УДК 624.04

О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ ИЗГИБА БАЛКИ НА СПЛОШНОМ УПРУГОМ ОСНОВАНИИ С УЧЕТОМ РАЗНОМОДУЛЬНОСТИ МАТЕРИАЛА

Г.А. КАРАГОЗЯН, О.А. КУРИЛЕНКО
(Представлено: канд. техн. наук, доц. Л.С. ТУРИЩЕВ)

Получено дифференциальное уравнение изогнутой оси балки на упругом основании, описываемого моделью Винклера, для случая, когда конструкционный материал балки характеризуется различными модулями упругости при растяжении и сжатии. Введен обобщенный параметр жесткости системы «балка-основание», который учитывает разномодульность материала балки.

Рассматривается изгиб балки переменного поперечного сечения, лежащей на сплошном упругом основании, описываемого моделью Винклера (рис. 1).

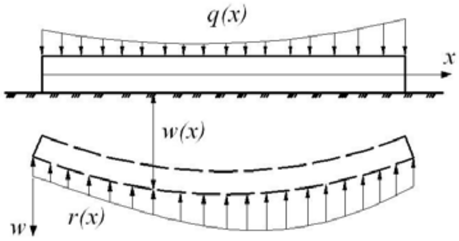

Рисунок 1. – Балка на сплошном упругом основании

Суммарная распределенная нагрузка складывается из внешней нагрузки и реактивного отпора основания

$$p(x) = q(x) + r(x)\,. \tag{1}$$

Реактивный отпор основания, согласно модели Винклера, описывается выражением

$$r(x) = -kbw(x)\,. \tag{2}$$

где b – ширина подошвы балки; k – коэффициент постели, характеризующий жесткость основания.

Принимается, что балка выполнена из разномодульного материала, который характеризуется коэффициентом разномодульности

$$\mu = \frac{E^-}{E^+}\,,$$

где E^+, E^- – соответственно, модули упругости при растяжении и сжатии. Поперечное сечение балки симметричное произвольной формы (рис. 2)

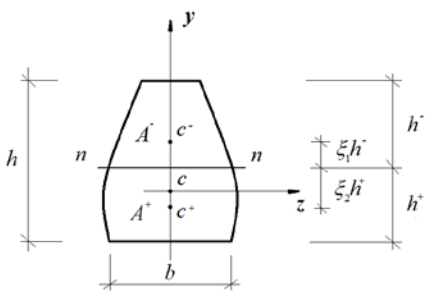

Рисунок 2. – Симметричное поперечное сечение балки

где A^- – площадь сжатой части сечения с центром тяжести в точке c^-; A^+ – площадь растянутой части сечения с центром тяжести в точке c^+. Общая площадь поперечного сечения

$$A = A^- + A^+ .$$

Для описания прогибов балки, выполненной из разномодульного материала, используем приближенное дифференциальное уравнение изогнутой оси такой балки [1]

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{M}{D(x)} , \tag{3}$$

где $D(x) = E^- I^-(x) + E^+ I^+(x)$ – изгибная жесткость симметричного поперечного сечения произвольной формы с учетом разномодульности материала. Входящие в $D(x)$ величины $I^-(x)$ и $I^+(x)$ характеризуют моменты инерции, соответственно, сжатой и растянутой частей поперечного сечения относительно нейтральной оси. Положение нейтральной оси определяется с помощью уравнения

$$E^- S^-(x) = E^+ S^+(x) ,$$

где $S^-(x)$ – статический момент сжатой части поперечного сечения; $S^+(x)$ – статический момент растянутой части поперечного сечения.

Дважды дифференцируя по x (3), с учетом (2) и зависимостей Д.И. Журавского получим дифференциальное уравнение изгиба балки переменного поперечного сечения на сплошном упругом основании с учетом разномодульности материала балки

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(D(x) \frac{d^2 w}{dx^2} \right) = q(x) - kbw(x) . \tag{4}$$

Далее рассматриваются балки постоянного поперечного сечения. Для оценки влияния разномодульности материала на изгибную жесткость поперечного сечения используем коэффициент влияния [2]

$$\zeta = \frac{EI_z}{D} ,$$

где $E = E^+$ – модуль упругости при растяжении.

Тогда уравнение (4) примет вид

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + 4\beta_p^4 w = \zeta \frac{q(x)}{EI_z} , \tag{5}$$

где $\beta_p = \sqrt[4]{\zeta}\beta$ - параметр жесткости системы «балка-основание» с учетом разномодульности конструкционного материала балки; $\beta = \sqrt[4]{\frac{kb}{4EI_z}}$ – параметр жесткости системы «балка-основание» без учета разномодульности конструкционного материала балки.

Полученное уравнение (5) описывает прогибы балки на упругом основании с учетом разномодульности её материала и является обыкновенным неоднородным дифференциальным уравнением 4 порядка с постоянными коэффициентами. При значении $\zeta = 1$ уравнение (5) принимает вид, когда расчет балки на упругом основании ведется без учета разномодульности материала.

Общее решение уравнения (5) складывается из общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного и имеет вид

$$w(x) = C_1 e^{\beta_p x} \sin \beta_p x + C_2 e^{\beta_p x} \cos \beta_p x + C_3 e^{-\beta_p x} \sin \beta_p x + C_4 e^{-\beta_p x} \cos \beta_p x + w^*(x) , \tag{6}$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 – произвольные постоянные, определяемые из граничных условий; $e^{\beta_p x} \sin \beta_p x$, $e^{\beta_p x} \cos \beta_p x$, $e^{-\beta_p x} \sin \beta_p x$ $e^{-\beta_p x} \cos \beta_p x$ – частные решения, которые образуют общее решение однородного дифференциального уравнения $w^*(x)$ – частное решение неоднородного дифференциального уравнения (5), которое в начале координат принимает значение $w^*(0) = 0$ и зависит от схемы нагружения балки.

Наряду с уравнением (5) при расчете балок на упругом основании может использоваться другая форма дифференциального уравнения. Для его получения дважды продифференцируем (5) и с учетом (3) получим

$$M^{\mathrm{IV}} + 4\beta_p^4 M = \zeta \frac{q''(x)}{EI_z}, \tag{7}$$

Уравнение (7) описывает изгибающие моменты балки на упругом основании с учетом разномодульности её материала.

Уравнения (5) и (7) эквивалентные. Однако если интенсивность распределенной нагрузки постоянная или изменяется по линейному закону $q(x) = a + bx$, то $q''(x) = 0$ и уравнение (7) становится однородным

$$M^{\mathrm{IV}} + 4\beta_p^4 M = 0 \tag{8}$$

Тогда общее решение уравнения (8) имеет вид

$$M(x) = C_1 e^{\beta_p x} \sin\beta_p x + C_2 e^{\beta_p x} \cos\beta_p x + C_3 e^{-\beta_p x} \sin\beta_p x + C_4 e^{-\beta_p x} \cos\beta_p x \tag{9}$$

и оно проще решения (6). Поэтому в этом случае при расчете балок использование уравнения (8) является предпочтительным.

Полученные дифференциальные уравнения (5), (7) позволяют получать решения конкретных задач расчета балки на упругом основании с учетом разномодульности материала балки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян, С.А. Разномодульная теория упругости / С.А. Амбарцумян. – М. : Физматгиз, 1982. – 317 с.
2. Турищев, Л.С. К вопросу о расчете стержневых конструкций с учетом влияния разномодульности материала / Л.С. Турищев // Вестник ПГУ. Серия В. Промышленность. Прикладные науки. – 2010. – № 2. – С. 63–67.