

УДК 624.04

РАСЧЕТ КОРОТКИХ БАЛОК НА СПЛОШНОМ УПРУГОМ ОСНОВАНИИ
С УЧЕТОМ РАЗНОМОДУЛЬНОСТИ КОНСТРУКЦИОННОГО МАТЕРИАЛА

Г.А. КАРАГОЗЯН, О.А. КУРИЛЕНКО

(Представлено: канд. техн. наук, доц. Л.С. ТУРИЩЕВ)

Анализируется влияние разномодульности материала коротких балок на сплошном упругом основании, описываемом моделью Винклера, на параметры напряжено-деформированного состояния таких балок. Получены аналитические выражения для прогибов изгибающих моментов и поперечных сил коротких балок для двух схем нагружения единичными силами.

Балки на упругом основании, описываемого моделью Винклера, считаются короткими, если их приведенные длины меньше 5 [1]. Расчет короткой балки будем производить с использованием дифференциального уравнения [2 статья]

$$M^{IV} + 4\beta_p^4 M = \zeta \frac{q''(x)}{EI_z} \quad (1)$$

Рассматриваются короткие балки, у которых распределенная нагрузка постоянная или изменяется по линейному закону. Такие схемы нагружения наиболее часто встречается в строительной практике. В этих случаях $q''(x) = 0$ уравнение (1) становится однородным и его решение имеет вид

$$M(\beta_p x) = C_1 Y_1(\beta_p x) + C_2 Y_2(\beta_p x) + C_3 Y_3(\beta_p x) + C_4 Y_4(\beta_p x), \quad (2)$$

где $Y_1(\beta_p x)$, $Y_2(\beta_p x)$, $Y_3(\beta_p x)$, $Y_4(\beta_p x)$ – обобщенные функции А.Н. Крылова, учитывающие разномодульность конструкционного материала балки

$$\begin{aligned} Y_1(\beta_p x) &= ch \zeta \beta x \cos \zeta \beta x \\ Y_2(\beta_p x) &= \frac{1}{2} (ch \zeta \beta x \sin \zeta \beta x + sh \zeta \beta x \cos \zeta \beta x) \\ Y_3(\beta_p x) &= \frac{1}{2} ch \zeta \beta x \cos \zeta \beta x \\ Y_4(\beta_p x) &= \frac{1}{4} (ch \zeta \beta x \sin \zeta \beta x - sh \zeta \beta x \cos \zeta \beta x) \end{aligned} \quad (3)$$

Дальнейшее решение задачи проводится методом начальных параметров. В качестве начальных параметров используются величины

$$M(0) = M_0; Q(0) = Q_0; p(0) = p_0; p'(0) = p'_0, \quad (4)$$

характеризующие внутренние усилия и параметры суммарной распределенной нагрузки в начальном сечении балки ($x = 0$). Выразив произвольные постоянные C_1, C_2, C_3, C_4 через начальные параметры (4), приведем общее решение (2) к следующему виду

$$M(x) = M_0 Y_1(\beta_p x) + \frac{Q_0}{\beta_p} Y_2(\beta_p x) + \frac{p_0}{\beta_p^2} Y_3(\beta_p x) + \frac{p'_0}{\beta_p^3} Y_4(\beta_p x). \quad (5)$$

Дифференцируя последовательно (5), получим выражения

$$\begin{aligned} Q(x) &= -4\beta_p M_0 Y_4(\beta_p x) + Q_0 Y_1(\beta_p x) + \frac{p_0}{\beta_p} Y_2(\beta_p x) + \frac{p'_0}{\beta_p^2} Y_3(\beta_p x) \\ p(x) &= -4\beta_p^2 M_0 Y_3(\beta_p x) - 4\beta_p Q_0 Y_4(\beta_p x) + p_0 Y_1(\beta_p x) + \frac{p'_0}{\beta_p} Y_2(\beta_p x) \\ p'(x) &= -4\beta_p^3 M_0 Y_2(\beta_p x) - 4\beta_p^2 Q_0 Y_3(\beta_p x) - 4\beta_p p_0 Y_4(\beta_p x) + p'_0 Y_1(\beta_p x) \end{aligned} \quad (6)$$

Формулы (5), (7), описывающие внутренние усилия и параметры суммарной распределенной нагрузки в произвольном сечении балки, действительны только для случая непрерывной нагрузки по всей длине балки или для её первого участка нагружения.

В случае если балка имеет несколько участков нагружения, согласно [3] при решении дифференциального уравнения изогнутой оси балки методом начальных параметров любую функцию, характеризующую НДС балки на $n + 1$ -ом участке, можно представить в следующем виде

$$S_{n+1} = S_n + \Delta S_a, \quad (7)$$

В (7) S_n – это функция на предыдущем n -ом участке балки; ΔS_a – приращение функции при переходе на участок $n + 1$, индекс которого характеризует расстояние от начала координат до начала $n + 1$ -го участка.

Используем полученные зависимости (5), (6), (7) для расчета свободно лежащей короткой балки для двух схем нагружения единичной силой – на левом конце и посередине балки (рис. 1).

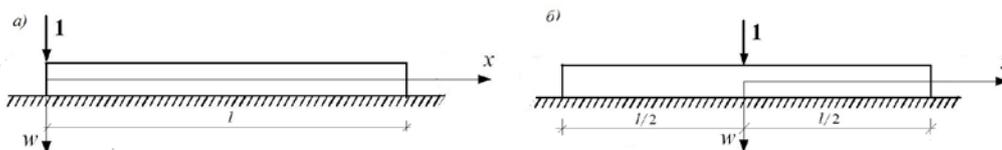


Рисунок 1. – Единичные схемы нагружения короткой балки

Первой схеме нагружения короткой балки (рис. 1, а) соответствует один участок балки. Поэтому для её расчета используются формулы (5), (6). Начальные параметры (4) рассматриваемой балки характеризуются следующими величинами

$$M_0 = 0; Q_0 = -1; p_0 \neq 0; p'_0 \neq 0 \quad (8)$$

С учетом (8) формулы (5), (6) принимают вид

$$\begin{aligned} M(x) &= -\frac{1}{\beta_p} Y_2(\beta_p x) + \frac{p_0}{\beta_p^2} Y_3(\beta_p x) + \frac{p'_0}{\beta_p^3} Y_4(\beta_p x) \\ Q(x) &= -Y_1(\beta_p x) + \frac{p_0}{\beta_p} Y_2(\beta_p x) + \frac{p'_0}{\beta_p^2} Y_3(\beta_p x) \\ p(x) &= 4\beta_p Y_4(\beta_p x) + p_0 Y_1(\beta_p x) + \frac{p'_0}{\beta_p} Y_2(\beta_p x) \\ p'(x) &= 4\beta_p^2 Y_3(\beta_p x) - 4\beta_p p_0 Y_4(\beta_p x) + p'_0 Y_1(\beta_p x) \end{aligned} \quad (9)$$

Используя граничные условия на правом конце балки

$$M(l) = 0; Q(l) = 0. \quad (10)$$

получим следующие выражения для оставшихся начальных параметров

$$\begin{aligned} p_0(\beta_p l) &= \beta_p \frac{Y_2(\beta_p l) Y_3(\beta_p l) - Y_1(\beta_p l) Y_4(\beta_p l)}{Y_3(\beta_p l)^2 - Y_2(\beta_p l) Y_4(\beta_p l)} \\ p'_0(\beta_p l) &= \beta_p^2 \frac{Y_1(\beta_p l) Y_3(\beta_p l) - Y_2(\beta_p l)^2}{Y_3(\beta_p l)^2 - Y_2(\beta_p l) Y_4(\beta_p l)} \end{aligned} \quad (11)$$

Второй схеме нагружения короткой балки (рис. 1, б) соответствуют два участка балки. Поэтому для её расчета используются формулы (5), (6), (7). Начальные параметры (4) рассматриваемой балки характеризуются следующими величинами

$$M_0 = 0; Q_0 = 0; p_0 \neq 0; p'_0 \neq 0. \quad (12)$$

Параметры НДС для первого участка балки описываются формулами (5), (6), которые с учетом (12) принимают вид

$$\begin{aligned}
 M(x) &= \frac{P_0}{\beta_p^2} Y_3(\beta_p x) + \frac{P_0'}{\beta_p^3} Y_4(\beta_p x) \\
 Q(x) &= \frac{P_0}{\beta_p} Y_2(\beta_p x) + \frac{P_0'}{\beta_p^2} Y_3(\beta_p x) \\
 p(x) &= p_0 Y_1(\beta_p x) + \frac{p_0'}{\beta_p} Y_2(\beta_p x) \\
 p'(x) &= -4\beta_p p_0 Y_4(\beta_p x) + p_0' Y_1(\beta_p x)
 \end{aligned} \tag{13}$$

Параметры НДС для второго участка балки описываются формулами (7), которые с учетом рассматриваемой схемы нагружения принимают вид

$$\begin{aligned}
 M(x) &= \frac{P_0}{\beta_p^2} Y_3(\beta_p x) + \frac{P_0'}{\beta_p^3} Y_4(\beta_p x) - \frac{1}{\beta_p} Y_2(\beta_p (x - 0.5l)) \\
 Q(x) &= \frac{P_0}{\beta_p} Y_2(\beta_p x) + \frac{P_0'}{\beta_p^2} Y_3(\beta_p x) - Y_1(\beta_p (x - 0.5l)) \\
 p(x) &= p_0 Y_1(\beta_p x) + \frac{p_0'}{\beta_p} Y_2(\beta_p x) + 4\beta_p Y_4(\beta_p (x - 0.5l)) \\
 p'(x) &= -4\beta_p p_0 Y_4(\beta_p x) + p_0' Y_1(\beta_p x) + 4\beta_p^2 Y_3(\beta_p (x - 0.5l))
 \end{aligned} \tag{14}$$

Используя граничные условия на правом конце балки описываются, которые, как и в первом случае описываются соотношениями (10), получим следующие выражения для оставшихся начальных параметров

$$\begin{aligned}
 p_0(\beta_p l) &= \beta_p \frac{Y_2(0.5\beta_p l)Y_3(\beta_p l) - Y_1(0.5\beta_p l)Y_4(\beta_p l)}{Y_3(\beta_p l)^2 - Y_2(\beta_p l)Y_4(\beta_p l)} \\
 p_0'(\beta_p l) &= \beta_p^2 \frac{Y_1(0.5\beta_p l)Y_3(\beta_p l) - Y_2(0.5\beta_p l)Y_2(\beta_p l)}{Y_3(\beta_p l)^2 - Y_2(\beta_p l)Y_4(\beta_p l)}
 \end{aligned} \tag{15}$$

Используя полученные решения для свободно лежащей короткой балки изучим поведение её единичных параметров НДС в интервале изменения коэффициента влияния разномодульности материала на изгибную жесткость балки

$$0.6 \leq \zeta \leq 1.7$$

При проведении анализа в выражениях (9), (13), (14) заменим независимую переменную x безразмерным параметром $\xi = \beta x$.

На рисунке 2 для свободно лежащей короткой балки, нагруженной единичной силой на левом конце, приведены очертания упругих линий, описывающих единичные прогибы (рис. 2, а), и её единичные эпюры изгибающих моментов (рис. 2, б) и поперечных сил (рис. 2, в) для трех характерных значений коэффициента влияния $\zeta = 0.6, 1, 1.7$

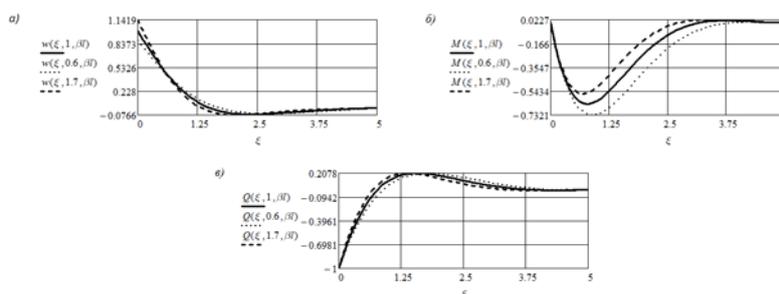


Рисунок 2. – Очертания упругих линий и единичные эпюры внутренних усилий свободно лежащей короткой балки с единичной силой в начале координат

На рисунке 3 для рассмотренной выше свободно лежащей короткой балки приведены график зависимости начальных значений ($\xi = 0$) единичных прогибов от её приведенной длины.

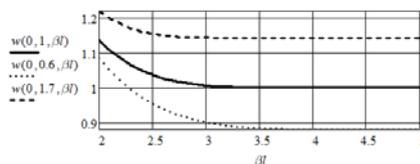


Рисунок 3. – График зависимости начальных значений единичных прогибов, свободно лежащей короткой балки от приведенной длины

На рисунке 4 для свободно лежащей короткой балки, нагруженной единичной силой посередине, приведены очертания упругих линий, описывающих единичные прогибы (рис. 4, а) и её единичные эпюры изгибающих моментов (рис. 4, б) и поперечных сил (рис. 4, в) для трех характерных значений коэффициента влияния $\zeta = 0.6, 1, 1.7$

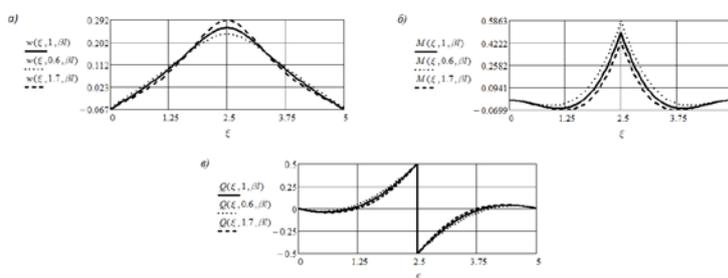


Рисунок 4. – Очертания упругих линий и единичных эпюр внутренних усилий свободно лежащей короткой балки с единичной силой в среднем сечении

На рисунке 5 для рассмотренной выше свободно лежащей короткой балки приведены графики зависимости экстремальных значений единичных прогибов (рис. 5, а) и единичных моментов (рис. 5, б) от её приведенной длины

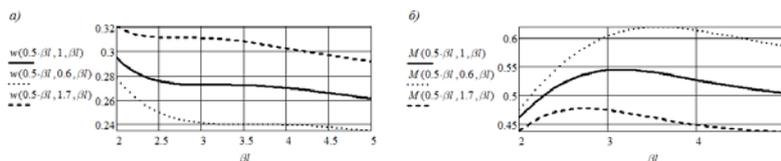


Рисунок 5. Графики зависимости экстремальных значений единичных прогибов и изгибающих моментов свободно лежащей короткой балки с единичной силой в среднем сечении от приведенной длины

Из приведенных выше графиков, характеризующих единичные параметры НДС короткой балки, следует, что учет разномодульности конструкционного материала оказывает существенное влияние на величины этих параметров. При значениях коэффициента влияния $\zeta < 0$ происходит уменьшение прогибов, и увеличение изгибающих моментов, а при значениях коэффициента влияния $\zeta > 0$ происходит увеличение прогибов и уменьшение изгибающих моментов. Изменение модулей этих величин может превышать 12%. В тоже время учет разномодульности конструкционного материала не оказывает заметного влияния на величины поперечных сил.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ахметзянов, М.Х. Расчет балок и плит на упругом основании : учеб. пособие / М.Х. Ахметзянов, Т.Ф. Карманова, П.Г. Суворин. – Новосибирск : Изд-во СГУПС, 2014. – 103 с.
2. Цвей, А.Ю. Балки и плиты на упругом основании : учеб. пособие / А.Ю. Цвей. – М. : МАДИ, 2014. – 96 с.
3. Турищев, Л.С. К вопросу о расчете стержневых конструкций с учетом влияния разномодульности материала / Л.С. Турищев // Вестник ПГУ. Серия В. Промышленность. Прикладные науки. – 2010. – № 2. – С. 63–67.