

Подставляя найденные произвольные постоянные в (9), (10), получим выражения для прогибов

$$y = -\frac{\alpha \Delta t'}{2}(x^2 - lx) \quad (13)$$

и углов поворота

$$y' = -\frac{\alpha \Delta t'}{2}(2x - l) \quad (14)$$

простой шарнирно опертой балки, возникающих при её тепловом искривлении.

Используя (13), найдем прогиб балки

$$y\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{1}{8}\alpha \Delta t' l^2,$$

а используя (14), – угол поворота левого опорного сечения балки

$$y'(0) = \frac{1}{2}\alpha \Delta t' l.$$

Полученные значения совпадают со значениями температурных перемещений, приведенными в учебной и специальной литературе по расчету конструкций на тепловые воздействия [1–3], и значениями, найденными иными способами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рабинович, И.М. Курс строительной механики / И.М. Рабинович. – М.: Стройиздат, 1954. – Ч. 2: Статически неопределимые системы. – 543 с.
2. Справочник проектировщика промышленных, жилых и общественных зданий и сооружений. Расчетно-теоретический. – М.: Стройиздат, 1960. – 1039 с.
3. Бажажнов, В.Л. Расчет конструкций на тепловые воздействия / В.Л. Бажажнов. – М.: Машиностроение, 1969. – 599 с.

УДК 624.072

ДЕФОРМАЦИОННЫЙ РАСЧЕТ СЖАТО-ИЗОГНУТОГО СТЕРЖНЯ ПРИ СОВМЕСТНОМ ПРИЛОЖЕНИИ ТЕПЛООВОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ И НАГРУЗКИ

Е.А. ВОЛКОВА

(Представлено: канд. техн. наук, доц. Л.С. ТУРИЩЕВ)

Представлено дифференциальное уравнение оси сжато-изогнутого стержня с произвольными закреплениями концов при совместном приложении теплового воздействия и нагрузки. Показано применение полученного уравнения для деформационного расчета балки с шарнирным опиранием концов.

Обычно принято расчет конструкций на действие нагрузки и температуры производить раздельно, а затем найденные параметры напряженно-деформированного состояния (НДС) согласно принципу суперпозиции складывать. Но такой подход справедлив только для линейно деформируемых систем. В случае же гибких конструкций необходим учет геометрической нелинейности и выполнение деформационного расчета конструкции.

Наиболее глубоко и детально изучены вопросы деформационного расчета гибких сжато-изогнутых стержней на действие нагрузки. Здесь можно отметить работы [1–3]. Однако приводимые в этих работах дифференциальные уравнения, лежащие в основе деформационного расчета сжато-изогнутых стержней, не учитывают влияние теплового воздействия на изменение параметров НДС вследствие учета геометрической нелинейности.

Рассмотрим деформационный расчет прямолинейного упругого стержня симметричного постоянного поперечного сечения с произвольными закреплениями концов, ограничивающих полностью или частично все перемещения концевых сечений. Стержень подвергается действию продольной силы N , произвольной поперечной нагрузки P и тепловому воздействию t (рис. 1).

Тепловое воздействие характеризуется двумя независимыми величинами – приращением внутренней температуры Δt_e и приращением наружной температуры Δt_n , а также зависимой от них величиной – приращением температуры на оси стержня Δt_o . Внутренней температурой считается более высокая температура. Скорость изменения приращения температуры по высоте поперечного сечения h определяется по формуле

$$\Delta t' = \frac{\Delta t_e - \Delta t_n}{h}.$$

Напряженно-деформированное состояние стержня в произвольном сечении характеризуется прогибом $y(x)$, углом поворота сечения $y'(x)$, изгибающим моментом $M(x)$, поперечной силой $Q(x)$ и постоянной продольной силой N . В начале координат НДС стержня характеризуется начальными параметрами y_0, y'_0, M_0, Q_0 и зависит от условий закрепления сечения в этом месте.

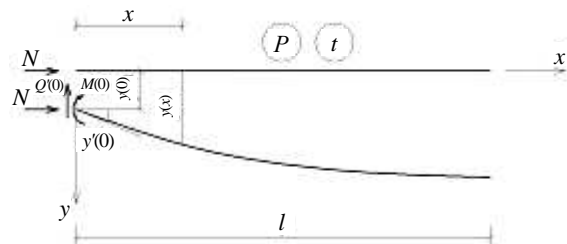


Рис. 1. Сжато-изогнутый стержень

Как было показано ранее*, кривизна искривления стержня, вызванного тепловым воздействием, описывается выражением

$$\left(\frac{1}{\rho}\right)_T = -\alpha \Delta t'. \quad (1)$$

Кривизна изгиба, порождаемого действием нагрузки, описывается известным из сопротивления материалов выражением

$$\left(\frac{1}{\rho}\right)_P = \pm \frac{M}{EI}, \quad (2)$$

где E – модуль упругости конструкционного материала стержня; I – момент инерции поперечного сечения стержня относительно оси, перпендикулярной плоскости изгиба; M – изгибающий момент, возникающий в произвольном сечении.

Тогда кривизна стержня при совместном действии температуры и нагрузки получится сложением (1) и (2) и с учетом правил знаков в координатной системе, показанной на рисунке 1, имеет вид

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{M}{EI} - \alpha \Delta t'. \quad (3)$$

Величина момента с учетом продольной силы описывается выражением

$$M(x) = M(0) + Q(0)x + N[y - y(0)] + M_P, \quad (4)$$

где M_P – изгибающий момент, возникающий в произвольном сечении от действия поперечной нагрузки.

Подставляя в левую часть (3) приближенное выражение для кривизны линии, получим дифференциальное уравнение сжато-изогнутого стержня при совместном приложении нагрузки и теплового воздействия

$$y'' + k^2 y = -\frac{M(0) + Q(0)x - Ny(0) + M_P}{EI} - \alpha \Delta t', \quad (5)$$

где $k^2 = \frac{N}{EI}$.

* см. ст. Волкова Е.А. Дифференциальное уравнение оси искривленного стержня при тепловом воздействии, с. 113–115 в настоящем сборнике.

Полученное уравнение (5) является обыкновенным неоднородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами и его решение имеет вид

$$y = y_1 + y_2.$$

Здесь

$$y_1 = A \sin(kx) + B \cos(kx)$$

есть общее решение однородного дифференциального уравнения, получаемого из (5), а

$$y_2 = -\frac{M(0) + Q(0)x - Ny(0) + M_p + EI\alpha\Delta t'}{k^2 EI}$$

является частным решением уравнения (5).

Выражая произвольные постоянные через начальные параметры, получим следующее решение уравнения (5):

$$y = y(0) + \frac{y'(0)}{k} \sin kx - \frac{M(0) + M_p + EI\alpha\Delta t'}{k^2 EI} (1 - \cos kx) - \frac{Q(0)}{k^3 EI} (kx - \sin kx). \quad (6)$$

Полученное решение описывает прогибы, возникающие в стержне.

Продифференцировав (6) один раз по x , получим выражение для углов поворота сечений:

$$y' = y'(0) \cos kx - \frac{M(0) + M_p + EI\alpha\Delta t'}{kEI} \sin kx - \frac{Q(0)}{k^2 EI} (1 - \cos kx). \quad (7)$$

Покажем применение полученных формул (6), (7) для деформационного расчета сжато-изогнутого стержня с конкретной схемой опирания и определения параметров НДС.

Рассмотрим простую шарнирно опертую балку при совместном действии температуры, продольной силы N и поперечной силы P , приложенной в середине пролёта. Схема балки в деформированном состоянии показана на рисунке 2.

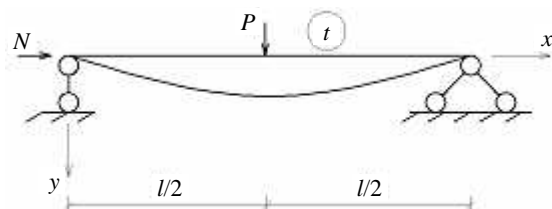


Рис. 2. Схема балки в деформированном состоянии

В соответствии с условиями закрепления балки в начале координат начальные параметры характеризуются следующими значениями:

$$y_0 = 0, y'_0 \neq 0, M_0 = 0, Q_0 = \frac{P}{2}. \quad (8)$$

С учётом (8) выражение для прогибов (6) примет вид

$$y = \frac{y'(0)}{k} \sin kx - \frac{\alpha\Delta t'}{k^2} (1 - \cos kx) - \frac{P}{2k^3 EI} (kx - \sin kx). \quad (9)$$

Из условий закрепления балки на правом конце ($x = l$) следует, что прогиб на этом конце равен нулю $y(l) = 0$.

Таким образом, имеем

$$y'(0) = \frac{P}{2EI} \frac{kl - \sin kl}{k^2 \sin kl} + \alpha\Delta t' \frac{(1 - \cos kl)}{k \sin kl}. \quad (10)$$

С учётом (10)...(18) прогибы простой шарнирной балки будут описываться выражением

$$y = \frac{Pl^3}{2EI} \frac{1}{v^3} \left[\frac{v - \sin v}{\sin v} \sin v\xi - (v\xi - \sin v\xi) \right] + \Delta t' l^2 \frac{1}{v^2} \left[\frac{1 - \cos v}{\sin v} \sin v\xi - (1 - \cos v\xi) \right], \quad (11)$$

а выражение для изгибающих моментов имеет вид

$$M = \frac{Pl}{2} \left\{ \xi + \frac{1}{v} \left[\frac{v - \sin v}{\sin v} \sin v\xi - (v\xi - \sin v\xi) \right] + \frac{2EI\alpha\Delta t'}{Pl} \left[\frac{1 - \cos v}{\sin v} \sin v\xi - (1 - \cos v\xi) \right] \right\}. \quad (12)$$

Выражения (11) и (12) записаны с использованием безразмерного параметра продольной силы $v = kl$ и безразмерной абсциссы сечения $\xi = \frac{x}{l}$.

Полагая в (11) $x = 0,5l$, найдем для балки максимальный прогиб при совместном действии температуры, продольной силы N и поперечной силы P

$$y_{\max} = y_{\max}^P \left[24F_1(v) + \frac{48}{\pi^2} \alpha\beta \frac{\Delta t}{\rho} F_2(v) \right], \quad (13)$$

где $y_{\max}^P = \frac{Pl^3}{48EI}$ – максимальный прогиб от действия поперечной силы P ; $\beta = \frac{l}{h}$ – параметр, учитывающий отношение пролета к высоте поперечного сечения балки; $\Delta t = \Delta t_g - \Delta t_n$ – параметр теплового воздействия; $\rho = \frac{P}{N_{kp}}$ – параметр уровня нагружения балки поперечной нагрузкой в долях от критической нагрузки балки $N_{kp} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$.

Входящие в (13) функции $F_1(v)$ и $F_2(v)$ учитывают влияние продольной силы и имеют вид

$$F_1(v) = \frac{1}{v^3} \left(\frac{v - \sin v}{2 \cos \frac{v}{2}} - \left(\frac{v}{2} - \sin \frac{v}{2} \right) \right);$$

$$F_2(v) = \frac{1}{v^2} \left(\frac{1 - \cos v}{2 \cos \frac{v}{2}} - \left(1 - \cos \frac{v}{2} \right) \right).$$

Полагая в (12) $x = 0,5l$, найдем для балки максимальный момент при совместном действии температуры, продольной силы N и поперечной силы P

$$M_{\max} = M_{\max}^P \left\{ 1 + v^2 \left[12F_1(v) + \frac{4}{\pi^2} \alpha\beta \frac{\Delta t}{\rho} F_2(v) \right] \right\},$$

где $M_{\max}^P = \frac{Pl}{4}$ – максимальный прогиб от действия поперечной силы P .

ЛИТЕРАТУРА

1. Корноухов, Н.В. Прочность и устойчивость стержневых систем / Н.В. Корноухов. – М.: Стройиздат, 1949. – 375 с.
2. Лейтес, С.Д. Устойчивость сжатых стальных стержней / С.Д. Лейтес. – М.: Стройиздат, 1954. – 307 с.
3. Пиковский, А.А. Статика стержневых систем со сжатыми элементами / А.А. Пиковский. – М.: Физматгиз, 1961. – 394 с.