

УДК 624.04

**РАСЧЕТ ДЛИННЫХ БАЛОК НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ  
С УЧЕТОМ РАЗНОМОДУЛЬНОСТИ КОНСТРУКЦИОННОГО МАТЕРИАЛА**

**Г.А. КАРАГОЗЯН, О.А. КУРИЛЕНКО**

*(Представлено: канд. техн. наук, доц. Л.С. ТУРИЩЕВ)*

Анализируется влияние разномодульности материала длинных балок на сплошном упругом основании, описываемом моделью Винклера, на параметры напряжено-деформированного состояния таких балок. Получены аналитические выражения для прогибов изгибающих моментов и поперечных сил бесконечно длинной и полубесконечной балок при их нагружениях единичными силами.

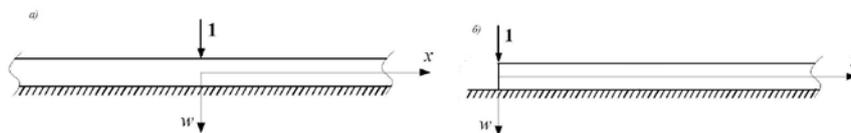
Балки на упругом основании, описываемого моделью Винклера, считаются длинными, если их приведенные длины больше 5 [1]. Особенностью расчета таких балок является существование краевого эффекта [2], согласно которому прогибы и внутренние усилия балки быстро затухают по мере удаления от места приложения нагрузки.

С учетом краевого эффекта, возможны два подхода к расчету длинных балок:

– если нагрузка приложена в центральной части балки, то её при расчете считают бесконечно длинной;

– если нагрузка приложена на одном из концов балки, то её при расчете считают полубесконечной.

Для исследования влияния разномодульности материала на параметры НДС длинных балок в обоих случаях рассматривается нагружение балки единичной силой (рис. 1).



**Рисунок 1. – Единичные схемы нагружения длинной балки**

Расчет длинных балок для рассматриваемых схем нагружения будем производить с использованием дифференциального уравнения

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + 4\beta_p^4 w = \zeta \frac{q(x)}{EI_z}, \tag{1}$$

Так как  $q(x) = 0$ , то уравнение (1) становится однородным, а его решение имеет вид

$$w(x) = C_1 e^{\beta_p x} \sin \beta_p x + C_2 e^{\beta_p x} \cos \beta_p x + C_3 e^{-\beta_p x} \sin \beta_p x + C_4 e^{-\beta_p x} \cos \beta_p x. \tag{2}$$

В обоих случаях начало координат связывается с местом приложения единичной нагрузки. Для отыскания произвольных постоянных  $C_1, C_2, C_3, C_4$  используем граничные условия задачи.

С учетом найденных значений произвольных постоянных единичные параметры напряженно-деформированного состояния (НДС) бесконечно длинной балки (рис. 1, а) с учетом разномодульности материала описываются следующими выражениями:

– прогибы сечений

$$w(x) = \frac{1}{8D\beta_p^3} \eta(\beta_p x); \tag{3}$$

– углы поворота сечений

$$w'(x) = -\frac{1}{4D\beta_p^3} \eta_3(\beta_p x); \tag{4}$$

– изгибающие моменты

$$M(x) = \frac{1}{4\beta_p} \eta_1(\beta_p x); \tag{5}$$

– поперечные силы

$$Q(x) = -\frac{1}{2}\eta_2(\beta_p x). \quad (6)$$

С учетом найденных значений произвольных постоянных соответствующие единичные параметры напряженно-деформированного состояния (НДС) полубесконечной балки (рис. 1, б) с учетом разномодульности материала описываются следующими выражениями

$$\begin{aligned} w(x) &= \frac{1}{2D\beta_p^3}\eta_2(\beta_p x) \\ w'(x) &= -\frac{1}{2D\beta_p^2}\eta(\beta_p x) \\ M(x) &= -\frac{1}{\beta_p}\eta_3(\beta_p x) \\ Q(x) &= -\eta_1(\beta_p x) \end{aligned} \quad (7)$$

Входящие в (3) – (7) функции  $\eta(\beta_p x)$ ,  $\eta_1(\beta_p x)$ ,  $\eta_2(\beta_p x)$ ,  $\eta_3(\beta_p x)$  являются функциями Циммермана, обобщенные для случая разномодульного конструкционного материала балки и имеющие вид

$$\begin{aligned} \eta(\beta_p x) &= e^{-\beta_p x} (\cos \beta_p x + \sin \beta_p x) \\ \eta_1(\beta_p x) &= e^{-\beta_p x} (\cos \beta_p x - \sin \beta_p x) \\ \eta_2(\beta_p x) &= e^{-\beta_p x} \cos \beta_p x \\ \eta_3(\beta_p x) &= e^{-\beta_p x} \sin \beta_p x \end{aligned} \quad (8)$$

Используя полученные решения для бесконечно длинной и полубесконечной балок изучим изменения (поведение) единичных параметров НДС этих балок с учетом разномодульности конструкционного материала. Примем, согласно [3], интервал изменения коэффициента влияния разномодульности на изгибную жесткость балки

$$0.6 \leq \zeta \leq 1.7. \quad (11)$$

Значениям  $\zeta < 1$  соответствуют разномодульным конструкционным материалом с коэффициентом  $\mu > 1$ , а значениям  $\zeta > 1$  – с коэффициентом  $\mu < 1$ . При проведении анализа в выражениях (5) – (10) заменим независимую переменную  $x$  безразмерным параметром  $\xi = \beta_p x$ .

На рисунке 2 для бесконечно длинной балки приведены очертания упругих линий, описывающих единичные прогибы (рис. 2, а), и её единичные эпюры изгибающих моментов (рис. 2, б) и поперечных сил (рис. 2, в) для трех характерных значений коэффициента влияния  $\zeta = 0.6, 1, 1.7$ .

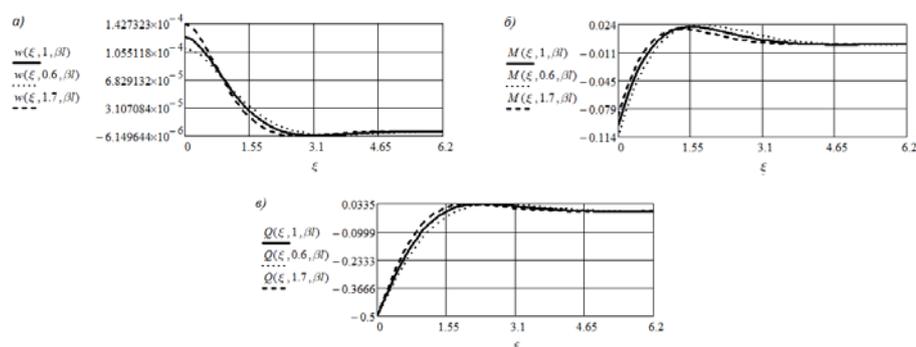
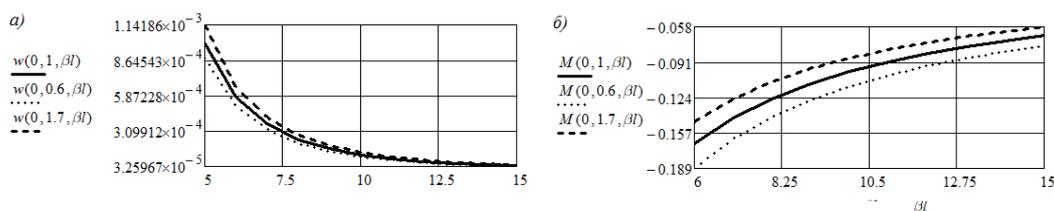


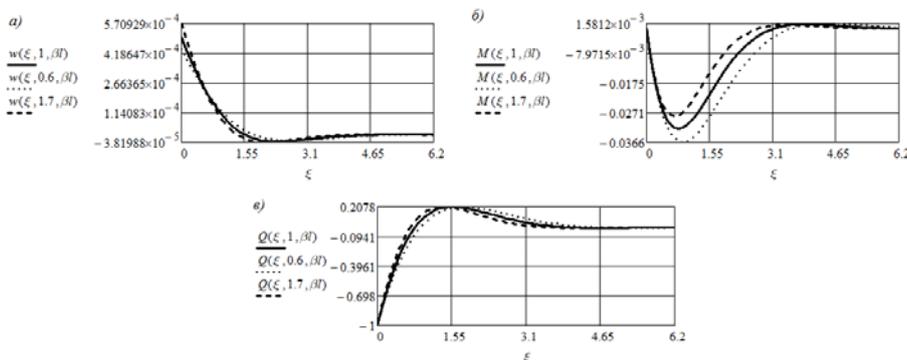
Рисунок 2. – Очертания упругих линий и единичные эпюры внутренних усилий бесконечно длинной балки

На рисунке 3 приведены графики зависимости начальных значений ( $\xi = 0$ ) единичных прогибов (рис. 3, а) и единичных моментов бесконечно длинной балки (рис. 3, б) от её приведенной длины.



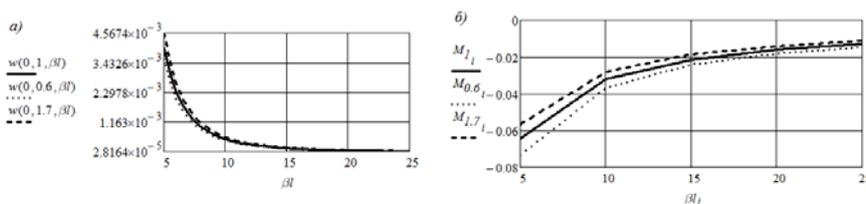
**Рисунок 3. – Графики зависимости начальных значений единичных прогибов и изгибающих моментов бесконечно длинной балки от приведенной длины**

На рисунке 4 приведены очертания упругих линий, описывающих единичные прогибы полубесконечной балки (рис. 4, а), и её единичные эпюры изгибающих моментов (рис. 4, б) и поперечных сил (рис. 4, в) для тех же значений коэффициента влияния, что и в случае бесконечно длинной балки.



**Рисунок 4. – Очертания упругих линий и единичные эпюры внутренних усилий полубесконечной балки**

На рисунке 5 приведены графики зависимости начальных значений ( $\xi = 0$ ) единичных прогибов (рис. 5, а) и экстремальных значений единичных моментов полубесконечной балки (рис. 5, б) от её приведенной длины.



**Рисунок 5. – Графики зависимости начальных значений единичных прогибов и экстремальных изгибающих моментов полубесконечной балки от приведенной длины**

Из приведенных выше графиков, характеризующих единичные параметры НДС длинной балки согласно двум рассмотренным подходам, следует, что учет разномодульности конструкционного материала может оказывать существенное влияние на величины этих параметров. Так под местом приложения единичной силы может происходить уменьшение прогиба на 14,2%, и увеличение изгибающего момента на 13.6%, в тоже время, как следует из единичных эпюр поперечных сил (рис. 2, в; 4, в) учет разномодульности конструкционного не оказывает заметного влияния на величины поперечных сил.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ахметзянов, М.Х. Расчет балок и плит на упругом основании : учеб. пособие / М.Х. Ахметзянов, Т.Ф. Карманова, П.Г. Суворин. – Новосибирск : Изд-во СГУПС, 2014. – 103 с.
2. Соппротивление материалов с основами теории упругости и пластичности : учебник / Г.С. Варданян [и др.]; под общ. ред. Г.С. Варданяна. – М. : Ассоциация строительных вузов, 1995. – 572 с.
3. Турищев, Л.С. К вопросу о расчете стержневых конструкций с учетом влияния разномодульности материала / Л.С. Турищев // Вестник ПГУ. Серия В. Промышленность. Прикладные науки. – 2010. – № 2. – С. 63–67.