- учет влияния продольных деформаций при определении параметров НДС зависит от выбора варианта основной системы метода сил;
- учет влияния продольных деформаций при определении параметров НДС практически не зависит от вида нагружения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бернштейн, С.А. Основы расчета статически неопределимых систем / С.А. Бернштейн. – М.: Стройиздат, 1936. – 223 с.
2. Рабинович, И.М. Курс строительной механики / И.М. Рабинович. – М.: Стройиздат, 1954. – Ч. 2: Статически неопределимые системы. – 543 с.
3. Киселев, В.А. Строительная механика / В.А. Киселев. – М.: Стройиздат, 1986. – 520 с.

УДК 624.072

О ВЛИЯНИИ ВЫБОРА ВАРИАНТА ОСНОВНОЙ СИСТЕМЫ МЕТОДА СИЛ ДЛЯ БЕСШАРНИРНОЙ АРКИ НА УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЯ КАНОНИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Р.А. РАДКЕВИЧ
(Представлено: канд. техн. наук, доц. Л.С. ТУРИЩЕВ)

Исследуется зависимость результатов расчета бесшарнирной арки методом сил от вариаций коэффициентов и свободных членов канонических уравнений вследствие неизбежных отличий параметров реальных арок от параметров их расчетных схем, возникающими как при возведении, так и в ходе эксплуатации арочных конструкций. Установлено, что устойчивость решения канонических уравнений вследствие вариаций коэффициентов и свободных членов существенным образом зависит от выбранного варианта основной системы.

Классическим методом расчета бесшарнирной арки, являющейся три раза статически неопределимой системой, является метод сил.

Канонические уравнения метода сил для бесшарнирной арки имеют вид

$$\begin{aligned}\delta_{11}X_1+\delta_{12}X_2+\delta_{13}X_3+\Delta_{1P}&=0;\\ \delta_{21}X_1+\delta_{22}X_2+\delta_{23}X_3+\Delta_{2P}&=0;\\ \delta_{31}X_1+\delta_{32}X_2+\delta_{33}X_3+\Delta_{3P}&=0\end{aligned} \tag{1}$$

и представляют собой систему линейных неоднородных алгебраических уравнений (СЛАУ).

Важной проблемой, возникающей при решении канонических уравнений, является устойчивость решений уравнений, то есть их зависимость от вариаций коэффициентов и свободных членов. Такие вариации при расчете бесшарнирной арки могут возникать вследствие неизбежных отличий реальных параметров арки при ее возведении и их последующих изменений в ходе эксплуатации по сравнению с параметрами расчетной схемы, использованной при проектировании конструкции.

Оценка устойчивости решений канонических уравнений метода сил принято производить с помощью числа обусловленности [1]

$$\mu=\left|\tilde{D}(\delta)\right|, \tag{2}$$

являющегося нормированным определителем матрицы коэффициентов (1).

Считается, что если

$$0,05\le\mu\le1,$$

то решения канонических уравнений метода сил устойчивы.

Однако в работе [2] на примере расчета рамной конструкции методом сил, взятом из учебника В.И. Федосьева [3], показано, что, несмотря на значение числа обусловленности, свидетельствующего об устойчивости решений канонических уравнений, при определенном сочетании знаков вариаций коэффициентов и свободных членов, решения становятся неустойчивыми.

Оценивается устойчивость решений уравнений (1) с использованием числа обусловленности (2) и методики, предложенной в [2]. Рассматривается бесшарнирная арка кругового очертания с постоянным симметричным поперечным сечением. Арка нагружена по длине пролета равномерно-распределенной нагрузкой (рис. 1).

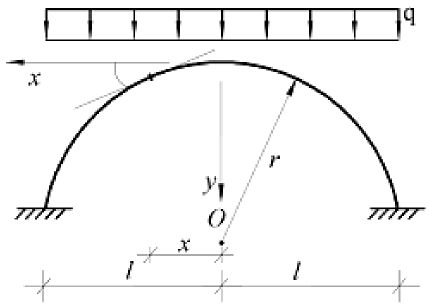

Рис. 1. Бесшарнирная арка

При расчете арки методом сил используются три варианта основной системы – трехшарнирная арка, кривой брус с балочной схемой опирания и кривой брус с консольной схемой опирания. Канонические уравнения метода сил для всех трех вариантов имеют вид (1).

В случае использования первого варианта основной системы канонические уравнения (1) с учетом полученных безразмерных значений для коэффициентов и свободных членов принимают вид

$$\begin{aligned} &5{,}13X_1 + 2{,}14X_2 - 1{,}34X_3 = 0{,}12;\\ &2{,}14X_1 + 13{,}85X_2 + 2{,}14X_3 = 0{,}31;\\ &-1{,}34X_1 + 2{,}14X_2 + 5{,}13X_3 = 0{,}12. \end{aligned} \tag{3}$$

Решая (3), найдем следующие значения основных неизвестных:

$$X_1 = 0{,}022,\quad X_2 = 0{,}015,\quad X_3 = 0{,}022,$$

которые являются безразмерными значениями изгибающих моментов в опорных сечениях (X_1, X_3) и замковом сечении (X_2).

Число обусловленности системы уравнений (3) равняется

$$\mu = 0{,}351,$$

что свидетельствует об устойчивости полученных решений.

Проверим устойчивость значения опорного момента X_3 согласно [2].

Используя формулы Крамера, запишем основное неизвестное в виде

$$X_3 = \frac{D_3}{D}.$$

Наиболее неблагоприятное сочетание знаков вариаций элементов определителей D_3 и D, согласно [2], соответствует таблице

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ - & + & - \end{vmatrix}.$$

Основными причинами вариаций коэффициентов и свободных членов канонических уравнений метода сил могут быть отклонения геометрических размеров реальных конструкций от их проектных значений, разброс и изменение механических характеристик конструкционных материалов, отличия внешних нагрузок от их расчетных значений. Следовательно, они оказывают одинаковое влияние на вариации величин коэффициентов и свободных членов и можно принять модуль этих вариаций одинаковым.

Тогда определитель D_3 и D с учетом возможных одинаковых по модулю вариаций его элементов, принимают вид

$$D_3(\varepsilon)=\begin{vmatrix} 5{,}13\cdot(1+\varepsilon) & 2{,}14\cdot(1-\varepsilon) & 0{,}12\cdot(1+\varepsilon) \\ 2{,}14\cdot(1-\varepsilon) & 16\cdot(1+\varepsilon) & 0{,}31\cdot(1-\varepsilon) \\ -1{,}34\cdot(1-\varepsilon) & 2{,}14\cdot(1+\varepsilon) & 0{,}12\cdot(1-\varepsilon) \end{vmatrix};$$

$$D_3(\varepsilon)=\begin{vmatrix} 5{,}13\cdot(1+\varepsilon) & 2{,}14\cdot(1-\varepsilon) & -1{,}34\cdot(1+\varepsilon) \\ 2{,}14\cdot(1-\varepsilon) & 16\cdot(1+\varepsilon) & 2{,}14\cdot(1-\varepsilon) \\ -1{,}34\cdot(1-\varepsilon) & 2{,}14\cdot(1+\varepsilon) & 5{,}13\cdot(1-\varepsilon) \end{vmatrix}.$$

Рассматривая основное неизвестное X_3 как функцию от вариации ε, получим график изменения его величины при значениях вариации величин его элементов, не превышающих 1 % (рис. 2).

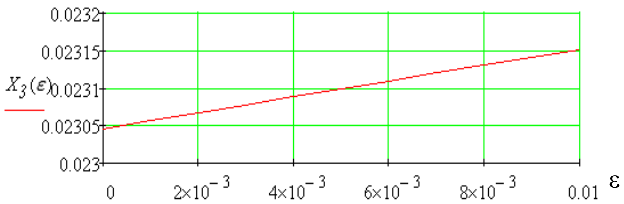

Рис. 2. Зависимость величины X_3 от вариации ε
для первого варианта основной системы

Из приведенного графика видно, что величина опорного момента X_3 не претерпевает существенных изменений по величине. Изменение величины опорного момента при вариации коэффициентов и свободных членов в 1 % составляет

$$\frac{X_3(0{,}01)-X_3(0)}{X_3(0)}\cdot 100\ \% = 0{,}457\ \%.$$

Сделаем аналогичный анализ изменения величины опорного момента X_3 при расчете арки методом сил с применением двух других вариантов основной системы.

При использовании второго варианта основной системы канонические уравнения метода сил принимают вид

$$\begin{aligned} &13{,}85X_1+9{,}06X_2+9{,}06X_3=-6{,}62; \\ &9{,}06X_1+10{,}73X_2+4{,}27X_3=-4{,}26; \\ &9{,}06X_1+4{,}27X_2+10{,}73X_3=-4{,}26. \end{aligned} \tag{4}$$

Решая (4), найдем следующие значения основных неизвестных

$$X_1=-0{,}513,\quad X_2=0{,}022,\ X_3=0{,}022,$$

которые являются безразмерными значениями распора арки (X_1) и изгибающих моментов в опорных сечениях (X_2, X_3) и замковом сечении.

Число обусловленности системы уравнений (3) равняется

$$\mu=0{,}065,$$

что свидетельствует об устойчивости полученных решений.

График функциональной зависимости величины опорного момента X_3 от вариации ε для второго варианта основной системы метода сил представлен на рисунке 3, из которого видно, что в отличие от первого варианта величина опорного момента уменьшается при увеличении вариации ε, а изменение его величины при вариации коэффициентов и свободных членов в 1 % составляет

$$\frac{X_3(0{,}01)-X_3(0)}{X_3(0)}\cdot 100\ \% = 6{,}877\ \%,$$

что свидетельствует о неустойчивости значения опорного момента X_3.

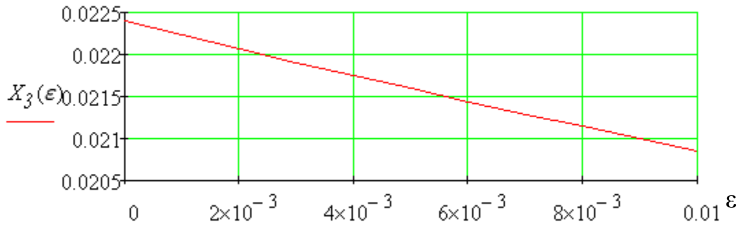

Рис. 3. Зависимость величины X_3 от вариации ε
для второго варианта основной системы

При расчете арки с использованием третьего варианта основной системы метода сил канонические уравнения метода сил имеют вид

$$\begin{aligned}
&13{,}85X_1 + 18{,}13X_2 + 18{,}13X_3 = 11{,}51;\\
&18{,}13X_1 + 42{,}93X_2 + 29{,}98X_3 = 34{,}39;\\
&18{,}13X_1 + 29{,}98X_2 + 29{,}98X_3 = 21{,}45.
\end{aligned} \tag{5}$$

Решая (5), найдем следующие значения основных неизвестных:

$$X_1 = -0{,}506, \quad X_2 = 1, \quad X_3 = 0{,}022,$$

которые являются безразмерными значениями распора арки (X_1), вертикальных опорных реакций (X_2) и опорного изгибающего момента (X_3).

Число обусловленности системы уравнений (3) равняется

$$\mu = 0{,}059,$$

что свидетельствует об устойчивости полученных решений.

График функциональной зависимости величины опорного момента X_3 от вариации ε для третьего варианта основной системы метода сил представлен на рисунке 4.

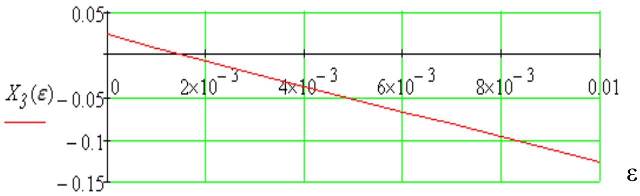

Рис. 4. Зависимость величины X_3 от вариации ε
для третьего варианта основной системы

Из приведенных графиков видно, что величина опорного момента X_3 может претерпевать существенные изменения как по величине, так и по знаку. Это свидетельствует о неустойчивости значения опорного момента X_3.

Таким образом, при расчете бесшарнирной арки методом сил устойчивость решения канонических уравнений зависит от выбора варианта основной системы. Величины основных неизвестных могут претерпевать как существенные количественные, так и качественные изменения при незначительных вариациях коэффициентов и свободных членов канонических уравнений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Филин, А.П. Матрицы в статике стержневых систем / А.П. Филин. – М.: Стройиздат, 1966. – 438 с.
2. Петров, Ю.П. Как получать надежные решения систем уравнений / Ю.П. Петров. – СПб.: БХВ-Петербург, 2012. – 176 с.
3. Феодосьев, В.И. Сопротивление материалов / В.И. Феодосьев. – М.: Наука, 1979. – 559 с.