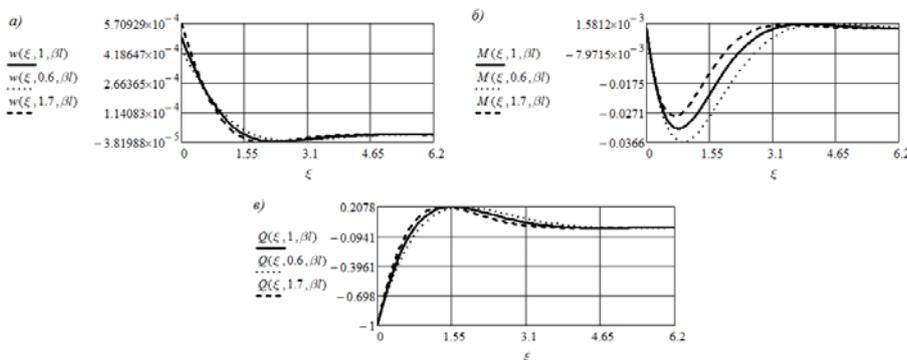


Рисунок 4. – Очертания упругих линий и единичные эпюры внутренних усилий полубесконечной балки

На рисунке 5 приведены графики зависимости начальных значений ($\xi = 0$) единичных прогибов (рис. 5, а) и экстремальных значений единичных моментов полубесконечной балки (рис. 5, б) от её приведенной длины.

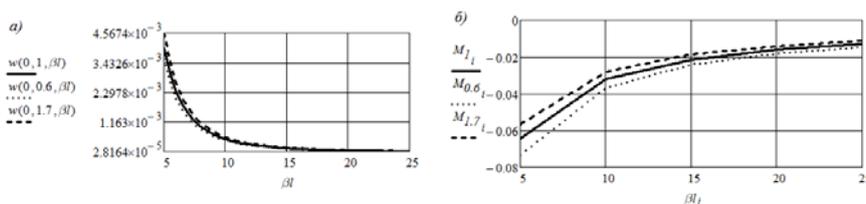


Рисунок 5. – Графики зависимости начальных значений единичных прогибов и экстремальных изгибающих моментов полубесконечной балки от приведенной длины

Из приведенных выше графиков, характеризующих единичные параметры НДС длинной балки согласно двум рассмотренным подходам, следует, что учет разномодульности конструкционного материала может оказывать существенное влияние на величины этих параметров. Так под местом приложения единичной силы может происходить уменьшение прогиба на 14,2%, и увеличение изгибающего момента на 13.6%, в тоже время, как следует из единичных эпюр поперечных сил (рис. 2, в; 4, в) учет разномодульности конструкционного не оказывает заметного влияния на величины поперечных сил.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ахметзянов, М.Х. Расчет балок и плит на упругом основании : учеб. пособие / М.Х. Ахметзянов, Т.Ф. Карманова, П.Г. Суворин. – Новосибирск : Изд-во СГУПС, 2014. – 103 с.
2. Соппротивление материалов с основами теории упругости и пластичности : учебник / Г.С. Варданян [и др.]; под общ. ред. Г.С. Варданяна. – М. : Ассоциация строительных вузов, 1995. – 572 с.
3. Турищев, Л.С. К вопросу о расчете стержневых конструкций с учетом влияния разномодульности материала / Л.С. Турищев // Вестник ПГУ. Серия В. Промышленность. Прикладные науки. – 2010. – № 2. – С. 63–67.

УДК 624.04

РАСЧЕТ КОРОТКИХ БАЛОК НА СПЛОШНОМ УПРУГОМ ОСНОВАНИИ
С УЧЕТОМ РАЗНОМОДУЛЬНОСТИ КОНСТРУКЦИОННОГО МАТЕРИАЛА

Г.А. КАРАГОЗЯН, О.А. КУРИЛЕНКО

(Представлено: канд. техн. наук, доц. Л.С. ТУРИЩЕВ)

Анализируется влияние разномодульности материала коротких балок на сплошном упругом основании, описываемом моделью Винклера, на параметры напряжено-деформированного состояния таких балок. Получены аналитические выражения для прогибов изгибающих моментов и поперечных сил коротких балок для двух схем нагружения единичными силами.

Балки на упругом основании, описываемого моделью Винклера, считаются короткими, если их приведенные длины меньше 5 [1]. Расчет короткой балки будем производить с использованием дифференциального уравнения [2 статья]

$$M^{IV} + 4\beta_p^4 M = \zeta \frac{q''(x)}{EI_z} \quad (1)$$

Рассматриваются короткие балки, у которых распределенная нагрузка постоянная или изменяется по линейному закону. Такие схемы нагружения наиболее часто встречается в строительной практике. В этих случаях $q''(x) = 0$ уравнение (1) становится однородным и его решение имеет вид

$$M(\beta_p x) = C_1 Y_1(\beta_p x) + C_2 Y_2(\beta_p x) + C_3 Y_3(\beta_p x) + C_4 Y_4(\beta_p x), \quad (2)$$

где $Y_1(\beta_p x)$, $Y_2(\beta_p x)$, $Y_3(\beta_p x)$, $Y_4(\beta_p x)$ – обобщенные функции А.Н. Крылова, учитывающие разномодульность конструкционного материала балки

$$\begin{aligned} Y_1(\beta_p x) &= ch \zeta \beta x \cos \zeta \beta x \\ Y_2(\beta_p x) &= \frac{1}{2} (ch \zeta \beta x \sin \zeta \beta x + sh \zeta \beta x \cos \zeta \beta x) \\ Y_3(\beta_p x) &= \frac{1}{2} ch \zeta \beta x \cos \zeta \beta x \\ Y_4(\beta_p x) &= \frac{1}{4} (ch \zeta \beta x \sin \zeta \beta x - sh \zeta \beta x \cos \zeta \beta x) \end{aligned} \quad (3)$$

Дальнейшее решение задачи проводится методом начальных параметров. В качестве начальных параметров используются величины

$$M(0) = M_0; Q(0) = Q_0; p(0) = p_0; p'(0) = p'_0, \quad (4)$$

характеризующие внутренние усилия и параметры суммарной распределенной нагрузки в начальном сечении балки ($x = 0$). Выразив произвольные постоянные C_1, C_2, C_3, C_4 через начальные параметры (4), приведем общее решение (2) к следующему виду

$$M(x) = M_0 Y_1(\beta_p x) + \frac{Q_0}{\beta_p} Y_2(\beta_p x) + \frac{p_0}{\beta_p^2} Y_3(\beta_p x) + \frac{p'_0}{\beta_p^3} Y_4(\beta_p x). \quad (5)$$

Дифференцируя последовательно (5), получим выражения

$$\begin{aligned} Q(x) &= -4\beta_p M_0 Y_4(\beta_p x) + Q_0 Y_1(\beta_p x) + \frac{p_0}{\beta_p} Y_2(\beta_p x) + \frac{p'_0}{\beta_p^2} Y_3(\beta_p x) \\ p(x) &= -4\beta_p^2 M_0 Y_3(\beta_p x) - 4\beta_p Q_0 Y_4(\beta_p x) + p_0 Y_1(\beta_p x) + \frac{p'_0}{\beta_p} Y_2(\beta_p x) \\ p'(x) &= -4\beta_p^3 M_0 Y_2(\beta_p x) - 4\beta_p^2 Q_0 Y_3(\beta_p x) - 4\beta_p p_0 Y_4(\beta_p x) + p'_0 Y_1(\beta_p x) \end{aligned} \quad (6)$$

Формулы (5), (7), описывающие внутренние усилия и параметры суммарной распределенной нагрузки в произвольном сечении балки, действительны только для случая непрерывной нагрузки по всей длине балки или для её первого участка нагружения.