УДК 624.072

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ОСИ ИСКРИВЛЕННОГО СТЕРЖНЯ ПРИ ТЕПЛОВОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

Е.А. ВОЛКОВА
(Представлено: канд. техн. наук, доц. Л.С. ТУРИЩЕВ)

Демонстрируется дифференциальное уравнение оси искривленного стержня с незакрепленными концами при тепловом воздействии. Показано применение полученного уравнения для определения прогибов и углов поворота в статически определимых балках.

Рассматривается прямолинейный упругий стержень симметричного постоянного поперечного сечения с незакрепленными концами, подверженный тепловому воздействию. Так как в этом случае в поперечных сечениях стержня внутренние усилия не возникают, то стержень будет искривляться, но не изгибаться. Искривленное очертание стержня и его параметры показаны на рисунке 1.

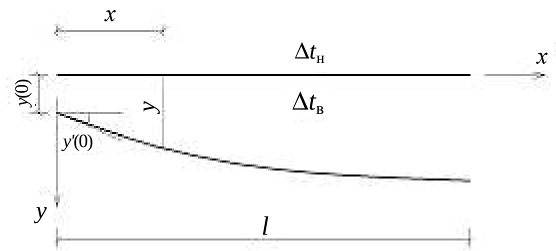

Рис. 1. Искривленное очертание стержня

Тепловое воздействие характеризуется двумя независимыми величинами – приращением внутренней температуры $\Delta t_в$ и приращением наружной температуры $\Delta t_н$, а также зависимой от них величиной – приращением температуры на оси стержня $\Delta t_о$. Внутренней температурой считается более высокая температура. Скорость изменения приращения температуры по высоте поперечного сечения h определяется по формуле

$$\Delta t' = \frac{\Delta t_в - \Delta t_н}{h} \tag{1}$$

и называется удельным температурным перепадом.

В соответствии с гипотезой плоских сечений схема тепловых деформаций при искривлении элементарного участка стержня имеет вид, представленный на рисунке 2.

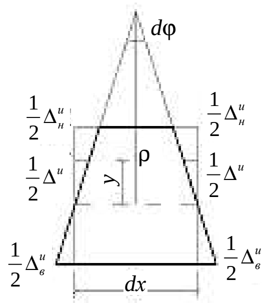

Рис. 2. Схема тепловых деформаций

где dx – длина элементарного участка стержня; $d\varphi$ – взаимный угол поворота торцов элементарного участка; ρ – радиус кривизны искривленной оси элементарного участка.

Как следует из рисунка 2, параметры геометрии элементарного участка в деформированном состоянии связаны соотношением

$$dx = \rho d\varphi, \tag{2}$$

а изменение длины произвольного волокна стержня вследствие изгиба описывается формулой

$$\Delta = y d\varphi. \tag{3}$$

Тогда относительная продольная деформация произвольного волокна, вследствие теплового изгиба стержня, с одной стороны, согласно формулам (2), (3) имеет вид

$$\varepsilon = \frac{y}{\rho}, \tag{4}$$

а с другой – согласно физическому закону изменения длины твердых тел при тепловом воздействии характеризуется формулой

$$\varepsilon = -\alpha y \Delta t', \tag{5}$$

где α – коэффициент линейного расширения конструкционного материала, из которого выполнен стержень. Приравнивая правые части формул (4) и (5), получим выражение кривизны оси искривленного стержня при тепловом воздействии:

$$\frac{1}{\rho} = -\alpha \Delta t'. \tag{6}$$

Из курса высшей математики известна следующая формула для кривизны линии:

$$\frac{1}{\rho} = \pm \frac{y''}{\left[1 + \left(y'\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}. \tag{7}$$

Поскольку для большинства практических задач углы поворота сечений малы, то величиной $\left(y'\right)^2$ по сравнению с единицей можно пренебречь. Тогда, приравнивая правые части формул (6) и (7), получим приближенное дифференциальное уравнение оси искривленного стержня при тепловом воздействии

$$y'' = \mp \alpha \Delta t'. \tag{8}$$

Знак правой части (8) определяется знаком кривизны оси искривленного стержня в принятой системе координат для её изображения и зависит от того, какое волокно стержня подвергается воздействию более высокой температуры.

Уравнение (8) решается методом непосредственного интегрирования.

Проинтегрировав дважды по *x*, получим выражение для углов поворота сечений:

$$y' = \mp \alpha \Delta t' x + C_1 \tag{9}$$

и выражение для прогибов сечений:

$$y = \mp \alpha \Delta t' \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2. \tag{10}$$

Полученные формулы (9), (10) позволяют определять прогибы и углы поворота в статически определимых балках при тепловом воздействии, так как в них при таком воздействии не возникают внутренние усилия.

С целью проверки правильности полученных формул покажем их применение к определению прогибов и углов поворота сечений простой шарнирно опертой балки.

Для определения произвольных постоянных C_1 и C_2 используем граничные условия задачи:

$$y(0) = 0 \tag{11}$$

и

$$y(l) = 0. \tag{12}$$

Тогда, используя условие (11), получим

$$C_2 = 0,$$

а с помощью условия (12) найдем

$$C_1 = \alpha \Delta t' \frac{l}{2}.$$

Подставляя найденные произвольные постоянные в (9), (10), получим выражения для прогибов

$$y = -\frac{\alpha\Delta t'}{2}\left(x^2 - lx\right) \tag{13}$$

и углов поворота

$$y' = -\frac{\alpha\Delta t'}{2}\left(2x - l\right) \tag{14}$$

простой шарнирно опертой балки, возникающих при её тепловом искривлении.

Используя (13), найдем прогиб балки

$$y\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{1}{8}\alpha\Delta t' l^2 ,$$

а используя (14), – угол поворота левого опорного сечения балки

$$y'(0) = \frac{1}{2}\alpha\Delta t' l .$$

Полученные значения совпадают со значениями температурных перемещений, приведенными в учебной и специальной литературе по расчету конструкций на тепловые воздействия [1–3], и значениями, найденными иными способами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рабинович, И.М. Курс строительной механики / И.М. Рабинович. – М.: Стройиздат, 1954. – Ч. 2: Статически неопределимые системы. – 543 с.
2. Справочник проектировщика промышленных, жилых и общественных зданий и сооружений. Расчетно-теоретический. – М.: Стройиздат, 1960. – 1039 с.
3. Бажажнов, В.Л. Расчет конструкций на тепловые воздействия / В.Л. Бажажнов. – М.: Машиностроение, 1969. – 599 с.

УДК 624.072

ДЕФОРМАЦИОННЫЙ РАСЧЕТ СЖАТО-ИЗОГНУТОГО СТЕРЖНЯ ПРИ СОВМЕСТНОМ ПРИЛОЖЕНИИ ТЕПЛОВОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ И НАГРУЗКИ

Е.А. ВОЛКОВА
(Представлено: канд. техн. наук, доц. Л.С. ТУРИЩЕВ)

Представлено дифференциальное уравнение оси сжато-изогнутого стержня с произвольными закреплениями концов при совместном приложении теплового воздействия и нагрузки. Показано применение полученного уравнения для деформационного расчета балки с шарнирным опиранием концов.

Обычно принято расчет конструкций на действие нагрузки и температуры производить раздельно, а затем найденные параметры напряженно-деформированного состояния (НДС) согласно принципу суперпозиции складывать. Но такой подход справедлив только для линейно деформируемых систем. В случае же гибких конструкций необходим учет геометрической нелинейности и выполнение деформационного расчета конструкции.

Наиболее глубоко и детально изучены вопросы деформационного расчета гибких сжато-изогнутых стержней на действие нагрузки. Здесь можно отметить работы [1–3]. Однако приводимые в этих работах дифференциальные уравнения, лежащие в основе деформационного расчета сжато-изогнутых стержней, не учитывают влияние теплового воздействия на изменение параметров НДС вследствие учета геометрической нелинейности.

Рассмотрим деформационный расчет прямолинейного упругого стержня симметричного постоянного поперечного сечения с произвольными закреплениями концов, ограничивающих полностью или частично все перемещения концевых сечений. Стержень подвергается действию продольной силы N, произвольной поперечной нагрузки P и тепловому воздействию t (рис. 1).