2. Пособие по проектированию фундаментов на естественном основании под колонны зданий и сооружений (к СНиП 2.03.01-84 и СНиП 2.02.01-83).
3. Далматов, Б.И. Фундаменты зданий на слабых грунтах / Б.И. Долматов // Труды VII Дунайско-Европейской конф. по механике грунтов и фундаментостроению. – Кишинев, 1983.
4. Далматов, Б.И. Проектирование и устройство фундаментов около существующих зданий / Б.И. Долматов. – Л: ЛДНТП, 1973.
5. Ежов, Е.Ф. Исследование дополнительных осадок фундаментов сооружений при устройстве около них ограждающих шпунтовых стенок: автореф. дис. … канд. техн. наук / Е.Ф. Ежов. – Л., 1980.

УДК 624.012.45

РАСЧЕТ БАЛКИ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ НА УПРУГОМ ВИНКЛЕРОВСКОМ ОСНОВАНИИ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

А.И. ЛЯСКОВСКИЙ
(Представлено: канд. техн. наук, доц. В.Н. КИСЕЛЕВ)

Рассматривается расчет балки конечной длины на упругом Винклеровском основании методом конечных элементов. Получены функции для определения внутренних усилий, а также функции для угла поворота и прогиба балки.

Для решения поставленной задачи необходимы следующие исходные данные:

- длина балки составляет некоторую величину $L, (\text{м})$;
- модуль упругости материала балки равен $E, (\text{МПа})$;
- момент инерции поперечного сечения балки $I_x, (\text{см}^4)$;
- ширина подошвы балки, по которой происходит контакт с основанием $b, (\text{см})$;
- коэффициент постели упругого основания $c, (N / \text{м}^3)$.

К балке в качестве внешнего воздействия могут быть приложены:

- сосредоточенные силы F_k. Каждая из них характеризуется индексом k, величиной и координатой точки приложения a_k;
- сосредоточенные изгибающие моменты $м_i$. Каждый из них характеризуется индексом i, величиной и координатой точки приложения c_i;
- распределённые нагрузки q_e. Каждая из них характеризуется индексом e, величиной, координатой точки начала их приложения $н_k$ и координатой точки конца их приложения $к_к$.

Начало координат поместим в крайнюю левую точку балки. Ось Z направим вправо вдоль балки, ось Y направим вверх.

Разобьём по длине нашу балку на некоторое количество элементов. Эту величины назовём как «точность». То есть если «точность» = 100, то балка разбита на 100 участков (конечных элементов). Каждому элементу присвоим свой порядковый номер (индекс j). При этом. $j := 0,1..$*точность*.

Каждый из конечных элементов балки получит свою координату по оси Z. И каждый из этих элементов опирается на жёсткую пружину.

Жёсткость основания:

$$\alpha := c \cdot b. \tag{1}$$

Введем обозначение:

$$L_{eq} = \left(\frac{4EI_x}{\alpha} \right)^{\frac{1}{4}}. \tag{2}$$

В решении воспользуемся функциями:

$$\begin{gathered} Y_1(z) := \cosh(z) \cdot cos(z); \\ Y_2(z) := 0,5 \cdot (\cosh(z) \cdot \sin(z) + \sinh(z) \cdot \cos(z)); \\ Y_3(z) := 0,5 \cdot \sinh(z) \cdot \sin(z); \\ Y_4(z) := 0,25 \cdot (\cosh(z) \cdot \sin(z) - \sinh(z) \cdot \cos(z)). \end{gathered} \tag{3}$$

Функция прогиба балки запишется в виде

$$\begin{aligned}E\cdot I_x\cdot\omega(z) :=\; & E\cdot I_x\cdot\omega_0\cdot Y_1\left(\frac{z}{L_{eq}}\right) + E\cdot I_x\cdot\Theta_0\cdot L_{eq}\cdot Y_2\left(\frac{z}{L_{eq}}\right) + M_0\cdot L_{eq}{}^2\cdot Y_3\left(\frac{z}{L_{eq}}\right) + Q_0\cdot L_{eq}{}^3\cdot Y_4\left(\frac{z}{L_{eq}}\right) \ldots \\ & + L_{eq}{}^2\cdot\sum_i\left(\left|\begin{array}{l}\text{ì}_i\cdot Y_3\left(\dfrac{z-\text{ñ}_i}{L_{eq}}\right)\\ 0 \text{ if } \text{ñ}_i > z\end{array}\right.\right) + L_{eq}{}^3\cdot\left[\sum_k\left(\left|\begin{array}{l}F_k\cdot Y_4\left(\dfrac{z-a_k}{L_{eq}}\right)\\ 0 \text{ if } a_k > z\end{array}\right.\right)\right] \ldots \\ & + \frac{-L_{eq}{}^4}{4}\cdot\left[\sum_e\left[q_e\cdot\left[Y_1\left[\frac{z-\left(\left|\begin{array}{l}\text{í}_e\\ z \text{ if } \text{í}_e > z\end{array}\right.\right)}{L_{eq}}\right]-1\right]\right]\right] + \frac{L_{eq}{}^4}{4}\cdot\left[\sum_e\left[q_e\cdot\left[Y_1\left[\frac{z-\left(\left|\begin{array}{l}\text{ê}_e\\ z \text{ if } \text{ê}_e > z\end{array}\right.\right)}{L_{eq}}\right]-1\right]\right]\right]\end{aligned} \tag{4}$$

Функция угла поворота сечений балки запишется в следующем виде:

$$\begin{aligned}E\cdot I_x\cdot\Theta(z) :=\; & \frac{-4}{L_{eq}}E\cdot I_x\cdot\omega_0\cdot Y_4\left(\frac{z}{L_{eq}}\right) + E\cdot I_x\cdot\Theta_0\cdot Y_1\left(\frac{z}{L_{eq}}\right) + M_0\cdot L_{eq}\cdot Y_2\left(\frac{z}{L_{eq}}\right) + Q_0\cdot L_{eq}{}^2\cdot Y_3\left(\frac{z}{L_{eq}}\right) \ldots \\ & + L_{eq}\cdot\left[\sum_i\left(\left|\begin{array}{l}\text{ì}_i\cdot Y_2\left(\dfrac{z-\text{ñ}_i}{L_{eq}}\right)\\ 0 \text{ if } \text{ñ}_i > z\end{array}\right.\right)\right] + L_{eq}{}^2\cdot\left[\sum_k\left(\left|\begin{array}{l}F_k\cdot Y_3\left(\dfrac{z-a_k}{L_{eq}}\right)\\ 0 \text{ if } a_k > z\end{array}\right.\right)\right] \ldots \\ & + \left[L_{eq}{}^3\cdot\left[\sum_e\left[q_e\cdot Y_4\left[\frac{z-\left(\left|\begin{array}{l}\text{í}_e\\ z \text{ if } \text{í}_e > z\end{array}\right.\right)}{L_{eq}}\right]\right]\right] - L_{eq}{}^3\cdot\left[\sum_e\left[q_e\cdot Y_4\left[\frac{z-\left(\left|\begin{array}{l}\text{ê}_e\\ z \text{ if } \text{ê}_e > z\end{array}\right.\right)}{L_{eq}}\right]\right]\right]\right]\end{aligned} \tag{5}$$

Функция изгибающих моментов в сечениях балки запишется в виде:

$$\begin{aligned}M(z) :=\; & \frac{-4}{L_{eq}{}^2}E\cdot I_x\cdot\omega_0\cdot Y_3\left(\frac{z}{L_{eq}}\right) - \frac{4}{L_{eq}}E\cdot I_x\cdot\Theta_0\cdot Y_4\left(\frac{z}{L_{eq}}\right) + M_0\cdot Y_1\left(\frac{z}{L_{eq}}\right) + Q_0\cdot L_{eq}\cdot Y_2\left(\frac{z}{L_{eq}}\right) \ldots \\ & + \left[\sum_i\left(\left|\begin{array}{l}\text{ì}_i\cdot Y_1\left(\dfrac{z-\text{ñ}_i}{L_{eq}}\right)\\ 0 \text{ if } \text{ñ}_i > z\end{array}\right.\right)\right] + L_{eq}\cdot\left[\sum_k\left(\left|\begin{array}{l}F_k\cdot Y_2\left(\dfrac{z-a_k}{L_{eq}}\right)\\ 0 \text{ if } a_k > z\end{array}\right.\right)\right] \ldots \\ & + \left[L_{eq}{}^2\cdot\left[\sum_e\left[q_e\cdot Y_3\left[\frac{z-\left(\left|\begin{array}{l}\text{í}_e\\ z \text{ if } \text{í}_e > z\end{array}\right.\right)}{L_{eq}}\right]\right]\right] - L_{eq}{}^2\cdot\left[\sum_e\left[q_e\cdot Y_3\left[\frac{z-\left(\left|\begin{array}{l}\text{ê}_e\\ z \text{ if } \text{ê}_e > z\end{array}\right.\right)}{L_{eq}}\right]\right]\right]\right]\end{aligned} \tag{6}$$

Функция поперечных сил:

$$\begin{aligned}Q(z) :=\; & \frac{-4}{L_{eq}{}^3}E\cdot I_x\cdot\omega_0\cdot Y_2\left(\frac{z}{L_{eq}}\right) - \frac{4}{L_{eq}{}^2}E\cdot I_x\cdot\Theta_0\cdot Y_3\left(\frac{z}{L_{eq}}\right) - \frac{4}{L_{eq}}M_0\cdot Y_4\left(\frac{z}{L_{eq}}\right) + Q_0\cdot Y_1\left(\frac{z}{L_{eq}}\right) \ldots \\ & + 0 - \frac{4}{L_{eq}}\cdot\left[\sum_i\left(\left|\begin{array}{l}\text{ì}_i\cdot Y_4\left(\dfrac{z-\text{ñ}_i}{L_{eq}}\right)\\ 0 \text{ if } \text{ñ}_i > z\end{array}\right.\right)\right] + \left[\sum_k\left(\left|\begin{array}{l}F_k\cdot Y_1\left(\dfrac{z-a_k}{L_{eq}}\right)\\ 0 \text{ if } a_k > z\end{array}\right.\right)\right] \ldots \\ & + \left[L_{eq}\cdot\left[\sum_e\left[q_e\cdot Y_2\left[\frac{z-\left(\left|\begin{array}{l}\text{í}_e\\ z \text{ if } \text{í}_e > z\end{array}\right.\right)}{L_{eq}}\right]\right]\right] - L_{eq}\cdot\left[\sum_e\left[q_e\cdot Y_2\left[\frac{z-\left(\left|\begin{array}{l}\text{ê}_e\\ z \text{ if } \text{ê}_e > z\end{array}\right.\right)}{L_{eq}}\right]\right]\right]\right]\end{aligned} \tag{7}$$

Так как концы балки свободны от закреплений, то мы имеем следующие граничные условия:

$$M(0)=0\,;\;\; Q(0)=0. \qquad\qquad M(L)=0\,;\;\;\; Q(L)=0.$$

Матрица коэффициентов при неизвестных:

$$A := \begin{bmatrix} \frac{-4}{L_{eq}^{3}} E\cdot I_x\cdot Y_2\left(\frac{0}{L_{eq}}\right)\cdot\left(\frac{m}{kN}\right) & -\left(\frac{4}{L_{eq}^{2}} E\cdot I_x\cdot Y_3\left(\frac{0}{L_{eq}}\right)\right)\cdot\left(\frac{1}{kN}\right) & \frac{4}{-L_{eq}}\cdot Y_4\left(\frac{0}{L_{eq}}\right)\cdot(m) & Y_1\left(\frac{0}{L_{eq}}\right) \\ \frac{-4}{L_{eq}^{2}} E\cdot I_x\cdot Y_3\left(\frac{0}{L_{eq}}\right)\cdot\left(\frac{1}{kN}\right) & -\left(\frac{4}{L_{eq}} E\cdot I_x\cdot Y_4\left(\frac{0}{L_{eq}}\right)\right)\cdot\left(\frac{1}{kN\cdot m}\right) & Y_1\left(\frac{L}{L_{eq}}\right) & L_{eq}\cdot Y_2\left(\frac{0}{L_{eq}}\right)\cdot\left(\frac{1}{m}\right) \\ \frac{-4}{L_{eq}^{3}} E\cdot I_x\cdot Y_2\left(\frac{L}{L_{eq}}\right)\cdot\left(\frac{m}{kN}\right) & -\left(\frac{4}{L_{eq}^{2}} E\cdot I_x\cdot Y_3\left(\frac{L}{L_{eq}}\right)\right)\cdot\left(\frac{1}{kN}\right) & -\left(\frac{4}{L_{eq}}\cdot Y_4\left(\frac{L}{L_{eq}}\right)\right)\cdot(m) & Y_1\left(\frac{L}{L_{eq}}\right) \\ \frac{-4}{L_{eq}^{2}} E\cdot I_x\cdot Y_3\left(\frac{L}{L_{eq}}\right)\cdot\left(\frac{1}{kN}\right) & -\left(\frac{4}{L_{eq}} E\cdot I_x\cdot Y_4\left(\frac{L}{L_{eq}}\right)\right)\cdot\left(\frac{1}{kN\cdot m}\right) & Y_1\left(\frac{L}{L_{eq}}\right) & L_{eq}\cdot Y_2\left(\frac{L}{L_{eq}}\right)\cdot\left(\frac{1}{m}\right) \end{bmatrix} \tag{8}$$

Вектор свободных членов:

$$B := \begin{bmatrix} \dfrac{-\left[-\left[\frac{4}{L_{eq}}\cdot\left[\sum_i \left(\left|\begin{matrix} \text{ì}_i\cdot Y_4\left(\frac{0-\text{ñ}_i}{L_{eq}}\right) \\ 0 \text{ if } \text{ñ}_i > 0 \end{matrix}\right.\right)\right]\right] + \left[\sum_k \left(\left|\begin{matrix} F_k\cdot Y_1\left(\frac{0-a_k}{L_{eq}}\right) \\ 0 \text{ if } a_k > 0 \end{matrix}\right.\right)\right] \ldots + L_{eq}\cdot\sum_e \left[q_e\cdot Y_2\left[\frac{0-\left(\left|\begin{matrix}\text{í}_e \\ 0 \text{ if } \text{í}_e > 0\end{matrix}\right.\right)}{L_{eq}}\right]\right] - L_{eq}\cdot\sum_e \left[q_e\cdot Y_2\left[\frac{0-\left(\left|\begin{matrix}\text{ê}_e \\ 0 \text{ if } \text{ê}_e > 0\end{matrix}\right.\right)}{L_{eq}}\right]\right]\right]}{kN} \\ \dfrac{-\left[-\left[\sum_i \left(\left|\begin{matrix} \text{ì}_i\cdot Y_1\left(\frac{0-\text{ñ}_i}{L_{eq}}\right) \\ 0 \text{ if } \text{ñ}_i > 0 \end{matrix}\right.\right)\right] + L_{eq}\cdot\left[\sum_k \left(\left|\begin{matrix} F_k\cdot Y_2\left(\frac{0-a_k}{L_{eq}}\right) \\ 0 \text{ if } a_k > 0 \end{matrix}\right.\right)\right] \ldots + L_{eq}^{2}\cdot\sum_e \left[q_e\cdot Y_3\left[\frac{0-\left(\left|\begin{matrix}\text{í}_e \\ 0 \text{ if } \text{í}_e > 0\end{matrix}\right.\right)}{L_{eq}}\right]\right] - L_{eq}^{2}\cdot\sum_e \left[q_e\cdot Y_3\left[\frac{0-\left(\left|\begin{matrix}\text{ê}_e \\ 0 \text{ if } \text{ê}_e > 0\end{matrix}\right.\right)}{L_{eq}}\right]\right]\right]}{kN\cdot m} \\ \dfrac{-\left[\frac{4}{-L_{eq}}\cdot\left[\sum_i \left(\left|\begin{matrix} \text{ì}_i\cdot Y_4\left(\frac{L-\text{ñ}_i}{L_{eq}}\right) \\ 0 \text{ if } \text{ñ}_i > L \end{matrix}\right.\right)\right] + \left[\sum_k \left(\left|\begin{matrix} F_k\cdot Y_1\left(\frac{L-a_k}{L_{eq}}\right) \\ 0 \text{ if } a_k > L \end{matrix}\right.\right)\right] \ldots + L_{eq}\cdot\left[\sum_e \left[q_e\cdot Y_2\left[\frac{L-\left(\left|\begin{matrix}\text{í}_e \\ L \text{ if } \text{í}_e > L\end{matrix}\right.\right)}{L_{eq}}\right]\right]\right] - L_{eq}\cdot\left[\sum_e \left[q_e\cdot Y_2\left[\frac{L-\left(\left|\begin{matrix}\text{ê}_e \\ L \text{ if } \text{ê}_e > L\end{matrix}\right.\right)}{L_{eq}}\right]\right]\right]\right]}{kN} \\ \dfrac{-\left[\left[\sum_i \left(\left|\begin{matrix} \text{ì}_i\cdot Y_1\left(\frac{L-\text{ñ}_i}{L_{eq}}\right) \\ 0 \text{ if } \text{ñ}_i > L \end{matrix}\right.\right)\right] + L_{eq}\cdot\left[\sum_k \left(\left|\begin{matrix} F_k\cdot Y_2\left(\frac{L-a_k}{L_{eq}}\right) \\ 0 \text{ if } a_k > L \end{matrix}\right.\right)\right] \ldots + L_{eq}^{2}\cdot\left[\sum_e \left[q_e\cdot Y_3\left[\frac{L-\left(\left|\begin{matrix}\text{í}_e \\ L \text{ if } \text{í}_e > L\end{matrix}\right.\right)}{L_{eq}}\right]\right]\right] - L_{eq}^{2}\cdot\left[\sum_e \left[q_e\cdot Y_3\left[\frac{L-\left(\left|\begin{matrix}\text{ê}_e \\ L \text{ if } \text{ê}_e > L\end{matrix}\right.\right)}{L_{eq}}\right]\right]\right]\right]}{kN\cdot m} \end{bmatrix} \tag{9}$$

Решением будет следующее выражение:

$$X := A^{-1}\cdot B, \tag{10}$$

где
$$\omega_0 := X_0\cdot m;\ \theta_0 := X_1;\ \ M_0 := X_2\cdot kN\cdot m;\ \ Q_0 := X_3\cdot kN. \tag{11}$$

Далее найденные значения подставляем в функцию (4).

Если на каком-либо (каких-либо) участке (участках) значения перемещений получили отрицательное значение, можно судить о том, что в координатах z должен произойти отрыв балки от упругого основания.

Найдём индексы j участков, на которых произошёл отрыв балки от основания:

$$o_j = if(\omega_j \le 0, j \leftarrow j, 0). \tag{12}$$

На этих участках жесткость основания примем стремящейся к 0.

Проведём первый цикл итерации.

Повторим расчёт по формулам (1)–(10). Найдём новые значения:

$$\omega_0 := X_0 \cdot m; \quad \theta_0 := X_1; \quad M_0 := X_2 \cdot kN \cdot m; \quad Q_0 := X_3 \cdot kN .$$

Найдём погрешность между их значениями.

Будем повторять цикл итерации (1)–(10) до тех пор, пока погрешность будет больше необходимой точности расчёта.

Численный пример решения задачи методом конечных элементов

Длина балки $L = 10$ м;

модуль упругости материала балки $E = 2 \cdot 10^5$ МПа;

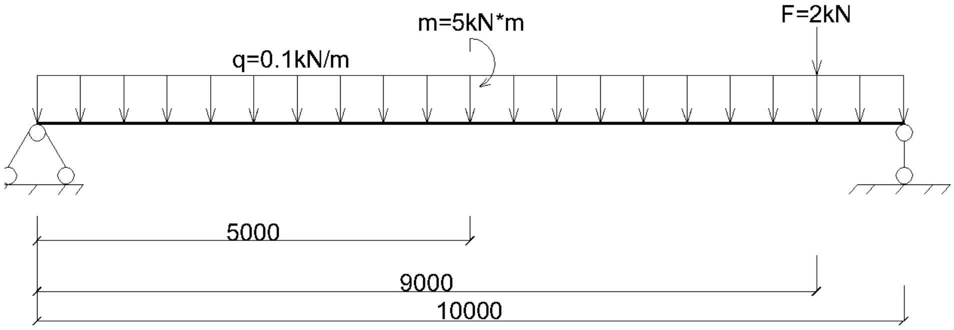
момент инерции сечения балки $I = 7780$ см^4;

ширина балки $b = 145$ мм;

жёсткость упругого основания $c = 1 \cdot 10^6\, N / м^3$.

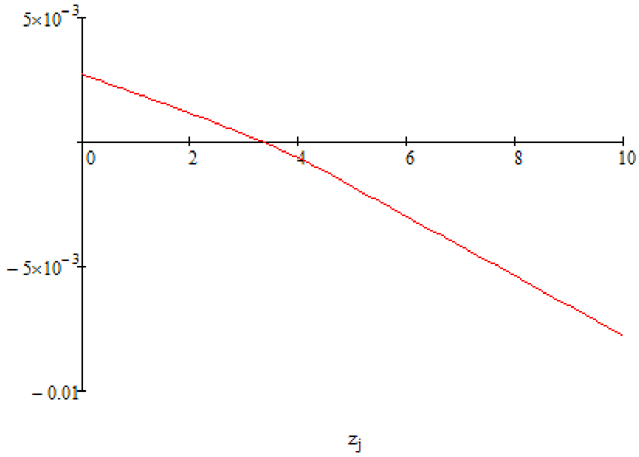
К балке приложены:

- сосредоточенный изгибающий момент $m = 5kN \cdot m$ в точке с координатой z = 5 м;
- сосредоточенная сила $F = 2kN$ (вниз) в точке с координатой z = 9 м;
- равномерно-распределённая нагрузка $q = 0{,}1kN / m$ (вниз) по все длине балки.

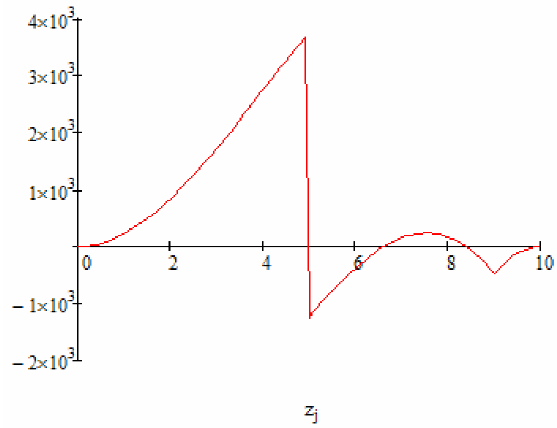


На первом этапе решения получены следующие результаты:

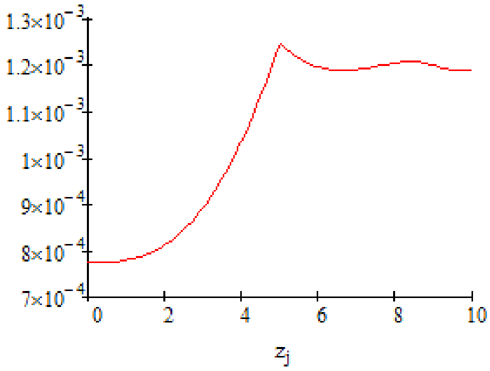
$$\theta_0 = 7{,}741 \cdot 10^{-4}; \quad \omega_0 = -2{,}721\, mm; \quad M_0 = 0kN \cdot m; \quad Q_0 = 0kN.$$



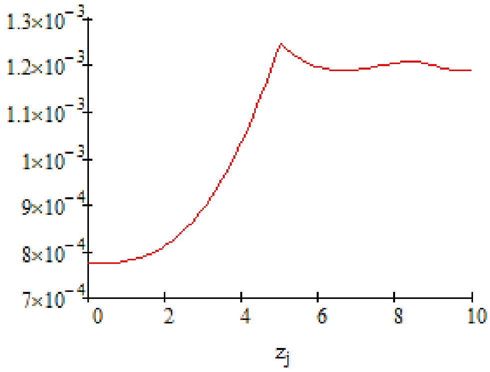
Эпюра прогибов (м)



Эпюра изгибающих моментов (кН·м)



Эпюра углов поворота сечения



Эпюра поперечных сил (кН)

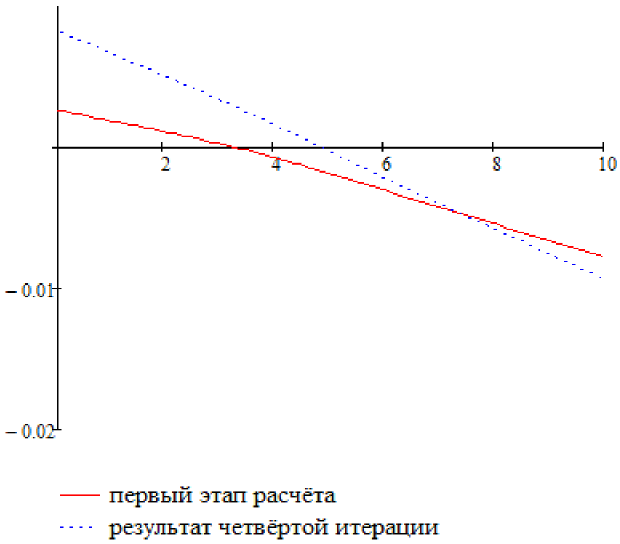
Проведя 4 цикла итерации, получили следующие результаты:

$$\Delta\theta := \frac{\theta_0-\theta 1_0}{\theta_0}\cdot 100 = -38,262 \qquad \Delta\omega := \frac{\omega_0-\omega 1_0}{\omega_0}\cdot 100 = -64,169$$

$$\Delta 1\theta := \frac{\theta 1_0-\theta 2_0}{\theta 1_0}\cdot 100 = -20,905 \qquad \Delta 1\omega := \frac{\omega 1_0-\omega 2_0}{\omega 1_0}\cdot 100 = -32,833$$

$$\Delta 2\theta := \frac{\theta 2_0-\theta 3_0}{\theta 2_0}\cdot 100 = -14,716 \qquad \Delta 2\omega := \frac{\omega 2_0-\omega 3_0}{\omega 2_0}\cdot 100 = -22,052$$

$$\Delta 3\theta := \frac{\theta 3_0-\theta 4_0}{\theta 3_0}\cdot 100 = -11,424 \qquad \Delta 3\omega := \frac{\omega 3_0-\omega 4_0}{\omega 3_0}\cdot 100 = -16,573$$



Эпюра прогибов (м)

Исходя из полученных результатов, можно сделать вывод, что предложенный метод за некоторое количество итерационных циклов позволяет получить результат с заданной точностью.

ЛИТЕРАТУРА

1. Афендульев, А.А. Применение метода сил при расчете балок на связном упругом основании / А.А. Афендульев, П.С. Скипский // Труды Г.И.С.И., 1956. – 25 с.
2. Афендульев, А.А. К вопросу расчета балок на упругом основании при односторонней связи» / А.А. Афендульев, П.С. Скипский // Труды Г.И.С.И., 1956. – 25 с.